О Т З Ы В

научного руководителя
на диссертацию Родина Александра Алексеевича
"О $P-$множествах автоматных функций",
представленной к защите на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика
и математическая кибернетика

Диссертация А.А. Родина посвящена изучению задач о полноте в функциональных системах $(P^k)_\Sigma$ и $(P^k)_K$, элементами которых являются автоматные функции (о.-д. функции); при этом в функциональной системе $(P^k)_\Sigma$ используются только операции суперпозиции, а в функциональной системе $(P^k)_K$ наряду с операциями суперпозиции используется также операция "обратная связь". Задача о полноте в функциональных системах $(P^k)_\Sigma$ и $(P^k)_K$ состоит в описании таких подмножеств о.-д. функций, используя которые с помощью операций, определенных в $(P^k)_\Sigma$ и $(P^k)_K$, можно получить все о.-д. функции.

При исследовании задачи о полноте в различных функциональных системах существует два подхода — алгебраический и алгоритмический. Алгебраический подход связан с изучением структуры замкнутых классов, в частности, с описанием множества предполных классов и построением критериальных систем для распознавания полноты, а алгоритмический — с решением вопроса о существовании алгоритма, устанавливающего полноту или неполноту конечных систем.

Известно, что в функциональной системе $(P^k)_K$ существует континуум предполных классов, которые образуют минимальную критериальную систему для распознавания полноты. Вместе с тем, не существует алгоритма для решения задачи о полноте конечных систем.

Возникает вопрос: всегда ли в функциональных системах $(P^k)_\Sigma$ и $(P^k)_K$ отсутствие эффективного критерия полноты с алгебраической точки зрения влечет за собой отсутствие алгоритма, устанавливающего полноту некоторых систем о.-д. функций.

А.А. Родиным предпринята попытка дать ответ на этот вопрос. В диссертации вводится понятие Р-множества.

Пусть $k \geq 2$, и P_k — множество всех функций k-значной логики. Пусть D — произвольный замкнутый класс в P_k. Р-множество P^k_D, порожденное классом D — это множество всех о.-д. функций, в каждом состоянии которых реализуется функция k-значной логики, принадлежащая множеству D. Нетрудно видеть, что любое Р-множество является замкнутым и в $(P^k)_\Sigma$, и $(P^k)_K$.

В работе А.А. Родина доказана следующая

Теорема 1.1. Пусть $D \subset P_k, D = [D]$. Тогда множество предполных классов в $(P^k)_\Sigma$, содержащих P^k_D, континуально и множество предполных классов в $(P^k)_K$, содержащих P^k_D, также континуально.

Пусть $D \subset P_k$ и D содержит тождественную функцию. Пусть $\prod_D$ — континуальная система предполных классов, каждый из которых содержит P^k_D. В диссертации А.А. Родина показано, что для того, чтобы любое множество M, содержащее P^k_D, было полным, необходимо и достаточно, чтобы множество $M \setminus P^k_D$ не содержалось ни в одном предполном классе системы $\prod_D$.

Основное внимание в диссертации А.А. Родина сосредоточено на рассмотрении случая, когда $k = 2$. Дело в том, что любой замкнутый класс из структуры замкнутых классов Поста имеет конечный базис и, как нетрудно видеть, при $k = 2$ всякое Р-множество образует рекурсивное подмножество множества всех о.-д. функций.

Пусть D — произвольный замкнутый класс функций алгебры логики. Пусть Ω_D — совокупность всех множеств о.-д. функций, содержащих Р-множество P^2_D и такие, что для любого $M \in \Omega_D$, множество $M \setminus P^2_D$ конечно. Очевидно, система $\prod_D$ образует континуальную критериальную систему для решения распознавания полноты множеств из Ω_D. В диссертации А.А. Родина рассмотрен вопрос о существовании алгоритмов распознавания полноты произвольных множеств M, принадлежащим Ω_D, где D — некоторый класс из структуры Поста замкнутых классов функций алгебры логики.

Имеет место

Теорема 2.4. Если $D \subset P_2, D = [D]$ и D содержит тождественную функцию алгебры логики и одну из констант, то в $(P^2)_\Sigma$ существует алгоритм распознавания систем из Ω_D.

Справедлива также

Теорема 2.14. Пусть $D = \{0, 1\}$. Не существует алгоритма распознавания полноты систем из Ω_D.

Из теоремы 2.4 следует, что в отличие от общего случая существуют примеры таких множеств о.-д. функций, для которых, несмотря на наличие континуальных критериальных систем, существует алгоритм для распознавания полноты.

Заметим, что вопрос о существовании алгоритмов для распознавания полноты множеств из Ω_D остался открытым, если $D = \{x\}$ или $D = \{x, \bar{x}\}$.

В работе А.А. Родина исследуются также свойства Р-множеств как замкнутых классов в $(P^2)_\Sigma$. Получено несколько результатов о полных системах и базисах в P^2_D, если D один из классов в структуре Поста замкнутых классов функций алгебры логики.

Считаю, что диссертация А.А. Родина "О $P-$множествах автоматных функций" представляет собой серьезный вклад в дискретную математику и математическую кибернетику. Доказательство всех теорем, содержащихся в диссертации, носят нетривиальный характер и потребовали от их автора значительных усилий и изобретательности.

Несомненно, Александр Алексеевич Родин заслуживает присуждения ему научной степени кандидата физико-математических наук по этой специальности.

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор В. А. Буевич

25 декабря 2013 г.