ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»

на правах рукописи

Родин Александр Алексеевич

О Р-МНОЖЕСТВАХ АВТОМАТНЫХ ФУНКЦИЙ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА 2014

Работа выполнена на кафедре математической теории интеллектуальных систем Механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профильного образования "Московский государственного университет имени М.В. Ломоносова".

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Буевич Вячеслав Александрович**
Официальные оппоненты:	**Чечкин Александр Витальевич**, доктор физико-математических наук, профессор (ФГБОУ ВПО "Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации")
	Карташов Сергей Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент (ФГБОУ ВПО "Московский государственный университет приборостроения и информатики")
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО "Национальный исследовательский университет "МЭИ"

Защита диссертации состоится 30 мая 2014 г. в 16.45 на заседании диссертационного совета Д.501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", по адресу: Российская федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова"(Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8 этаж).

Автореферат разослан 30 апреля 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84, созданного
на базе ФГБОУ ВПО МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Одной из важных проблем, рассматриваемых в дискретной математике и математической кибернетике, является проблема полноты для функциональных систем. Функциональная система представляет собой множество функций и множество операций над этими функциями. Проблема полноты для функциональных систем состоит в описании всех таких подмножеств функций, используя которые с помощью операций функциональной системы можно выразить все принадлежащие ей функции.

С точки зрения алгебры, функциональные системы могут рассматриваться как вариант универсальных алгебр. Существенной особенностью функциональных систем, выделяющей их из общего класса универсальных алгебр, является содержательная связь функциональных систем с реальными кибернетическими моделями управляющих систем и отображение важнейших характеристик таких моделей: функционирования, правил построения более сложных систем из заданных, описания функционирования сложных систем по функционированию их компонент.

Центральное место среди функциональных систем принадлежит итеративным функциональным системам, представляющим собой множество дискретных функций с операциями итерации — суперпозиции, обратной связи, а также их модификаций[1,2]. В свою очередь, итеративные функциональные системы могут быть разделены на два типа: истинностные и последовательностные. В первом случае функции, принадлежащие функциональной системе, вычисляются без использования, а во втором — с использованием "памяти".

Важнейшим примером истинностных и последовательностных функциональных систем являются $k-$значная логика, с одной стороны, и функциональная система автоматных функций, с другой. Для $k-$значных логик (функциональная система P_k) основная проблема в теории итеративных функциональных систем — проблема полноты, была решена. В 1921 г. Э. Постом была полностью описана структура замкнутых классов в двузначной логике. Это описание, изложенное в виде монографии в 1941 году[3], по существу эквивалентно решению проблемы полноты для произвольных двузначных логик, в которых в качестве операций выступают операции суперпозиции. Для произвольного $k \geq 3$ усилиями многих авторов (С.В. Яблонский[4], А.В. Куз-

[1] Кудрявцев В.Б. Функциональные системы. М. Изд-во МГУ, 1982.

[2] Мальцев А.И. Итеративные алгебры Поста. Новосибирск, изд-во СО АН СССР, 1976.

[3] Post E. The two-valued iterative systems of mathematical Logic. Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.

[4] Яблонский С.В. Функциональные построения в $k-$значной логике. В кн. Труды матем. ин-та им. В.А.Стеклова т.51, изд-во АН СССР, 1958.

нецов[5], И. Розенберг[6], В.А. Буевич [7] и др.) в терминах сохранения отношений (предикатов) были последовательно в явном виде построены все предполные классы в P_k, образующие минимальную критериальную систему для распознавания полноты систем функций $k-$значной логики. Т.е., произвольное множество функций $k-$значной логики M является полным тогда и только тогда, когда M целиком не содержится ни в одном из предполных в P_k классов.

В наиболее общей постановке проблема полноты в классе автоматных отображений — ограниченно-детерминированных (о.-д.) функций, изучалась в работах В.Б. Кудрявцева и М.И. Кратко.

Пусть $k \geq 2$ и P^k — множество всех о.-д. функций, переменные которых принимают значения на множестве бесконечных последовательностей, составленных из букв алфавита $E_k = \{0, 1, ..., k-1\}$. На множестве P^k определены две операции — операции суперпозиции и операция обратной связи. В работе[8] были рассмотрены две функциональные системы:

1. Функциональная система "суперпозиция" $(P^k)_\Sigma$;
2. Функциональная система "композиция" $(P^k)_K$.

Множество функций, определяемых в функциональных системах $(P^k)_\Sigma$ и $(P^k)_K$, совпадает с множеством P^k. Операциями в $(P^k)_K$ являются операции суперпозиции и обратной связи, а в $(P^k)_\Sigma$ — только операции суперпозиции.

При исследовании задачи о полноте в итеративных функциональных системах существуют два подхода — алгебраический и алгоритмический. Алгебраический подход связан с изучением структуры замкнутых классов в исследуемой функциональной системе, в частности, с описанием множества предполных классов и с построением критериальной системы, а алгоритмический — с решением вопроса о существовании алгоритма для распознавания полноты конечных систем. Как отмечено выше, в k-значной логике множество предполных классов является критериальной системой и из возможности его эффективного описания следует и существование алгоритма для распознавания полноты конечных систем.

При изучении проблемы полноты в $(P^k)_\Sigma$ и $(P^k)_K$ фундаментальный результат был получен В.Б. Кудрявцевым. Известно, что функциональная система $(P^k)_K$ является конечнопорожденной и, также как в $k-$значных логиках, множество всех предполных классов образует минимальную критери-

[5] Кузнецов А.В. Математика в СССР за 40 лет. М., 1959, т.1, §13, с.102-115.

[6] Rosenberg J. La structure des fonctions de plusiers variables sur un ensemble fini. Comptes Rendus Acad. Sei. Paris, 1965 №260, с.3817-3819.

[7] Буевич В.А. Вариант доказательства критерия полноты для функций k-значной логики, Дискретная математика, 1996, 8, выпуск 4.

[8] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

альную систему. Отсюда следует, что в принципе критерий полноты в $(P^k)_K$ может быть сформулирован в терминах предполных классов. Однако, в 1963 году В.Б. Кудрявцев показал[9], что мощность множества предполных классов в $(P^k)_\Sigma$ и $(P^k)_K$ равна континууму, и, следовательно, алгебраический подход не дает эффективного критерия полноты. С этим согласуется результат М.И. Кратко, установившего[10] в 1964 году отсутствие алгоритма распознавания полноты конечных систем о.-д. функций.

Таким образом, возникает вопрос: всегда ли отсутствие эффективного критерия полноты с алгебраической точки зрения, т.е., например, континуальность минимальной критериальной системы, влечет за собой отсутствие алгоритма для распознавания полноты. В данной работе предпринимается попытка дать ответ на этот вопрос. Показано, в частности, что в $(P^2)_\Sigma$, несмотря на наличие континуальных критериальных систем, существуют алгоритмы для распознавания полноты некоторых множеств о.-д. функций.

Отрицательные, с точки зрения эффективности, результаты по проблеме полноты для о.-д. функций в общем случае привели к тому, что различные авторы[11,12,13,14,15,16,17] рассматривали некоторые модификации этой проблемы. Одни из них возникают на пути сужения класса систем, исследуемых на полноты, другие — на пути моделирования отдельных свойств о.-д. функций.

В предлагаемой диссертации вводятся и рассматриваются $P-$множества о.-д. функций (термин предложен В.Б. Кудрявцевым). Известно, что каждая о.-д. функция однозначно определяется своим множеством состояний $Q = \{q_1, \dots, q_m\}$, функцией перехода ϕ и множеством функций $k-$значной логики $F_1, \dots, F_m$, реализующихся в состояниях $\{q_1, \dots, q_m\}$ соответственно[7].

Пусть D — произвольный замкнутый класс в P_k. $P-$множество, порож-

[9]Кудрявцев В.Б. О мощности множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами. М.: ДАН СССР, 1963, т.151, №3.

[10]Кратко М.И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов. М.: ДАН СССР, 1964, т.155, №1.

[11]Алешин С.В. Über ein Vollstänig klits kriterium für Automatenabbildungen beruglich der Superposition. *Rostoker Math. Kolloq.* (1977) **5**, 119-132.

[12]Бабин Д. Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций. Москва, Дискретная математика, 1992. Т. 4, вып. 4. с. 41-56.

[13]Бабин Д. Н. О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты // Доклады Академии наук. №4. Т. 367. 1999. С. 439-441.

[14]Буевич В. А. О т-полноте в классе автоматных отображений. Москва, ДАН СССР, т. 252. №5. 1980.

[15]Буевич В. А. Условия А-полноты для конечных автоматов, ч.1, ч.2. Издательство МГУ, 1986, 1987 г.г.

[16]Летичевский А. А. Условия полноты в классе автоматов Мура. В кн.: Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики, вып. 2, Киев, 1963.

[17]Часовских А. А. О полноте в классе линейных автоматов. Математические вопросы кибернетики. Вып. 3. 1995, с. 140-166.

денное классом D — это множество всех ограниченно-детерминированных функций, в каждом состоянии которых реализуется функция $k-$значной логики, принадлежащая D. Будем обозначать такое $P-$множество через P_D^k. Нетрудно видеть, что P_D^k замкнуто как в $(P^k)_\Sigma$, так и в $(P^k)_K$. Заметим, что если D содержит все функции $k-$значной логики, то $P-$множество P_D^k совпадает с множеством всех о.-д. функций, если $D = \{0, 1, ..., k-1\}$, то в качестве $P-$множества получим все автоматы Мура, если $k = 2, D_2 = \{0, 1, x, \bar{x}\}$, то $P-$множество совпадает с множеством о.-д. функций, в каждом состоянии которых реализуется некоторая функция алгебры логики (а.-л.), зависящая не более, чем от одной переменной.

В работе изучаются задачи о полноте некоторых систем о.-д. функций, связанных с $P-$множествами. Кроме того, рассматриваются вопросы о существовании базисов и свойствах полных систем в $P-$множествах.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми, полученными автором самостоятельно. Центральный результат диссертационной работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть $D \subset P_k$ и $D = [D]$. Тогда множество предполных классов в $(P^k)_K$, содержащих P_D^k, континуально и множество предполных классов в $(P^k)_\Sigma$, содержащих P_D^k, также континуально.*

Пусть D — произвольный замкнутый класс в P_k, содержащий тождественную функцию, а Π_D — континуальная система всех предполных классов в $(P^k)_\Sigma$, каждый из которых содержит P_D^k. Нетрудно показать, что существует такая о.-д. функция $U \in P^k$, что $[P_D^k \cup \{U\}] = P^k$. Поэтому любое неполное множество о.-д. функций M, содержащее P_D^k, расширяется до предполного в $(P^k)_\Sigma$. Следовательно, для того, чтобы множество M было полным, необходимо и достаточно, чтобы его подмножество $M \setminus P_D^k$ не содержалось ни в одном предполном классе системы Π_D.

В диссертации рассматривается случай $k = 2$. Это объясняется тем, что любой класс из структуры замкнутых классов Поста[18] имеет конечный базис и, как легко видеть, при $k = 2$ всякое $P-$множество образует рекурсивное подмножество множества всех о.-д. функций.

Пусть D — произвольный замкнутый класс функций алгебры логики. Пусть Ω_D — совокупность всех множеств о.-д. функций, содержащих $P-$множество P_D^2, и таких, что для любого $M \in \Omega_D$ множество $M \setminus P_D^k$ — конечно. Очевидно, что система Π_D образует критериальную систему для распознавания полноты множеств, принадлежащих Ω_D. Из теоремы 1.1 следует, что это множество континуально. Возникает вопрос: существует ли алгоритм распозна-

[18] Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

вания полноты произвольного множества M, принадлежащего Ω_D? Важно отметить, что если такой алгоритм существует, то этот алгоритм должен устанавливать, содержится ли конечное множество $M \setminus P_D^k$ в одном из предполных классов системы Π_D и, тем самым, давать ответ, является ли полным множество M.

В диссертации найдены случаи, в которых подобный алгоритм существует, имеет место:

ТЕОРЕМА 2.4. *Если $D \subset P_2, D = [D]$ и D содержит тождественную функцию а.-л. и одну из констант, то в $(P^2)_\Sigma$ существует алгоритм распознавания полноты систем из Ω^D.*

Доказательство этой теоремы конструктивно, т.е. алгоритм для каждого D явно указывается в тексте диссертации. Из теоремы 2.4 следует, что в отличие от общего случая (В.Б. Кудрявцев, М.И. Кратко) существуют примеры таких множеств о.-д. функций, для которых, несмотря на наличие континуальных критериальных систем, существуют алгоритмы для распознавания полноты.

Заметим, что справедлива также

ТЕОРЕМА 2.14. *Если $D \subset P_2, D = \{0, 1\}$, то не существует алгоритма распознавания полноты систем из Ω^D.*

На рис. 1 жирными точками отмечены те классы D из структуры замкнутых классов Поста, для которых построен алгоритм распознавания полноты множеств из Ω^D.

Также в работе рассматривается вопрос существования базиса в произвольном P-множестве. Получены следующие результаты:

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $D \subseteq P_2, D = [D]$ и $\{0, 1, x\} \subseteq D$. Тогда в $(P_D^2)_\Sigma$ существует полная система, не содержащая базиса.*

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть $D \subseteq P_2, D = [D]$ и $\{0, 1, x\} \subseteq D$. Тогда в $(P_D^2)_\Sigma$ существует базис.*

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть $D \subseteq P_2, D = [D]$ и $\{x, \bar{x}\} \subseteq D$. Тогда в $(P_D^2)_\Sigma$ существует полная система, не содержащая базиса.*

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть $D \subseteq P_2, D = [D]$ и $\{x, \bar{x}\} \subseteq D$. Тогда в $(P_D^2)_\Sigma$ существует базис.*

Методы исследования

В работе используются методы теории автоматов, теории функциональных систем, теории дискретных функций и теории чисел.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях в теории функциональных систем и в теории автоматов.

Апробация работы

Основные результаты были представлены автором на следующих конференциях и научных семинарах:

- Кафедральный семинар кафедры МаТИС механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова «Теория автоматов» под руководством академика, проф., д.ф.-м.н. В.Б. Кудрявцева (2012 г.)
- Международная конференция «Современные проблемы математики и их приложений» посвященная 70-летию академика В. А. Садовничего (Москва, 30 марта — 2 апреля 2009 г.)
- X Международный семинар «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 1—6 февраля 2010 г.)
- X международная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки» (Москва, 5—10 декабря 2011 г.)
- Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, 9—13 апреля 2012 г.)
- XI Международный семинар «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 18—23 июня 2012 г.)
- Также результаты диссертации докладывались на следующих семинарах механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова: на семинаре «Дискретный анализ» под руководством проф., д.ф.-м.н. С. В. Алешина, проф., д.ф.-м.н. В. А. Буевича, с.н.с., к.ф.-м.н. М. В. Носова (2007— 2012 г.), на семинаре «Замкнутые классы булевых функций » под руководством проф., д.ф.-м.н. А. Б. Угольникова (2010 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликовано в восьми работах [1-8], в том числе работы [1-4] в изданиях из Перечня ВАК.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации 91 страница. Список литературы содержит 43 наименования.

Содержание работы

Во введении описана предметная область и история вопроса, даны основные используемые определения, сформулированы результаты диссертации.

Пусть $k \geq 2$, обозначим через P^k множество всех ограниченно-детерминированных функций (автоматных отображений), входные и выходные переменные которых определены на множестве бесконечных последовательностей, составленных из E_k, где $E_k = \{0, \dots$,k-1$\}$.

Будем считать, что на множестве P^k определены операции суперпозиции и обратной связи. В работе будут рассматриваться две функциональные системы — "суперпозиция" и "композиция" (присутствуют операции суперпозиции и обратной связи). Пусть $M \subseteq P^k$. Замыкание множества $M \subset P^k$ относительно операций суперпозиции обозначим через $[M]$, а замыкание относительно суперпозиции и обратной связи — через $[M]_K$. Функциональную систему "суперпозиция" над множеством P^k обозначим через $(P^k)_\Sigma$, а функциональную систему "композиция" — через $(P^k)_K$.

Множество $N \subset P^k$ называется предполным классом в $(P^k)_\Sigma$, если $[N] \neq P^k$, но для любой о.-д. функции $f \notin N$, $[N \cup \{f\}] = P^k$. Аналогично определяются предполные классы в $(P^k)_K$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — о.-д. функция из P^k, задаваемая системой канонических уравнений

$$q(1) = q_0,$$
$$q(t+1) = \varphi(x_1(t), \ldots, x_n(t), q(t)),$$
$$y(t) = \psi(x_1(t), \ldots, x_n(t), q(t)),$$

где $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_p\}$ — множество ее состояний, а q_0 — ее начальное состояние. Функцию $k-$значной логики, реализуемую в состоянии q_i, обозначим через F_{q_i}.

Пусть $t \geq 1$, E_k^t— множество слов длины t, составленных из E_k. Пусть $i, j \in \{0, 1, ..., p\}$. Будем считать, что состояние q_i является t-достижимым из состояния q_j, если найдутся такие $a_1, a_2, ..., a_n \in E_k^t$, что $\varphi(a_1, \ldots, a_n, q_j) = q_i$. Состояние q_i достижимо из состояния q_j, если q_i t-достижимо из q_j для некоторого t. Будем считать, что состояния q_i и q_j связны друг с другом, если состояние q_i достижимо из q_j и наоборот. При этом необязательно, чтобы $q_i \neq q_j$.

Пусть D — некоторое замкнутое множество функций $k-$значной логики. Тогда множество всех о.-д. функций из P^k, таких, что каждая из функций $F_{q_0}, F_{q_1}, \ldots, F_{q_p}$ принадлежит множеству D, обозначим через P_D^k. Это множество называем P-множеством, порожденным классом D. Нетрудно видеть, что P_D^k — замкнутое множество как в $(P^k)_K$, так и в $(P^k)_\Sigma$.

В первой главе решается вопрос о количестве предполных классов, содержащих произвольное $P-$множество, и доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть $D \subset P_k$ и $D = [D]$. Тогда множество предполных классов в $(P^k)_K$, содержащих P_D^k, континуально и множество предполных классов в $(P^k)_\Sigma$, содержащих P_D^k, также континуально.*

Вторая глава посвящена вопросам существования алгоритмов распознавания полноты систем, содержащих $P-$множества. В качестве функциональной системы используется $(P^2)_\Sigma$.

Пусть D — произвольный замкнутый класс алгебры-логики. Пусть Ω^D — совокупность всех подмножеств M множества P^2 , содержащих $P-$множество P^2_D и таких, что множество $M \setminus P^2_D$ конечно.

Для каждого D рассматривается задача о существовании алгоритма распознавания полноты множеств, принадлежащих совокупности Ω^D. Любая система M из Ω^D содержит P^2_D и конечное множество о.-д. функций, не принадлежащих P^2_D. По этой конечной добавке искомый алгоритм должен определить, полна система M или нет. Ясно, что наличие алгоритма должно зависеть от порождающего множества D. Во второй главе рассмотрены несколько возможных вариантов.

Данная глава состоит из шести параграфов. В первом параграфе даны необходимые определения.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — о.д. функция из P^k, где $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_p\}$ — множество ее состояний, а q_0 — ее начальное состояние.

Если F_{q_i} является функцией алгебры-логики, существенно зависящей не менее чем от двух переменных, состояние q_i будем называть существенным, иначе — несущественным.

Если F_{q_i} является линейной функцией алгебры-логики, состояние q_i будем называть линейным, иначе — нелинейным.

Если F_{q_i} является монотонной функцией алгебры-логики, состояние q_i будем называть монотонным, иначе — немонотонным.

Подмножество $K \subseteq Q$ будем называть компонентой связности, если:

1) Для любых $q_i, q_j \in K$, q_i и q_j связны друг с другом.

2) Если $q_i \in K$ и существует состояние $q_j \in Q$, такое что q_i и q_j связны, то $q_j \in K$.

Рассмотрим произвольное состояние q функции f, принадлежащее какой-либо компоненте связности K. Для этого состояния определим множество $A(q) \in (E_2^1)^n$, где n - число переменных, от которых зависит функция f:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A(q) \Leftrightarrow \phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, q) \in K$$

Т.е. $A(q)$ — это множество наборов слов длины 1, по которым из состояния q достижимы только состояния, принадлежащие той же компоненте связности, что и q.

Пусть

$$g_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_m)$$

— функции а.-л. Через $S(g_1, \ldots, g_n)$ будем обозначать множество двоичных наборов

$$\bigcup \{(g_1(\beta_1, \ldots, \beta_m), \ldots, g_n(\beta_1, \ldots, \beta_m))\} \subseteq (E_2^1)^n,$$

где объединение берется по всем $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ из $(E_2^1)^m$.

Состояние q будем называть локально нелинейным, если найдутся линейные функции а.-л.

$$g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m),$$

такие что $S(g_1, \dots, g_n) \subseteq A(q)$ и $F_q(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m))$ является нелинейной функцией а.-л. Все остальные состояния назовем локально линейными. Заметим, что если состояние не принадлежит никакой компоненте связности, то оно локально линейно.

Подобным образом определяются локально существенные и локально немонотонные состояния.

Обозначим через $Q^f(t)$ подмножество Q^f, состоящее из всех состояний, t-достижимых из начального состояния о.-д. функции f. Пусть

$$M = P_D^2 \bigcup \{f_1(x_1, ..., x_n) \;, ..., \; f_m(x_1, ..., x_n)\},$$

$$Q^M(T) = Q^{f_1}(T) \cup ... \cup Q^{f_m}(T).$$

Рассмотрим последовательность множеств

$$\{Q^M(0), Q^M(1), Q^M(2)...\}.$$

Несложно видеть, что данная последовательность периодична. Пусть s^M— длина цикла этой последовательности, а T^M — длина предпериода. Тогда для системы M определим множества состояний

$$C_i^M = Q^M(T^M + i), i = 1, 2, \dots, s^M.$$

Пусть τ — произвольное натуральное число. О.-д. функции $g(x_1, \dots, x_n)$ и $h(x_1, \dots, x_n)$ являются τ-эквивалентными, если значения функций f и h совпадают на всех словах длины τ. Множество $M \subseteq P^k$ является τ-полным, если для любой о.-д. функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P^k$ существует такая функция $f^M(x_1, \dots, x_n), f^M \in [M]$, что f и f^M τ-эквивалентны. Множество $M \subseteq P^k$ называется А-полным, если оно τ-полно для любого натурального τ. Также будем говорить, что $f \in A[M]$ (А-замыкание), если для любого натурального τ существует функция $f^M \in [M]$ такая, что f^M τ-эквивалентна f.

Во втором параграфе описан случай, когда порождающее множество D содержит обе константы. Получен критерий полноты систем из Ω^D для каждого такого D.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть*

$$D = \{0, 1, x\}, M = P_D^2 \bigcup \{f_1(x_1, \dots, x_n) \;, ..., \; f_m(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Система M полна тогда и только тогда, когда она А-полна и в каждом из множеств $C_i^M, i = 1, 2, \dots, s^M$ содержится хотя бы одно локально нелинейное, локально существенное и локально немонотонное состояние.

Пусть теперь D — произвольный замкнутый класс а.-л., содержащий множество $\{0, 1, x\}$ и

$$M = P_D^2 \bigcup \{f_1(x_1, \dots, x_n) , \dots, \ f_m(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Во множестве D могут содержаться нелинейные, немонотонные и существенные функции а.-л. Определим о.-д. функцию $f_L(D)$. Если в D содержится какая-либо нелинейная функция а.-л. F_l, то $f_L(D)$ — функция с одним состоянием, в котором реализуется F_l. В противном случае, $f_L(D)$ - функция с одним состоянием, в котором реализуется константа 0. Аналогичным образом определим о.-д. функции $f_M(D)$ и $f_s(D)$. Пусть

$$M' = P_D^2 \bigcup \{f_1(x_1, \dots, x_n) , \dots, \ f_m(x_1, \dots, x_n\} \cup \{f_L(D)\} \cup \{f_s(D)\} \cup \{f_M(D)\}.$$

Нетрудно видеть, что $[M] = [M']$. Для системы M' справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть* $D \supseteq \{0, 1, x\}$,

$$M' = P_D^2 \bigcup \{f_1(x_1, \dots, x_n) , \dots, \ f_m(x_1, \dots, x_n)\} \cup \{f_L(D)\} \cup \{f_s(D)\} \cup \{f_M(D)\}.$$

Система M' полна тогда и только тогда, когда она A-полна и в каждом из множеств $C_i^{M'}, i = 1, 2, \dots, s^{M'}$ содержится хотя бы одно локально нелинейное, локально существенное и локально немонотонное состояние.

В работе показано, что выполнение условий этих двух теорем может быть проверено за конечное число операций. Таким образом, теорема 2.3. и является искомым эффективным критерием (т.е. алгоритмом) распознавания полноты систем из Ω^D.

В третьем параграфе рассмотрен случай, когда порождающее множество содержит тождественную функцию а.-л. и одну из констант, но не содержит вторую константу. Без ограничения общности, можно считать, что порождающее множество D содержит константу ноль, но не содержит единицу. Пусть

$$M = P_D^2 \bigcup \{f_1(x_1, \dots, x_n) , \dots, \ f_m(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Тогда для определения полноты этой системы достаточно проверить, существует ли в замыкании M тождественная единица. Если существует, то задача сводится к случаю с двумя константами. Введем несколько новых определений.

Константную о.-д. функцию, выход которой не зависит от входных переменных и является периодической последовательностью будем обозначать через $p_1p_2 \dots p_l \langle c_1c_2 \dots c_s \rangle$, где $p_1p_2 \dots p_l$ — предпериод, а $c_1c_2 \dots c_s$ — период (не обязательно простой) выходной последовательности. Например, тождественную единицу в этих терминах можно обозначить через $\langle 1 \rangle$ или $\langle 11 \rangle$ или $1\langle 11 \rangle$.

Пусть $B \subseteq E_2^{s^M}$. Обозначим через $\Gamma_T(B)$ множество всех бесконечных последовательностей, представимых в виде $ab_1b_2...$, где $a \in E_2^T, b_i \in B$.

Пусть $\lceil \Gamma_T(B) \rceil$ — множество бесконечных последовательностей. Будем считать, что $\gamma \in \lceil \Gamma_T(B) \rceil$ тогда и только тогда, когда существует $\gamma' \in \Gamma_T(B)$ такая, что γ и γ' различаются не более чем в конечном числе разрядов.

Выберем некоторое множество двоичных наборов $A = \{\alpha_1, \dots , \alpha_m\} \subseteq E_2^{s^M}$. Построим ориентированный граф $G_{f_i}(A)$ с пометками на ребрах, вершинами которого являются состояния из множества C_1^M, принадлежащие функции f_i. Пусть $q, p \in C_1^M \cap Q^{f_i}$. В $G_{f_i}(A)$ существует ребро, ведущее из q в p если и только если существуют $\{\beta_1, \dots , \beta_n\} \in A$ такие, что $\varphi^{f_i}(\beta_1, \dots , \beta_n, q) = p$. Припишем этому ребру пометку $\overline{\psi^{f_i}}(\beta_1, \dots , \beta_n, q)$, т.е. тот набор который является выходом функции f_i, находящейся в состоянии q, на входных наборах $\beta_1, \dots , \beta_n$. Таким образом, в графе могут быть кратные ребра и петли. Очевидно, что граф конечен, поэтому в нем можно найти все простые циклы за конечное число операций. Зафиксируем двоичные наборы, приписанные ребрам, которые входят хотя бы в один простой цикл и обозначим их множество через $I_{f_i}(A)$ — образ набора A относительно функции f_i.

Множество наборов $A \subseteq E_2^{s^M}$ будем называть 0-полным, если для любых $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E_2^{s^M}$ таких, что $\tilde{\alpha} \geq \tilde{\beta}$ и $\tilde{\alpha} \in A$ выполнено $\tilde{\beta} \in A$.

Теперь можно сформулировать основную теорему параграфа.

ТЕОРЕМА 2.6. *Пусть $M = P_D^2 \bigcup \{f_1(x_1, \dots , x_n) \ , \dots, \ f_m(x_1, \dots , x_n)\}$. Тогда M содержит тождественную единицу если и только если $\langle 1 \rangle \in A[M]$ и для любого 0-полного $A \subset E_2^{s^M}$ существует $i \in \{1, \dots , m\}$ такое, что $I_{f_i}(A) \setminus A \neq \emptyset$.*

Эта теорема является эффективным критерием распознавания полноты в данном случае. Ее следствием является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть порождающее множество D содержит тождественную функцию а.-л. и одну из констант. Тогда существует эффективный критерий распознавания полноты систем из Ω^D.*

Стоит отметить, что существование алгоритма распознавания полноты в случае, когда $D = \{0, 1, x, \overline{x}\}$ следует из результата С.В. Алешина[10] .

В четвертом параграфе второй главы рассмотрен случай, когда порождающее множество D содержит тождественную функцию а.-л., при этом оно может не содержать ни одной константы. Алгоритмы распознавания полноты также были получены, но с некоторыми дополнительными условиями.

Пусть $\Omega^D(f)$ — совокупность всех подмножеств M множества P, содержащих Ω^D и о.-д. функцию f, таких, что множество $M \setminus \Omega^D$ конечно.

Пусть о.-д. функции $G_0(x), G_1(x)$ — нулевая и единичная задержка соответственно. Обозначим $G = \{G_0(x), G_1(x)\}$.

Доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2.10. *Пусть множество D содержит тождественную функцию а.-л. Тогда существует эффективный критерий распознавания полноты систем из $\Omega^D(C)$, где C — произвольная константная о.-д. функция.*

ТЕОРЕМА 2.12. *Пусть множество D содержит тождественную функцию а.-л. Тогда существует эффективный критерий распознавания полноты систем из $\Omega^D(g)$, где g принадлежит множеству G.*

Доказательство каждой из этих двух теорем также конструктивно. Алгоритмы распознавания полноты приведены в тексте этого параграфа.

В пятом параграфе рассматриваются порождающие множества, не содержащие тождественную функцию а.-л. Существует всего три таких класса Поста — это классы, состоящие только из констант.

ТЕОРЕМА 2.14. *Пусть $D_1 = \{0, 1\}$. Не существует алгоритма распознавания полноты систем из Ω^{D_1}.*

Если же порождающее множество состоит только из одной константы (например, 0), то $P-$множество также состоит только из тождественного нуля. Поэтому любая система из $\Omega^{\{0\}}$ конечна и, следовательно, неполной относительно операции суперпозиции.

Наконец, в третьей главе исследуются свойства $P-$множеств, как замкнутых классов в $(P^2)_\Sigma$. Получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $D \subseteq P_2, D = [D]$ и $\{0, 1, x\} \subseteq D$. Тогда в $(P^2_D)_\Sigma$ существует полная система, не содержащая базиса.*

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть $D \subseteq P_2, D = [D]$ и $\{0, 1, x\} \subseteq D$. Тогда в $(P^2_D)_\Sigma$ существует базис.*

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть $D \subseteq P_2, D = [D]$ и $\{x, \bar{x}\} \subseteq D$. Тогда в $(P^2_D)_\Sigma$ существует полная система, не содержащая базиса.*

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть $D \subseteq P_2, D = [D]$ и $\{x, \bar{x}\} \subseteq D$. Тогда в $(P^2_D)_\Sigma$ существует базис.*

Доказательство каждой из теорем третьей главы также конструктивно. Соответствующие примеры приведены в тексте диссертации.

Автор выражает благодарность профессору В. А. Буевичу за постановку задачи, поддержку и руководство данной работой и академику, профессору В. Б. Кудрявцеву за внимание к ней.

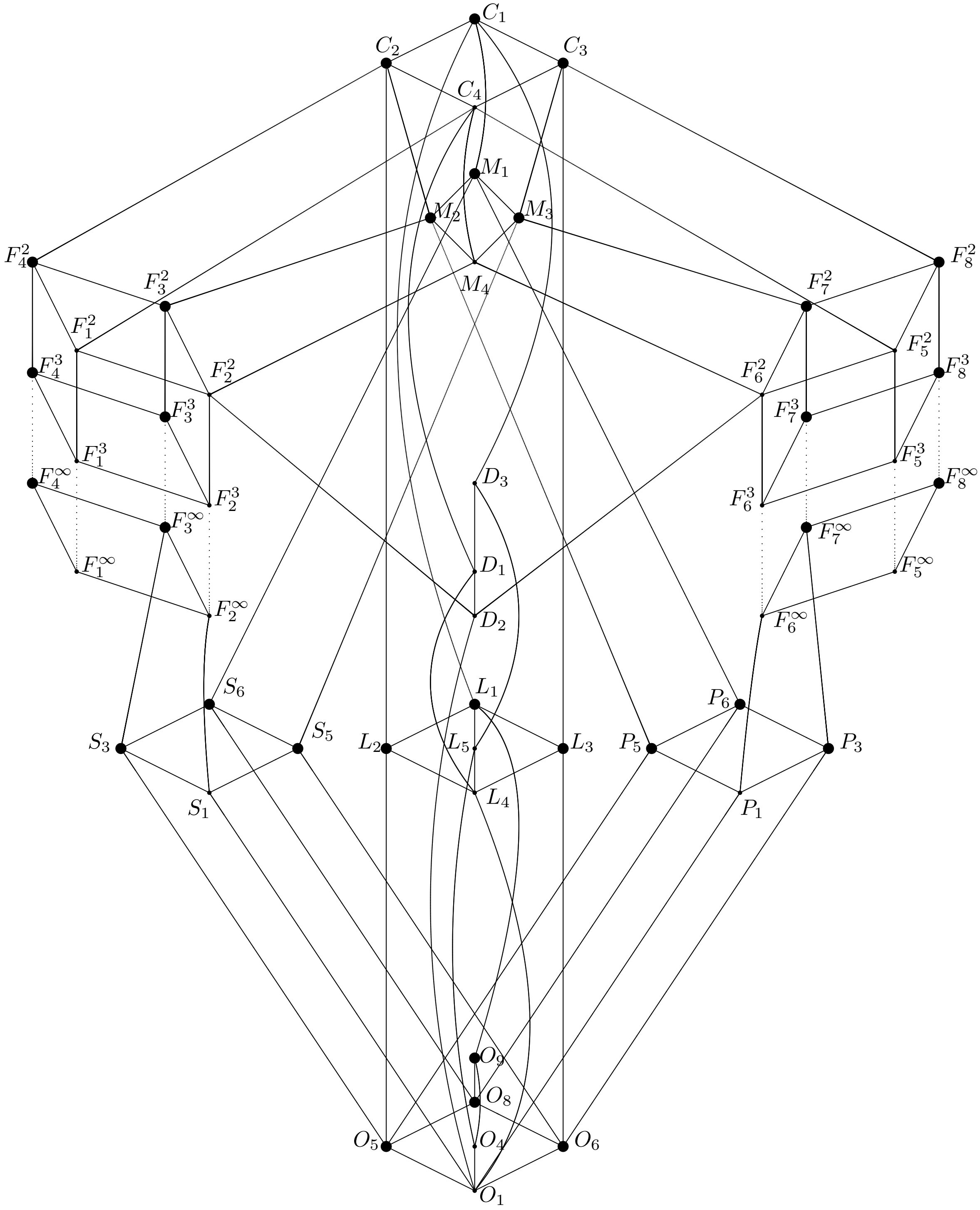

Рис. 1: Разрешимые случаи на решетке Поста

Публикации автора по теме диссертации

[1] Родин А. А. О континуальности множества специальных предполных классов во множестве автоматных отображений. *Интеллектуальные системы.* (2012) **16**, 329-334.

[2] Родин А. А. О некоторых свойствах $P-$множеств ограниченно-детерминированных функций. *Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика.* 2013. №1. С. 51-53.

[3] Родин А. А. Критерий полноты некоторых систем, содержащих P-множества о.-д. функций. *Дискретная математика*, **25**:1 (2013), 76-89.

[4] Родин А. А. Базисы в $P-$множествах. *Интеллектуальные системы.* (2013) **17**, 380-392.

[5] Родин А. А. О предполных классах во множестве автоматных отображений // Современные проблемы математики и их приложений. Материалы конференции, посвященной 70-летию академика В. А. Садовничего. – М.: Изд-во МГУ, 2009 – С.372.

[6] Родин А. А. О существовании алгоритмов для распознавания полноты систем о.-д. функций из множества N_D // Материалы X Международного семинара Дискретная математика и ее приложения –М.: Изд-во МГУ, 2010 – С.421.

[7] Родин А. А. Критерий полноты некоторых бесконечных систем во множестве автоматных отображений // Материалы X международной конференции «Интеллектуальные системы и компьютерные науки»(2011, Москва).

[8] Родин А. А. Эффективный критерий А-выразимости для систем, содержащих P-множества // Тезисы докладов международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2012» (2012, Москва).