**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**им. М.В. ЛОМОНОСОВА**

**механико–математический факультет**
**кафедра теории вероятностей**

на правах рукописи
УДК 519.21

**Громов Александр Николаевич**

# ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ПЕРЕСТРАХОВАНИЯ И ИНВЕСТИРОВАНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ РИСКА

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика
Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель
профессор, доктор физ.–мат. наук
Булинская Екатерина Вадимовна

Москва
2013 г.

# Оглавление

# Введение

В настоящее время страхование играет существенную роль в экономической и социальных сферах общества, а страховые компании, наряду с банками, стали важнейшими финансовыми институтами. Возрастающие потребности людей в финансовой защите своего имущества, жизни и здоровья, кредитных рисков и ценных бумаг влекут усиление роли страхования в обществе и развитие страховых компаний. Кроме того, страхование имеет и инвестиционную функцию. Современные страховые компании обладают большими объемами временно свободных денежных средств, активно вкладывают их в различные ценные бумаги и недвижимость. Развитие страховых компаний и усиливающаяся потребность в актуарных расчетах в свою очередь ведут к развитию математического аппарата теории риска.

С начала XX века по сегодняшний день было предложено и рассмотрено достаточно большое количество различных моделей коллективного риска, моделирующих деятельность страховой компании. Одной из наиболее ранних моделей является классическая модель риска Крамера–Лундберга, основные элементы которой были разработаны в трудах шведских математиков Ф. Лундберга и Г. Крамера. Докторская диссертация Лундберга [37] была посвящена коллективной модели риска и в ней впервые было предложено использовать пуассоновский поток для моделирования моментов поступления требований в компанию. Работы Крамера [19], [20], [21] также посвящены коллективной теории риска и ее приложениям в страховании.

В модели Крамера–Лундберга предполагается, что размеры поступающих в компанию требований $Y_1, Y_2, \ldots$ — неотрицательные независимые и одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины (с.в.) с функцией распределения $Q(y)$, а моменты поступления требований $T_1, T_2, \ldots$ образуют пуассоновский поток интенсивности $\lambda > 0$. Пусть $c > 0$ – приход страховой премии в единицу времени, $N_t$ — число точек пуассоновского потока на отрезке $[0, t]$, а $s > 0$ — начальный капитал компании. Тогда капитал компании в момент $t > 0$ равен

$$R_t = s + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i. \tag{1}$$

Величина $\tau := \inf\{t \geq 0 |\, R_t < 0\}$ называется моментом разорения компании, величина $\gamma(s) := P(\tau < \infty | R_0 = s)$ называется вероятностью разорения, а $\delta(s) := P(\tau = \infty | R_0 = s)$ — вероятностью неразорения. Существует явная формула Поллачека–Хинчина–Беекмана для вычисления вероятности разорения (см., например, [9]). Заметим также, что существуют различные принципы расчета страховой премии (см., например, [8]).

Страховая компания, собрав взносы с клиентов, должна быть способна выплатить страховое возмещение по всем поступающим требованиям. Именно поэтому вероятность неразорения является важнейшим показателем деятельности любой страховой компании, а максимизация вероятности неразорения — одной из важнейших задач руководства компании.

Одной из возможностей для увеличения вероятности неразорения является перестрахование. Существуют различные виды договоров перестрахования, среди которых можно выделить два основных типа: пропорциональное и непропорциональное. Подробное описание типов перестрахования и видов договоров можно найти в книге [3]. В общем случае при заключении некоторого договора перестрахования, характеризующегося некоторым параметром $b$, страховщик, при поступлении требования $Y$, платит некую величину $r(Y, b) \leq Y$ п.н., а оставшаяся часть $Y - r(Y, b)$, передается перестраховщику. Вообще говоря, параметр $b$ может быть многомерным, то есть $b \in \mathbb{R}_+^k$, где $\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных вещественных чисел. В случае пропорционального перестрахования $r(Y, b) = bY,\ 0 < b < 1$. Примером договора непропорционального перестрахования может служить договор типа эксцедента убытка, который в общем случае определяется уровнем собственного удержания $b > 0$ и шириной лейера $M > 0$, а ответственность цедента равна $r(Y, b, M) = \min(b, Y) + \max(0, Y - b - M)$. Кроме того, страховщик для оплаты услуг перестраховщика передает ему некоторую часть страховой премии.

В задачах оптимизации вероятности неразорения компании или других характеристик эффективной работы страховщика (например, среднего времени до разорения) часто рассматриваются стратегии перестрахования. Пусть $\mathfrak{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ — естественная фильтрация, порожденная процессом риска (1), т.е. $\mathcal{F}_t := \sigma\{R_u,\, u \leq t\}$. В книге Шмидли [45] дается следующее определение стратегии перестрахования.

**Определение 0.1.** Случайный процесс $B = \{b_t\}_{t \geq 0}$ со значениями в $\mathbb{R}_+^k$, предсказуемый относительно фильтрации $\mathfrak{F}$, называется стратегией перестрахования.

Пусть функция $c(b)$ задает часть премии, которая остается у страховщика после уплаты перестраховочной премии. Например, если перестраховщик рассчитывает свою премию с по принципу среднего с нагрузкой безопасности, то $c(b) = c - \rho E(Y - r(Y, b))$, $\rho > 1$. При использовании некоторой стратегии перестрахования $B = (b_t)_{t\geq 0}$ капитал компании $R_t^B$ в момент времени $t$ равен

$$R_t^B = s + \int\limits_0^t c(b_x)dx - \sum_{i=1}^{N_t} r(Y_i, b_{T_i}).$$

Поиску оптимальных в том или ином смысле стратегий перестрахования посвящен широкий спектр работ. Так, в работе Шмидли [44] рассмотрена модель Крамера–Лундберга и стратегии пропорционального перестрахования. Капитал компании в такой модели равен

$$R_t^B = s + \int\limits_0^t (b_x(1+\theta) - (\theta - \eta))\lambda\mu dx - \sum_{i=1}^{N_t} b_{T_i} Y_i,$$

где $\eta$ — нагрузка безопасности страховщика, $\theta$ — нагрузка безопасности перестраховщика, $\mu := EY_i$ — средний убыток, $b_t \in (0, 1]$, $t \geq 0$ — доля убытка, выплачиваемая цедентом, а размер страховой премии страховщика и перестраховщика определяется по принципу среднего, т.е. $c(b) = (1+\eta)\lambda\mu - (1-b)(1+\theta)\lambda\mu = (b(1+\theta) - (\theta - \eta))\lambda\mu$. В такой ситуации вероятность неразорения компании при использовании некоторой стратегии $B = \{b_t\}_{t\geq 0}$ равна $\delta^B(s) := P(R_t^B = \infty)$. Шмидли устанавливает, что оптимальная вероятность неразорения компании $\delta(s) := \sup_B \delta^B(s)$, где супремум берется по всем возможным стратегиям, удовлетворяет уравнению Беллмана–Гамильтона–Якоби

$$\sup_{\beta\in(0,1]} \left( (\beta(1+\theta) - (\theta - \eta))\mu\delta'(s) + \int\limits_0^{s/\beta} \delta(s - \beta y)dQ(y) - \delta(s) \right) = 0.$$

Кроме того доказано, что существует единственное непрерывно дифференцируемое решение $\delta(s)$ этого уравнения с начальным условием $\delta(\infty) = 1$, а оптимальная стратегия перестрахования определяется по правилу $b_t^* := \beta^*(R_{t-})$, где $\beta^*(s)$ — точка, в которой достигается супремум в уравнении Беллмана–Гамильтона–Якоби.

В работе Хиппа и Вогта [32] рассмотрена модель с перестрахованием эксцедента убытка, зависящим от одного параметра — уровня собственного удержания. Аналогично работе

Шмидли авторы установили, что максимальная вероятность неразорения удовлетворяет уравнению Беллмана–Гамильтона–Якоби и доказали существование решения этого уравнения, а также существование оптимальной стратегии. В статье Шмидли [41] также рассматривает оптимальное перестрахование типа эксцедента убытка. Поиску оптимальной стратегии перестрахования в модели с диффузионной аппроксимацией процесса риска (1) посвящены работы Белкиной и Матвеевой [1], Хойгаарда и Таксара [33]. В книге Рольски и других [39] описан общий подход к решению подобных задач в классической модели риска. В работе Штрибеля [46] предложен мартингальный метод вывода уравнений динамического программирования в задачах оптимизации.

Еще одной возможностью для увеличения вероятности неразорения является инвестирование средств в рисковый актив. В таких работах речь идет уже о стратегиях инвестирования $A_t$, определяющих объем вложений в момент времени $t$. В таком случае капитал компании меняется по закону

$$R_t = s + ct + A_t Z_t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

где $Z_t$ — стоимость актива в момент $t$. Хипп и Плам в своих работах [30] и [31] рассматривают возможность вложения средств в рисковый актив, стоимость которого меняется по закону геометрического броуновского движения. Они также получают уравнение Беллмана–Гамильтона–Якоби, которому удовлетворяет максимальная вероятность неразорения и доказывают существование решения этого уравнения и существование оптимальной стратегии инвестирования. Стратегии инвестирования в классической модели риска также рассмотрены в работах Шмидли [43], Фроловой и соавторов [25], Гайера и Грандитса [26], [27], Белкиной и соавторов [16]. Шмидли в статье [42] рассматривает обобщенные стратегии перестрахования и инвестирования для максимизации вероятности неразорения. В книге Шмидли [45] объединены многие из полученных ранее результатов по оптимальному перестрахованию и инвестициям.

Из описания выше видно, что модель Крамера–Лундберга описывает работу страховой компании с непрерывным временем. Однако, несмотря на широкое распространение, которое получила классическая модель, для практических применений часто используется модель с дискретным временем. Действительно, на практике удобнее менять параметры договоров перестрахования или изменять объем инвестиций только в определенные моменты времени, например, в конце каждого года. Диксон и Уотерс в работе [22] предложили метод дискретизации модели Крамера–Лундберга и показали способ перехода к дискретному времени и убыткам, имеющим дискретное распределение. В модели с дискретным временем капитал компании $R_n$ на конец $n$-го года равен

$$R_n = s + nc - \sum_{i=1}^{n} Y_i = R_{n-1} + c - Y_n,$$

где $s$ — начальный капитал, $c$ — суммарная страховая премия за год, а $Y_i$ — совокупный годовой убыток компании. Чуть позже, в работе [23] Диксон и Уотерс предложили модификацию моделей риска, добавив возможность инвестировать дополнительные средства в компанию, если ее капитал опустился ниже определенного уровня. Точнее, если на конец года капитал компании меньше, чем некоторый заданный уровень $L \geq 0$, собственник компании вливает дополнительные средства, восстанавливая капитал компании на уровне $L$. В данном случае капитал компании в момент $n$ равен

$$R_n = \max(L, R_{n-1} + c - Y_n), \;\; R_0 = s.$$

Поскольку в такой модели разорение невозможно, ставится задача снизить суммарные дисконтированные вливания капитала за $n$ лет, то есть минимизировать величину

$$W(s) = E\left[\sum_{i=1}^{n} v^i J_i | R_0 = s\right],$$

где $J_i := \max(0, L - R_{i-1} - c + Y_i)$ — величина вливаемого капитала в $i$-ом году, а $v \in (0, 1)$ — коэффициент дисконтирования. Как и в случае с моделью Крамера–Лундберга, для минимизации величины $W(s)$ используются перестрахование и инвестирование в рисковый актив. В данном случае под стратегией перестрахования, например, понимается последовательность с.в. $\{b_k\}_{k=1}^{n}$, предсказуемая относительно фильтрации, порожденной последовательностью убытков $Y_1, Y_2, \ldots$.

Модель с вливанием капитала получила развитие относительно недавно, поэтому список работ по данной тематике невелик. Ву и соавторы [47] рассматривали модель с дискретным временем с возможностью вливания капитала и выплаты дивидендов. Так, в работе [47] капитал компании равен

$$R_n^{(D,Z)} = s + n - \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} d_i + \sum_{i=1}^{n} z_i, \;\; n \geq 0,$$

где $Y_i$ — совокупный годовой размер убытка, $d_i \geq 0$ п.н. — величина выплачиваемых дивидендов, а $z_i \geq 0$ п.н. — величина вливаемого капитала, $i = 1, 2, \ldots$. Предполагается, что собственник компании вкладывает дополнительные средства в компанию, если капитал компании опустился ниже 0. Авторы рассматривают величину $W^{(D,Z)} = E[\sum\limits_{i=1}^{\infty} v^i d_i - \beta \sum\limits_{i=0}^{\infty} v^i z_i]$, где $v$ — коэффициент дисконтирования, а $\beta > 1$ — стоимость привлечения дополнительного капитала, включающая плату за транзакцию, и максимизируют $W^{(D,Z)}$ по всем возможным стратегиям $(D, Z) = \{d_i, z_i\}_{i=1}^{\infty}$ выплаты дивидендов и вливания капитала, согласованным с фильтрацией, порожденной последовательностью $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Таким образом, ставится оптимизационная задача $W(s) := \sup_{(D,Z)} W^{(D,Z)}(s)$. Доказано, что $W(s)$ удовлетворяет уравнению

$$W(s) = \max_{d=0,1,\ldots,s} \left\{ d + v \left[ \sum_{k=-\infty}^{1} p_k W(s - d + k) \right] \right\}, \ s = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $p_k = P(Y_i = k)$, а оптимальной стратегией выплаты дивидендов является барьерная стратегия с барьером $b^* = \inf\{s \geq 0 : \ W(s+1) - W(s) \leq 1\}$. При этом оптимальная стратегия вливания капитала $z_i = \min\{0, -(s + i - \sum\limits_{k=1}^{i} (Y_k + d_k))\}$.

В работе Эйзенберг и Шмидли [24] изучена диффузионная аппроксимация классической модели риска с перестрахованием и возможностью вливания капитала. В статье Куленко и Шмидли [34] осуществляется поиск оптимальной стратегии выплаты дивидендов, минимизирующей суммарные приведенные вливания капитала.

**Краткое содержание диссертации.**

В **первой главе** изучается классическая модель риска Крамера-Лундберга и рассматриваются не исследованные ранее случаи поиска оптимальных стратегий перестрахования и инвестирования. В первом параграфе рассматриваются стратегии непропорционального перестрахования типа эксцедента убытка. При этом в отличие от работы [32], предполагается, что договор перестрахования определяется двумя параметрами: уровнем собственного удержания $b > 0$ и шириной лейера $M > 0$. В такой ситуации при поступлении убытка $Y$ ответственность цедента равна $\min(b, Y) + \max(0, Y - b - M)$. В такой ситуации ставится задача максимизации вероятности неразорения компании путем выбора оптимальной стратегии перестрахования. Устанавливается, что максимальная вероятность неразорения удовлетворяет уравнению типа Беллмана–Гамильтона–Якоби и доказывается существование решения этого уравнения (теорема 1.1). Кроме того, в теореме 1.2 устанавливается, что оптимальная стратегия определяется функциями, в которых достигается максимум в уравнении Беллмана–Гамильтона–Якоби. Приводятся численные примеры для случая убытков, распределенных экспоненциально и по Парето.

Во втором параграфе первой главы к возможности заключать договора перестрахования эксцедента убытка добавляется возможность вкладывать средства в некоторый рисковый актив. Стоимость этого актива в момент времени $t$ описывается геометрическим броуновским движением. Аналогично первому параграфу ставится задача максимизации вероятности неразорения. Также выводится уравнение Беллмана–Гамильтона–Якоби для максимальной вероятности неразорения, доказывается существование его решения (теорема 1.3) и теорема верификации (теорема 1.4). Кроме того, получен общий вид решения уравнения Беллмана–Гамильтона–Якоби вблизи нуля. Приведены численные примеры для случаев, когда убытки имеют экспоненциальное распределение и распределение Парето.

Во **второй и третьей главах** рассматривается модель с дискретным временем в модификации Диксона и Уотерса. Предполагается, что страховая компания работает $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ лет. При этом собственник компании инвестирует дополнительные средства в компанию в том случае, если капитал компании по итогам года опустился ниже некоторого заданного уровня $L \geq 0$. В такой ситуации ставится задача минимизации суммарных дисконтированных вливаний капитала.

В первом параграфе второй главы рассматривается возможность инвестирования средств в некий рисковый актив, годовая доходность которого в моменты времени $1, \ldots, n$ определяется последовательностью н.о.р. с.в. $Z_1, \ldots, Z_k$ таких, что $P(Z_k > 0) \in (0, 1)$ и $EZ_k > 0$. Доказывается, что минимальные дисконтированные вливания удовлетворяют уравнению динамического программирования, в случае $n = \infty$ также устанавливается существование решения этого уравнения. Кроме того, для случаев $n = 1$ (теорема 2.1), $n \geq 2$ (теорема 2.2) и $n = \infty$(теорема 2.3) показано, что оптимальный объем инвестиций в рисковый актив на первом шаге $n$–шагового процесса удовлетворяет некоторому интегральному уравнению. Доказаны существование и единственность решения этого уравнения.

Во втором параграфе второй главы рассматриваются стратегии перестрахования в модели с возможностью вливания капитала. Отдельно изучаются случаи пропорционального (на примере квотного договора) и непропорционального перестрахования (на примере договора эксцедента убытка). В теореме 2.5 находится оптимальная квота для случая $n = 1$, в теореме 2.6 — для случая $n \geq 2$, в теореме 2.7 — для случая $n = \infty$. Кроме того, в случае $n = \infty$ доказывается существование решения уравнения динамического программирования, которому удовлетворяют минимальные дисконтированные вливания капитала. Для случая перестрахования типа эксцедента убытка находится оптимальный уровень собственного удержания для случая $n = 1$ (теорема 2.8). Для обоих типов перестрахования приводится численный пример для случая убытков, имеющих экспоненциальное распределение.

В **третьей главе** также рассматривается модель с дискретным временем работы страховой компании. Как и в первом параграфе второй главы предполагается, что собственник компании имеет возможность дополнительного вливания капитала, а также вложения средств в некоторый рисковый актив. В данной главе изучается вопрос существования предельного распределения капитала компании в случае постоянной стратегии инвестирования. Доказано существование предельного распределения при некоторых ограничениях на параметры модели, а также установлен вид этого распределения (теорема 3.1). Кроме того, рассмотрено обобщение предложенной модели на случай, когда страховая компания также использует перестрахование. Доказано существование и найден вид предельного распределения капитала для случая пропорционального и непропорционального (на примере перестрахования эксцедента убытка) перестрахования (теорема 3.2).

# Глава 1
# Оптимальные стратегии в модели Крамера–Лундберга

В данной главе исследуется модель Крамера–Лундберга работы страховой компании, имеющей возможность минимизировать риск с помощью перестрахования и инвестирования средств в рыночный актив. В первом параграфе рассматривается страховая компания, которая имеет возможность выбирать и неограниченное число раз динамически заключать договора перестрахования типа эксцедента убытка. Во втором параграфе предполагается, что компания кроме того имеет возможность вкладывать средства в некий рисковый актив. В обоих случаях задача состоит в том, чтобы найти такую стратегию перестрахования и инвестирования, при использовании которой вероятность неразорения компании будет максимальной. В каждом случае выводятся уравнения типа Беллмана–Гамильтона–Якоби для оптимальной вероятности неразорения, и доказывается существование решения такого уравнения. Кроме того, устанавливается, что стратегия, определяемая соответствующим решением уравнения Беллмана–Гамильтона–Якоби, является оптимальной, т.е. приводит к максимальной вероятности неразорения компании. Для иллюстрации теоретических результатов, в обоих случаях приводятся численные примеры для различных распределений убытков.

## §1.1 Оптимальная стратегия перестрахования

Исследуемая в данном параграфе модель состоит в следующем. Пусть моменты $(T_i)_{i\geq 1}$ поступления требований образуют пуассоновский поток интенсивности $\lambda$, размеры выплат $(Y_i)_{i\geq 1}$ — н.о.р.с.в. с функцией распределения $Q(y)$. Обозначим число требований на отрезке $[0,t]$ как $N_t$. Пусть скорость поступления страховых премий равна $c$, причем $c > \lambda E[Y_i]$. Тогда при отсутствии перестрахования капитал $R_t$ страховой компании равен

$$R_t = s + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t > 0, \quad R_0 = s > 0. \tag{1.1}$$

Напомним теперь, что согласно договору эксцедента убытка перестраховщик покрывает убыток цедента, если его величина превосходит уровень собственного удержания $b$, но при этом размер этого покрытия не превосходит $M < \infty$ — ширины полосы перестрахования. Другими словами, любой убыток $Y$ можно разделить на две части: выплату цедента $\min\{b, Y\} + \max\{0, Y - M - b\}$ и выплату перестраховщика $\min\{M, \max\{0, Y - b\}\}$. В данной работе изучается возможность динамического выбора величин $b$ и $M$: цедент изменяет параметры договора $b_t$ и $M_t$ в любой момент времени $t \geq 0$, руководствуясь историей убытков до момента $t$. Пусть $\mathfrak{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ — естественная фильтрация, порожденная процессом $R_t$, т.е. $\mathcal{F}_t := \sigma\{R_u, u \leq t\}$. Дадим следующее

**Определение 1.1.** Назовем **стратегией перестрахования** эксцедента убытка случайный процесс $V = (V_t)_{t\geq 0} = (b_t, M_t)_{t\geq 0}$ такой, что процессы $(b_t)_{t\geq 0}$ и $(M_t)_{t\geq 0}$ предсказуемы относительно фильтрации $\mathfrak{F}$. Стратегия $V$ **допустимая**, если $b_t > 0$, $M_t > 0$ п.н. для всех $t \geq 0$.

Итак, далее будут рассматриваться только допустимые стратегии перестрахования. Множество всех таких стратегий обозначим $\mathbb{V}$. Пусть далее перестраховщик рассчитывает свою премию, исходя из принципа среднего с положительной нагрузкой $\theta > 0$. При этом предполагается, что

$$(1+\theta)\lambda E[Y_i] > c,$$

так как в противном случае цедент мог бы перестраховать весь свой риск и при этом получить прибыль. Обозначим $\rho := (1+\theta)\lambda$. Капитал $R_t^V$ страховой компании при использовании некоторой допустимой стратегии перестрахования $V = (V_t)_{t\geq 0} = (b_t, M_t)_{t\geq 0}$

равен

$$R_t^V = s + ct - \rho\int\limits_0^t E\min\{M_x, \max(0, Y - b_x)\}dx -$$
$$- \sum_{i=1}^{N_t}[\min(Y_i, b_{T_i}) + \max(0, Y_i - b_{T_i} - M_{T_i})],\ R_0^V = s > 0, \quad (1.2)$$

где $s > 0$ — начальный капитал. Наша задача состоит в минимизации вероятности разорения страховой компании, что эквивалентно задаче максимизации вероятности неразорения. Обозначим $\tau_V := \inf\{t \geq 0 : \quad R_t^V < 0\}$ — момент разорения. Тогда вероятность разорения запишется как $\psi_V(s) = P\{\tau_V < \infty | R_0^V = s\}$, а вероятность неразорения (которая нас и будет интересовать) как $\delta_V(s) = P\{\tau_V = \infty | R_0^V = s\} = 1 - \psi_V(s)$. Рассмотрим величину

$$\delta(s) = \sup_{V\in\mathbb{V}}\{\delta_V(s)\}. \quad (1.3)$$

**Определение 1.2.** Допустимая стратегия $V^* = (V_t^*)_{t\geq 0} \in \mathbb{V}$ **оптимальна**, если $\delta(s) = \delta_{V^*}(s)$.

Основная задача данного параграфа установить существование оптимальной стратегии $V^* = (V_t^*)_{t\geq 0}$. Будет доказано, что оптимальная стратегия существует и может быть задана следующим образом:

$$V_t^* = (b_t^*, M_t^*),\ b_t^* = b^*(R_{t-}^{V^*}),\ M_t^* = M^*(R_{t-}^{V^*}),\ t \geq 0,$$

где $R_t^{V^*}$ — капитал компании при использовании стратегии $V^*$, а $b^*(s)$ и $M^*(s)$ — измеримые функции.

### 1.1.1 Уравнение Беллмана–Гамильтона–Якоби

Здесь и далее будем предполагать, что $\delta(s)$ — дифференцируемая функция. Сначала заметим, что для случая отсутствия перестрахования в [28] показано, что вероятность неразорения $\delta_0(s)$ удовлетворяет следующему интегро–дифференциальному уравнению

$$\delta_0'(s) = \lambda\frac{\delta_0(s) - E[\delta(s - Y)]}{c}. \quad (1.4)$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$; из (1.3) по определению супремума следует, что для всякого $s \geq 0$ найдется такая стратегия $\tilde{V} = (\tilde{V}_t)_{t\geq 0}$, что $\delta_{\tilde{V}}(s) > \delta(s) - \varepsilon$. Для достаточно малого промежутка времени $h > 0$ рассмотрим стратегию $V = (V_t)_{t \geq 0}$, заданную для $t \geq 0$ следующим образом

$$V_t^h = (b_t^h, M_t^h) = \begin{cases} (b, M), & t \in [0, h \wedge T_1], \\ \tilde{V}_{t-h\wedge T_1}(R^V_{h\wedge T_1}), & t > h \wedge T_1, \end{cases}$$

где $b > 0$, $M > 0$ — произвольные постоянные из множества

$$\mathbb{D} := \{b > 0, \quad M > 0, \quad c - \rho E \min[M, \max(0, Y - b)] > 0\}. \tag{1.5}$$

Заметим, что последнее условие обеспечивает положительный приток премий в страховую компанию.

Пусть $K(b, M) := c - \rho E \min[M, \max(0, Y - b)]$. Тогда по формуле полной вероятности получаем следующее:

$$\delta(s) \geq \delta_{\tilde{V}}(s) = P(\tau_{\tilde{V}} = \infty | T_1 \leq h) P(T_1 \leq h) + P(\tau_{\tilde{V}} = \infty | T_1 > h) P(T_1 > h) =$$
$$\int\limits_0^h \int\limits_0^\infty \delta_{\tilde{V}}(s + K(b, M)t - \min(y, b) - \max(0, y - b - M)) dQ(y) \lambda e^{-\lambda t} dt + \delta_{\tilde{V}}(s + K(b, M)h) e^{-\lambda h} \geq$$
$$\delta(s + K(b, M)h) e^{-\lambda h} + \int\limits_0^h E[\delta(s + K(b, M)t - \min(Y, M) - \max(0, Y - b - M))] \lambda e^{-\lambda t} dt - \varepsilon, \tag{1.6}$$

Поскольку $\varepsilon$ произвольно, можем взять $\varepsilon$ сколь угодно близко к 0, делим все на $h$ и получаем:

$$\frac{\delta(s + K(b, M)h) - \delta(s)}{h} e^{-\lambda h} - \frac{\delta(s) - e^{-\lambda h}\delta(s)}{h} +$$
$$+ \frac{1}{h} \int\limits_0^h E[\delta(s + K(b, M)t - \min(Y, b) - \max(0, Y - b - M))] \lambda e^{-\lambda t} dt \leq 0.$$

В последнем неравенстве устремим $h$ к 0 и получим, что

$$\delta'(s) K(b, M) - \lambda \delta(s) + \lambda E[\delta(s - \min(Y, b) - \max(0, Y - b - M))] \leq 0. \tag{1.7}$$

Следовательно,

$$\sup_{(b,M) \in \mathbb{D}} \{K(b, M)\delta'(s) - \lambda\delta(s) + \lambda E[\delta(s - \min(Y, b) - \max(0, Y - b - M))]\} \leq 0$$

С другой стороны, переходя в (1.7) к пределу по $b \to \infty$ при фиксированном $M$ (то есть рассмотрев случай отсутствия перестрахования), получим следующее выражение под знаком sup:

$$c\delta'(s) - \lambda\delta(s) + \lambda E\delta[s - Y],$$

которое, как следует из уравнения (1.4) (для производной вероятности неразорения при отсутствии перестрахования), равно нулю. Значит, оптимальная вероятность неразорения $\delta(s)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\sup_{(b,M)\in\mathbb{D}} \{K(b,M)\delta'(s) - \lambda\delta(s) + \lambda E[\delta(s - \min(Y,b) - \max(0, Y - b - M))]\} = 0 \tag{1.8}$$

Заметим, что для всех $(b, M) \in \mathbb{D}$ по определению выполнено $K(b, M) > 0$. В таком случае уравнение (1.8) равносильно следующему

$$\sup_{(b,M)\in\mathbb{D}} \left\{\delta'(s) - \lambda\frac{\delta(s) - E[\delta(s - \min(Y,b) - \max(0, Y - b - M))]}{K(b,M)}\right\} = 0.$$

Поскольку $\sup[-f(x)] = -\inf f(x)$, то окончательно получим следующее уравнение:

$$\delta'(s) = \inf_{(b,M)\in\mathbb{D}} \lambda\frac{\delta(s) - E[\delta(s - \min(Y,b) - \max(0, Y - b - M))]}{c - \rho E\min[M, \max(0, Y - b)]}. \tag{1.9}$$

### 1.1.2 Существование решения уравнения Беллмана–Гамильтона–Якоби

В данном разделе будет доказано существование решения уравнения (1.9). Однако, прежде чем формулировать основную теорему докажем полезное вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.1.** *Пусть функция $\gamma(s)$ непрерывна при $s \geq 0$, непрерывно дифференцируема при $s > 0$ и $\gamma(s) = 0$ при $s < 0$. Тогда инфимум функции*

$$H(s, b, M) = \lambda\frac{\gamma(s) - E[\gamma(s - \min(Y,b) - \max(0, Y - b - M))]}{c - \rho E\min[M, \max(0, Y - b)]}$$

*по всем $(b, M)$, удовлетворяющим (1.5), и при фиксированном $s \geq 0$, достигается*

*(i) либо при $b = \infty$ $\quad (M = M^* < \infty)$ и равен*

$$\frac{\lambda}{c}(\gamma(s) - E\gamma(s - Y));$$

*(ii) либо при $b = b^* \le s, M = M^*$, где $(b^*, M^*)$ суть решение системы*

$$\begin{cases} H(s,b,M) = \lambda \frac{\gamma'(s-b)}{\rho}, \\ H(s,b,M) = \lambda[\rho(1-Q(b+M))]^{-1}\left(E\gamma'(s+M-Y) - \int_0^{b+M}\gamma'(s+M-y)dQ(y)\right), \end{cases}$$

*и равен $H(s, b^*, M^*) = \lambda\rho^{-1}\gamma'(s-b^*)$.*

*Доказательство.* Прежде всего, проведем некоторые вспомогательные преобразования. Введем обозначения для числителя и знаменателя дроби в определении $H(s,b,M)$:

$$H(s,b,M) := \frac{E(s,b,M)}{D(s,b,M)}.$$

Преобразуем числитель:

$$\begin{aligned} E(s,b,M) &:= \lambda(\gamma(s) - E[\gamma(s - \min\{Y,b\} - \max\{0, Y-b-M\})]) = \\ &= \lambda\Big(\gamma(s) - E\big[\gamma(s-\min\{Y,b\} - \max\{0,Y-b-M\})\times \\ &\qquad (\mathbb{I}\{Y\le b\} + \mathbb{I}\{b<Y\le b+M\} + \mathbb{I}\{Y>b+M\})\big]\Big). \end{aligned}$$

Откуда получаем, что $E(s,b,M)$ равен:

$$\begin{aligned} E(s,b,M) = \lambda\big(\gamma(s) - E[\gamma(s-Y)\mathbb{I}\{Y\le b\}] - E[\gamma(s-b)\mathbb{I}\{b<Y\le b+M\}] - \\ - E[\gamma(s-Y+M)\mathbb{I}\{Y>b+M\}]\big), \end{aligned}$$

учитывая что $\gamma(s) = 0$ при $s < 0$. Аналогичным образом поступим со знаменателем:

$$D(s,b,M) := c - \rho E\min\{M, \max(0, Y-b)\} = c + \rho E[\max(0,Y-b-M) - \max(0,Y-b)] =$$

$$= c + \rho E[\max(0,Y-b-M)\mathbb{I}\{Y>b+M\}] - \rho E[\max(0,Y-b)\mathbb{I}\{Y>b\}].$$

Найдем теперь частные производные $\frac{\partial}{\partial b}$ и $\frac{\partial}{\partial M}$ числителя

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial b}E(s,b,M) = \lambda(\gamma'(s-b)(Q(b+M)-Q(b))), \\ \frac{\partial}{\partial M}E(s,b,M) = -\lambda(E[\gamma'(s+M-Y)] - \int\limits_0^{b+M}\gamma'(s+M-y)dQ(y)), \end{cases}$$

и знаменателя

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial b}D(s,b,M) = \rho(Q(b+M)-Q(b)), \\ \frac{\partial}{\partial M}D(s,b,M) = \rho(Q(b+M)-1). \end{cases}$$

Наконец, можем найти частные производные функции $H(s, b, M)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial b} H(s,b,M) = \left( \frac{\partial E(s,b,M)}{\partial b} D(s,b,M) - \frac{\partial D(s,b,M)}{\partial b} E(s,b,M) \right) D^{-2}(s,b,M) \\ \frac{\partial}{\partial M} H(s,b,M) = \left( \frac{\partial E(s,b,M)}{\partial M} D(s,b,M) - \frac{\partial D(s,b,M)}{\partial M} E(s,b,M) \right) D^{-2}(s,b,M) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial b} H(s,b,M) = \frac{\lambda(\gamma'(s-b)(Q(b+M)-Q(b)))D(s,b,M)-\rho(Q(b+M)-Q(b))E(s,b,M)}{D^2(s,b,M)} \\ \frac{\partial}{\partial M} H(s,b,M) = \frac{-\lambda(E[\gamma'(s+M-Y)]-\int_0^{b+M}\gamma'(s+M-y)dQ(y))D(s,b,M)-\rho(Q(b+M)-1)E(s,b,M)}{D^2(s,b,M)} \end{cases} \tag{1.10}$$

Рассмотрим задачу Лагранжа классического вариационного исчисления с ограничениями типа неравенств:

$$\begin{cases} H(s,b,M) \to \inf\limits_{(b,M)} \\ b > 0 \\ M > 0 \\ c - \rho E \min\{M, \max(0, Y-b)\} > 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Запишем функцию Лагранжа для данной задачи

$$\mathfrak{L}(b,M) = \lambda_1 H(s,b,M) - \lambda_2 b - \lambda_3 M - \lambda_4 (c - \rho E \min\{M, \max(0, Y-b)\}), \lambda_i \geq 0,$$

и систему уравнений Лагранжа

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b} = \lambda_1 \frac{\partial H(s,b,M)}{\partial b} - \lambda_2 - \lambda_4 \rho (Q(b+M) - Q(b)) = 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial M} = \lambda_1 \frac{\partial H(s,b,M)}{\partial M} - \lambda_3 - \lambda_4 \rho (Q(b+M) - 1) = 0, \\ \lambda_2 b = 0, \quad \lambda_3 M = 0, \\ \lambda_4 (c - \rho E \min\{M, \max(0, Y-b)\}) = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Произведем привычный в подобных задачах разбор случаев:
1. $\lambda_1 = 0$. Тогда из первого и второго выражения системы (1.12) получаем:

$$\lambda_2 = -\lambda_4 \rho (Q(b+M) - Q(b)), \quad \lambda_3 = \lambda_4 \rho (1 - Q(b+M)).$$

Отсюда, в силу неотрицательности $\lambda_i$ имеем:

a) либо $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ — вырожденный случай;

b) либо $Q(b+M) = Q(b)$ и $Q(b+M) = 1$. Формально такая система конечных решений не имеет и окончательно, заключаем, что в случае 1 решений нет.

*Замечание* 1.1. Однако, оба равенства справедливы, если рассмотреть $b \to \infty$ при фиксированном $M$ (что соответствует случаю отсутствия перестрахования). При этом, значение функции $H(s, b, M)$, как несложно видеть, равно:

$$\frac{\lambda}{c}(\gamma(s) - E\gamma(s - Y)). \tag{1.13}$$

2. $\lambda_1 \neq 0$. Без ограничения общности, считаем $\lambda_1 = 1$. Нетрудно видеть, что $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

a) Пусть $b \leq s$. Получаем простую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial H(s,b,M)}{\partial b} = 0, \\ \frac{\partial H(s,b,M)}{\partial M} = 0, \end{cases}$$

из которой, используя выражения для частных производных, непосредственно получаем систему уравнений для нахождения стационарных точек задачи Лагранжа

$$\begin{cases} H(s, b, M) = \lambda \frac{\gamma'(s-b)}{\rho}, \\ H(s, b, M) = \lambda \frac{E[\gamma'(s+M-Y)] - \int\limits_0^{b+M} \gamma'(s+M-y)dQ(y)}{\rho(1-Q(b+M))}. \end{cases}$$

b) Пусть $b > s$. Получаем систему $Q(b + M) = Q(b)$ и $Q(b + M) = 1$, которая, как уже отмечено выше, конечных решений не имеет.

Собрав воедино все разобранные случаи, мы получаем утверждение леммы. □

Теперь, мы можем доказать основную теорему о существовании решения.

**Теорема 1.1** (О существовании)**.** *Существует неубывающее решение $\gamma(s)$ уравнения (1.9), непрерывное на $[0, +\infty)$ и непрерывно дифференцируемое на $(0, +\infty)$; кроме того, $\gamma(s) = 0$ при $s < 0$ и $\gamma(s) \to 1$ при $s \to \infty$.*

*Доказательство.* Определим последовательность функций $\gamma_n(s)$ следующим образом: $\gamma_0(s) = \delta_0(s)$ — вероятность неразорения при отсутствии перестрахования, и

$$\gamma'_{n+1}(s) = \inf_{(b,M)\in\mathbb{D}} \left\{ \lambda \frac{\gamma_n(s) - E[\gamma_n(s - \min\{Y, b\} - \max\{0, Y - b - M\})]}{c - \rho E \min\{M, \max(0, Y - b)\}} \right\} \tag{1.14}$$

для $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Докажем по индукции, что $\gamma'_{n+1}(s) \leq \gamma'_n(s)$. Действительно, при $n = 0$ имеем, с одной стороны, согласно уравнению (1.4) для вероятности неразорения при отсутствии перестрахования:

$$\gamma'_0(s) = \lambda \frac{\gamma_0(s) - E[\gamma_0(s-Y)]}{c};$$

с другой стороны, согласно (1.14) получаем:

$$\gamma'_1(s) = \inf_{(b,M)\in\mathbb{D}} \left\{ \lambda \frac{\gamma_0(s) - E[\gamma_0(s - \min\{Y,b\} - \max\{0, Y-b-M\})]}{c - \rho E \min\{M, \max(0, Y-b)\}} \right\}.$$

Нетрудно видеть, что $\gamma'_1(s) \leq \gamma'_0(s)$, поскольку выражение, от которого берется точная нижняя грань, при $b = \infty$ совпадает с $\gamma'_0(s)$. Предположим теперь, что $\gamma'_n(s) \leq \gamma'_{n-1}(s)$, покажем $\gamma'_{n+1} \leq \gamma'_n(s)$. Действительно, для любых $(b, M)$:

$$\gamma'_{n+1}(s)(c - \rho E \min\{M, \max(0, Y-b)\}) \leq \lambda\gamma_n(s) - \lambda E[\gamma_n(s - \min\{Y,b\} - \max\{0, Y-b-M\})] =$$

$$= \lambda \int\limits_0^\infty \int\limits_{s-\min\{y,b\}-\max\{0,y-b-M\}}^{s} \gamma'_n(u) du dQ(y) \leq \lambda \int\limits_0^\infty \int\limits_{s-\min\{y,b\}-\max\{0,y-b-M\}}^{s} \gamma'_{n-1}(u) du dQ(y) =$$

$$= \lambda\gamma_{n-1}(s) - \lambda E[\gamma_{n-1}(s - \min\{Y,b\} - \max\{0, Y-b-M\})].$$

Соответственно,

$$\gamma'_{n+1}(s) \leq \inf_{(b,M)\in\mathbb{D}} \left\{ \lambda \frac{\gamma_{n-1}(s) - E[\gamma_{n-1}(s - \min\{Y,b\} - \max\{0, Y-b-M\})]}{c - \rho E \min\{M, \max(0, Y-b)\}} \right\} = \gamma'_n(s).$$

Далее, нетрудно показать, что $\gamma_n(s) = 0$ при $s < 0$. Действительно, для $\gamma_0(s) = \delta_0(s)$ это очевидно, а для $\gamma_n(s)$ легко получается по индукции: для этого достаточно обратиться к выражению (1.14).

Докажем теперь, что $\gamma'_n(s) > 0$. Рассмотрим функцию двух переменных

$$H_n(s,b,M) = \lambda \frac{\gamma_n(s) - E[\gamma_n(s - \min\{Y,b\} - \max\{0, Y-b-M\})]}{c - \rho E \min\{M, \max(0, Y-b)\}}. \tag{1.15}$$

Покажем, что для любого $s > 0$, $\inf\limits_{(b,M)\in\mathbb{D}} H_n(s,b,M)$ по всем $(b, M)$, удовлетворяющим условию (1.5), положителен. Снова применяем метод математической индукции. При $n = 1$ утверждение очевидно. Допустим, что неравенство выполнено для $\gamma'_n(s)$. Согласно лемме 1.1, точная нижняя грань в выражении (1.14) может принимать одно из двух значений:

(i) $\gamma'_{n+1}(s) = \frac{\lambda}{c}(\gamma_n(s) - E[\gamma_n(s-Y)] = \frac{\lambda}{c}(\int\limits_0^s [\gamma_n(s) - \gamma_n(s-y)]dQ(y) + \int\limits_s^\infty \gamma_n(s)dQ(y)) > 0$, так как в силу предположения индукции $\gamma'_n(s) > 0$ и, следовательно, $\gamma_n(s)$ строго возрастает.

(ii)

$$\gamma'_{n+1}(s) = \lambda \frac{E[\gamma'_n(s+M-Y)] - \int_0^{b+M} \gamma'_n(s+M-y)dQ(y)}{\rho(1-Q(b+M))} =$$

$$\lambda \frac{\int_{b+M}^{\infty} \gamma'_n(s+M-y)dQ(y)}{\rho(1-Q(b+M))} > 0$$

по предположению индукции.

Таким образом, $\gamma'_n(s)$ — убывающая последовательность непрерывных функций, причем $\gamma'_n(s) > 0$. Значит, существует предел последовательности функций $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma'_n(s) = \upsilon(s)$, причем $\upsilon(s) \geq 0$. Положим $\gamma(s) = 1 - \int\limits_s^{\infty} \upsilon(u)du$, тогда функция $\upsilon(s)$ удовлетворяет уравнению:

$$\upsilon(s) = \inf_{(b,M)\in\mathbb{D}} \lambda \frac{\gamma(s) - E[\gamma(s - \min\{Y,b\} - \max\{0, Y-b-M\})]}{c - \rho E \min\{M, \max\{0, Y-b\}\}}.$$

Необходимо показать непрерывность функции $\upsilon(s)$. Пусть $s_1 > s_2$, имеем

$$|\upsilon(s_1) - \upsilon(s_2)| \leq \sup_{(b,M)\in\mathbb{D}} \left| \lambda \frac{\gamma(s_1) - E[\gamma(s_1 - \min\{Y,b\} - \max\{0, Y-b-M\})]}{c - \rho E \min\{M, \max(0, Y-b)\}} - \right.$$

$$\left. -\lambda \frac{\gamma(s_2) - E[\gamma(s_2 - \min\{Y,b\} - \max\{0, Y-b-M\})]}{c - \rho E \min\{M, \max(0, Y-b)\}} \right| \leq$$

$$2\lambda |\gamma(s_1) - \gamma(s_2)| \sup_{(b,M)\in\mathbb{D}} \frac{1}{c - \rho E \min\{M, \max(0, Y-b)\}} \leq |\gamma(s_1) - \gamma(s_2)| * Const.$$

Из этой оценки и будет следовать непрерывность.

Наконец, покажем, что $\upsilon(s) > 0$ для $s \geq 0$, то есть $\gamma(s)$ — строго возрастает. Действительно, согласно лемме 1.1, $\upsilon(s)$ может принимать следующие значения:

(i) $\upsilon(s) = \frac{\lambda}{c}(\gamma(s) - E[\gamma(s-Y)] = \frac{\lambda}{c}(\int\limits_0^s [\gamma(s) - \gamma(s-y)]dQ(y) + \int\limits_s^{\infty} \gamma(s)dQ(y)) \geq 0.$
Допустим, что $s_0 = \inf\{s : \upsilon(s) = 0\} < \infty$. Тогда найдется $\bar{s} \geq s_0 : \quad \upsilon(\bar{s}) = 0$ и, следовательно, $\gamma(\bar{s}) \equiv \gamma(\bar{s} - y)$ для всех $0 \leq y \leq \bar{s}$. Но тогда

$$0 = \int\limits_0^{\bar{s}} \upsilon(u)du \geq \int\limits_0^{s_0} \upsilon(u)du,$$

что противоречит определению $s_0$.

(ii) $\upsilon(s) = \lambda\frac{E[\upsilon(s+M-Y)]-\int_0^{b+M}\upsilon(s+M-y)dQ(y)}{\rho(1-Q(b+M))} = \lambda\frac{\int_{b+M}^{\infty}\upsilon(s+M-y)dQ(y)}{\rho(1-Q(b+M))} \geq 0$. Снова докажем от противного. Допустим, что $s_0 = \inf\{s : \upsilon(s) = 0\} < \infty$. Тогда $\exists \bar{s} \geq s_0 : \quad \upsilon(\bar{s}) = 0$, но тогда $\int\limits_{b+M}^{\infty} \upsilon(\bar{s} + M - y)dQ(y) = 0$. Следовательно, в силу непрерывности $\upsilon(s) = 0$ для всех $0 \leq s \leq \bar{s} + b$. Тогда

$$0 = \int\limits_0^{\bar{s}+b} \upsilon(u)du \geq \int\limits_0^{s_0+b} \upsilon(u)du,$$

что противоречит определению $s_0$.

□

### 1.1.3 Существование оптимальной стратегии перестрахования

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основной теоремы данного параграфа, нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

В работе М. Шэля [40] доказана следующая лемма для композиции двух абсолютно непрерывных функций.

**Лемма 1.2.** *Пусть $H$ — абсолютно непрерывная функция, заданная на интервале $I$, т.е.*

$$H(t) - H(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} h(z)dz,$$

*для некоторой локально интегрируемой функции $h$ на $I$. Пусть функция $G : [x_0, \infty) \to I$ также абсолютно непрерывна, т.е.*

$$G(x) - G(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} g(w)dw,$$

*для некоторой локально интегрируемой функции $g$ на $[x_0, \infty)$. Тогда, если функция $g$ строго положительна, то композиция $H \circ G$ абсолютно непрерывна и имеет место равенство*

$$H(G(x)) - H(G(x_0)) = \int\limits_{x_0}^{x} h(G(y))g(y)dy, \quad x \geq x_0.$$

В работе [40] приводится следующее утверждение.

**Лемма 1.3.** *Пусть* $\Xi_n := ((T_1, Y_1), (T_2, Y_2), \cdots, (T_n, Y_n))$, *где* $\{T_n\}$ *— пуассоновский поток, а* $\{Y_n\}$ *— н.о.р. случайные величины с функцией распределения* $Q$*; тогда для любой измеримой ограниченной снизу функции* $\xi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ *имеет место следующее равенство*

$$E[\xi(\Xi_{n-1}, T_n, Y_n)] = E\left[\int\limits_{T_{n-1}}^{T_n} \int \xi(\Xi_{n-1}, z, y) Q[dy] \lambda dz\right].$$

Мы воспользуемся леммой 1.3 для доказательства следующего утверждения.

**Лемма 1.4.** *Пусть* $R_t^V$ *— это капитал компании в момент* $t$*, задаваемый формулой (1.2); пусть* $\tau$ *— момент разорения, а* $X_t = R_{t\wedge\tau}^V$ *— соответствующий остановленный процесс, а* $K_t = \psi(X_t)$*, где* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— непрерывно дифференцируемая функция. Тогда:*

$$E[K_t] = \psi(s) + E\left[\int\limits_0^t \psi'(X_z)(c - \rho E \min\{M, \max(0, Y - b_z)\}) dz\right] +$$

$$+\lambda E \int\limits_0^t [\psi(X_z - \min\{Y, b_z\} - \max\{0, Y - b_z - M_z\}) - \psi(X_z)] dz. \tag{1.16}$$

*Доказательство.* Распишем искомое математическое ожидание $E[K_t] = E[\psi(X_t)]$ следующим образом

$$E[\psi(X_t)] = E[\psi(X_t)\mathbb{I}_{\{T_1 > t\}}] + E[\psi(X_t)\mathbb{I}_{\{T_1 \le t\}}] \tag{1.17}$$

и рассмотрим каждое слагаемое отдельно.

Первое слагаемое в (1.17) соответствует случаю, когда до момента $t$ не было ни одного убытка. В таком случае, капитал компании в момент $t$ равен

$$R_t^V = s + \int\limits_0^t (c - \rho E \min\{M_z, \max(Y - b_z, 0)\}) dz.$$

Применим лемму 1.2 к функциям $\psi(s)$ и $K_t = \int_0^t \psi'(X_z) dz$ и получим, что первое слагаемое в (1.17) равно

$$\psi(s) + E\left[\int\limits_0^t \psi'(X_z)(c - \rho E \min\{M, \max(0, Y - b_z)\}) dz\right]. \tag{1.18}$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое в сумме (1.17), оно соответствует случаю, когда к моменту времени $t$ произошел хотя бы один убыток. Распишем это слагаемое следующим образом

$$E[\psi(X_t)] = E[\psi(X_t) - \psi(X_{T_{N_t-1}})] + \ldots + E[\psi(X_{T_{n+1}} - \psi(X_{T_n})] + \ldots + E[\psi(X_{T_1}) - \psi(X_0)].$$

Рассмотрим моменты $T_n$ и $T_{n+1}$, и применим утверждение леммы 1.3 к функции $\psi(X_{T_{n+1}}) - \psi(X_{T_n})$, приняв $T_0 := 0$:

$$E[\psi(X_{T_{n+1}}) - \psi(X_{T_n})] = E\int\limits_{T_n}^{T_{n+1}}\int [\psi(X_z - \min\{Y, b_z\} - \max\{0, y - b_z - M_z\}) - \psi(X_z)]Q\{dy\}\lambda dz.$$

Тогда второе слагаемое равно

$$E\int\limits_{T_{N_t-1}}^{t}\int [\psi(X_z - \min\{Y, b_z\} - \max\{0, y - b_z - M_z\}) - \psi(X_z)]Q\{dy\}\lambda dz +$$
$$+ \sum_{i=0}^{N_t-2} E\int\limits_{T_i}^{T_{i+1}}\int [\psi(X_z - \min\{Y, b_z\} - \max\{0, y - b_z - M_z\}) - \psi(X_z)]Q\{dy\}\lambda dz$$

Сложив эти величины и учитывая (1.18), получим утверждение леммы. □

Наконец, нам еще понадобится теорема об измеримом выборе. В [7] приводится следующая формулировка

**Лемма 1.5** (Теорема об измеримом выборе). *Пусть $\mathbb{X}$ — метрическое пространство, $\mathbb{U}$ — компактное метрическое пространство, $D$ — замкнутое подмножество в $\mathbb{X} \times \mathbb{U}$, $D_{\mathbb{X}} := \{u \in \mathbb{U} | \exists x \in \mathbb{X} : \quad (x, u) \in D\}$ и пусть функция $f : D \to \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ — полунепрерывна снизу. Рассмотрим функцию $f^*(x) = \min\limits_{z \in D_{\mathbb{X}}} f(x, z)$. Тогда существует измеримая функция $\varphi : D_{\mathbb{X}} \to Z$, такая что $f(x, \varphi(x)) = f^*(x)$.*

Теперь мы можем перейти к доказательству основной теоремы данного параграфа — теоремы о верификации.

**Теорема 1.2** (О верификации). *Существует измеримая функция $\mathcal{V}^*(s) = (b^*(s), M^*(s))$, такая что точная нижняя грань в уравнении (1.9) для всякого $s \geq 0$ достигается в точке $(b^*(s), M^*(s))$. Кроме того, стратегия $V^* = (V_t^*)_{t \geq 0} = (b_t^*, M_t^*)_{t \geq 0}$, заданная по правилу $b_t^* = b^*(R_{t-}^{V^*})$, $M_t^* = M^*(R_{t-}^{V^*})$, $t \geq 0$, оптимальна, т.е. $\delta_{V^*}(s) \geq \delta_V(s)$ для любой допустимой стратегии $V \in \mathbb{V}$.*

*Доказательство.* Доказательство этой теоремы разобьем на две части. В первой мы докажем существование измеримой функции $\mathcal{V}^*(s)$, а во второй покажем оптимальность определяемой ею стратегии.

**1.** Существование измеримой функции $\mathcal{V}^*(s)$ мы докажем, основываясь на общей теореме об измеримом выборе 1.5. В нашем случае, в качестве пространства $\mathbb{X}$ мы рассмотрим вещественную прямую $\mathbb{R}$, в качестве $\mathbb{U}$ — расширенную вещественную плоскость $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, с конечной метрикой

$$d(x, u) = \frac{d_2(x, u)}{1 + d_2(x, u)},$$

где $d_2(x, u)$ — некоторая метрика на плоскости $\mathbb{R}^2$ (например, можно взять евклидово расстояние). Нетрудно понять, что в таком случае $\mathbb{U}$ — компактное метрическое пространство. Далее, рассмотрим функцию $H(s, b, M)$, определенную в лемме 1.1:

$$H(s, b, M) = \lambda \frac{\gamma(s) - E[\gamma(s - \min\{Y, b\} - \max\{0, Y - b - M\})]}{c - \rho E \min\{M, \max\{0, Y - b\}\}}, \tag{1.19}$$

где $\gamma(s)$ — решение уравнения (1.9), построенное в доказательстве теоремы 1.3, а функция $H$ определена на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{D}$, где

$$\mathbb{D} = \{(b, m) | b > 0, M > 0, c - \rho E \min\{M, \max(Y - b, 0)\} > 0\}.$$

Нетрудно показать, что функция $f$ непрерывна на $\mathbb{R} \times \mathbb{D}$ как композиция непрерывных функций (например, это можно сделать, расписав все математические ожидания в (1.19) через интегралы, как это делается в доказательстве леммы 1.1). Далее, заметим, что при таком определении пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{U}$ имеем

$$H^*(s) := \gamma'(s) = \min_{(b,M) \in \mathbb{D}} H(s, b, M).$$

Непосредственно к множеству $\mathbb{R} \times \mathbb{D}$ применить указанную выше теорему мы не можем, т.к. оно не является замкнутым. Поэтому рассмотрим для любого натурально го $n$ множество $\mathbb{D}_n := \{(b, m) | b \geq 1/n, M \geq 1/n, c - \rho E \min\{M, \max(Y - b, 0)\} \geq 1/n\}$ и применим теорему об измеримом выборе к множеству $[0, n] \times \mathbb{D}_n$. В результате, мы получим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует измеримая функция $\varphi_n(s)$, определенная на отрезке $[0, n]$, со значениями в $\mathbb{D}_n$ и такая, что $H[s, \varphi_n(s)] = H^*(s)$. Тогда предел таких функций есть измеримая функция $\lim_{n \to \infty} \varphi_n := \varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{D}$ и такая, что $f[s; \varphi(s)] = f^*(s)$. Окончательно, обозначив $V^*(s) := \varphi(s)$ мы получаем утверждение первой части теоремы.

**2.** Пусть $\gamma(s)$ — решение уравнения (1.9), существование которого доказано в предыдущей главе; напомним, что согласно теореме 1.1 это решение обладает следующими свойствами: $0 \le \gamma(s) \le 1$, $\gamma(s) = 0$ при $s < 0$ и $\lim\limits_{s\to\infty} \gamma(s) = 1$. Положим $\delta^*(s) = \gamma(s)$; мы покажем, что эта функция есть искомый супремум в (1.3).

Более строго, мы докажем, что стратегия $V^* = (V_t^*)_{t\ge0} = (b_t^*, M_t^*)_{t\ge0} = (b^*(R_{t-}), M^*(R_{t-}))_{t\ge0}$, которая определяется измеримой функцией $\mathcal{V}^*(s) = (\beta^*(s), \mathcal{M}^*(s))$, такова, что $\delta^*(s) = \delta_{V^*}(s)$ (то есть вероятность неразорения компании при использовании стратегии $V$ равна $\delta^*(s)$); более того, для любой предсказуемой стратегии $V$ имеем $\delta_{V*}(s) \ge \delta_V(s)$.

Пусть $R_t^{V^*}$ и $R_t^V$ это капитал страховой компании в момент $t$ при использовании стратегии $V_t^*$ и некоторой произвольной допустимой стратегии $V_t$ соответственно; также пусть $\tau^*$ и $\tau$ — соответствующие моменты разорения. Введем обозначения $X_t^*$ и $X_t$ соответственно для остановленных (в момент разорения) процессов $R_t^{V^*}$ и $R_t^V$, а $K_t^*$ и $K_t$ для преобразованных процессов, а именно:

$$K_t^* := \delta^*(X_t^*) = \delta(R_{t\wedge\tau^*}^{V^*}), \quad K_t := \delta^*(X_t) = \delta^*(R_{t\wedge\tau}^V).$$

Далее, в лемме 1.4 установлено, что для математического ожидания $E[K_t]$ (ровно как и для $E[K_t^*]$) справедлива следующая формула

$$E[K_t] = \delta^*(s) + E\left[\int\limits_0^t \delta^{*\prime}(X_z)(c - \rho E\min\{M, \max(0, Y - b_z)\})dz\right] +$$
$$+\lambda E\int\limits_0^t [\delta^*(X_z - \min\{Y, b_z\} - \max\{0, Y - b_z - M_z\}) - \delta^*(X_z)]dz. \qquad (1.20)$$

Заметим теперь, что для любой стратегии $V_t = (b_t, M_t)$ из уравнения Беллмана–Гамильтона–Якоби (1.9) следует, что для всякого $t \ge 0$

$$\delta^{*\prime}(X_t)(c - \rho E\min\{M_t, \max\{0, Y - b_t\}\}) - \lambda\delta^*(X_t)+$$
$$+ \lambda E[\delta^*(X_t) - \min\{Y, b_t\} - \max\{0, Y - b_t - M_t\})] \le 0, \quad (1.21)$$

причем для стратегии $V_t^*$ достигается равенство. Сложив (1.20) и (1.21) получаем, что

$$E[\delta_V(X_t)] \le E[\delta^*(X_t)] = E[K_t] \le \delta^*(s) = E[K_t^*],$$

причем для стратегии $V_t^*$ достигается равенство. Наконец, устремляя $t \to 0$, мы получаем, что $\delta^*(s) = \delta_{V^*}(s)$ и $\delta_{V*}(s) \ge \delta_V(s)$ для любой другой стратегии $V_t$. □

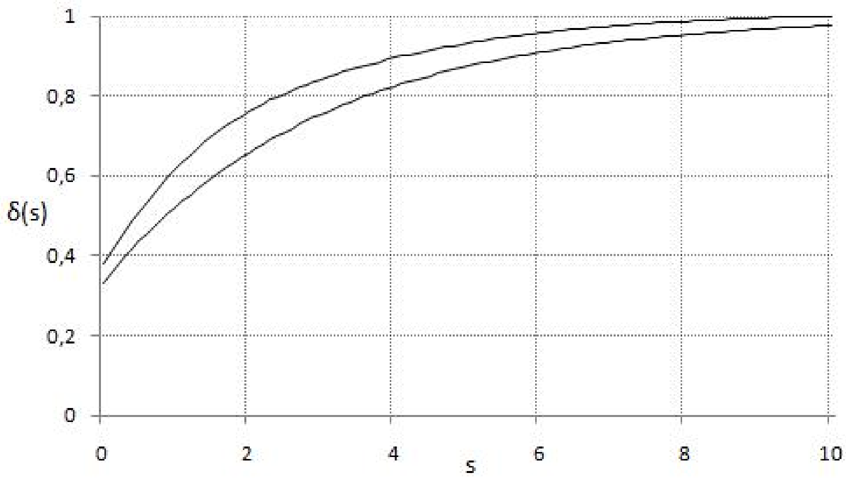


Рис. 1.1: Вероятности неразорения

### 1.1.4 Численные примеры

**Пример 1.1** (Случай экспоненциального распределения убытков)**.** Итак, рассмотрим для начала случай, когда поступающие требования $Y_i \sim \exp(l)$, $i \geq 1$. Даже в этом, на первый взгляд простом, случае невозможно найти решение уравнения Беллмана–Гамильтона–Якоби (1.9) аналитически. Для построения функции $\gamma(s)$ — решения уравнения (1.9) был использован метод построения последовательных приближений искомого решения функциями $\gamma_n(s)$, описанный в доказательстве теоремы 1.1. Случай экспоненциально распределенных убытков замечателен тем, что для первого шага приближений (т.е. функции $\gamma_0(s) = \delta_0(s)$ — вероятности неразорения при отсутствии перестрахования) найдено (см., например, [28]) явное выражение, а именно:

$$\delta_0(s) = 1 - \frac{\lambda l}{c} \exp\left\{-\left(l - \frac{\lambda}{c}\right) s\right\}.$$

В данном примере в расчете использованы следующие значения параметров: $c = 1.5$, $\rho = 1.6$, $\lambda = 1$, $l = 1$. В качестве начального значения возьмем $\gamma(0) = \delta_0(0)$, затем нормируем $\gamma(s)$, поделив на $\gamma(s_0)$, где $s_0$ достаточно велико. На рис. 1.1 (верхний график) показано решение $\gamma(s)$ уравнения (1.9), то есть вероятность неразорения компании, которая использует оптимальную стратегию перестрахования; легко видеть, что эта вероятность существенно больше вероятности неразорения при отсутствии перестрахования (нижний график). На рис. 1.2 показаны функции $b^*(s)$ и $M^*(s)$ для $s \in [0, 10]$, определя-

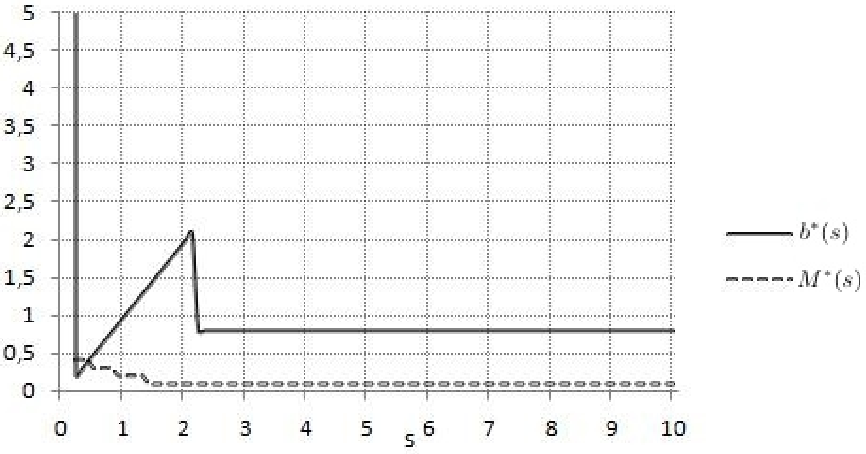


Рис. 1.2: Функции $b^*(s)$ и $M^*(s)$ в случае экспоненциального распределения

ющие оптимальную стратегию. Для малых $s$ оптимальной стратегией будет пара $(\infty, 0)$, т.е. отсутствие перестрахования вообще. Начиная с $s \approx 0.3$ до $s \approx 2.2$, величина $b^*(s) \approx s$ и в то же время ширина полосы перестрахования $M^*(s)$ убывает.

Для того, чтобы пояснить вид графиков функций $b^*(s)$ и $M^*(s)$, изображенных на рис. 1.2, мы рассмотрим функцию

$$H(s,b,M) = \lambda \frac{\gamma(s) - E[\gamma(s - \min\{Y,b\} - \max\{0, Y - b - M\})]}{c - \rho E \min\{M, \max(0, Y-b)\}}$$

и продемонстрируем ее поведение, в зависимости от параметров $(b, M)$ при различных значениях $s$. Так, на рис. 1.3 показана функция $H(s,b,M)$ как функция от $b$ при достаточно малых $s$ и $M = \{0.1, 0.2, 0.3\}$. Нетрудно видеть, что в минимальное значение эта функция принимает при $b \to \infty$.

Далее, рассмотрим рис. 1.4. На нем изображены графики функции $H(s,b,M)$ для $s = 2.1$ (верхний график), 2.2 (средний график) и 2.5 (нижний график) и $M = 0.1$ (т.е. мы фиксируем оптимальное $M^* = 0.1$, для того, чтобы показать выбор оптимального $b^*$). Из рисунка видно, что при для $s = 2.1$ минимальное значение достигается при $b = 2.1$, т.е. в точке до скачка, а при больших $s$ минимум функции $H(s,b,M)$ достигается уже при $b \approx 0.8$. Заметим, что скачок во всех случаях обуславливается видом числителя функции $H(s,b,M)$. Действительно, указанный числитель, расписанный через интегралы, имеет

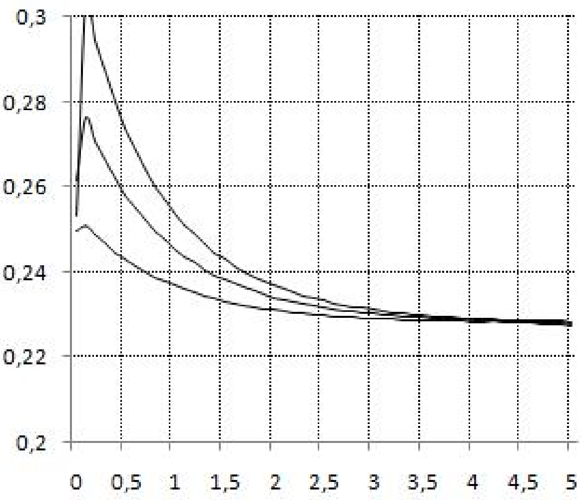


Рис. 1.3: Графики функции $H(s; b, M)$ при достаточно малом $s$

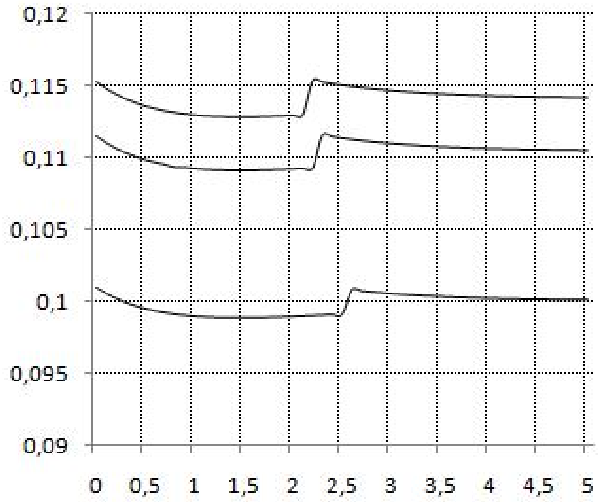


Рис. 1.4: Графики функции $H(s, b, M)$ при различных $s$

вид

$$\gamma(s) - \int\limits_0^b \gamma(s-y)dQ(y) - \gamma(s-b)(Q(b+M) - Q(b)) - \int\limits_{b+M}^{s+M} \gamma(s-y+M)dQ(y),$$

и нетрудно видеть, что при $b > s$ последние два слагаемых равны 0.

**Пример 1.2** (Случай убытков распределенных по Парето)**.** Наконец, рассмотрим еще случай распределения Парето с параметрами $\alpha$ и $\theta$, другими словами пусть убытки $Y_i$ имеют плотность распределения

$$q(y) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{(y+\theta)^{\alpha+1}}, \quad y > 0.$$

В данном примере используем следующие значения параметров: $\theta = 1$ и $\alpha = 2$, также, как и в случае экспоненциального распределения выбираем $\lambda = 1$, $c = 1.5$ и $\rho = 1.7$. В точке $s = 0$ при отсутствии перестрахования имеем $\delta_0(s) = 1 - c^{-1}(\alpha - 1)^{-1}$. На рис. 1.5 показаны графики функций $b^*(s)$ и $M^*(s)$, определяющих оптимальную стратегию, в описанной ситуации. В отличие от первого примера, в данном случае не существует $s$, такого что $b^*(s) = s$, т.е. мы всегда выбираем $b^*(s) < s$.

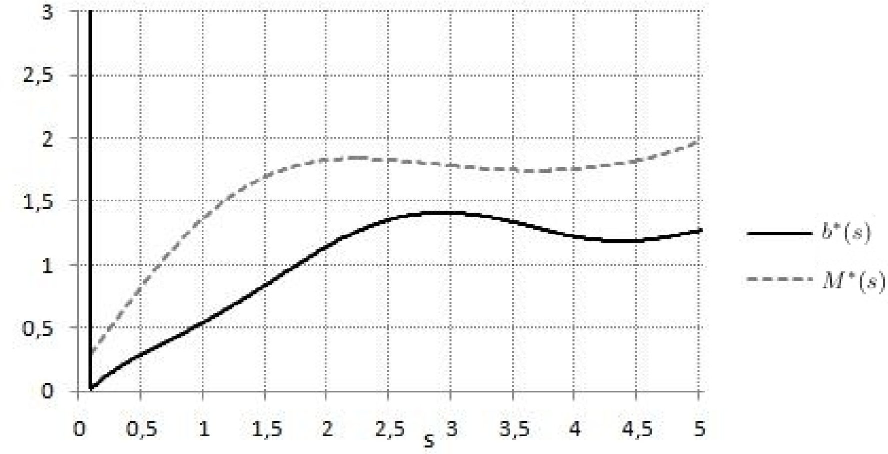


Рис. 1.5: Функции $b^*(s)$ и $M^*(s)$ в случае распределения Парето

## §1.2 Оптимальная стратегия перестрахования и инвестирования

Внесем некоторые изменения в модель, рассмотренную в предыдущем параграфе: кроме возможности отдать часть рисков в перестрахование, компания также имеет возможность вложить часть средств в некий рисковый актив.

Для облегчения технических выкладок, в данном параграфе рассматривается неограниченное перестрахование эксцедента убытка, а именно, при поступлении убытка $Y_i$, $i \geq 1$ страховая компания выплачивает $\min\{Y_i, b\}$, а перестраховщик — величину $(Y_i - b)^+$. Пусть $c(b)$ — часть страховой премии, оставшаяся у страховой компании после выплаты перестраховочной премии; предполагается, что функция $c(\cdot)$ возрастает (иначе получилось бы, что чем больше перестраховочное покрытие, тем оно дешевле), непрерывна и $c(\infty) = c$. В случае использования стратегии перестрахования $b = (b_t)_{t \geq 0}$, предсказуемой относительно фильтрации $\mathfrak{F}$, капитал страховой компании равен

$$R_t^b = R_0^b + \int\limits_0^t c(b_z)dz - \sum_{i=1}^{N_t} \min\{Y_i, b_{T_i}\} \tag{1.22}$$

и удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению (СДУ)

$$dR_t^b = c(b_t)dt - dU_t,$$

где $U_t = \sum\limits_{i=1}^{N_t} \min\{Y_i, b_{T_i}\}$.

Кроме того, мы предполагаем, что страховая компания имеет возможность вкладывать средства в некий рисковый актив. При этом считаем, что рассматриваемая ситуация идеальна в том смысле, что компания имеет возможность вложить больше средств, чем у нее имеется на настоящий момент, взяв для этого беспроцентный кредит. Рыночная стоимость $Z_t$ этого рискового актива (или стоимость акции), как в стандартной модели Блэка–Шоулса, представляет собой геометрическое броуновское движение и, соответственно, удовлетворяет следующему СДУ

$$dZ_t = Z_t(\mu dt + \sigma dW_t), \tag{1.23}$$

где $W_t$ — стандартное броуновское движение, а параметры $\sigma, \mu > 0$. Таким образом, $Z_t$ — это стоимость в момент $t$ одной денежной единицы, инвестированной в начальный момент. Страховая компания определяет размер $A_t$ средств, инвестируемых в актив в момент $t$, или, другими словами, компания в момент $t$ является держателем $\theta_t = A_t/Z_t$ акций. Считаем, что процессы $U_t := \{\sum\limits_{i=1}^{N_t} Y_i\}$ и $W_t$, $t \geq 0$, независимы. Пусть фильтрация $\overline{\mathfrak{F}} = (\overline{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$, где $\overline{\mathcal{F}}_t$ — наименьшая $\sigma$–алгебра, относительно которой измеримы $R_u$, заданный в (1.1), и $W_u$ для $u \leq t$.

По аналогии с первым параграфом дадим следующее

**Определение 1.3.** Назовем **стратегией перестрахования и инвестирования** случайный процесс $V = (V_t)_{t\geq 0} = (A_t, b_t)_{t\geq 0}$ такой, что процессы $(A_t)_{t\geq 0}$ и $(b_t)_{t\geq 0}$ предсказуемы относительно фильтрации $\overline{\mathfrak{F}}$. Стратегия $V$ **допустимая**, если $A_t \geq 0$, $b_t > 0$ п.н. для $t \geq 0$.

Множество допустимых стратегий перестрахования и инвестирования обозначим $\mathbb{V}_1$. Нетрудно видеть, что капитал страховой компании $R_t^V$ при использовании стратегии $V \in \mathbb{V}_1$ удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению

$$dR_t^V = dR_t^b + \theta_t dZ_t = (c(b_t) + \mu A_t)dt + \sigma A_t dW_t - dU_t^b, \quad R_0^V = s, \tag{1.24}$$

где $R_t^b$ — капитал компании, при использовании только стратегии перестрахования эксцедента убытка, а $U_t^b := \sum\limits_{i=1}^{N_t} \min(b_{T_i}, Y_i)$. Последнее равенство (1.24) — это формальная запись для следующего выражения

$$R_t^V = \int\limits_0^t (c(b_u) + \mu A_u)du + \int\limits_0^t \sigma A_u dW_u - U_t^b.$$

Для того, чтобы интеграл Ито в правой части верхнего равенства был определен корректно, мы полагаем процесс $A_t$ локально ограниченным. Напомним, что случайный процесс $A_t$ называется локально ограниченным, если найдется последовательность $\tau_n$ моментов остановки (относительно естественной фильтрации) и числовая последовательность $c_n$ такие, что $\tau_n \uparrow \infty$ и $|A_{\tau_n} \mathbb{I}\{\tau_n > 0\}| \le c_n$ п.н. для любого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\tau^V$ — это момент разорения страховой компании, использующей стратегию $V$, $\tau^V = \inf\{t \ge 0 : R_t^V < 0\}$. Тогда вероятность неразорения компании с начальным капиталом $s > 0$ равна

$$\delta^V(s) = P[\tau^V = \infty | R_0^V = s]. \tag{1.25}$$

Оптимальность стратегии состоит в том, что она максимизирует вероятность неразорения. А именно, как и в предыдущем параграфе, мы будем рассматривать величину

$$\delta(s) = \sup_{V \in \mathbb{V}_1} \{\delta^V(s)\},$$

и нашей основной задачей будет выяснить существование оптимальной стратегии $V^* = (V_t^*)_{t \ge 0}$, то есть такой, при которой $\delta(s) = \delta^{V^*}(s)$.

### 1.2.1 Уравнение Беллмана–Гамильтона–Якоби

Будем предполагать, что функция $\delta(s)$ дважды непрерывно дифференцируемая, стохастические интегралы по броуновскому движению являются мартингалами, а также, что все пределы и математические ожидания перестановочны.

Далее мы выведем уравнение Беллмана–Гамильтона–Якоби для оптимальной вероятности неразорения:

$$\sup_{A \ge 0,\, b > 0} \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 A^2 \delta''(s) + (c(b) + \mu A)\delta'(s) + \lambda E[\delta(s - \min\{Y, b\}) - \delta(s)] \right\} = 0 \tag{1.26}$$

с граничными условиями $\delta(\infty) = 1$ и $\delta(s) = 0$ при $s < 0$.

Для удобства дальнейших рассуждений мы рассмотрим процесс $X_t^V$, заданный следующим образом

$$dX_t^V = dR_t^V + dU_t, \; X_0^V = R_0^V + U_0 = s,$$

где процесс риска $R_t^V$ соответствующий стратегии $V \in \mathbb{V}_1$ определен в (1.24).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$; по определению супремума для всякого $s \ge 0$ найдется такая допустимая стратегия $V^0 = (V_t^0)_{t \ge 0} = (A_t^0, b_t^0)_{t \ge 0}$, что $\delta^{V^0}(s) > \delta(s) - \varepsilon$. Рассмотрим достаточно малый промежуток времени $[0, dt]$ и стратегию $V \in \mathbb{V}_1$ такую, что на промежутке $[0, dt]$ она не меняется, а дальше — совпадает с $V^0$

$$V = (A_t, b_t) = \begin{cases} (A, b), & t \in [0, dt \wedge T_1], \\ (A^0_{t-dt\wedge T_1}, b^0_{t-dt\wedge T_1}), & t > dt \wedge T_1. \end{cases}$$

Заметим, что для компании, использующей стратегию $V$ возможны два случая:

1. за время $[0, dt]$ происходит один убыток $Y$ с вероятностью $\lambda dt + \overline{o}(dt)$;

2. за время $[0, dt]$ не происходит убытков с вероятностью $1 - \lambda dt + \overline{o}(dt)$.

Поэтому, по формуле полной вероятности

$$\begin{gathered} \delta(s) \geq \delta^V(s) = P\{\tau^V = \infty | dt \geq T_1\} P\{dt \geq T_1\} + P\{\tau^V = \infty | dt < T_1\} P\{dt < T_1\} = \\ = \lambda dt E \delta^V(s - \min\{Y, b\}) + (1 - \lambda dt) E \delta^V(X^V_{dt}) + \overline{o}(dt) \geq \\ \lambda dt E \delta(s - \min\{Y, b\}) + (1 - \lambda dt) E \delta(X^V_{dt}) + \overline{o}(dt) - \varepsilon. \quad (1.27) \end{gathered}$$

Вычислим второе слагаемое в выражении выше. Имеем

$$\delta(X^V_{dt}) = \delta(X^V_{dt}) - \delta(X^V_0) + \delta(X^V_0) = d\delta(X^V_0) + \delta(s). \quad (1.28)$$

Используя лемму Ито, находим выражение для $d\delta(X^V_t)$:

$$d\delta(X^V_t) = \left[\delta'(X^V_t)(c(b) + \mu A) + \frac{1}{2}\delta''(X^V_t)\sigma^2 A^2\right] dt + \delta'(X^V_t)\sigma A dW_t.$$

Далее, подставив выражение выше и формулу (1.28) в выражение (1.27), учитывая что $\varepsilon$ произвольно (а значит его можно взять сколь угодно близким к 0), получим

$$\begin{gathered} \delta(s) \geq \lambda dt E \delta(s - \min\{Y, b\}) + \\ + (1 - \lambda dt) E \left[\delta(s) + \delta'(s)(c(b) + \mu A) dt + \frac{1}{2}\delta''(s)\sigma^2 A^2 dt + \delta'(s)\sigma A dW_t\right] + \overline{o}(dt). \end{gathered}$$

Преобразуем выражение выше, раскрыв скобки и сгруппировав должным образом слагаемые,

$$0 \geq \lambda E\left[\delta(s - \min\{Y, b\}) - \delta(s)\right] dt + (c(b) + \mu A)\delta'(s) dt + \frac{1}{2}\delta''(s)\sigma^2 A^2 dt + \overline{o}(dt),$$

с учетом того, что $E[\delta'(s)\sigma A dW_t] = \delta'(s)\sigma A E[dW_t] = 0$. Разделив обе части на $dt$, перейдя к пределу при $dt \to 0$ и максимизируя по $(A, b)$, получаем искомое уравнение (1.26).

Далее, заметим, что функция в левой части уравнения (1.26) достигает максимума по $A \geq 0$ либо в точке
$$A^*(s) = -\frac{\mu\delta'(s)}{\sigma^2\delta''(s)},$$
либо, если $A^*(s) < 0$ или не определена, на концах отрезка $[0, +\infty]$. Покажем, что последний случай невозможен. Справедлива следующая

**Лемма 1.6.** *Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция $\delta(s)$ является решением уравнения Беллмана–Гамильтона–Якоби* (1.26). *Тогда*

1. *функция $\delta(s)$ строго возрастает при $s \geq 0$;*
2. *функция $\delta(s)$ строго вогнутая, т.е. $\delta''(s) < 0$ при $s \geq 0$.*

*Доказательство.* Установим первое свойство. Пусть $0 < x < y$ — произвольные вещественные числа, а $V \in \mathbb{V}_1$ — произвольная допустимая стратегия. Обозначим $\tau_x$, $\tau_y$ — моменты разорения компании, использующей стратегию $V$ с начальным капиталом $x$ и $y$ соответственно; капитал компании в момент времени $t$ обозначим $R_t^x$ и $R_t^y$ соответственно. Тогда, справедливо следующая цепочка
$$\delta^{Ab}(y) = P(\tau_y = \infty) \geq P(\tau_x = \infty) + P(x - y < R_t^x < 0) > P(\tau_x = \infty) = \delta^{Ab}(x).$$
В силу произвольности стратегии $V$ получается, что при $0 < x < y$ имеем $\delta(x) < \delta(y)$.

Докажем строгую вогнутость. Предположим сначала, что $\delta''(x) > 0$ в некоторой точке $x$. В силу непрерывности это свойства будет выполнено и в некоторой окрестности точки $x$. Но в таком случае максимум по $A$ левой части (1.26) на этом интервале достигается при $A \to +\infty$ и равен $+\infty$, что противоречит тому, что $\delta(s)$ — решение (1.26). Далее, пусть теперь $\delta''(x) = 0$ на некотором интервале. Тогда, поскольку в силу строгого возрастания, $\delta'(x) > 0$ на этом интервале, то максимум левой части (1.26) снова достигается при $A = \infty$ и равен $+\infty$. Полученное противоречие доказывает, что $\delta''(s) < 0$. $\square$

Заметим, что если $\delta(s)$ — решение (1.26) с граничным условием $\delta(\infty) = 1$, то для всякого вещественного $k$ функция $\gamma(s) = k\delta(s)$ также является решением (1.26), но с граничным условием $\gamma(\infty) = k$. Поэтому мы можем ограничиться поиском дважды непрерывно дифференцируемой строго возрастающей вогнутой функции $\gamma(s)$ удовлетворяющей уравнению
$$\sup_{A \geq 0,\, b > 0} \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 A^2 \gamma''(s) + (c(b) + \mu A)\gamma'(s) + \lambda E[\gamma(s - \min\{Y, b\}) - \gamma(s)] \right\} = 0 \qquad (1.29)$$

с граничными условиями $\gamma(0) = 1$ и $\gamma(s) = 0$ при $s < 0$.

Как уже было доказано выше, максимум по $A \geq 0$ левой части (1.29) достигается в точке

$$A^*(s) = -\frac{\mu\gamma'(s)}{\sigma^2\gamma''(s)} > 0. \tag{1.30}$$

Подставив это выражение в (1.29), получаем

$$\sup_{b>0}\left\{-\frac{\mu^2\gamma'(s)^2}{2\sigma^2\gamma''(s)} + c(b)\gamma'(s) + \lambda(E[\gamma(s - \min\{b, Y\})] - \gamma(s))\right\} = 0. \tag{1.31}$$

Поскольку функция в левой части уравнения (1.31) непрерывна по $s$ и $b$, то согласно теореме об измеримом выборе найдется измеримая функция $b^*(s)$, в которой достигается максимум в (1.31) и соответственно в исходном уравнении (1.29).

Прежде чем двигаться дальше, сделаем несколько полезных замечаний. Во-первых, ясно что $A(0) = 0$. Действительно, в случае $A(0) \neq 0$ в силу неограниченности вариаций винеровского процесса, вероятность неразорения равно 0 и, очевидно, не является оптимальной, поскольку, например, при отсутствии инвестиций и перестрахования (т.е. $A = 0$, $b = \infty$), вероятность неразорения $\delta(0) = 1 - \lambda EY/c > 0$. Во-вторых, равенство $A(0) = 0$ влечет, согласно формуле (1.30) и лемме 1.6, $\lim\limits_{s\to 0+} \gamma''(s) = -\infty$.

Наконец, заметим, что для достаточно малых $s$ максимум в (1.31) достигается в точке $b^*(s) = \infty$, иными словами, при достаточно малом начальном капитале оптимальной стратегией будет чистое инвестирование без перестрахования. Более строго, справедлива

**Лемма 1.7.** *Пусть $\gamma(s)$ решение* (1.31) *на интервале* $[0, h)$ *для достаточно малого* $h > 0$. *Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $b^*(s) = \infty$ при $s < \varepsilon$.*

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что $b(0) = \infty$. Действительно, при подстановке в (1.31) значения $s = 0$, воспользовавшись замечанием выше, получаем уравнение

$$\sup_{b>0}\{c(b)\gamma'(0) - \lambda\gamma(0)\} = 0. \tag{1.32}$$

Выражение слева представляет собой линейную функцию, которая при $b > 0$ неограниченно возрастает, поэтому супремум достигается при $b \to \infty$. Далее, рассмотрим функцию от двух переменных

$$\mathcal{H}(s, b) := -\frac{\mu^2\gamma'(s)^2}{2\sigma^2\gamma''(s)} + c(b)\gamma'(s) + \lambda(E[\gamma(s - \min\{b, Y\})] - \gamma(s)).$$

Ясно, что $\mathcal{H}(0,\infty) = \lim_{b\to\infty} \mathcal{H}(0,b) = 0$. Рассмотрим относительное приращение на бесконечности, а именно, следующую величину

$$\frac{\mathcal{H}(s,b) - \mathcal{H}(s,\infty)}{b} = \frac{c(b)-c}{b}\gamma'(s) + \frac{\lambda}{b}E[\gamma(s-\min\{b,Y\} - \gamma(s-Y)]. \tag{1.33}$$

Преобразуем математическое ожидание в правой части, расписав его через интегралы

$$E[\gamma(s-\min\{b,Y\}) - \gamma(s-Y)] = \int\limits_b^\infty (\gamma(s-b) - \gamma(s-y))Q(dy).$$

Ясно, что для всякого достаточно большого $b$ найдется $0 < \varepsilon < h$ такое, что для всех $s \in [0,\varepsilon]$ это математическое ожидание меньше произвольно взятой величины. Таким образом, второе слагаемое в правой части (1.33) сколь угодно мало при достаточно малых $s$. При этом первое слагаемое в (1.33) отрицательно, т.к. $c(b) < c$ для всех $b$, а значит, функция $\mathcal{H}(s,b)$ при достаточно больших $b$ и малых $s$ строго убывает.

Докажем от противного. Предположим, что существует $s_0 \in [0,\varepsilon]$ такое, что инфимум функции $\mathcal{H}(s,b)$ по $b$ достигается в точке $b^*(s_0) < \infty$. Но в таком случае $\overline{\lim\limits_{s\to 0+}}\, b^*(s) = \bar{b} < \infty$ и при этом $\mathcal{H}(s_0, b^*(s_0)) = 0$. Переходя в последнем равенстве к верхнему пределу, получаем $\overline{\lim}_{u\to 0}\mathcal{H}(u,b^*(u)) = \mathcal{H}(0,\bar{b})$, причем $\bar{b} < \infty$. Таким образом, $\mathcal{H}(0,\bar{b}) = 0 = \mathcal{H}(0,\infty)$. Однако, выше было доказано, что $\mathcal{H}(s,b)$ строго убывает при достаточно больших $b$. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Далее, преобразуем уравнение (1.31) к виду

$$-\frac{\gamma''(s)}{\gamma(s)^2} = \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\frac{1}{\inf_{b>0}\{\lambda(\gamma(s) - E[\gamma(s-\min\{Y,b\}) - c(b)\gamma'(s)])\}} \tag{1.34}$$

и проинтегрируем от 0 до $s$

$$\frac{1}{\gamma'(s)} = \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\int\limits_0^s \frac{du}{\inf_{b>0}\{\lambda(\gamma(u) - E[\gamma(u-\min\{Y,b\}) - c(b)\gamma'(u)])\}} + \frac{1}{\gamma(0)}. \tag{1.35}$$

Наконец, положим $\upsilon(s) = \gamma'(s)$ и перепишем (1.35) следующим образом

$$\upsilon(s) = \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\int\limits_0^s \frac{du}{\inf_{b>0}\{\lambda\int_{u-b}^u Q(u-z)\upsilon(z)dz - c(b)\upsilon(u)\}} + \frac{c}{\lambda}\right)^{-1}. \tag{1.36}$$

Поскольку нас интересуют только строго возрастающие и вогнутые решения $\gamma(s)$, т.е. $\gamma''(s) < 0$, то выражение в знаменателе (1.34) должно быть положительным:

$$\inf_{b>0}\{\lambda\int_{s-b}^s Q(s-z)\upsilon(z)dz - c(b)\upsilon(s)\} > 0. \tag{1.37}$$

### 1.2.2 Существование решения уравнения Беллмана–Гамильтона–Якоби

Прежде всего заметим, что из формулы (1.32) вытекает, что $\gamma'(0) = \gamma(0)\frac{\lambda}{c} = \frac{\lambda}{c}$. Для доказательства основной теоремы нам понадобится дополнительная лемма. Мы покажем, что решение уравнения Беллмана–Гамильтона–Якоби (1.26) (соответственно (1.31), (1.36)) существует в некоторой $\varepsilon$-окрестности нуля.

Согласно лемме 1.7 существует $\varepsilon > 0$ такое, что оптимальное удержание $b^*(s) = \infty$ при $s \in [0, \varepsilon]$. Подставим в уравнение (1.29) оптимальное $b^*(s) = \infty$ и выражение (1.30) для оптимального $A$ и приведем его к виду

$$\lambda \int\limits_0^\infty (\gamma(s-y) - \gamma(s))dQ(y) + c\gamma'(s) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\frac{\gamma'(s)^2}{\gamma''(s)}. \tag{1.38}$$

Разделим обе части равенства на величину $\mu^2/\sigma^2$ и обозначим выражения $\lambda\sigma^2/\mu^2$ и $c\sigma^2/\mu^2$ соответственно как $\lambda_1$ и $c_1$:

$$\lambda_1 \int\limits_0^\infty (\gamma(s-y) - \gamma(s))dQ(y) + c_1\gamma'(s) = \frac{1}{2}\frac{\gamma'(s)^2}{\gamma''(s)}.$$

Проинтегрируем по частям интеграл в левой части равенства

$$\int\limits_0^\infty (\gamma(s-y)-\gamma(s))dQ(y) = -\int\limits_0^\infty (\gamma(s-y)-\gamma(s))d\overline{Q}(y) = -\int\limits_0^s (\gamma(s-y)-\gamma(s))d\overline{Q}(y) + \int\limits_s^\infty \gamma(s)d\overline{Q}(y) =$$

$$= -(1-\gamma(s))\overline{Q}(s) - \int\limits_0^s \gamma'(s-y)\overline{Q}(y)dy,$$

где $\overline{Q}(s) = 1 - Q(s)$. Затем сделаем замену $\upsilon = \gamma'$ и получим следующее уравнение

$$\upsilon'(s)\left[-\lambda_1 \int\limits_0^s \upsilon(s-y)\overline{Q}(y)dy + c_1(\upsilon(s) - \frac{\lambda_1}{c_1}\overline{Q}(s))\right] = \frac{1}{2}(\upsilon(s))^2. \tag{1.39}$$

**Лемма 1.8.** *Существует решение* $\upsilon \in C^1(0, \varepsilon) \cap C[0, \varepsilon)$ *уравнения* (1.39) *и такое, что* $\upsilon(s) > 0$, $\upsilon'(s) < 0$ *при* $s \in [0, \varepsilon)$, $\upsilon(0) = \lambda/c = \lambda_1/c_1$ *и*

$$\upsilon(s) = \frac{\lambda}{c} - \frac{\mu\lambda}{\sigma c^{\frac{3}{2}}}\sqrt{s} + \frac{\lambda}{c}\overline{o}(\sqrt{s}).$$

*Доказательство.* Сделаем в уравнении (1.39) замену $\nu(s) = \upsilon(s^2)$ и получим следующее равенство

$$\frac{\nu'(s)}{2s}\left[-\lambda_1\int\limits_0^{s^2}\upsilon(s^2-y)\overline{Q}(y)dy + c_1(\nu(s) - \frac{\lambda_1}{c_1}\overline{Q}(s^2))\right] = \frac{1}{2}(\nu(s))^2. \tag{1.40}$$

Произведя в интеграле в левой части равенства замену переменной интегрирования $y = s^2(1-t)$, приведем (1.40) к виду

$$\nu'(s)\Phi[\nu](s) = (\nu(s))^2, \tag{1.41}$$

где

$$\Phi[\nu](s) = -2\lambda_1 s\int\limits_0^1 t\nu(st)\overline{Q}(s^2(1-t^2))dt + c_1\frac{\nu(s) - \lambda_1/c_1\overline{Q}(s^2)}{s}.$$

Заметим, что $\nu(0) = \upsilon(0) = \gamma'(0) = \lambda/c = \lambda_1/c_1$. Кроме того, переходя к пределу при $s \to 0+$ в равенстве (1.41) получаем

$$(\nu'(0))^2 c_1 = (\nu(0))^2.$$

Поскольку $\nu'(s)|_{s=0} = (\gamma''(s^2) + 2s\gamma'(s^2))|_{s=0} = \gamma''(0) < 0$, надо взять $\nu'(0) = -\lambda_1/c_1^{3/2}$.

Далее, для $\varepsilon > 0$ и $\nu \in C^1[0,\varepsilon]$ определим

$$\Delta_\varepsilon[\nu] := \sup_{0<s\le\varepsilon}\frac{1}{s}|\nu'(s) - \nu'(0)|.$$

Рассмотрим пространство $\mathbb{H}_\varepsilon := \{h \in C^1[0,\varepsilon] : \ \Delta_\varepsilon[h] < \infty\}$ с нормой

$$||h||_\varepsilon := \max\{||h||_\infty, |h'(0)|, \varepsilon\Delta_\varepsilon[h]\}.$$

$\mathbb{H}_\varepsilon$ банахово как подпространство $C^1[0,\varepsilon]$ с эквивалентной нормой (см., например, [7]). Далее, определим замкнутое подмножество

$$D_\varepsilon^M := \left\{h \in \mathbb{H}_\varepsilon : \, h(0) = \lambda_1/c_1, \, h'(0) = -\frac{\lambda_1}{c_1^{3/2}}, \, ||h - \lambda_1/c_1||_\infty \le \alpha, \, \Delta_\varepsilon[h] \le M\right\} \subseteq H_\varepsilon,$$

где $M > 0$ и $0 < \alpha < 1/2$ — некоторые постоянные. На пространстве $\mathbb{H}_\varepsilon$ рассмотрим оператор $\mathcal{G}$, заданный следующим образом

$$\mathcal{G}[h](s) := \frac{\lambda_1}{c_1} + \int\limits_0^s \frac{h(x)^2}{\Phi[h](x)}dx, \, h \in D_\varepsilon^M, \, s \in [0,\varepsilon].$$

Заметим, что оператор $\mathcal{G}$ отображает $D_\varepsilon^M$ на себя и является сжимающим. Действительно, приведем основные оценки. Итак, пусть $h(s) \in D_\varepsilon^M$. Тогда, поскольку по правилу Лопиталя

$$\Phi[h](0) = c_1 \lim_{s\to 0} \frac{h(s) - \lambda_1/c_1\overline{Q}(s^2)}{s} = c_1 \lim_{s\to 0} \frac{h'(s) + 2sq(s^2)}{1} = c_1 h'(0) = -\frac{\lambda_1}{c_1^{1/2}},$$

то

$$\mathcal{G}[h](0) = \frac{\lambda_1}{c_1}, \quad \mathcal{G}[h]'(0) = \frac{h^2(0)}{\Phi[h](0)} = -\frac{\lambda_1^2/c_1^2}{\lambda^1/c_1^{1/2}} = -\frac{\lambda_1}{c_1^{3/2}}.$$

Далее, заметим, что, если $h \in D_\varepsilon^M$, то для достаточно малого $\alpha$ и достаточно большого $M > 0$ справедливы оценки

$$-\frac{\lambda_1}{c_1} + \alpha \le h(s) \le \frac{\lambda_1}{c_1} + \alpha, \quad M - \frac{\lambda_1}{c_1^{3/2}} \le \sup_{s\in(0,\varepsilon]} \frac{|h(s)|}{s} \le M + \frac{\lambda_1}{c_1^{3/2}}. \tag{1.42}$$

Используя эти оценки, получаем

$$||\mathcal{G}[h](s) - \frac{\lambda_1}{c_1}||_\infty \le \sup_{s\in[0,\varepsilon]} \left| \int_0^s \frac{h^2(x)dx}{\Phi[h](x)} \right| \le \varepsilon \sup_{s\in[0,\varepsilon]} \frac{h(s)^2}{\Phi[h](s)} \le \varepsilon^2 \frac{(\alpha + \lambda_1/c_1)^2}{c_1(\alpha + \lambda_1/c_1)} \le \frac{\varepsilon^2}{c_1}\left(\alpha + \frac{\lambda_1}{c_1}\right) \le \alpha,$$

для достаточно малого $\varepsilon$ (точнее для $\varepsilon < \sqrt{\alpha c_1(\alpha + \lambda_1/c_1)^{-1}}$). Оценка $\Delta_\varepsilon(\mathcal{G}[h]) \le M$ получается аналогично.

Таким образом, $\mathcal{G} : D_\varepsilon^M \to D_\varepsilon^M$ при определенном выборе параметров $M, \alpha$. Покажем теперь, что $\mathcal{G}$ — сжимающий оператор. Пусть $h_1, h_2 \in D_\varepsilon^M$. Поскольку, ясно, что $|\mathcal{G}[h_1]'(0) - \mathcal{G}[h_2]'(0)| = 0$, то $||\mathcal{G}[h_1] - \mathcal{G}[h_2]||_\varepsilon = \max(||\mathcal{G}[h_1] - \mathcal{G}[h_2]||_\infty, \Delta_\varepsilon(\mathcal{G}[h_1] - \mathcal{G}[h_2]))$. Далее, используя оценки (1.42), получаем

$$||\mathcal{G}[h_1] - \mathcal{G}[h_2]||_\infty = \sup_{s\in[0,\epsilon]} \left| \int_0^s \frac{h_1(s)^2\Phi[h_2](s) - h_2(s)^2\Phi[h_1](s)}{\Phi[h_1](s)\Phi[h_2](s)} \right| \le$$

$$\le \sup_{s\in[0,\epsilon]} \left| \frac{1}{s} \frac{h_1(s)^2\Phi[h_2](s) - h_2(s)^2\Phi[h_1](s)}{s^{-2}\Phi[h_1](s)\Phi[h_2](s)} \right| \le \frac{2(M + \lambda_1/c_1^{3/2})}{(M - \lambda_1/c_1^{3/2})^2} \sup_{s\in[0,\varepsilon]} |h_1(s) - h_2(s)| \le \xi ||h_1 - h_2||_\infty,$$

где $0 < \xi < 1$ для достаточно больших $M > 0$. Оценка $\Delta_\varepsilon(U[h_1] - U[h_2]) \le \xi ||h_1 - h_2||_\infty$ устанавливается аналогично. Окончательно имеем

$$||\mathcal{G}[h_1] - \mathcal{G}[h_2]||_\varepsilon \le \xi ||h_1 - h_2||_\infty \le \xi ||h_1 - h_2||_\varepsilon.$$

Таким образом $\mathcal{G}$ — сжимающий оператор на $D_\varepsilon^M$. Тогда по теореме Банаха о неподвижной точке сжимающего оператора существует $\nu \in D_\varepsilon^M$ такое, что $U[\nu](s) = \nu(s)$, иными словами, $\nu$ — решение (1.41) на $[0, \varepsilon]$. Кроме того, $\nu(s) = \lambda_1/c_1 - \lambda_1 c_1^{-3/2} s + \overline{o}(s)$. Следовательно,

$$\upsilon(s) = \nu(\sqrt{s}) = \frac{\lambda_1}{c_1} - \frac{\lambda_1}{c_1^{3/2}}\sqrt{s} + \overline{o}(\sqrt{s}).$$

$\square$

Далее мы покажем существование решения $\upsilon(s)$ уравнения (1.36) на $[0,\infty)$. Для простоты выкладок будем считать (без ограничения общности), что $\lambda = c = 1$. Действительно, если $c \neq 1$, то всегда можно перейти, например, к другой валюте. Если же $\lambda \neq 1$, то можно сделать замену времени.

**Теорема 1.3** (О существовании)**.** *Существует строго возрастающее решение* $\upsilon(s)$ *уравнения* (1.36) *на* $[0,\infty)$.

*Доказательство.* Пусть $[0, s_0]$ — наибольший интервал, на котором выполнено (1.36) и (1.37). Из леммы 1.8 следует, что $s_0 > 0$. Предположим, что $s_0 < \infty$. Покажем, что решение может быть продолжено на $[0, s_0+\alpha)$ для некоторого $\alpha > 0$, что приведет к противоречию. Определим постоянные $K$ и $L$ следующим образом:

$$K := g(s_0)^{-1} = \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\int\limits_0^{s_0} \frac{du}{\inf_{b>0}\{\int_{u-b}^{u}(1-Q(u-z))\upsilon(z)dz - c(b)\upsilon(u)\}} + 1,$$

и

$$L := \inf_{b>0}\left\{\int_{s_0-b}^{s_0}(1-Q(s_0-z))\upsilon(z)dz - c(b)\upsilon(s_0)\right\}.$$

Заметим, что $L > 0$ в силу (1.37). Рассмотрим оператор $\Xi$ на пространстве $\mathbb{H}$ положительных непрерывных убывающих функций $h(s)$ на $[s_0,\infty)$ таких, что $h(s_0) = 1/K$ и $h(s) = \upsilon(s)$ при $s < s_0$ (соответственно $h(s) = 0$ при $s < 0$):

$$\Xi[h](s) := \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\int\limits_0^{s} \frac{du}{\max[\inf_{b>0}\{(\int_{u-b}^{u} Q(u-z)h(z)dz) - c(b)h(u)\}, L]} + K\right)^{-1}. \tag{1.43}$$

Пусть $h_i(s) \in \mathbb{H}$ и обозначим $b_i(s)$, $i = 1, 2$ точки, в которых достигается инфимум в (1.43) при подстановке вместо $h(s)$ соответственно функций $h_1(s)$ и $h_2(s)$ (заметим, что такой точкой может быть и $\infty$). Пусть также

$$I_i(u) := \max\left\{\int\limits_{u-b_i(u)}^{u}(1-Q(u-z))h_i(z)dz - c(b_i(u))h_i(u),\ L\right\}.$$

Тогда

$$|\Xi[h_1](s) - \Xi[h_2](s)| \leq \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \frac{\int_{s_0}^{s} |I_1^{-1}(u) - I_2^{-1}(u)|du}{(K + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \int_{s_0}^{s} I_1^{-1}(u)du)(K + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \int_{s_0}^{s} I_2^{-1}(u)du)} \leq$$
$$\leq \frac{\mu^2}{2\sigma^2 K^2} \int_{s_0}^{s} |I_1^{-1}(u) - I_2^{-1}(u)|du.$$

Интеграл оценим следующим образом

$$\int_{s_0}^{s} |I_1^{-1}(u) - I_2^{-1}(u)|du \leq \frac{1}{L^2} \int_{s_0}^{s} |I_1(u) - I_2(u)|du$$

$$\leq \frac{1}{L^2} \int_{s_0}^{s} \left| c(b(u))(h_2(u) - h_1(u)) + \int_{u-b(u)}^{u} (1 - Q(u-z))(h_1(z) - h_2(z))dz \right| du,$$

где $b(s) = b_2(s)$, если $I_1(s) \geq I_2(s)$ и $b(s) = b_1(s)$ иначе. Предположим теперь, что $s \leq s_0 + \alpha$ для некоторого $\alpha > 0$ (выбор уточним ниже) и пусть $C := \max_{s \leq s_0+\alpha} |c(b(s))|$. Тогда

$$\int_{s_0}^{s} |I_1(u) - I_2(u)|du \leq \sup_{s_0 \leq s \leq s_0+\alpha} |h_1(s) - h_2(s)|[C(s - s_0) + (s_0 + \alpha)(s - s_0)].$$

Выберем теперь $\alpha > 0$ такое, что $C\alpha + (s_0 + \alpha)\alpha = (2L^2\sigma^2)/\mu^2$ (заметим, что положительность дискриминанта и отрицательность свободного члена гарантирует существование положительного корня). При таком выборе имеем

$$|\Xi[h_1](s) - \Xi[h_2](s)| \leq \frac{1}{K^2} \sup_{s_0 \leq s \leq s_0+\alpha} |h_1(s) - h_2(s)|,$$

что означает, что оператор $\Xi$ сжимающий на $(s_0, s_0 + \alpha)$ и значит существует функция $h(s)$ такая, что $\Xi[h](s) = h(s)$. Итак, мы показали, что существует решение $v(s)$ уравнения (1.36) на $(0, s_0 + \alpha)$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

### 1.2.3 Существование оптимальной стратегии

Прежде чем переходить к основной теореме верификации, выведем полезную формулу для математического ожидания остановленного процесса риска.

**Лемма 1.9.** *Пусть $R_t^V$ — капитал компании при использовании некоторой допустимой стратегии $V$, $\tau_\varepsilon^n := \inf\{t \geq 0 : R_t^V \notin (\varepsilon, n)\}$, а $\gamma(s)$ — решение уравнения* (1.29). *Справедлива следующая формула для математического ожидания $E\gamma(R^V_{t\wedge\tau_n^\varepsilon})$*

$$E\gamma(R^V_{t\wedge\tau_n^\varepsilon}) = \gamma(s) + E\int\limits_0^{t\wedge\tau_n^\varepsilon}\left[(c(b_u) + \mu A_u)\gamma'(R_u^V) + \frac{\sigma^2}{2}A_u^2\gamma''(R_u^V)\right]du +$$

$$+ \lambda E\int\limits_0^{t\wedge\tau_n^\varepsilon} E[\gamma(R_u^V - \min\{b_u, Y\}) - \gamma(R_u^V)]du. \quad (1.44)$$

*Доказательство.* Действительно, сначала распишем $E\gamma(R^V_{t\wedge\tau_n^\varepsilon})$ по формуле полной вероятности

$$E\gamma(R^V_{t\wedge\tau_n^\varepsilon}) = E\gamma(R^V_{t\wedge\tau_n^\varepsilon})\mathbb{I}\{T_1 > t\} + E\gamma(R^V_{t\wedge\tau_n^\varepsilon})\mathbb{I}\{T_1 \leq t\}. \quad (1.45)$$

Первое слагаемое соответствует случаю, когда до момента $t$ отсутствуют убытки, преобразуем его, используя формулу Ито,

$$Ef\left(s + \int\limits_0^{t\wedge\tau_n^\varepsilon}(c(b_u) + \mu A_u)du + \int\limits_0^{t\wedge\tau_n^\varepsilon}\sigma A_u dW_u\right) =$$

$$= \gamma(s) + E\int\limits_0^{t\wedge\tau_n^\varepsilon}\left[(c(b_u) + \mu A_u)\gamma'(R_u^V) + \frac{\sigma^2}{2}A_u^2\gamma''(R_u^V)\right]du + E\int\limits_0^{t\wedge\tau_n^\varepsilon}\sigma A_u\gamma'(R_u^V)dW_u. \quad (1.46)$$

Заметим, что в силу локальной ограниченности процесса $A_t$, для всех $\varepsilon, n > 0$ $A_t$ — ограничен на $[0, \tau_\varepsilon^n]$. Следовательно, все стохастические интегралы в (1.46) определены корректно и, кроме того, последнее математическое ожидание равно нулю. Перейдем ко второму слагаемому в (1.45). Распишем его следующим образом

$$E\gamma(R^V_{t\wedge\tau_n^\varepsilon}) = \sum_{i=1}^{N_{\tau_\varepsilon^n}}[\gamma(R^V_{T_i}) - \gamma(R^V_{T_{i-1}})]. \quad (1.47)$$

Применив лемму 1.3 к разностям вида $\gamma(R^V_{T_i}) - \gamma(R^V_{T_{i-1}})$, составляющим сумму (1.47), получим, что второе слагаемое в (1.45) равно

$$E\gamma(R^V_{t\wedge\tau_n^\varepsilon})\mathbb{I}\{T_1 \leq t\} = \lambda E\int\limits_0^{t\wedge\tau_n^\varepsilon} E[\gamma(R_u^V - \min\{b_u, Y\}) - \gamma(R_u^V)].$$

Окончательно, сложив оба слагаемых, получаем формулу (1.44). □

Перейдем к основной теореме данного раздела.

**Теорема 1.4** (О верификации)**.** *Пусть $\gamma(s)$ строго возрастающее, дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения Беллмана–Гамильтона–Якоби* (1.29) *и, соответственно, уравнения* (1.31)*. Тогда $\gamma(s)$ ограничена, а оптимальная вероятность неразорения $\delta(s) = \gamma(s)/\gamma(\infty)$. Кроме того, существуют измеримые функции $A^*(s)$ и $b^*(s)$ такие, что при каждом $s \geq 0$ супремум в уравнении* (1.29) *достигается в точках $(A^*(s), b^*(s))$. При этом стратегия $V^* = (V_t^*)_{t\geq 0} = (A_t^*, b_t^*)_{t\geq 0}$ такая, что $A_t^* = A^*(R_{t-})$, $b_t^* = b^*(R_{t-})$, $t \geq 0$, оптимальна.*

*Доказательство.* Существование измеримой функции $b^*(s)$ вытекает из теоремы об измеримом выборе (лемма 1.5), примененной к уравнению (1.31). Измеримая функция $A^*(s)$ находится затем по формуле (1.30).

Далее, рассмотрим произвольную допустимую стратегию $V \in \mathbb{V}_1$. Пусть $R_t^{V^*}$ и $R_t^V$ — капитал страховой компании, использующей соответственно стратегию $V^*$ и $V$. Пусть $\tau^*$ и $\tau$ — соответствующие моменты разорения. Рассмотрим остановленные процессы $\gamma(R^{V^*}_{t\wedge\tau_\varepsilon^{*n}})$ и $\gamma(R^V_{t\wedge\tau_\varepsilon^n})$, где $\tau_\varepsilon^{*n} = \inf\{t \geq 0 : R_t^{V^*} \notin (\varepsilon, n)\}$ и $\tau_\varepsilon^n = \inf\{t \geq 0 : R_t^V \notin (\varepsilon, n)\}$, а $\varepsilon$ и $n$ такие, что $0 < \varepsilon < x < n$.

Заметим, что из уравнения Беллмана–Гамильтона–Якоби (1.29) следует, что для стратегии $V$ и капитала $R_t^V$ выполнено следующее неравенство

$$\frac{1}{2}\sigma^2 A_t^2 \gamma''(R_t) + (c(b_t) + \mu A_t^*)\gamma'(R_t) + \lambda E[\gamma(R_t - \min\{Y, b_t\}) - \gamma(R_t)] \leq 0,$$

причем для стратегии $V^*$ и капитала $R_t^{V^*}$ достигается равенство. Далее, используя это неравенство и переходя к пределу $\varepsilon \to 0$, $n \to \infty$ в (1.44), по теореме о монотонной сходимости заключаем

$$E[\gamma(R^V_{t\wedge\tau})] \leq \gamma(s), \qquad (1.48)$$

причем для $R_t^{V^*}$ достигается равенство.

В работе Шмидли доказано (см. [45], лемма 2.9), что для произвольной стратегии $V$ капитал $R_t^V \to \infty$ при $t \to \infty$ на $\{\tau^V = \infty\}$. По лемме Фату при $t \to \infty$, примененной к последовательности $E[\gamma(R^V_{t\wedge\tau})]$ получаем

$$\gamma(\infty)P[\tau = \infty] \leq \gamma(\infty)P[\tau = \infty] + \gamma(0)P[\tau < \infty] = \\ E \liminf_{t\to\infty} \gamma(R^V_{t\wedge\tau}) \leq \liminf_{t\to\infty} E\gamma(R^V_{t\wedge\tau}) \leq \gamma(s). \qquad (1.49)$$

Но поскольку существует такая допустимая стратегия, для которой выполнено $P[\tau = \infty] > 0$ (например, при отсутствии перестрахования и инвестиций, т.е. $A = 0$, $b = \infty$), то из (1.49) заключаем, что $\gamma(\infty) < \infty$. Далее, из (1.49) следует, что $\delta^V(s) = P[\tau = \infty] \leq \gamma(s)/\gamma(\infty)$, причем для $\delta^{V^*}(s) = P[\tau^* = \infty]$ достигается равенство. Действительно, из формулы (1.48) при $t \to \infty$ следует, что $E\gamma(R_\tau^V) \leq \gamma(s)$ с равенством для $R_{\tau^*}^{V^*}$. Иными словами, $E\gamma(R_{\tau^*}^{V^*}) = \gamma(\infty)P[\tau^* = \infty] = \gamma(s)$.

Итак, мы доказали, что для произвольной допустимой стратегии $V \in \mathbb{V}_1$ имеем $\delta^V(s) \leq \delta^{V^*}(s)$, что и означает что стратегия $V^*$ оптимальная. □

### 1.2.4 Численные примеры

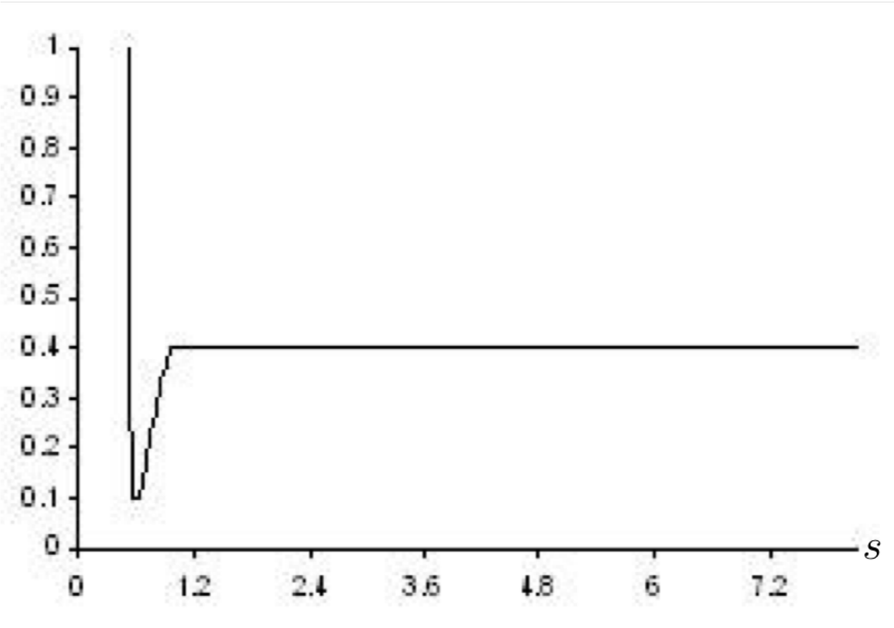


Рис. 1.6: Оптимальный уровень собственного удержания $b^*(s)$ в случае экспоненциального распределения

Мы рассмотрим два частных случая описываемой выше модели, а именно, случаи, когда размеры выплат имеют распределение с легкими хвостами (экспоненциальное) и с тяжелыми (Парето). В обоих случаях будем полагать $\lambda = 1$, а параметры в модели Блэка–Шоулса соответственно $\mu = 0,04$ и $\sigma = 0,01$. Также, будем считать, что перестраховочная премия рассчитывается, исходя из принципа среднего с нагрузкой безопасности $\theta$, то есть часть премии, остающаяся у цедента равна $c(b) = c - (1+\theta)\lambda E[Y - \min\{b, Y\}]$. Для получения численного решения уравнения Беллмана –Гамильтона–Якоби (1.26), найдем решение $\upsilon(s) = \gamma'(s)$ уравнения (1.36). Точнее, перепишем уравнение (1.36) следующим образом

$$\upsilon'(s) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \frac{1}{\sup_{b>0}\{c(b)\upsilon(s) - \lambda \int_{s-b}^{s} Q(s-z)\upsilon(z)dz\}}$$

и найдем решение этого уравнения методом Эйлера. Вид функции $\upsilon(s)$ для $s$ близких к 0 определяется по лемме 1.8. Затем решение находим методом последовательных приближения с шагом

$$\upsilon'_{n+1}(s) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \frac{1}{\sup_{b>0}\{c(b)\upsilon_n(s) - \lambda \int_{s-b}^{s} Q(s-z)\upsilon_n(z)dz\}}.$$

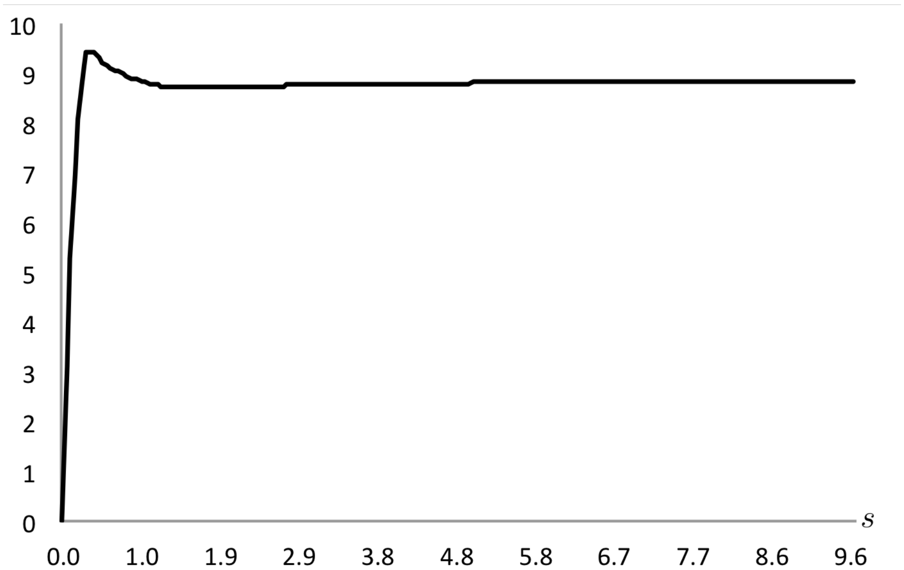


Рис. 1.7: Оптимальный объем инвестиций $A^*(s)$ в случае экспоненциального распределения

**Пример 1.3** (Экспоненциальное распределение)**.** Пусть поступающие требования имеют экспоненциальное распределение со средним равным единице, то есть $Q(y) = 1 - e^{-y}$. Возьмем параметры $c = 1$ и $\theta = 0,2$.

На рис. 1.6 изображен график функции $b^*(s)$, определяющей оптимальный уровень собственного удержания, для $s \in [0, 8]$. Заметим, что как и следует из леммы 1.7, для достаточно близких к 0 значений $s$ оптимальной стратегией будет не перестраховывать вообще, то есть $b^*(s) = \infty$. При $s \approx 0,5$ происходит скачок уровня собственного удержания $b^*(x)$ до значения $0,1$ и затем функция возрастает до значения $0,4$. Для $s > 0,9$ оптимальное удержание $b^*(s) \approx 0,4$. На рис. 1.7 показан график функции $A^*(s)$, определяющей оптимальный объем инвестиций. Заметим, что при достаточно малом начальном капитале $s$ оптимально инвестировать больше, чем есть на данный момент, то есть брать кредит. Для достаточно больших значений $s$ на графике $A^*(s) \approx 8,9$.

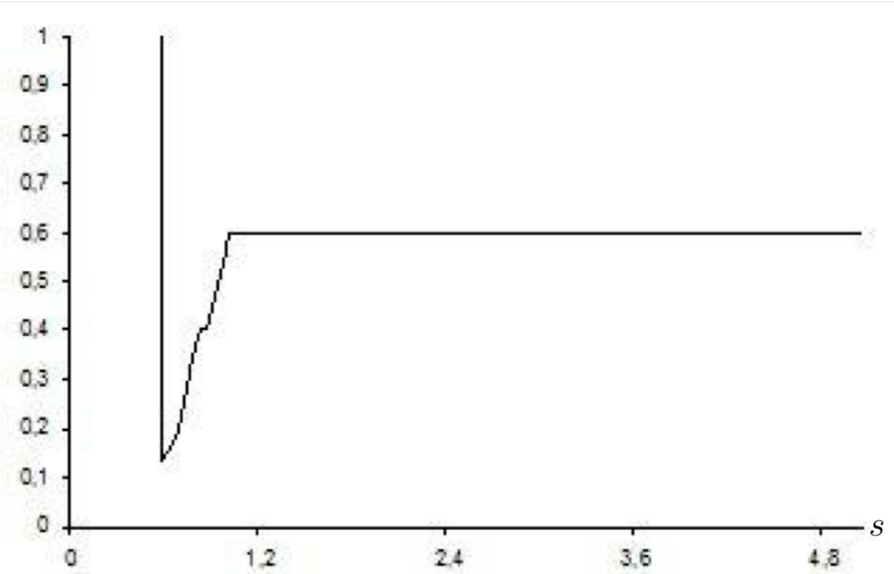


Рис. 1.8: Оптимальный уровень собственного удержания $b^*(s)$ в случае распределения Парето

**Пример 1.4** (Распределение Парето)**.** Пусть поступающие требования имеют распределение Парето с параметром равным 2, то есть $Q(y) = 1 - (1+y)^{-2}$. В данном примере были взяты следующие значения параметров: $c = 1,2$ и $\theta = 1,4$.

На рис. 1.8 и 1.9 показаны графики функций $b^*(s)$ и $A^*(s)$, определяющих соответственно оптимальный уровень собственного удержания и оптимальный объем инвестиций, для данного сулчая. Подобно предыдущему примеру для достаточно малого начального капитала оптимальным будет отказаться от перестрахования. Заметим еще, что вблизи нуля оптимальный объем инвестиций, функция $A^*(s)$, ведет себя как функция $c\sqrt{s}$, затем убывает и терпит скачок в том значении начального капитала, когда необходимо брать перестрахование. Наконец, функция $A^*(s)$ приближается к значению $\approx 5,5$. Заметим, что

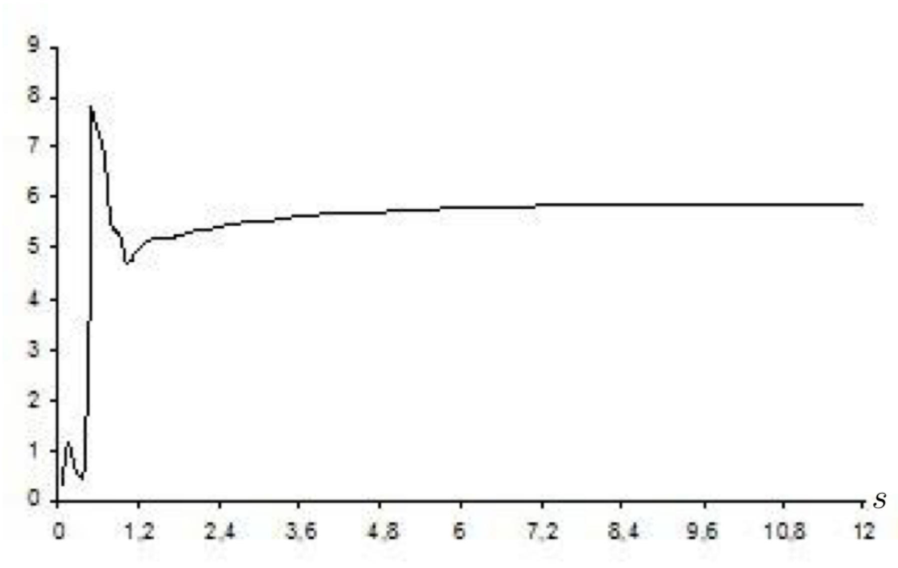


Рис. 1.9: Оптимальный объем инвестиций $A^{*}(s)$ в случае распределения Парето

в случае распределения Парето, сходимость метода Эйлера достаточно медленная, полученные графики для оптимальных $b^{*}(s)$ и $A^{*}(s)$ построены на основе 20 приближения функции $v(s)$.

# Глава 2

# Оптимальные стратегии в модели с возможностью дополнительного вливания капитала

В данной главе исследуется модель работы страховой компании с дискретным временем, модифицированная по Диксону и Уотерсу. Предполагается, что собственник компании, для того чтобы избежать ее разорения, имеет возможность инвестировать дополнительные средства, если капитал компании по итогам года опустился ниже некоторого фиксированного уровня. В такой ситуации целью руководства компании становится минимизация потенциальных вливаний. В первом параграфе рассмотрен случай, когда страховая компания, для минимизации этих издержек, вкладывает средства в некий рисковый актив. В данном случае требуется определить оптимальный размер инвестируемых в рыночный актив средств, позволяющий минимизировать дополнительные вливания капитала. Рассматриваются случаи конечного и бесконечного горизонта планирования. Во втором параграфе рассмотрен случай, когда страховая компания, для минимизации этих издержек, прибегает к услугам перестраховщика. В такой ситуации, требуется определить оптимальные параметры договора перестрахования, позволяющие минимизировать дополнительные вливания капитала. Рассматриваются случаи пропорционального перестрахования, на примере квотного договора, и непропорционального, на примере договора эксцедента убытка. Приведены численные примеры для случая экспоненциального распределения требований.

## §2.1 Оптимальное инвестирование

Исследуемая в данном параграфе модель состоит в следующем. Страховая компания работает $n$ лет (или иных промежутков времени). Пусть $c > 0$ — суммарный размер страховый премий, поступивших в компанию за год, а $Y_k$ — совокупный размер требований или убытков, поступивших в компанию в $k$-ом году, $1 \leq k \leq n$. Предполагается, что $Y_1, \dots Y_k, \dots, Y_n$ — н.о.р. неотрицательные с.в. с абсолютно непрерывной функцией распределения $Q(y)$, имеющей непрерывную плотность $q(y)$. Кроме того, страховая компания имеет возможность вкладывать средства в некий рыночный актив. Пусть последовательность с.в. $Z_1, \dots, Z_n$ определяет результат вложения средств в этот актив, то есть, если в $(k-1)$-ый момент времени была вложена одна денежная единица, то в $k$-ый момент мы получим $(1 + Z_k)$ денежных единиц. Мы считаем, что рынок, на котором оборачивается данный актив, безарбитражный, то есть $P(Z_k \geq 0) \in (0, 1)$, и, следовательно, от вложения в рисковый актив возможен как доход, так и убыток. Кроме того, пусть средняя доходность актива $EZ_1 > 0$, иначе нет никакого смысла вкладывать средства в этот актив. Предполагается, что с.в. $Z_1, \dots, Z_n$ — н.о.р. с функцией распределения $H(z)$ и независимы от $Y_1, \dots, Y_n$. Более того, в каждый момент времени $k$ принимается решение о размере $A_{k+1}$ денежных средств, инвестируемый в рыночный актив в $(k+1)$-ом году. Иными словами, рассматриваются стратегии инвестирования $A = (A_0, \dots, A_{n-1})$. Пусть фильтрация $\mathfrak{F}^{inv} = (\mathcal{F}_k^{inv})_{k=\overline{1,n}}$, где $\mathcal{F}_k^{inv}$ — наименьшая $\sigma$-алгебра, относительно которой измеримы $Y_m$ и $Z_m$ для $m \leq k$. Дадим следующее

**Определение 2.1.** **Стратегия инвестирования** — это согласованная с фильтрацией $\mathfrak{F}^{inv}$ последовательность с.в. $A := \{A_0, \dots, A_{n-1}\}$, где $A_0 = \text{const}$. Стратегия $A$ **допустимая**, если $A_i \geq 0$ п.н. для всех $i = 0, \dots, n-1$.

Множество допустимых стратегий инвестирования обозначим $\mathbb{A}_n$. Кроме того, как уже было сказано в начале главы, владелец страховой компании вкладывает дополнительные средства в компанию, как только капитал компании опускается ниже некоторого заданного уровня $L \geq 0$, и восстанавливает тем самым капитал компании до этого уровня. Размер этих вложений в $k$-ом году обозначим $J_k$. С учетом описанных выше условий, капитал компании $R_k^A$ на конец $k$-го года при использовании допустимой стратегии $A$ равен

$$R_k^A = R_{k-1}^A + c + A_{k-1} Z_k - Y_k + J_k^A, \; R_0^A = s, \; k = 1, \dots, n, \tag{2.1}$$

где $s \geq 0$ — начальный капитал. При этом размер дополнительных вложений $J_k^A$ в $k$-ом году равен

$$J_k^A = \max\{0, L - R_{k-1}^A - c - A_{k-1}Z_k + Y_k\}. \tag{2.2}$$

Пусть $v$ — ставка годового дисконта, тогда суммарный приведенный объем дополнительных вложений капитала равен

$$W_n^A(s) := E(\sum_{i=1}^{n} v^{i-1} J_i^A | R_0^A = s).$$

В такой ситуации задача состоит в минимизации таких вложений по всем допустимым стратегиям

$$W_n(s) := \inf_{A \in \mathbb{A}_n} W_n^A(s). \tag{2.3}$$

Стратегию $A$, при которой достигается инфимум в (2.3), и будем назвать **оптимальной**.

### 2.1.1 Уравнение Беллмана и оптимальная стратегия

**Лемма 2.1.** *Функция $W_n(s)$ для всякого $n \geq 1$ удовлетворяет следующему уравнению*

$$W_n(s) = \inf_{\alpha \geq 0}\{E \max(0, L-s-c-\alpha Z+Y) + vEW_{n-1}(\max(L, s+c+\alpha Z-Y))\}, \ W_0(s) = 0, \tag{2.4}$$

*где случайные величины $Y$ и $Z$ независимы и имеют соответственно функции распределения $Q(y)$ и $H(z)$.*

Доказательство данного утверждения в целом следует общей логике для подобных моделей (см., например, [47]).

*Доказательство.* Пусть $A \in \mathbb{A}_n$ — произвольная допустимая стратегия. Имеем по определению

$$W_n^A(s) = E \max(0, L - s - c - A_1 Z_1 + Y_1) + vE(\sum_{i=1}^{n-1} v^{i-1} J_{i+1}^A | R_0^A = s).$$

Возьмем от обеих частей условное математическое ожидание по $R_1^A$. По телескопическому свойству имеем

$$W_n^A(s) = E \max(0, L - s - c - A_0 Z_1 + Y_1) + vE\left[E\left(\sum_{i=1}^{n-1} v^{i-1} J_{i+1}^A | R_1^A\right) | R_0^A = s\right] =$$

$$= E \max(0, L-s-c-A_0 Z_1+Y_1) + vEW_{n-1}^A(R_1^A) \geq E \max(0, L-s-c-A_0 Z_1+Y_1) + vEW_{n-1}(R_1^A) \geq$$

$$\geq \inf_{\alpha \geq 0}\{E \max(0, L - s - c - \alpha Z_1 + Y_1) + vEW_{n-1}(\max(L, s + c + \alpha Z_1 - Y_1))\}.$$

Следовательно, так как стратегия $A$ произвольная допустимая,

$$W_n(s) \geq \inf_{\alpha \geq 0} \{E \max(0, L - s - c - \alpha Z_1 + Y_1) + vEW_{n-1}(R_1^A)\}.$$

С другой стороны, из (2.3) по определению инфимума следует, что для $\forall \varepsilon > 0$ найдется стратегия $\overline{A} \in \mathbb{A}_n$ такая, что $W_{n-1}(s+c+\alpha_0 Z_1 - Y_1) > W_{n-1}^{\overline{A}}(s+c+\alpha_0 Z_1 - Y_1) - \varepsilon$ п.н., где $\alpha_0 \geq 0$ — постоянная. Пусть $\tilde{A}$ — стратегия, определенная по правилу $\tilde{A}_0 = \alpha_0$, $\tilde{A}_{k+1} = \overline{A}_k$, $k = 0, \ldots, n-2$. Тогда

$$\begin{aligned}
&E \max(0, L - s - c - \alpha_0 Z_1 + Y_1) + vEW_{n-1}(s + c + \alpha_0 Z_1 - Y_1) > \\
&\qquad > E \max(0, L - s - c - \alpha_0 Z_1 + Y_1) + vEW_{n-1}^{\overline{A}}(s + c + \alpha_0 Z_1 - Y_1) - \varepsilon \geq \\
&\qquad\qquad \geq W_n^{\tilde{A}}(s) - \varepsilon \geq W_n(s) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon$ получаем, что

$$W_n(s) \leq \inf_{\alpha \geq 0} \{E \max(0, L - s - c - \alpha Z_1 + Y_1) + vEW_{n-1}(\max(L, s + c + \alpha Z_1 - Y_1))\}.$$

□

*Замечание* 2.1. В дальнейшем будет доказано, что для любого $s \geq 0$ существует единственная точка $\alpha^*(s) < \infty$, в которой достигается инфимум в уравнении (2.4), и, значит, корректно будет это уравнение записывать в виде

$$W_n(s) = \min_{\alpha \geq 0} \{E \max(0, L - s - c - \alpha Z + Y) + vEW_{n-1}(\max(L, s + c + \alpha Z - Y)\}, \; W_0(s) = 0.$$

Перейдем теперь к оптимальной стратегии. Справедлива следующая

**Лемма 2.2.** *Пусть для любого $k = 1, \ldots, n$ существует $\alpha_k^*(s)$ — измеримая функция, доставляющая инфимум в уравнении (2.4) при $n = k$. Тогда допустимая стратегия $A^* = (A_1^*, \ldots, A_n^*)$ инвестирования в $n$-шаговой модели, где $A_i^* = \alpha_{n-i}^*(R_i^{A^*})$, $i = 0, \ldots, n-1$, оптимальная.*

*Замечание* 2.2. Для доказательства данного утверждения достаточно существования измеримой функции $\alpha_k^*(s)$. Однако, в дальнейшем, будет доказано, что существует не только измеримая, но и непрерывная функция $\alpha_k^*(s)$, доставляющая минимум в (2.4).

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную допустимую стратегию $A = (A_i)_{i=1}^n \in \mathbb{A}_n$. Докажем, что $W_n^A(s) \geq W_n^{A^*}(s)$, — это и будет означать, что стратегия $A^*$ — оптимальная. Доказательство по индукции. При $n = 1$ имеем:

$$W_1^A(s) = E\max(0, L - s - c - A_0 Z_1 + Y_1) \geq E\max(0, L - s - c - \alpha_1^*(s) Z_1 + Y_1) = W_1^{A^*}(s).$$

Шаг индукции: пусть для $k < n$ утверждение верно и $W_k(s) = W_k^{A^*}(s)$, покажем, что $W_{k+1}^A(s) \geq W_{k+1}^{A^*}(s)$, где $A = (A_i)_{i=0}^k$ — произвольная допустимая стратегия. Определим допустимые стратегии $\overline{A} = (\overline{A}_i)_{i=0}^{k-1}$ и $\overline{A}^* = (\overline{A}_i^*)_{i=0}^{k-1}$ по следующему правилу: $\overline{A}_i = A_{i+1}$, $i = 0, \dots, k-1$, $\overline{A}_i^* = A_{i+1}^*$, $i = 0, \dots, k-1$. Находим

$$\begin{aligned}
W_{k+1}^A(s) &= E[W_{k+1}^A(s)|R_1^A] = \\
&= E\max(0, L - s - c - A_0 Z_1 + Y_1) + vE[W_k^{\overline{A}}(\max(L, s + c + A_0 Z_1 - Y_1))] \geq \\
&\geq E\max(0, L - s - c - A_0 Z_1 + Y_1) + vE[W_k(\max(L, s + c + A_0 Z_1 - Y_1))] \geq \\
&E\max(0, L - s - c - \alpha_{k+1}^*(s) Z_1 + Y_1) + vE[W_k(\max(L, s + c + \alpha_{k+1}^*(s) Z_1 - Y_1))] = \\
&E\max(0, L - s - c - \alpha_{k+1}^*(s) Z_1 + Y_1) + vE[W_k^{\overline{A}^*}(\max(L, s + c + \alpha_{k+1}^*(s) Z_1 - Y_1))] = W^{A^*}(s).
\end{aligned}$$

□

*Замечание* 2.3. Итак, из леммы 2.2 следует, что для построения оптимальной стратегии в $n$-шаговой модели достаточно найти функцию $\alpha_n^*(s)$ такую, что при каждом $s \geq 0$, инфимум в уравнении Беллмана (2.4) достигается в точке $\alpha_n^*(s)$. При этом сама по себе величина $\alpha_n^*(s) = A_1^*$ — оптимальный размер инвестиций на первом шаге $n$-шагового процесса.

### 2.1.2 Оптимальное инвестирование в одношаговой модели

При $n = 1$ уравнение (2.4) принимает следующий вид

$$W_1(s) = \inf_{\alpha \geq 0} E\max(0, L - s - c - \alpha Z + Y). \tag{2.5}$$

Распишем математическое ожидание в правой части уравнения через интегралы и преобразуем, учитывая, что $Q(y) = 0$ при $y \leq 0$ в силу неотрицательности $Y$. Имеем

$$\begin{aligned}
W_1(s) &= \inf_{\alpha \geq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \max(0, L - s - c - \alpha z + y) dH(z) dQ(y) = \\
&= \inf_{\alpha \geq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{s+c+\alpha z - L}^{+\infty} (L - s - c - \alpha z + y) dQ(y) dH(z).
\end{aligned}$$

Прежде чем переходить к основной теореме данной части, докажем вспомогательную лемму, которая понадобится нам и в дальнейшем. Пусть

$$\gamma_1(s,\alpha) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{s+c+\alpha z-L}^{+\infty} (L-s-c-\alpha z+y)dQ(y)dH(z) =$$

$$= \int\limits_{\frac{L-s-c}{\alpha}}^{+\infty} \int\limits_{s+c+\alpha z-L}^{+\infty} (L-s-c-\alpha z+y)dQ(y)dH(z) + \int\limits_{-\infty}^{\frac{L-s-c}{\alpha}} \int\limits_{0}^{+\infty} (L-s-c-\alpha z+y)dQ(y)dH(z).$$

**Лемма 2.3.** *Минимальное значение $\gamma_1(s,\alpha)$ по $\alpha$ для любого $s \geq 0$ достигается в точке $\alpha^* = \alpha^*(s)$, являющейся единственным корнем уравнения*

$$E[Z(Q(s+c+\alpha Z-L)-1)] = 0. \qquad (2.6)$$

*Кроме того, $\alpha^*(s)$ — непрерывная функция.*

*Доказательство.* Вычислим первую и вторую производную $\gamma_1(s,\alpha)$ по $\alpha$. Имеем

$$\gamma_1(s,\alpha)_\alpha := \frac{\partial}{\partial\alpha}\gamma_1(s,\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{s+c+\alpha z-L}^{+\infty} (-z)dQ(y)dH(z) =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z(1-Q(s+c+\alpha z-L)dH(z) = -E[Z(1-Q(s+c+\alpha Z-L))].$$

Вторая производная равна

$$\gamma_1(s,\alpha)_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\gamma_1(s,\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^2 q(s+c+\alpha z-L))dH(z) = E[Z^2 q(s+c+\alpha Z-L)].$$

Заметим сразу, что поскольку $q(y) \geq 0$, то $\gamma_1(s,\alpha)_{\alpha\alpha} \geq 0$, иными словами, $\gamma_1(s,\alpha)_\alpha$ не убывает по $\alpha$. Далее, имеем при $\alpha = 0$

$$\gamma_1(s,0)_\alpha = -[EZ](1-Q(s+c-L)) < 0,$$

поскольку по условию $EZ > 0$. Найдем $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \gamma_1(s,\alpha)_\alpha$. При $\alpha > 0$ имеем (т.к. $Q(y) = 0$ при $y \leq 0$ в силу неотрицательности с.в. $Y_i$)

$$\gamma_1(s,\alpha)_\alpha = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z(1-Q(s+c+\alpha z-L))dH(z) = -\int\limits_{-\infty}^{\frac{L-s-c}{\alpha}} zdH(z) - \int\limits_{\frac{L-s-c}{\alpha}}^{+\infty} z(1-Q(s+c+\alpha z-L))dH(z).$$

Пусть сначала $L \geq s+c$. Поскольку предел при $\alpha \to +\infty$ второго слагаемого в выражении выше равен нулю получаем, что

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \gamma_1(s,\alpha)_\alpha = -\int\limits_{-\infty}^{0} zdH(z) = -\left. zH(z)\right|_{-\infty}^{0} + \int\limits_{-\infty}^{0} P(Z \leq z)dz = \int\limits_{-\infty}^{0} P(Z \leq z)dz > 0,$$

так как $P(Z \leq 0) > 0$ по условию. Аналогично при $L < s+c$, получаем

$$\lim_{\alpha\to\infty} \gamma_1(s,\alpha)_\alpha = -\lim_{\alpha\to\infty} \left( \int\limits_{-\infty}^{\frac{L-s-c}{\alpha}} zdH(z) + \int\limits_{\frac{L-s-c}{\alpha}}^{0} z(1-Q(s+c+\alpha z-L))dH(z) + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{0}^{+\infty} z(1-Q(s+c+\alpha z-L))dH(z) \right) = -\int\limits_{-\infty}^{0} zdH(z) > 0.$$

Таким образом, непрерывная неубывающая по $\alpha$ функция $\gamma_1(s,\alpha)_\alpha$ такова, что $\gamma(s,0)_\alpha < 0$, а $\gamma_1(s,+\infty) > 0$. Значит, уравнение $\gamma_1(s,\alpha)_\alpha = -EZ(1-Q(s+c+\alpha Z-L) = 0$ имеет единственное решение при $\alpha \geq 0$. Обозначим это решение $\alpha^*(s)$. Заметим, что по теореме о неявной функции $\alpha^*(s)$ — непрерывная функция при $s \in \mathbb{R}$. Кроме того, из доказанных свойств производной следует, что сама функция $\gamma_1(s,\alpha)$ имеет минимум в этой точке. Покажем еще, что функция $\gamma_1(s,\alpha)$ дважды дифференцируема по $s$. Вычисляем

$$\gamma_1(s,\alpha)_s := \frac{\partial}{\partial s}\gamma_1(s,\alpha) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1-Q(s+c+\alpha z-L))dH(z) = EQ(s+c+\alpha Z-L)-1, \quad (2.7)$$

$$\gamma_1(s,\alpha)_{ss} := \frac{\partial^2}{\partial s^2}\gamma_1(s,\alpha) = Eq(s+c+\alpha Z-L). \quad (2.8)$$

Наконец, заметим, что $\gamma_1(s,\alpha)_s \leq 0$, а $\gamma_1(s,\alpha)_{ss} \geq 0$ при $s \geq 0$. □

Перейдем к основному утверждению.

**Теорема 2.1.** *1) Функция $W_1(s)$ дважды дифференцируема. Кроме того, для всех $s \geq 0$ справедливы следующие неравенства:*

*a.* $-1 \leq W_1'(s) \leq 0$,

*b.* $W_1''(s) \geq 0$.

*2) Оптимальный размер инвестиций в одношаговой модели равен $\alpha^*(s)$, где $\alpha^*(s)$ — единственный корень уравнения* (2.6)

*Доказательство.* Действительно, пусть функция $\alpha^*(s)$ — решение уравнения (2.6) для всех $s \geq 0$. Существование такой функции, следует из леммы 2.3 и теоремы о неявной функции. Тогда, по правилу дифференцирования, имеем

$$W_1'(s) = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_1(s, \alpha^*(s)) + \frac{\partial}{\partial \alpha}\gamma_1(s, \alpha^*(s))\frac{d\alpha^*(s)}{ds} = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_1(s, \alpha^*(s)),$$

т.к. $\frac{\partial d}{\partial \alpha}\gamma_1(s, \alpha^*(s)) = \gamma_1(s, \alpha^*(s))_\alpha = 0$ по определению $\alpha^*(s)$. При этом, согласно (2.7),

$$\gamma_1(s, \alpha)_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{s+c+\alpha z-L}^{+\infty}(-z)dQ(y)dH(z) = EQ(s + c + \alpha Z - L) - 1 \in [-1, 0].$$

Следовательно, $W_1'(s) \in [-1, 0]$. Далее, найдем $W_1''(s)$:

$$W_1''(s) = \frac{d}{ds}\gamma_1(s, \alpha^*(s))_s = \gamma_1(s, \alpha^*(s))_{ss} + \gamma_1(s, \alpha^*(s))_{s\alpha}\frac{d\alpha^*(s)}{ds}, \tag{2.9}$$

где $\gamma_1(s, \alpha)_{s\alpha} := \frac{\partial^2}{\partial s \partial \alpha}\gamma_1(s, \alpha)$. По теореме о неявной функции

$$\frac{d\alpha^*(s)}{ds} = -\frac{\gamma_1(s, \alpha^*(s))_{\alpha s}}{\gamma_1(s, \alpha^*(s))_{\alpha\alpha}}.$$

Найдем $\gamma_1(s, \alpha^*(s))_{\alpha s}$ и $\gamma_1(s, \alpha^*(s))_{ss}$. С учетом найденного в лемме 2.3 имеем

$$\gamma_1(s, \alpha^*(s))_{\alpha s} = EZq(s + c + \alpha^*(s)Z - L),$$
$$\gamma_1(s, \alpha^*(s))_{ss} = Eq(s + c + \alpha^*(s)Z - L).$$

Итак, мы знаем все компоненты правой части выражения (2.9), находим:

$$W_1''(s) = \frac{\gamma_1(s, \alpha^*(s))_{ss}\gamma_1(s, \alpha^*(s))_{\alpha\alpha} - (\gamma_1(s, \alpha^*(s))_{s\alpha})^2}{\gamma_1(s, \alpha^*(s))_{\alpha\alpha}} =$$

$$= \frac{Eq(s + c + \alpha^*(s)Z - L)E[Z^2q(s + c + \alpha Z - L)] - [EZq(s + c + \alpha^*(s)Z - L)]^2}{E[Z^2q(s + c + \alpha Z - L)]} \geq 0,$$

так как по неравенству Коши–Буняковского числитель неотрицателен:

$$[E(Z\sqrt{q(s + c + \alpha^*(s)Z - L)})\sqrt{q(s + c + \alpha^*(s)Z - L)}]^2 \leq$$
$$\leq Eq(s + c + \alpha^*(s)Z - L)E[Z^2q(s + c + \alpha Z - L)].$$

Итак, пункт 1) доказан полностью; пункт 2) следует из леммы 2.3. $\square$

### 2.1.3 Оптимальное инвестирование в мношаговой модели

Пусть теперь $2 \le n < \infty$. Напомним, уравнение Беллмана имеет вид

$$W_n(s) = \inf_{\alpha \ge 0}\{E\max(0, L - s - c - \alpha Z + Y) + vEW_{n-1}(\max(L, s + c + \alpha Z - Y)\}.$$

Рассмотрим

$$\gamma_n(s,\alpha) := \{E\max(0, L - s - c - \alpha Z + Y) + vEW_{n-1}(\max(L, s + c + \alpha Z - Y)\} =$$
$$= \gamma_1(s,\alpha) + vEW_{n-1}(\max(L, s + c + \alpha Z - Y))\}.$$

Введем обозначения

$$\gamma_n(s,\alpha)_s := \frac{\partial}{\partial s}\gamma_n(s,\alpha),\ \gamma_n(s,\alpha)_\alpha := \frac{\partial}{\partial \alpha}\gamma_n(s,\alpha),$$
$$\gamma_n(s,\alpha)_{ss} := \frac{\partial^2}{\partial s^2}\gamma_n(s,\alpha),\ \gamma_n(s,\alpha)_{s\alpha} := \frac{\partial^2}{\partial s \partial \alpha}\gamma_n(s,\alpha),\ \gamma_n(s,\alpha)_{\alpha\alpha} := \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\gamma_n(s,\alpha).$$

**Теорема 2.2.** *1) Функция $W_n(s)$ дважды дифференцируема. Кроме того, для всех $s \ge 0$ справедливы следующие неравенства*

*a)* $-1 \le W_n'(s) \le 0$;

*b)* $W_n''(s) \ge 0$.

*2) Оптимальный объем инвестиций $\alpha_n^*(s)$ на первом шаге $n$-шагового процесса определяется как единственное решение уравнения*

$$E[Z(Q(s + c + \alpha Z - L) - 1) + vW_{n-1}'(s + c + \alpha Z - Y)] = 0, \tag{2.10}$$

*причем функция $\alpha_n^*(s)$ непрерывная.*

*Доказательство.* Для доказательства утверждения вычислим первые частные производные функции $\gamma_n(s,\alpha)$, учитывая результаты леммы 2.3:

$$\gamma_n(s,\alpha)_s = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_1(s,\alpha) + v\frac{\partial}{\partial s}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{s+c+\alpha z-L} W_{n-1}(s + c + \alpha z - y)dQ(y)dH(z)\right.$$
$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{s+c+\alpha z-L}^{+\infty} W_{n-1}(L)dQ(y)dH(z)\right) =$$
$$= EQ(s + c + \alpha Z - L) - 1 + v\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{s+c+\alpha z-L} W_{n-1}'(s + c + \alpha z - y)dQ(y)dH(z) =$$
$$= EQ(s + c + \alpha Z - L) - 1 + vEW_{n-1}'(s + c + \alpha Z - Y);$$

$$\gamma_n(s,\alpha)_\alpha = EZ(Q(s+c+\alpha Z - L) - 1) + v \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{s+c+\alpha z - L} z W'_{n-1}(s+c+\alpha z - y) dQ(y) dH(z) =$$
$$= EZ(Q(s+c+\alpha Z - L) - 1) + vE(ZW'_{n-1}(s+c+\alpha Z - Y));$$

Аналогично вычислим вторые частные производные и введем дополнительные обозначения для их компонент:

$$\gamma_n(s,\alpha)_{ss} = E(q(s+c+\alpha Z - L)) + v \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{s+c+\alpha z - L} W''_{n-1}(s+c+\alpha z - y) dQ(y) dH(z) +$$
$$+ v \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{s+c+\alpha z - L} W'_{n-1}(L) dQ(y) dH(z) =$$
$$= \underbrace{Eq(s+c+\alpha Z - L)(1 + vW'_{n-1}(L))}_{=:E^1_{ss}} + \underbrace{vEW''_{n-1}(s+c+\alpha Z - Y)}_{=:E^2_{ss}};$$

$$\gamma_n(s,\alpha)_{\alpha\alpha} = E(Z^2 q(s+c+\alpha Z - L)) + v \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{s+c+\alpha z - L} z^2 W''_{n-1}(s+c+\alpha z - y) dQ(y) dH(z) +$$
$$+ v \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{s+c+\alpha z - L} z^2 W'_{n-1}(L) dQ(y) dH(z) =$$
$$= \underbrace{E[Z^2 q(s+c+\alpha Z - L)(1 + vW'_{n-1}(L))]}_{=:E^1_{\alpha\alpha}} + \underbrace{vE(Z^2 W''_{n-1}(s+c+\alpha Z - Y))}_{=:E^2_{\alpha\alpha}};$$

$$\gamma_n(s,\alpha)_{s\alpha} = E(Zq(s+c+\alpha Z - L)) + v \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{s+c+\alpha z - L} z W''_{n-1}(s+c+\alpha z - y) dQ(y) dH(z) +$$
$$+ v \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{s+c+\alpha z - L} z W'_{n-1}(L) dQ(y) dH(z) =$$
$$= \underbrace{E[Z(s+c+\alpha Z - L)(1 + vW'_{n-1}(L))]}_{=:E^1_{s\alpha}} + \underbrace{vE(ZW''_{n-1}(s+c+\alpha Z - Y))}_{=:E^2_{s\alpha}}.$$

Установим свойства 1a и 1b по индукции. При $n = 1$ утверждение следует из теоремы 2.1. Пусть для $n = k$ утверждение верно, т.е. $W'_k(s) \in [-1, 0]$, $W''_k(s) \geq 0$. Установим справедливость теоремы при $n = k + 1$. Сначала заметим, что $\gamma_{k+1}(s,\alpha)_{\alpha\alpha} \ge 0$ при фиксированном $s$ для всех $\alpha \ge 0$. Действительно, поскольку по предположению индукции $W_k''(s) \ge 0$, находим, что

$$\gamma_{k+1}(s,\alpha)_{\alpha\alpha} \ge E[Z^2 q(s+c+\alpha Z - L)(1+vW_k'(L))] \ge 0, \text{ т.к. } W_k'(s) \ge -1,\ W_k''(s) \ge 0.$$

А, значит, функция $\gamma_{k+1}(s,\alpha)_\alpha$ не убывает как функция от $\alpha \ge 0$. При этом, при $\alpha = 0$

$$\gamma_{k+1}(s,0)_\alpha = (Q(s+c-L)-1)EZ + vEW_k'(s+c-Y)EZ \le (Q(s+c-L)-1)EZ < 0,$$

поскольку $EZ > 0$ по условию. Покажем, что $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \gamma_{k+1}(s,\alpha)_\alpha > 0$. Действительно, учитывая, что $W_k'(s) \ge -1$, получаем, что

$$vE[ZW_k'(s+c+\alpha Z - Y)] = v \int\limits_{(L-s-c)/\alpha}^{+\infty} \int\limits_{0}^{s+c+\alpha z - L} zW_k'(s+c+\alpha z - y)dQ(y)dH(z) \ge$$

$$\ge -v \int\limits_{(L-s-c)/\alpha}^{+\infty} z(Q(s+c+\alpha z - L)-1)dH(z) = -vE[Z(Q(s+c+\alpha Z - Y)-1)] - v \int\limits_{-\infty}^{(L-s-c)/\alpha} zdH(z) =$$

$$= -v\gamma_1(s,\alpha)_\alpha - v \int\limits_{-\infty}^{(L-s-c)/\alpha} zdH(z).$$

Тогда

$$\lim_{\alpha\to\infty} \gamma_{k+1}(s,\alpha)_\alpha = \lim_{\alpha\to\infty} [\gamma_1(s,\alpha)_\alpha + vE(ZW_k'(s+c+\alpha Z - Y))] \ge$$

$$\ge (1-v)\lim_{\alpha\to\infty} \gamma_1(s,\alpha)_\alpha - v\int\limits_{-\infty}^{0} zdH(z) = (1-v)\lim_{\alpha\to\infty}\gamma_1(s,\alpha)_\alpha + v\int\limits_{-\infty}^{0} H(z)dz > 0,$$

поскольку $v \in (0,1)$, в лемме 2.3 установлено, что $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \gamma_1(s,\alpha)_\alpha \ge 0$, а $H(z) > 0$ при $z < 0$ по условию. Следовательно, функция $\gamma_{k+1}(s,\alpha)_\alpha$ не убывает и принимает отрицательное значение при $\alpha = 0$ и положительное при $\alpha \to \infty$. Значит, существует единственное решение $\alpha_{k+1}^*(s)$ уравнения $\gamma_{k+1}(s,\alpha)_\alpha = 0$, причем $\alpha_{k+1}^*(s)$ непрерывна по теореме о неявной функции. Кроме того, функция $\gamma_{k+1}(s,\alpha)$ убывает по $\alpha$ при $\alpha \in [0, \alpha_{k+1}^*(s)]$ и возрастает при $\alpha > \alpha_{k+1}^*(s)$, следовательно, в точке $\alpha_{k+1}^*(s)$ достигается минимум функции $\gamma_{k+1}(s,\alpha)$. Таким образом, второе утверждение теоремы доказано.

Пусть $\alpha^*_{k+1}(s)$ — точка, в которой достигается минимум $\gamma_{k+1}(s,\alpha)$ по $\alpha$. Тогда по правилу дифференцирования имеем

$$W'_{k+1}(s) = \frac{d}{ds}\gamma'_{k+1}(s,\alpha^*_{k+1}(s)) = \gamma_{k+1}(s,\alpha^*_{k+1}(s))_s + \gamma_{k+1}(s,\alpha^*_{k+1}(s))_\alpha \frac{d\alpha^*_{k+1}(s)}{ds} = \gamma_{k+1}(s,\alpha^*_{k+1}(s))_s < 0,$$

поскольку $\gamma_{k+1}(s,\alpha^*_{k+1}(s))_\alpha = 0$ по определению $\alpha^*_{k+1}(s)$ и доказанному выше. Далее,

$$\gamma_{k+1}(s,\alpha^*_{k+1}(s))_s = EQ(s+c+\alpha^*_{k+1}(s)Z-L) - 1 - EW'_k(s+c+\alpha^*_{k+1}(s)Z-Y) \geq$$
$$\geq EQ(s+c+\alpha^*_{k+1}(s)Z-L) - 1 - 1 \geq -1.$$

Следовательно, $W'_{k+1}(s) \in [-1,0]$. Теперь найдем вторую производную. По теореме о неявной функции, имеем

$$\frac{d}{ds}\alpha^*_{k+1}(s) = -\left.\frac{\frac{d}{ds}\gamma_{k+1}(s,\alpha)_\alpha}{\frac{d}{d\alpha}\gamma_{k+1}(s,\alpha)_\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^*_{k+1}(s)}.$$

Тогда

$$W''_{k+1}(s) = \gamma_{k+1}(s,\alpha^*_{k+1}(s))_{ss} - \gamma_{k+1}(s,\alpha^*_{k+1}(s))_{s\alpha}\frac{\gamma_{k+1}(s,\alpha^*_{k+1}(s))_{\alpha s}}{\gamma_{k+1}(s,\alpha^*_{k+1}(s))_{\alpha\alpha}} =$$
$$= \frac{(E^1_{ss}+E^2_{ss})(E^1_{\alpha\alpha}+E^2_{\alpha\alpha}) - (E^1_{\alpha s}+E^2_{\alpha s})^2}{\gamma_{k+1}(s,\alpha^*_{k+1}(s))_{\alpha\alpha}}. \tag{2.11}$$

Оценим числитель, используя неравенство Коши–Буняковского, например:

$$E^1_{ss}E^1_{\alpha\alpha} = E[q(s+c+\alpha^*_{k+1}(s)Z-L)(1+vW'_k(L))] \times E[Z^2 q(s+c+\alpha^*_{k+1}(s)Z-L)(1+vW'_k(L))] \geq$$
$$\geq E[Zq(s+c+\alpha^*_{k+1}(s)Z-L)(1+vW'_k(L))]^2 = (E^1_{\alpha s})^2.$$

Аналогично поступим с остальными парными произведениями в числителе (2.11) и получим, что

$$(E^1_{ss}+E^2_{ss})(E^1_{\alpha\alpha}+E^2_{\alpha\alpha}) \geq (E^1_{\alpha s}+E^2_{\alpha s})^2.$$

Значит, $W''_{k+1}(s) \geq 0$ и теорема доказана. □

### 2.1.4 Численная реализация

Рассмотрим частный случай одношаговой модели из параграфа 2.1.2. Пусть совокупный годовой убыток $Y \sim \exp(1/\lambda)$, а размер страховой премии вычисляется по принципу среднего с нагрузкой безопасности $\theta > 0$, т.е. $c = (1+\theta)\lambda$. Предположим также,

| s | $W_1$(s) | V(s) |
|---|---|---|
| 0 | 0,140035 | 2,385812 |
| 1 | 0,097310 | 0,877692 |
| 2 | 0,059183 | 0,322885 |
| 3 | 0,028811 | 0,118782 |
| 4 | 0,011819 | 0,043698 |
| 5 | 0,004506 | 0,016076 |
| 6 | 0,001676 | 0,005914 |
| 7 | 0,000614 | 0,002176 |
| 8 | 0,000227 | 0,000800 |
| 9 | 0,000083 | 0,000294 |
| 10 | 0,000032 | 0,000108 |

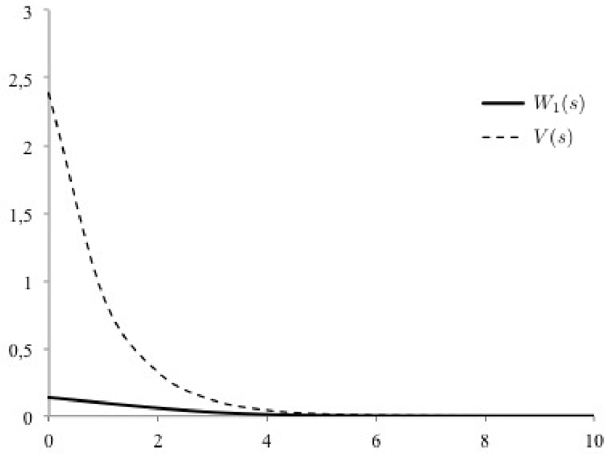


Рис. 2.1: Значения $W_1(s)$ и $V(s)$ для различных $s$.

что годовая доходность $Z$ рискового актива, в который страховщик вкладывает средства, имеет нормальной распределение $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, $\mu > 0, \sigma > 0$. Пусть $W_1(s) = \min\limits_{\alpha \geq 0} E \max(0, L - s - c - \alpha Z + Y)$ — минимальное дополнительное вливание капитала в конце первого года. Заметим, что в данном случае уравнение (2.6) примет вид

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{L-s-c}{\alpha}}^{\infty} z \left(1 - \exp\left(-\frac{s + c + \alpha z - L}{\lambda}\right)\right) \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dz - \mu = 0.$$

Пусть $\alpha^*(s)$ — решение уравнения выше. По доказанному в этой точке достигается минимум $W_1(s)$. Обозначим $V(s) := E \max(0, L - s - c + Y)$,— величину вливаемого капитала при отсутствии инвестиций.

Рассмотрим следующие значения параметров: $\lambda = 1$, $\theta = 0,1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0,5$. В таблице на рис. 2.1 приведены значения функций $W_1(s)$ и $V(s)$ при различных значениях начального капитала $s$ и при $L = 2$. На рис. 2.1 также приведены графики этих функций. Все расчеты выполнены с помощью приложения Wolfram Mathematica 8 с точностью до $10^{-5}$. Как нетрудно видеть, обе функции убывают, причем для начального капитала $0 \leq s < 4$, функция $V(s)$ существенно больше $W_1(s)$.

На рис. 2.2 приводится численное приближение оптимального уровня инвестиций $\alpha^*(s)$ для $s \in [0, 10]$ и для различных значений параметра $L$. Заметим, что в данном случае видно, что функция $\alpha^*(s)$ не возрастает и увеличивается с ростом $L$.

| s | L=0 | L=1 | L=2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 5,534770 | 7,711450 | 11,042100 |
| 1 | 4,537630 | 5,534770 | 7,711450 |
| 2 | 4,175100 | 4,537630 | 5,534770 |
| 3 | 4,052300 | 4,175010 | 4,537630 |
| 4 | 4,013630 | 4,052300 | 4,175010 |
| 5 | 4,002950 | 4,013630 | 4,052300 |
| 6 | 4,000510 | 4,002950 | 4,016300 |
| 7 | 4,000070 | 4,000510 | 4,002950 |
| 8 | 4,000100 | 4,000700 | 4,000510 |
| 9 | 4,000000 | 4,000100 | 4,000070 |
| 10 | 4,000000 | 4,000000 | 4,000010 |

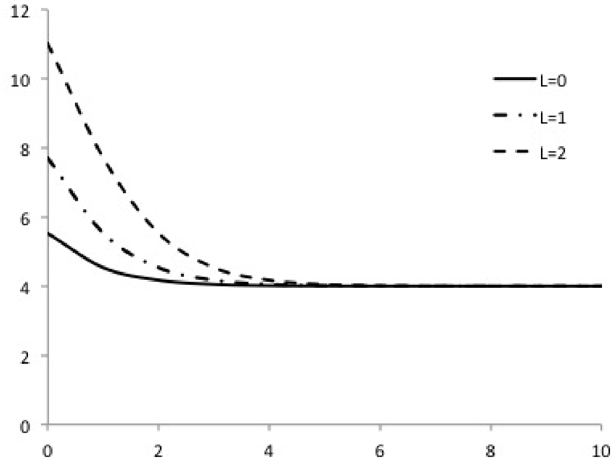


Рис. 2.2: Значения $\alpha^*(s)$ для различных $L$.

### 2.1.5 Оптимальное инвестирование в случае бесконечного горизонта планирования

Пусть теперь временной горизонт не ограничен. Введем следующие обозначения: пусть совокупные годовые убытки $Y_1, Y_2, \ldots$ — н.о.р. неотрицательные с.в. с абсолютно непрерывной функцией распределения $Q(y)$ и плотностью $q(y)$, $c$ — поступаемая за год страховая премия. Имеется некий рыночный актив, последовательность н.о.р. и независимых от $Y_1, Y_2, \ldots$ с.в. $Z_1, Z_2, \ldots$ определяет доход (или убыток) по данному активу за год. Кроме того, в конце каждого года собственник инвестирует дополнительные средства в страховую компанию, если ее капитал по итогам года опустился ниже заранее заданного уровня $L \geq 0$. Рассматривается естественная фильтрация $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(Y,Z)}$, порожденная последовательностью $(Y_n, Z_n)$. По аналогии с предыдущим параграфом дадим следующее

**Определение 2.2. Стратегия инвестирования** — это согласованная с фильтрацией $\mathcal{F}$ бесконечная последовательность с.в. $A = \{A_0, A_1, \ldots\}$, где $A_0 = \mathrm{const}$. Стратегия $A$ **допустимая**, если $A_i \geq 0$ п.н. для всех $i \geq 0$.

Множество допустимых стратегий инвестирования обозначим $\mathbb{A}$. В данном случае капитал компании, использующей стратегию $A$, также равен

$$R_k^A = R_{k-1}^A + c + A_{k-1}Z_k - Y_k + J_k^A,\ R_0^A = s,\ k = 1, 2, \ldots, \tag{2.12}$$

где $s \geq 0$ — начальный капитал. При этом размер дополнительных вложений $J_k^A$ в $k$-ом году равен

$$J_k^A = \max\{0, L - R_k^A - c - A_{k-1}Z_k + Y_k\}. \tag{2.13}$$

Пусть $v$ — коэффициент дисконтирования, тогда суммарный приведенный объем дополнительных вложений капитала при использовании стратегии инвестирования $A$ равен

$$W^A(s) := E(\sum_{i=1}^{\infty} v^{i-1} J_i | R_0^A = s).$$

В такой ситуации задача состоит в минимизации таких вложений среди всех допустимых стратегий

$$W(s) := \inf_{A \in \mathbb{A}} W^A(s).$$

Допустимую стратегию инвестирования $A^*$ будем называть **оптимальной**, если $W(s) = W^{A^*}(s)$.

*Замечание* 2.4. Заметим, что функция $W^A(s)$ ограничена сверху. Действительно, рассмотрим «нулевую» стратегию $A^0 = \{A_k^0 = 0\}_{k=0}^{\infty}$. Тогда (здесь $E_s[\cdot] := E[\cdot | R_0^A = s]$)

$$W(s) \leq W^{A^0}(s) = E_s \sum_{k=1}^{\infty} v^{k-1} \max(0, L-c-R_{k-1}^{A^0}+Y_k) = E_s \sum_{k=1}^{\infty} v^{k-1} \max(0, L-s-kc+\sum_{i=1}^{k} Y_i) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} v^{k-1} E|L-s-ck+\sum_{i=1}^{k} Y_i| \leq \sum_{k=1}^{\infty} v^{k-1}|L-s|+\sum_{k=1}^{\infty} v^{k-1} Ek(c-EY) \leq \frac{|L-s|}{1-v}+v\frac{(c-EY)}{(1-v)^2}. \tag{2.14}$$

Кроме того, для любой допустимой стратегии $A \in \mathbb{A}$: $E_s(v^{i-1}J_i^A) \leq E_s(v^{i-1}J_i^{A^0})$ и, значит, $W^A(s)$ также ограничено сверху.

Аналогично случаю конечного горизонта планирования выводится уравнение Беллмана для данной ситуации. А именно, справедлива

**Лемма 2.4.** *Функция $W(s)$ для всех $s \geq 0$ удовлетворяет следующему уравнению динамического программирования:*

$$W(s) = \inf_{\alpha \geq 0} \{E \max(0, L - s - c - \alpha Z + Y) + vEW(\max(L, s + c + \alpha Z - Y))\}, \tag{2.15}$$

*где $Y$ и $Z$ — независимые случайные величины, имеющие функции распределения $Q(y)$ и $H(z)$ соответственно.*

*Доказательство.* Доказательство данного утверждения полностью повторяет доказательство леммы 2.1, с заменой конечных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} v^{k-1} J_k$ на ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v^{k-1} J_k$, сходимость которых вытекает из замечания 2.4. □

Докажем существование решения уравнения (2.15).

**Теорема 2.3.** *Существует единственное решение $W(s)$ уравнения* (2.15). *Кроме того, функция $W(s)$ дважды дифференцируемая, а инфимум в правой части* (2.15) *достигается в точке $\alpha^*$, где $\alpha^*$ — это единственный корень уравнения*

$$E[Z(Q(s+c+\alpha Z-L)-1)+vW'(s+c+\alpha Z-Y)]=0. \tag{2.16}$$

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность функций $W_n(s)$, $n \geq 0$, определенных по правилу

$$W_n(s)=\inf_{\alpha\geq 0}\{E\max(0,L-s-c-\alpha Z+Y)+vEW_{n-1}(\max(L,s+c+\alpha Z-Y)\},\ W_0(s)=0, n\geq 1. \tag{2.17}$$

Заметим, что в предыдущем параграфе установлено, что для любого $n \geq 0$ $W_n'(s) \leq 0$, то есть $\{W_n\}$ — последовательность невозрастающих функций. Покажем еще, что $W_{n+1}(s) \geq W_n(s)$ для всех $s \geq 0$. Действительно, для $n=0$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для $n$ и пусть $\alpha^*_{n+1}(s)$ — точка, в которой достигается инфимум в выражении (2.17) для функции $W_{n+1}(s)$ ($\alpha^*_{n+1}(s)$ существует по теореме 2.2). Тогда

$$\begin{aligned}W_{n+1}(s)&=E\max(0,L-s-c-\alpha^*_{n+1}(s)Z+Y)+vEW_n(\max(L,s+c+\alpha^*_{n+1}(s)Z-Y)\geq\\ &\geq E\max(0,L-s-c-\alpha^*_{n+1}(s)Z+Y)+vEW_{n-1}(\max(L,s+c+\alpha^*_{n+1}(s)Z-Y)\geq\\ &\geq \inf_{\alpha\geq 0}\{E\max(0,L-s-c-\alpha Z+Y)+vEW_{n-1}(\max(L,s+c+\alpha Z-Y)\}=W_n(s).\end{aligned}$$

Кроме того, поскольку $W_n(s) \leq W(s)$ для всех $n=1,2,\ldots$, то согласно (2.14) все $W_n(s)$ ограничены сверху. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} W_n(s)=W_\infty(s)$. Далее, поскольку последовательность $\{W_n(s)\}_{n=1}^\infty$ возрастает по $n$ и ограничена сверху, то по теореме Леви о монотонной сходимости

$$\begin{aligned}W_\infty(s)&=\lim_{n\to\infty} W_{n+1}(s)=\lim_{n\to\infty}\min_{\alpha\geq 0}\{E\max(0,L-s-c-\alpha Z+Y)+vEW_n(\max(L,s+c+\alpha Z-Y)\}=\\ &=\inf_{\alpha\geq 0}\{E\max(0,L-s-c-\alpha Z+Y)+vEW_\infty(\max(L,s+c+\alpha Z-Y)\}.\end{aligned}$$

И, значит, $W_\infty(s)$ — искомое решение уравнения (2.15). Далее, согласно теореме 2.2 все $W_n(s) \in C^2[0,\infty)$. Кроме того, $W_n'(s) \in [-1, 0]$ и $W_n''(s) \geq 0$. Таким образом, $\{W_n'(s)\}_{n=0}^\infty$ — последовательность неубыващих функций, ограниченная сверху нулем. Следовательно, существует предельная функция $\lim\limits_{n\to\infty} W_n'(s) =: V(s)$. Но поскольку, $\lim\limits_{n\to\infty} W_n(s) = W(s)$, то $W(s)$ — диффференцируема и $V(s) = W'(s)$ и $W'(s) \in [-1, 0]$. Обозначим

$$\gamma(s,\alpha) = E\max(0, L - s - c - \alpha Z + Y) + vEW'(\max(L, s + c + \alpha Z - Y))$$

и найдем производную по $\alpha$:

$$\gamma(s,\alpha)_\alpha := \frac{\partial}{\partial\alpha}\gamma(s,\alpha) = E[Z(Q(s + c + \alpha Z - L) - 1)] + E[ZW'(s + c + \alpha Z - L)].$$

Аналогично теореме 2.2 устанавливаем, что при $\alpha = 0$

$$\gamma(s,0)_\alpha \leq (Q(s + c - L) - 1)EZ < 0, \text{ т.к. } EZ > 0 \text{ по условию,}$$

при $\alpha \to \infty$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\gamma(s,\alpha)_\alpha \geq \lim_{\alpha\to\infty}(\gamma_{1r}(s,\alpha)_\alpha + vE[ZW'(s + c + \alpha Z - Y))] > 0.$$

Кроме того, вторая производная $\gamma(s,\alpha)_{\alpha\alpha}$ неотрицательна:

$$\gamma(s,\alpha)_{\alpha\alpha} = E[Z^2 q(s + c + \alpha Z - L)(1 + vW'(L))] + vE[Z^2 W''(s + c + \alpha Z - Y)] \geq 0,$$

поскольку $W'(s) \in [-1, 0]$, $W''(s) \geq 0$. Значит, как и в случае конечного горизонта планирования, уравнение (2.16) имеет ровно одно решение.

$\square$

Наконец, установим существование оптимальной стратегии инвестирования. Справедлива следующая

**Теорема 2.4.** *Пусть для всех $s \geq 0$ инфимум в уравнении (2.15) достигается в точке $\alpha^*(s)$. Тогда стратегия $A^* = \{A_n^*\}_{n=1}^\infty$, где $A_n^* := \alpha^*(R_n^{A^*})$, $n \geq 1$, — оптимальная.*

Доказательство данного утверждения следует подходу, предложенному в книге [45].

*Доказательство.* Сначала рассмотрим подможество допустимых стратегий $\mathbb{A}_n := \{A \in \mathbb{A} :\ A_k = \alpha^*(R_k^{A^*}), k = \overline{0,n}\}$ и докажем, что $W(s) = \inf\limits_{A'\in\mathbb{A}_n} W^{A'}(s)$.

Воспользуемся методом математической индукции. Пусть $n = 0$, а стратегия $A \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{A}_0$ — произвольная. По определению инфимума для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая стратегия $\overline{A'}$, что $W(s + c + \alpha^*(s)Z_1 - Y_1) > W^{\overline{A'}}(s + c + \alpha^*(s)Z_1 - Y_1) - \varepsilon$. Определим стратегию $A' \in \mathbb{A}_0$ по правилу $A'_0 = \alpha^*(s)$, $A'_k = \overline{A'}_{k-1}$, $k = \overline{1, \infty}$. Тогда

$$W^A(s) = EJ_1^A + vEW^A(R_1^A) \geq E\max(0, L - s - c - A_0 Z_1 + Y_1) + vEW(R_1^A) >$$
$$> E\max(0, L - s - c - \alpha^*(s)Z_1 + Y_1) + vEW(s + c + \alpha^*(s)Z_1 - Y_1) = W(s) > W^{A'}(s) - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon$ получаем, что $W^A(s) \geq W^{A'}(s)$. Пусть теперь $W(s) = \inf\limits_{A' \in \mathbb{A}_n} W^{A'}(s)$. Покажем, что $W(s) = \inf\limits_{A' \in \mathbb{A}_{n+1}} W^{A'}(s)$. Пусть стратегия $A \in \mathbb{A}_n \setminus \mathbb{A}_{n+1}$. По определению инфимума для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая стратегия $\overline{A'} \in \mathbb{A}_n$, что $W(R_{n+1}^{\overline{A'}}) > W^{\overline{A'}}(R_{n+1}^{\overline{A'}}) - \varepsilon$. Определим стратегию $A' \in \mathbb{A}_{n+1}$ по следующему правилу: $A'_k = \alpha^*(R_k^{A'})$, $k = \overline{0, n}$, $A'_n + k = \overline{A'}_{k-1}$, $k = \overline{1, \infty}$. С помощью аналогичного случаю $n = 0$ рассуждению, несложно установить, что $W^A(s) \geq W^{A'}(s)$.

Итак, мы показали, что $\forall n \; W(s) = \inf\limits_{A' \in \mathbb{A}_n} W^{A'}(s)$ или, другими словами,

$$W(s) = \inf_{\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{A}_n} W^{A'}(s).$$

Следовательно, поскольку множество $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{A}_n$ состоит только из стратегии $A^*$, она и будет оптимальной.

$\square$

## §2.2 Оптимальное перестрахование

Изучаемая в данном параграфе модель состоит в следующем. Пусть страховая компания работает $n$ лет, $Y_k$ — совокупный размер убытков за $k$-ый год, а $c > 0$ — суммарный размер страховых премий, поступивших в компанию за год. Кроме того, собственник компании вкладывает в нее дополнительные средства, как только капитал компании опускается ниже некоторого уровня. Однако, в отличие от первого параграфе, в данном параграфе мы будем считать, что страховая компания имеет возможность заключать договора перестрахования вместо вложения средств в рисковый актив. Предполагается, что любой договор перестрахования характеризуется некоторым параметром $b$, который может принимать значения из некоторого подмножества $D_r \subseteq \mathbb{R}^+$. Пусть функция $r(b, y)$ такова, что, если заключен договор перестрахования с параметром $b$ и $Y$ — величина поступившего требования, то цедент оплачивает часть $r(b, Y)$ убытка, а перестраховщик $Y - r(b, Y)$. Ясно, что $r(b, Y) \le Y$ п.н. Приведем примеры функции $r(b, y)$:

1) пропорциональное перестрахование, $r(b, y) = bY$, $D_r = (0, 1]$;

2) перестрахование эксцедента убытка, $r(b, y) = \min(b, Y)$, $D_r = (0, +\infty]$.

Кроме того, пусть функция $\overline{c}(b)$ задает величину премии, оставшейся у страховой компании после выплаты перестраховочной премии. Предполагается, что функция $\overline{c}(b)$ непрерывна и монотонна. Например, если перестраховщик рассчитывает свою премию по принципу среднего с нагрузкой безопасности, то $\overline{c}(b) = c - \rho E[Y - r(b, Y)]$. Обозначим $\mathcal{D} := \{b \in D_r : \overline{c}(b) > 0\}$. Мы будем предполагать, что страховщик имеет возможность менять параметр договора перестрахования каждый год, исходя из истории убытков. Пусть $\mathfrak{F}^Y = (\mathcal{F}_k^Y)_{k=1}^n$ — фильтрация, порожденная последовательностью убытков $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, т.е. $\mathcal{F}_k^Y = \sigma\{Y_l,\ l \le k\}$. Дадим следующее

**Определение 2.3. Стратегия перестрахования** — это согласованная с фильтрацией $\mathfrak{F}^Y$ последовательность с.в. $B := (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$, где $b_0 = \mathrm{const}$, а $b_k$, $k = 1, \ldots, n-1$ — $\mathcal{F}_k^Y$-измерима. Стратегия $B = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ **допустимая**, если для любого $k = 0, \ldots, n-1$, $b_k \in \mathcal{D}$ п.н.

Множество допустимых стратегий перестрахования обозначим $\mathbb{B}_n$. Кроме того, как уже было сказано в начале параграфа, владелец страховой компании вкладывает дополнительные средства, как только капитал компании опускается ниже некоторого заданного уровня $L \ge 0$. Размер этих вложений в $k$-ом году обозначим $J_k^B$. С учетом описанных выше условий, капитал компании $R_k^B$ на конец $k$-го года при использовании допустимой стратегии $B$ равен

$$R_k^B = R_{k-1}^B + \overline{c}(b_{k-1}) - r(b_{k-1}, Y_k) + J_k^B,\ k = 1, 2, \ldots, n,\ R_0^B = s, \tag{2.18}$$

где $s \ge 0$ — начальный капитал. При этом размер дополнительных вложений $J_k^B$ в $k$-ом году равен

$$J_k^B = \max\{0, L - R_{k-1}^B - \overline{c}(b_{k-1}) + r(b_{k-1}, Y_k)\},\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.19}$$

Пусть $v$ — коэффициент дисконтирования, тогда суммарный приведенный объем дополнительных вложений капитала равен

$$W_n^B(s) := E(\sum_{i=1}^{n} v^{i-1} J_i^B | R_0^B = s).$$

Задача состоит в минимизации таких вложений, то есть требуется найти допустимую стратегию перестрахования, минимизирующую $W_n^B(s)$:

$$W_n(s) := \inf_{B \in \mathbb{B}_n} W_n^B(s). \tag{2.20}$$

Соответственно допустимую стратегию, при которой достигается инфимум, будем называть **оптимальной** стратегией перестрахования.

Аналогично лемме 2.1, устанавливается, что функция $W_n(s)$ удовлетворяет уравнению Беллмана. А именно, справедлива следующая

**Лемма 2.5.** *Функция $W_n(s)$ для всякого $n$ удовлетворяет следующему уравнению*

*1) при $n < \infty$*

$$W_n(s) = \inf_{\beta \in \mathcal{D}} \{E \max(0, L - s - \overline{c}(\beta) + r(\beta, Y)) + vEW_{n-1}(\max(L, s + \overline{c}(\beta) - r(\beta, Y))\},$$
$$W_0(s) = 0; \quad (2.21)$$

*2) при $n = \infty$*

$$W(s) = \inf_{\beta \in \mathcal{D}} \{E \max(0, L - s - \overline{c}(\beta) + r(\beta, Y)) + vEW(\max(L, s + \overline{c}(\beta) - r(\beta, Y))\}, \ W_0(s) = 0, \tag{2.22}$$

*где инфимум в правых частях равенства берется по вещественным $\beta \in \mathcal{D}$.*

*Замечание* 2.5. В уравнении Беллмана (2.21) и (2.22) в отличие от уравнения (2.20) инфимум берется по вещественным числам $\beta \in \mathcal{D}_r$.

Кроме того, как и в случае оптимального инвестирования, оптимальная стратегия перестрахования определяется минимизатором правой части уравнений (2.21) и (2.22). Точнее, справедлива следующая

**Лемма 2.6.** *1) Пусть $n < \infty$ и для любого $m = 1, \ldots, n$ существует такая измеримая функция $\beta_m^*(s)$, что инфимум в уравнении (2.21) для $n = m$ достигается в точке $\beta_m^*(s)$. Тогда допустимая стратегия $B^* = (b_0^*, \ldots, b_{n-1}^*)$ перестрахования в $n$-шаговой модели, где $b_i^* = \beta_{n-i}^*(R_i^{B^*})$, $i = 0, \ldots, n-1$, оптимальная.*
*2) Пусть $n = \infty$ и для всех $s \geq 0$ инфимум в уравнении (2.22) достигается в точке $\beta^*(s)$. Тогда стратегия перестрахования $B^* = \{b_n^*\}_{n=0}^{\infty}$, где $b_n^* := \beta^*(R_n^{B^*})$, — оптимальная.*

Данная лемма доказывается аналогично теоремам 2.2 и 2.4 из параграфа 2.1.

*Замечание* 2.6. Утверждение леммы 2.6 показывает, что для определения оптимальной стратегии перестрахования достаточно для всякого $k = 1, \ldots, n$ найти измеримую функцию $\beta_k^*(s)$, доставляющую инфимум в уравнении Беллмана.

### 2.2.1 Случай пропорционального перестрахования

В данном параграфе будет рассмотрен случай пропорционального перестрахования на примере квотного договора. Кроме того, будем предполагать, что перестраховочная премия рассчитывается по принципу среднего с нагрузкой безопасности. Иными словами, если $\beta \in (0, 1]$ — доля убытка или квота, выплачиваемая цедентом, то

$$r(Y, \beta) = \beta Y, \ \mathcal{D}_r = (0, 1];$$
$$\overline{c}(\beta) = c - \rho(1 - \beta)EY, \ \rho > 1.$$

При этом будем предполагать, что $c < \rho EY$. В противном случае, цедент мог бы перестраховать весь свой риск и при этом заработать. Заметим, что $\overline{c}(\beta)$ возрастает по $\beta$ и $\overline{c}'(\beta) = \rho EY$. Кроме того,

$$\overline{c}(\beta) > 0 \Leftrightarrow \beta > 1 - \frac{c}{\rho EY} =: \beta_0,$$

причем $0 < \beta_0 < 1$. Тогда в данном случае множество $\mathcal{D} = \{\beta \in D_r : c(\beta) > 0\} = [\beta_0, 1]$.

#### Случай конечного горизонта планирования

При $n = 1$ уравнение (2.21) примет вид

$$W_1(s) = \min_{\beta \in [\beta_0, 1]} E \max(0, L - s - \overline{c}(\beta) + r(\beta, Y)).$$

Обозначим,

$$\varphi_1(s,\beta) := E\max(0, L - s - \overline{c}(\beta) + r(\beta, Y)) = \int\limits_{\left[\frac{s+\overline{c}(\beta)-L}{\beta}\right]^+}^{+\infty} (L - s - \overline{c}(\beta) + \beta y)dQ(y).$$

**Теорема 2.5.** *1) Функция $W_1(s)$ дважды дифференцируема. Кроме того, $W_1'(s) \in [-1, 0]$ и $W_1''(s) \geq 0$.*
*2) Оптимальная квота $\beta^*(s)$ в одношаговой модели равна*

$$\beta^*(s) = \begin{cases} 1, & \text{при } s \leq L - c, \\ \min(1, \tilde{\beta}(s)), & \text{при } s \in [L - c, L], \\ \max(\beta_0, \tilde{\beta}(s)), & \text{при } s \in [L, L - c + \rho EY], \\ \beta_0, & \text{при } s \geq L - c + \rho EY, \end{cases} \tag{2.23}$$

*где $\tilde{\beta}(s)$ — единственное решение уравнения*

$$\int\limits_{\frac{s+\overline{c}(\beta)-L}{\beta}}^{\infty} (y - \rho EY)dQ(y) = 0. \tag{2.24}$$

*Доказательство.* Введем обозначение

$$u(s,\beta) := \frac{s + \overline{c}(\beta) - L}{\beta} = \rho EY + \frac{s + c - L - \rho EY}{\beta}. \tag{2.25}$$

Вычислим первую и вторую частные производные $\varphi_1(s,\beta)$ по $\beta$. При $u(s,\beta) \leq 0$ имеем

$$\varphi_1(s,\beta)_\beta := \frac{\partial}{\partial\beta}\varphi_1(s,\beta) = \int\limits_0^\infty (y - \overline{c}'(\beta))dQ(y) = (1-\rho)EY, \tag{2.26}$$

$$\varphi_1(s,\beta)_{\beta\beta} := \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\varphi_1(s,\beta) = 0. \tag{2.27}$$

Заметим, что в данном случае $\varphi_1(s,\beta)_\beta < 0$ и, значит, функция $\varphi_1(s,\beta)$ убывает. При $u(s,\beta) \geq 0$ соответственно находим

$$\varphi_1(s,\beta)_\beta = \int\limits_{\frac{s+\overline{c}(\beta)-L}{\beta}}^{+\infty} (-\overline{c}'(\beta) + y)dQ(y) = \int\limits_{\frac{s+\overline{c}(\beta)-L}{\beta}}^{+\infty} (y - \rho EY)dQ(y). \tag{2.28}$$

Вторая производная равна

$$\varphi_1(s,\beta)_{\beta\beta} = -\left(\frac{s+\overline{c}(\beta)-L}{\beta} - \rho EY\right) q\left(\frac{s+\overline{c}(\beta)-L}{\beta}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\overline{c}'(\beta)\beta-(s+\overline{c}(\beta)-L)}{\beta^2}\right) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{s+c-L-\rho EY}{\beta}\right)^2 q\left(\frac{s+\overline{c}(\beta)-L}{\beta}\right). \quad (2.29)$$

Заметим, что $\varphi_1(s,\beta)_{\beta\beta} \geq 0$ и, следовательно, функция $\varphi_1(s,\beta)_\beta$ не убывает. Рассмотрим несколько случаев.

**1.** Пусть $s+c-L-\rho EY \geq 0$. Тогда из (2.25) следует, что $u(s,\beta) > \rho EY > 0$ для всех $\beta \in [\beta_0, 1]$. Тогда

$$\varphi_1(s,\beta)_\beta = \int\limits_{u(s,\beta)}^{+\infty} (y-\rho EY)dQ(y) \geq (u(s,\beta)-\rho EY)\overline{Q}(u(s,\beta)) > 0.$$

Следовательно, функция $\varphi_1(s,\beta)$ возрастает при $\beta \in [\beta_0,1]$ и достигает минимальное значение на отрезке $[\beta_0,1]$ в точке $\beta_0$. Итак, при $s \geq L-c+\rho EY$ оптимальное $\beta^*(s)=\beta_0$.

**2.** Пусть $s+c-L-\rho EY \leq 0$. В таком случае функция $u(s,\beta)$ возрастает по $\beta$ при $\beta \in [\beta_0,1]$. Рассмотрим функцию $\mu(w)$, заданную для всех $w \geq 0$ следующим образом

$$\mu(w) := \int\limits_{w}^{\infty} (y-\rho EY)dQ(y).$$

Заметим, что $\mu'(w) = -(w-\rho EY)q(w)$, т.е. $\mu(w)$ возрастает при $0 \leq w \leq \rho EY$ и убывает при $w \geq \rho EY$. Кроме того, $\mu(0) = (1-\rho)EY < 0$, а $\lim\limits_{w\to\infty}\mu(w) = 0$. Вид графика функции $\mu(w)$ для $w \geq 0$ изображен на рис. 2.3. Нетрудно видеть, что существует единственная точка $\tilde{w}$ такая, что $\mu(\tilde{w}) = 0$. Кроме того, при $w \leq \tilde{w}$ функция $\mu(w)$ неположительна, а при $w \geq \tilde{w}$ неотрицательна.

Далее, из формулы (2.25) несложно вывести, что при фиксированном $s$

$$u(s,\beta) \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq 1 - \frac{s+c-L}{\rho EY} =: \beta_1(s).$$

Заметим, что $\beta_1(s) = \beta_0 - (s-L)/\rho EY$. Рассмотрим три возможных случая расположения точки $\beta_1(s)$.

а) Пусть $\beta_1(s) \geq 1$. Это выполнено при $s+c-L \leq 0$. В совокупности с предыдущим условием $s+c-L-\rho EY \leq 0$ получаем ограничение $s \leq L-c$, поскольку $c < \rho EY$ по

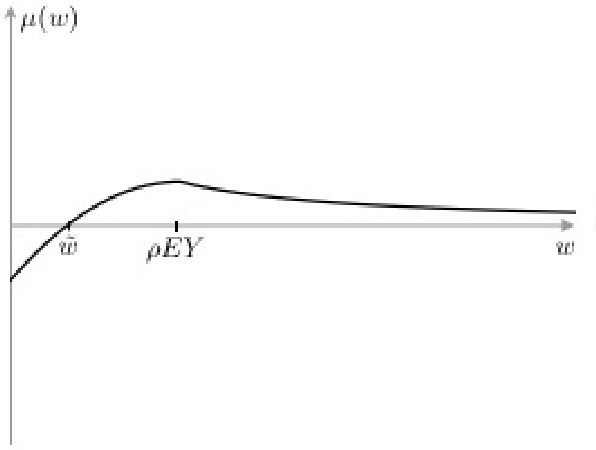


Рис. 2.3: Вид графика функции $\mu(w)$ для $w \geq 0$.

условию. В таком случае, $u(s,\beta) \leq 0$ для всех $\beta \in [\beta_0, 1]$ и, в соответствии с (2.26), функция $\varphi_1(s,\beta)$ убывает на отрезке $[\beta_0, 1]$. Следовательно, минимальное значение достигается в точке 1. Итак, при $s \leq L - c$ оптимальное $\beta^*(s) = 1$.

b) Пусть $\beta_1(s) \in [\beta_0, 1]$. Получаем три условия на $s$:

$$s + c - L \geq 0,\ s - L \leq 0,\ s + c - L - \rho EY \leq 0 \Rightarrow s \in [L - c, L - c + \rho EY],$$

так как $c < \rho EY$ по условию. В данном случае, $u(s,\beta) \leq 0$ при $\beta \in [\beta_0, \beta_1(s)]$, $u(s,\beta) \geq 0$ при $\beta \in [\beta_1(s), 1]$. Тогда, согласно (2.26), функция $\varphi_1(s,\beta)$ убывает при $\beta \in [\beta_0, \beta_1(s)]$. Кроме того, при $\beta = \beta_1(s)$

$$\varphi_1(s, \beta_1(s))_\beta = \int\limits_0^\infty (y - \rho EY) dQ(y) = (1-\rho)EY < 0.$$

Тогда, если $\varphi_1(s,1)_\beta = \mu(u(s,1)) < 0$, то при $\beta \in [\beta_1(s), 1]$ функция $\mu(u(s,\beta)) = \varphi_1(s,\beta)_\beta < 0$ и, следовательно, функция $\varphi_1(s,\beta)$ убывает при $\beta \in [\beta_0, 1]$ и достигает минимального значения при $\beta = 1$. Если же, $\varphi_1(s,1)_\beta > 0$, то $\mu(u(s,\beta)) = \varphi_1(s,\beta)_\beta$ отрицательна при $\beta \in [\beta_1(s), \tilde{\beta}(s)]$ и положительна при $\beta \in [\tilde{\beta}(s), 1]$, где $\tilde{\beta}(s) \in [\beta_1(s), 1]$ — единственное решение уравнения

$$\mu(u(s,\beta)) = \int\limits_{\frac{s+\overline{c}(\beta)-L}{\beta}}^{\infty} (y - \rho EY) dQ(y) = 0,$$

которое существует, поскольку $u(s,\beta)$ положительная возрастающая функция при $\beta \in [\beta_1(s), 1]$ и, как доказано выше, существует единственное $\tilde{w} > 0$ такое, что $\mu(\tilde{w}) = 0$. Значит, минимум функции $\varphi_1(s,\beta)$ достигается при $\beta = \tilde{\beta}(s) < 1$. Итак, при $s \in [L-c, L-c+\rho EY]$ оптимальное $\beta^* = \min(1, \tilde{\beta}(s))$.

c) Пусть $\beta_1(s) \le \beta_0$. Это выполнено при $s \in [L, L-c+\rho EY]$. Проведя рассуждения аналогичные пункту b) выше, несложно установить, что в данном случае оптимальное $\beta^*(s) = \max(\beta_0, \tilde{\beta}(s))$, где $\tilde{\beta}(s)$ — решение уравнения $\mu(u(s,\beta)) = 0$.

Собрав воедино все случаи, получаем второе утверждение теоремы.

Далее, если $\beta^*(s)$ — точка, в которой достигается минимум $\varphi_1(s,\beta)$ по $\beta$, то по определению имеем

$$W_1'(s) = \frac{\partial}{\partial s}\varphi_1(s,\beta^*(s)) + \frac{\partial}{\partial \beta}\varphi_1(s,\beta^*(s))\beta^{*\prime}(s) = \varphi_1(s,\beta^*(s))_s,$$

поскольку при $\beta^*(s) = \tilde{\beta}(s)$ по определению $\varphi_1(s,\beta^*(s))_\beta = 0$, а при $\beta^*(s) = \beta_0$ и $\beta^*(s) = 1$ производная $\beta^{*\prime}(s) = 0$. Далее, найдем частную производную $\varphi_1(s,\beta)_s$. Имеем

$$\varphi_1(s,\beta)_s = \begin{cases} -1, & \text{при } u(s,\beta) \le 0, \\ Q(u(s,\beta)) - 1, & \text{при } u(s,\beta) \ge 0. \end{cases}$$

В случае $n = 1$ мы можем выписать явный вид $W_1'(s)$, воспользовавшись приведенными выше выкладками (см. 1)-2) выше). А именно

$$W_1'(s) = \begin{cases} -1, & \text{при } s \le L-c, \\ Q(s+c-L) - 1, & \text{при } s \in [L-c, L-c+\tilde{w}], \\ Q(\tilde{w}) - 1, & \text{при } s \in [L-c+\tilde{w}, L+\tilde{w}\beta_0], \\ Q(\frac{s-L}{\beta_0}) - 1, & \text{при } s \ge L+\tilde{w}\beta_0, \end{cases}$$

где $\tilde{w}$ — решение уравнения $\mu(w) = 0$, существование которого установлено выше. Заметим, что $\tilde{w}$ не зависит от $s$. Нетрудно видеть, что $W_1'(s) \in [0,1]$. Кроме того, $W_1'(s)$ — непрерывная функция.

Далее, ясно, что $W_1''(s)$ либо равна тождественно нулю, либо пропорциональна плотности $q$ с положительным коэффициентом. Таким образом, $W_1''(s) \ge 0$ и теорема 2.5 доказана полностью. □

*Замечание* 2.7. Найденное выражение (2.23) для $\beta^*(s)$ может быть также получено другим способом в более удобном для практического применения виде. Действительно, заметим, что

$$\varphi_1(s,\beta)_\beta = \begin{cases} (1-\rho)EY, & \text{при } u(s,\beta) \le 0, \\ \mu(u(s,\beta)), & \text{при } u(s,\beta) \ge 0. \end{cases}$$

Было доказано, что уравнение $\mu(w) = 0$ имеет единственный корень $\tilde{w}$ при $w \ge 0$, причем из равенства $u(s, \tilde{\beta}(s)) = \tilde{w}$ однозначно определяется

$$\tilde{\beta}(s) = \frac{s + c - L - \rho EY}{\tilde{w} - \rho EY}.$$

Соответственно минимальное значение функции $\varphi_1(s,\beta)$ по $\beta$ достигается либо на границах отрезка $[\beta_0, 1]$ либо в точке $\tilde{\beta}(s)$, если $\tilde{\beta}(s) \in [\beta_0, 1]$. Решая неравенства $\tilde{\beta}(s) \le \beta_0$ и $\tilde{\beta}(s) \ge 1$ получаем следующее выражение для $\beta^*(s)$

$$\beta^*(s) = \begin{cases} 1, & \text{при } s \le L - c + \tilde{w}, \\ \tilde{\beta}(s), & \text{при } s \in [L - c + \tilde{w}, L + \tilde{w}\beta_0], \\ \beta_0, & \text{при } s \ge L + \tilde{w}\beta_0. \end{cases} \tag{2.30}$$

Пусть теперь $2 \le n < \infty$. Уравнение Беллмана имеет следующий вид

$$W_n(s) = \min_{\beta \in [\beta_0, 1]} \{E \max(0, L - s - \overline{c}(\beta) + \beta Y) + vEW_{n-1}(\max(L, s + \overline{c}(\beta) - \beta Y))\}.$$

Введем обозначение

$$\varphi_n(s,\beta) := E \max(0, L - s - \overline{c}(\beta) + \beta Y) + vEW_{n-1}(\max(L, s + \overline{c}(\beta) - \beta Y)).$$

Заметим, что

$$EW_{n-1}(\max(L, s + \overline{c}(\beta) - \beta Y)) = \int_0^\infty W_{n-1}(\max(L, s + \overline{c}(\beta) - \beta Y)) dQ(y) =$$

$$= \begin{cases} W_{n-1}(L), & \text{при } u(s,\beta) \le 0, \\ \int_0^{u(s,\beta)} (s + \overline{c}(\beta) - \beta y) dQ(y) + W_{n-1}(L)(1 - Q(u(s,\beta)), & \text{при } u(s,\beta) \ge 0, \end{cases}$$

где $u(s,\beta)$ определено в (2.25). Тогда

$$\varphi_n(s,\beta) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty (L - s - \overline{c}(\beta) + \beta y)dQ(y) + vW_{n-1}(L), & \text{при } u(s,\beta) \le 0, \\ \int\limits_{u(s,\beta)}^\infty (L - s - \overline{c}(\beta) + \beta y)dQ(y) + & \\ +v\left[\int\limits_0^{u(s,\beta)} W_{n-1}(s + \overline{c}(\beta) - \beta y)dQ(y) + W_{n-1}(L)(1 - Q(u(s,\beta))\right], & \text{при } u(s,\beta) \ge 0. \end{cases}$$

Справедлива следующая

**Теорема 2.6.** *1) Функция $W_n(s)$ дважды дифференцируема по $s$. Кроме того, $W_n'(s) \in [-1,0]$, $W_n''(s) \ge 0$.*
*2) Оптимальная квота $\beta_n^*(s)$ на первом шаге $n$-шагового процесса определяется следующим образом*

- *при $s \le L - c$, $\beta_n^*(s) = 1$;*
- *при $s \in [L - c, L]$,*

$$\beta_n^*(s) = \begin{cases} 1, & \text{при } p_n^1(s) < 0, \\ \tilde{\beta}(s), & \text{при остальных } s; \end{cases}$$

- *при $s \ge L$,*

$$\beta_n^*(s) = \begin{cases} 1, & \text{при } p_n^1(s) < 0, \\ \beta_0, & \text{при } p_n^0(s) > 0, \\ \tilde{\beta}(s), & \text{для остальных } s, \end{cases}$$

*где*

$$p_n^0(s) = \int\limits_{\frac{s-L}{\beta_0}}^\infty (y - \rho EY)dQ(y) + v\int\limits_0^{\frac{s-L}{\beta_0}} W_{n-1}'(s - \beta_0 y)(\rho EY - y)dQ(y),$$

$$p_n^1(s) = \int\limits_{s+c-L}^\infty (y - \rho EY)dQ(y) + v\int\limits_0^{s+c-L} W_{n-1}'(s + c - y)(\rho EY - y)dQ(y),$$

*а $\tilde{\beta}(s)$ — единственное решение уравнения*

$$\int\limits_{u(s,\beta)}^\infty (y - \rho EY)dQ(y) + v\int\limits_0^{u(s,\beta)} W_{n-1}'(s + \overline{c}(\beta) - \beta y)(\rho EY - y)dQ(y) = 0.$$

*Доказательство.* Сначала найдем частные производные $\varphi_n(s,\beta)$ по $\beta$. При $u(s,\beta) \leq 0$ имеем

$$\varphi_n(s,\beta)_\beta := \frac{\partial}{\partial\beta}\varphi_n(s,\beta) = (1-\rho)EY, \tag{2.31}$$

$$\varphi_n(s,\beta)_{\beta\beta} := \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\varphi_n(s,\beta) = 0. \tag{2.32}$$

Соответственно при $u(s,\beta) \geq 0$ получаем

$$\varphi_n(s,\beta)_\beta = \int\limits_{u(s,\beta)}^{\infty} (y-\rho EY)dQ(y) + v\left(\int\limits_{0}^{u(s,\beta)} W'_{n-1}(s+\overline{c}(\beta)-\beta y)(\rho EY - y)dQ(y) + \right.$$

$$\left. + W_{n-1}(s+\overline{c}(\beta)-(s,\beta))q(u(s,\beta))u(s,\beta)_\beta - W_{n-1}(L)q(u(s,\beta))u(s,\beta)_\beta\right) =$$

$$= \int\limits_{u(s,\beta)}^{\infty} (y-\rho EY)dQ(y) + v\int\limits_{0}^{u(s,\beta)} W'_{n-1}(s+\overline{c}(\beta)-\beta y)(\rho EY - y)dQ(y), \tag{2.33}$$

где $u(s,\beta)_\beta = \frac{\partial}{\partial\beta}u(s,\beta)$. Найдем вторую частную производную и введем дополнительные обозначения для ее компонент

$$\varphi_n(s,\beta)_{\beta\beta} = u(s,\beta)_\beta(u(s,\beta)-\rho EY)q(u(s,\beta)) + v\int\limits_{0}^{u(s,\beta)} W''_{n-1}(s+\overline{c}(\beta)-\beta y)(\rho EY-y)^2dQ(y) +$$

$$+ vW'_{n-1}(L)u(s,\beta)_\beta(\rho EY - u(s,\beta))q(u(s,\beta)) =$$

$$\underbrace{\frac{1}{\beta}\left(\frac{s+c-L-\rho EY}{\beta}\right)^2 q(u(s,\beta))(1+vW'_{n-1}(L))}_{:=K^1_{\beta\beta}} + \underbrace{v\int\limits_{0}^{u(s,\beta)} W''_{n-1}(s+\overline{c}(\beta)-\beta y)(\rho EY-y)^2dQ(y)}_{:=K^2_{\beta\beta}}. \tag{2.34}$$

Заметим, что, если $W'_{n-1}(s) \geq -1$ и $W''_{n-1}(s) \geq 0$, то $\varphi_n(s,\beta)_{\beta\beta} \geq 0$. Иными словами, функция $\varphi_n(s,\beta)_\beta$ не убывает по $\beta$ при фиксированном $s$.

Утверждение теоремы мы установим с помощью метода математической индукции по $n$. Для $n=1$ утверждение следует из теоремы 2.5. Пусть утверждение верно для $n-1$, то есть $W'_{n-1}(s) \in [-1,0]$, $W''_{n-1}(s) \geq 0$. Покажем, что оно справедливо для $W_n(s)$.

По аналогии с доказательством теоремы 2.5 произведем разбор случаев.

**1.** Пусть $s \geq L - c + \rho EY$. Тогда $u(s,\beta) > \rho EY$ для всех $\beta \in [\beta_0, 1]$. Обозначим

$$p_n^0(s) := \varphi_n(s, \beta^0)_\beta, \quad p_n^1(s) := \varphi_n(s, 1)_\beta.$$

Далее, заметим, что при $u(s,\beta) \geq 0$ согласно (2.34) и предположению индукции, $\varphi_n(s,\beta)_{\beta\beta}$ неотрицательна при $\beta \in [\beta_0, 1]$, причем оба слагаемых в выражении (2.34) не равны нулю одновременно и, значит, $\varphi_n(s,\beta)_{\beta\beta} > 0$. Следовательно, функция $\varphi_n(s,\beta)_\beta$ возрастает при $\beta \in [\beta_0, 1]$. Тогда, если $p_n^1(s) \leq 0$, то $p_n^0(s) < 0$ и, значит, функция $\varphi_n(s,\beta)_\beta \leq 0$ для всех $\beta \in [\beta_0, 1]$. При этом функция $\varphi_n(s,\beta)$ не возрастает по $\beta$ при фиксированном $s$ и достигает минимального значения в точке $\beta = 1$. Аналогично, при $p_n^0(s) \geq 0$, автоматически $p_n^1(s) > 0$ и функция $\varphi_n(s,\beta)_\beta \geq 0$ для всех $\beta \in [\beta_0, 1]$. Следовательно, в таком случае $\varphi_n(s,\beta)$ не убывает по $\beta$ и достигает минимального значения при $\beta = \beta_0$. В случае же $p_0^n(s) < 0$, $p_1^n(s) > 0$ в силу возрастания функции $\varphi_n(s,\beta)_\beta$ по $\beta$ существует единственное решение уравнения $\varphi_n(s,\beta)_\beta = 0$. Обозначим его $\tilde{\beta}(s)$. В таком случае, минимум функции $\varphi_n(s,\beta)$ достигается в точке $\tilde{\beta}(s)$. Наконец, заметим, что случай $p_n^0(s) > 0$, $p_n^1(s) < 0$ ровно как и случай $p_n^0(s) = p_n^1(s) = 0$ невозможен в силу возрастания $\varphi_n(s,\beta)$.

**2.** Пусть $s \leq L - c + \rho EY$. Тогда, как было показано при доказательстве теоремы 2.5,

$$u(s,\beta) \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq \beta_1(s) = 1 - \frac{s + c - L}{\rho EY}.$$

Рассмотрим три случая.

a) Пусть $\beta_1(s) \geq 1$. Это выполнено при $s \leq L - c$. Тогда $u(s,\beta) \leq 0$ для всякого $\beta \in [\beta_0, 1]$. Следовательно, согласно (2.31), $\varphi_n(s,\beta)_\beta = (1-\rho)EY < 0$ и, значит, функция $\varphi_n(s,\beta)$ убывает. Поэтому минимальное значение функции $\varphi_n(s,\beta)$ достигается в точке 1. Итак, при $s \leq L - c$ оптимальное $\beta_n^*(s) = 1$.

b) Пусть $\beta_1(s) \in [\beta_0, 1]$. Это выполнено при $s \in [L - c, L]$. В таком случае при $\beta \in [\beta_0, \beta_1(s)]$ аналогично предыдущему пункту имеем $\varphi_n(s,\beta)_\beta = (1-\rho)EY < 0$ и, значит, функция $\varphi_n(s,\beta)$ убывает. Кроме того, как несложно видеть из (2.33) $\varphi_n(s,\beta_1(s))_\beta = (1-\rho)EY < 0$. Соответственно, если $p_n^1(s) < 0$, то $\varphi_n(s,\beta)_\beta < 0$ при $\beta \in [\beta_1(s), 1]$ и функция $\varphi_n(s,\beta)$ убывает. Следовательно, минимум этой функции достигается при $\beta = 1$. Если же $p_n^1(s) \geq 0$, то существует единственное решение $\tilde{\beta}(s) \in [\beta_1(s), 1]$ уравнения $\varphi_n(s,\beta)_\beta = 0$ и минимум функции $\varphi_n(s,\beta)$ достигается в точке $\tilde{\beta}(s)$. Таким образом, при $s \in [L - c, L]$ оптимальное $\beta_n^*(s) = 1$ при $p_n^1(s) < 0$ и $\beta_n^*(s) = \tilde{\beta}(s)$ при остальных $s$.

c) Пусть $\beta_1(s) \le \beta_0$. Это выполнено при $s \in [L, L-c+\rho EY]$. В таком случае $u(s,\beta) \ge 0$ для всех $\beta \in [\beta_0, 1]$ и этот случай рассматривается аналогично случаю 1.

Собрав воедино все рассмотренные случаи, мы получаем второе утверждение теоремы.

Докажем теперь первый пункт теоремы: $W_n'(s) \in [-1, 0]$, $W_n''(s) \ge 0$. Для начала найдем частные производные $\varphi_n(s,\beta)$ по $s$, а также смешанную производную по $s$ и $\beta$. При $u(s,\beta) \le 0$ имеем

$$\varphi_n(s,\beta)_s := \frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(s,\beta) = -1, \tag{2.35}$$

$$\varphi_n(s,\beta)_{ss} := \frac{\partial^2}{\partial s^2}\varphi_n(s,\beta) = 0, \tag{2.36}$$

$$\varphi_n(s,\beta)_{s\beta} := \frac{\partial^2}{\partial s \partial \beta}\varphi_n(s,\beta) = 0. \tag{2.37}$$

Соответственно при $u(s,\beta) \ge 0$ получаем, что первая производная равна

$$\varphi_n(s,\beta)_s = Q\left(\frac{s+\overline{c}(\beta)-L}{\beta}\right) - 1 + v\int\limits_0^{\frac{s+\overline{c}(\beta)-L}{\beta}} W_{n-1}'(s+\overline{c}(\beta)-\beta y)dQ(y). \tag{2.38}$$

Вычислим вторую частную производную и введем дополнительные обозначения для ее компонент

$$\varphi_n(s,\beta)_{ss} = \underbrace{\frac{1}{\beta}q\left(\frac{s+\overline{c}(\beta)-L}{\beta}\right)(1+vW_{n-1}'(L))}_{:=K_{ss}^1} + \underbrace{v\int\limits_0^{\frac{s+\overline{c}(\beta)-L}{\beta}} W_{n-1}''(s+\overline{c}(\beta)-\beta y)dQ(y)}_{:=K_{ss}^2}. \tag{2.39}$$

Смешанная производная равна

$$\varphi_n(s,\beta)_{s\beta} = q(u(s,\beta))u(s,\beta)_\beta + v\int\limits_0^{u(s,\beta)} W_{n-1}''(s+\overline{c}(\beta)-\beta y)(\rho EY - y)dQ(y) +$$
$$+ vW_{n-1}'(L)u(s,\beta)_\beta q(u(s,\beta)) =$$
$$= \underbrace{\frac{L-s-c+\rho EY}{\beta^2}q(u(s,\beta))(1+vW_{n-1}'(L))}_{:=K_{s\beta}^1} + \underbrace{v\int\limits_0^{u(s,\beta)} W_{n-1}''(s+\overline{c}(\beta)-\beta y)(\rho EY - y)dQ(y)}_{:=K_{s\beta}^2}. \tag{2.40}$$

Далее, пусть $\beta_n^*(s)$ — точка, в которой достигается минимум в уравнении Беллмана для $W_n(s)$. Сначала заметим, что согласно рассмотренным выше случаям (см. 1)-2)) для всех $s$, кроме случая $s \leq L - c$ (см. 2a)), при $\beta = \beta_n^*(s)$ имеем $u(s, \beta_n^*(s)) \geq 0$. При этом для $s \leq L - c$ в 2a) показано, что $\beta^*(s) = 1$. Рассмотрим два случая

I. Пусть $s \leq L - c$, подставим значение $\beta_n^*(s) = 1$ в уравнение Беллмана для $W_n(s)$. Имеем

$$W_n(s) = E\max(0, L-s-c+Y)+vW_{n-1}(\max(L, s+c-Y)) = \int\limits_0^\infty (L-s-c+y)dQ(y)+vW_{n-1}(L),$$

откуда $W_n'(s) = -1$, $W_n''(s) = 0$.

II. Пусть $s \geq L - c$ и, следовательно, $u(s, \beta^*(s)) \geq 0$. По определению имеем

$$W_n'(s) = \varphi_n(s, \beta^*(s))_s + \varphi_n(s, \beta^*(s))_\beta \beta^{*\prime}(s) = \varphi_n(s, \beta^*(s))_s.$$

Нетрудно видеть, что $\varphi_n(s, \beta)_s \in [-1, 0]$. Действительно, согласно (2.38) и предположению индукции $W_{n-1}'(s) \geq -1$ справедлива следующая оценка

$$\varphi_n(s, \beta)_s \geq (1 - v)Q(u(s, \beta)) - 1 \in [-1, 0].$$

Далее, найдем $W_n''(s)$. Во-первых, заметим, что из формул (2.36) и (2.37) вытекает, что при $u(s, \beta) \leq 0$ или $s \leq L - c$ производная $W_n''(s) = 0$. Далее, пусть $s \geq L - c$. По правилу дифференцирования имеем

$$W_n''(s) = \varphi_n(s, \beta^*(s))_{ss} + \varphi_n(s, \beta^*(s))_{s\beta}\beta^{*\prime}(s) = \frac{\varphi_n(s, \beta^*(s))_{ss}\varphi_n(s, \beta^*(s))_{\beta\beta} - \varphi_n(s, \beta^*(s))_{s\beta}^2}{\varphi_n(s, \beta^*(s))_{\beta\beta}}. \tag{2.41}$$

Как доказано ранее, знаменатель дроби (2.41) положителен. Докажем неотрицательность числителя. В введенных ранее обозначениях числитель дроби (2.41) равен

$$\begin{aligned}(K_{ss}^1 + K_{ss}^2)(K_{\beta\beta}^1 + K_{\beta\beta}^2) - (K_{s\beta}^1 + K_{s\beta}^2)^2 &= \\ = (K_{ss}^1 K_{\beta\beta}^1 - (K_{s\beta}^1)^2) + (K_{ss}^1 K_{\beta\beta}^2 + K_{ss}^2 K_{\beta\beta}^1 - 2K_{s\beta}^1 K_{s\beta}^2) &+ (K_{ss}^2 K_{\beta\beta}^2 - (K_{s\beta}^2)^2).\end{aligned}$$

Докажем, что $K_{s\beta}^i K_{s\beta}^j \leq K_{ss}^i K_{\beta\beta}^j$ для $i, j = 1, 2$. Заметим, что по определению $K_{ss}^1 K_{\beta\beta}^1 = (K_{s\beta}^1)^2$. Покажем, что $K_{ss}^2 K_{\beta\beta}^2 \geq (K_{s\beta}^2)^2$. Действительно, согласно неравенству Коши–

Буняковского

$$(K^2_{s\beta})^2 = v^2 \left[ \int\limits_0^{u(s,\beta)} \left( \sqrt{W''_{n-1}(s+\overline{c}(\beta)-\beta y)} \right)^2 (\rho EY - y) dQ(y) \right]^2 \le$$

$$\le v \left[ \int\limits_0^{u(s,\beta)} W''_{n-1}(s+\overline{c}(\beta)-\beta y) dQ(y) \right] v \left[ \int\limits_0^{u(s,\beta)} W''_{n-1}(s+\overline{c}(\beta)-\beta y)(\rho EY - y)^2 dQ(y) \right] = K^2_{ss} K^2_{\beta\beta}.$$

Кроме того, по определению и предположению индукции $K^1_{ss} \ge 0$, $K^2_{ss} \ge 0$, $K^1_{\beta\beta} \ge 0$ и $K^2_{\beta\beta} \ge 0$. С помощью приведенных выше сравнений находим

$$K^1_{ss}K^2_{\beta\beta} + K^2_{ss}K^1_{\beta\beta} - 2K^1_{s\beta}K^2_{s\beta} \ge K^1_{ss}K^2_{\beta\beta} + K^2_{ss}K^1_{\beta\beta} - 2|K^1_{s\beta}K^2_{s\beta}| \ge$$
$$\ge K^1_{ss}K^2_{\beta\beta} + K^2_{ss}K^1_{\beta\beta} - 2\sqrt{K^1_{ss}K^2_{ss}K^2_{\beta\beta}K^1_{\beta\beta}} \ge (\sqrt{K^1_{ss}K^2_{\beta\beta}} - \sqrt{K^2_{ss}K^1_{\beta\beta}})^2 \ge 0.$$

Следовательно, все компоненты числителя дроби (2.41) неотрицательны.

Таким образом, $W''_n(s) \ge 0$ при $s \ge L - c$ и все утверждения теоремы доказаны. □

### Случай бесконечного горизонта планирования

Перейдем теперь к случаю $n = \infty$. Во-первых, заметим, что функция $W(s)$ ограничена сверху. Действительно, рассмотрим стратегию «отсутствия перестрахования» $B^1 := (b^1_1, b^1_2, \ldots)$, определенную по правилу $b^1_k = 1$ п.н. для всех $k \ge 1$. В таком случае, по определению $W(s) \le W^{B^1}(s)$. В параграфе 2.1 было доказано, что в случае отсутствия перестрахования (и инвестиций) справедлива оценка (см. замечание 2.4 и формулу (2.14))

$$W^{B^1}(s) \le \frac{|L-s|}{1-v} + v\frac{(c-EY)}{(1-v)^2}. \tag{2.42}$$

Покажем, что существует решение уравнения (2.22). Рассмотрим последовательность функций $\{W_n(s)\}_{n=0}^{\infty}$, определенных по правилу

$$W_n(s) = \min_{\beta\in[\beta_0,1]} \{E\max(0, L-s-\overline{c}(\beta)+r(\beta,Y)) + vEW_{n-1}(\max(L, s+\overline{c}(\beta)-r(\beta,Y))\},\ n \ge 0, \tag{2.43}$$

где $W_0(s) = 0$. Справедлива

**Лемма 2.7.** *Существует поточечный предел $W(s) := \lim_{n\to\infty} W_n(s)$ последовательности функций $W_n(s)$. Кроме того, предельная функция $W(s)$ удовлетворяет уравнению Беллмана (2.22).*

*Доказательство.* Докажем, что последовательность $\{W_n(s)\}$ возрастает по $n$. Установим это свойство по индукции. При $n = 0$ утверждение тривиально. Пусть $W_n(s) \geq W_{n-1}(s)$ для всех $s$, а $\beta^*_{n+1}(s)$ — точка, в которой достигается минимум в уравнении (2.43) для $W_{n+1}(s)$. Тогда $W_{n+1}(s) =$

$$= E\max(0, L - s - \overline{c}(\beta^*_{n+1}(s)) + \beta^*_{n+1}(s)Y) + vEW_n(\max(L, s + \overline{c}(\beta^*_{n+1}(s)) - \beta^*_{n+1}(s)Y) \geq$$
$$\geq E\max(0, L - s - \overline{c}(\beta^*_{n+1}(s)) + \beta^*_{n+1}(s)Y) + vEW_{n-1}(\max(L, s + \overline{c}(\beta^*_{n+1}(s)) - \beta^*_{n+1}(s)Y) \geq$$
$$\geq \min_{\beta \in [\beta_0, 1]} \{E\max(0, L - s - \overline{c}(\beta) + \beta Y) + vEW_{n-1}(\max(L, s + \overline{c}(\beta) - \beta Y)\} = W_n(s).$$

Следовательно, так как $W_n(s) \leq W_{n+1}(s) \leq W(s)$ для всех $s$ и $n \geq 0$, то согласно (2.42) все функции $W_n(s)$ ограничены сверху. Тогда по теореме о монотонной сходимости существует поточечный предел $W_\infty := \lim_{n\to\infty} W_n(s)$. Далее, аналогично теореме 2.3 из первого параграфе устанавливается, что $W_\infty(s)$ удовлетворяет уравнению Белммана и $W_\infty(s) = W(s)$. □

Далее, справедлива

**Теорема 2.7.** *1) Функция $W(s)$ дважды дифференцируема. Кроме того, $W'(s) \in [-1, 0]$, $W''(s) \geq 0$.*
*2) Оптимальная квота $\beta^*(s)$ на первом шаге определяется следующим образом*

- *при $s \leq L - c$, $\beta^*(s) = 1$;*
- *при $s \in [L - c, L]$,*

$$\beta^*(s) = \begin{cases} 1, & \text{при } p^1(s) < 0, \\ \tilde{\beta}(s), & \text{при остальных } s; \end{cases}$$

- *при $s \geq L$,*

$$\beta^*(s) = \begin{cases} 1, & \text{при } p^1(s) < 0, \\ \beta_0, & \text{при } p^0(s) > 0, \\ \tilde{\beta}(s), & \text{для остальных } s, \end{cases}$$

*где*

$$p^0(s) = \int\limits_{\frac{s-L}{\beta_0}}^{\infty} (y - \rho EY) dQ(y) + v \int\limits_0^{\frac{s-L}{\beta_0}} W'(s - \beta_0 y)(\rho EY - y) dQ(y),$$

$$p^1(s) = \int\limits_{s+c-L}^{\infty} (y - \rho EY) dQ(y) + v \int\limits_0^{s+c-L} W'(s + c - y)(\rho EY - y) dQ(y),$$

*а* $\tilde{\beta}(s)$ *— единственное решение уравнения*

$$\int\limits_{u(s,\beta)}^{\infty} (y - \rho EY) dQ(y) + v \int\limits_0^{u(s,\beta)} W'(s + \overline{c}(\beta) - \beta y)(\rho EY - y) dQ(y) = 0.$$

*Доказательство.* Заметим, что последовательность $\{W_n'(s)\}_{n=0}^{\infty}$ согласно теореме 2.6 есть последовательность ограниченных неубывающих дифференцируемых функций. Следовательно, существует поточечный предел $\lim_{n\to\infty} W_n'(s) = G(s)$. Но поскольку в силу леммы 2.7 существует $\lim_{n\to\infty} W_n(s) = W(s)$, то $W(s)$ — дифференцируема и $W'(s) = G(s)$. Следовательно, поскольку все функции $W_n'(s)$ не убывают и дифференцируемы, то $W''(s) \geq 0$. Кроме того, поскольку для всех $n$ имеем $-1 \leq W_n'(s) \leq 0$, то $W''(s) \geq 0$. Второе утверждение теоремы доказывается полностью аналогично теореме 2.6 с заменой рассматриваемой там функции $\varphi_n(s, \beta)$ на

$$\varphi(s, \beta) := E \max(0, L - s - \overline{c}(\beta) + s(\beta, Y)) + vEW(\max(L, s + \overline{c}(\beta) - s(\beta, Y)).$$

□

**Численная реализация**

В качестве примера рассмотрим случай одношаговой модели с убытком, имеющим экспоненциальное распределение, т.е. $Y \sim \exp(1/\lambda)$. В данном случае уравнение

$$\mu(w) = \int\limits_w^{\infty} (y - \rho EY) dQ(y) = \frac{1}{\lambda} \int\limits_w^{\infty} y e^{-\frac{y}{\lambda}} dy - \lambda \rho e^{-\frac{w}{\lambda}} = 0$$

имеет решение $\tilde{w} = \lambda(\rho - 1) > 0$. Кроме того,

$$u(s, \beta) = \frac{s + \overline{c}(\beta) - L}{\beta} = \lambda(\rho - 1) \Leftrightarrow \beta = \rho + \frac{L - s - c}{\lambda}.$$

Таким образом, в данном случае имеем

$$\beta_0 = 1 - \frac{c}{\lambda\rho},\ \beta_1(s) = 1 - \frac{s+c-L}{\lambda\rho},\ \tilde{\beta}(s) = \rho + \frac{L-s-c}{\lambda}.$$

В данном случае выражение (2.30) для оптимального $\beta^*(s)$ запишется следующим образом

$$\beta^*(s) = \begin{cases} 1, & \text{при } s \le L - c + \lambda(\rho - 1), \\ \rho + \frac{L-s-c}{\lambda}, & \text{при } s \in [L - c + \lambda(\rho-1), L + (\lambda\rho - c)(1 - \frac{1}{\rho})], \\ 1 - \frac{c}{\lambda\rho}, & \text{при } s \ge L + (\lambda\rho - c)(1 - \frac{1}{\rho}). \end{cases}$$

Возьмем следующие значения параметров: $c = 1.2$, $\lambda = 1$, $\rho = 1.5$. На рис. 2.4 показаны графики функции $\beta^*(s)$ при различных значениях параметра $L$. Обратим внимание, что как и следует из теоремы 2.5, при увеличении уровня восстановления $L$ промежуток, на котором оптимальная доля перестрахования $\beta^*(s)$ не принимает критических значений $\beta_0$ и 1, сдвигается вправо, сохраняя ширину.

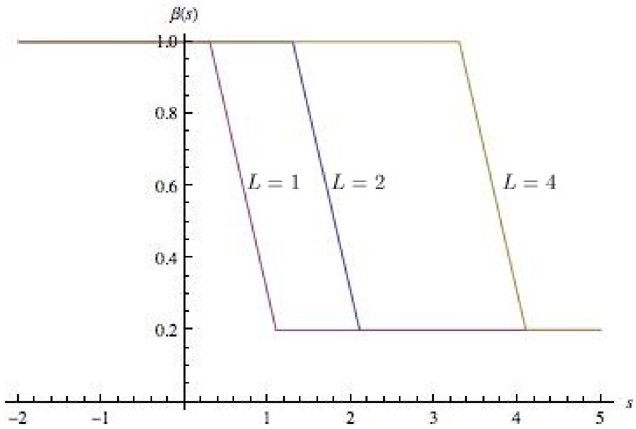


Рис. 2.4: Графики функции $\beta^*(s)$ для различных $L$.

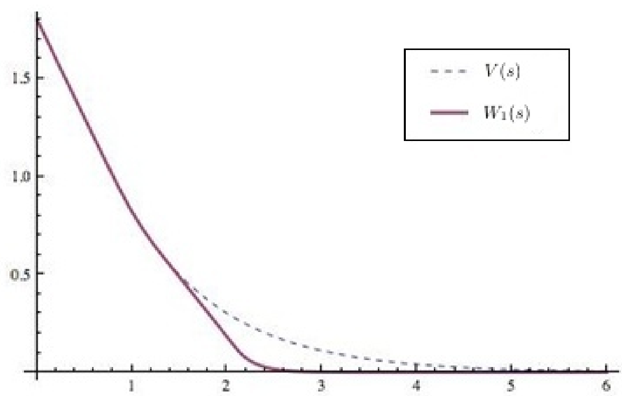


Рис. 2.5: Графики функций $W_1(s)$ и $V(s)$.

Далее, пусть $W_1(s) = E\max(0, L - s - \overline{c}(\beta^*(s)) + \beta^*(s)Y)$ — минимальное дополнительное вливание капитала в конце первого года при передачи в перестрахование доли $1 - \beta^*(s)$, $V(s) = E\max(0, L - s - c + Y)$ — вливание капитала при отсутствии перестрахования. При указанных выше значениях параметров, графики этих функций приведены на рис. 2.5. Из рисунка видно, что путем выбора оптимальной доли перестрахования можно снизить размер дополнительного капитала.

### 2.2.2 Случай перестрахования эксцедента убытка

Рассмотрим теперь частный случай непропорционального перестрахования — перестрахование типа эксцедента убытка. Напомним, что договор эксцедента убытка характеризуется *уровнем собственного удержания* $\beta > 0$ и при поступлении требования ответственность цедента не превышает этот уровень. Иными словами $r(Y, \beta) = \min(\beta, Y)$, $\beta > 0$, а ответственность перестраховщика равна $(Y - \beta)^+ := \max(0, Y - \beta)$. Также как и раньше, будем полагать, что перестраховщик рассчитывает свою премию по принципу среднего с нагрузкой безопасности, т.е.

$$\overline{c}(\beta) = c - \rho E(Y - \beta)^+, \ \rho > 1.$$

Кроме того, будем считать, что $c < \rho EY$, в противном случае, страховщик может перестраховать свой риск и при этом заработать. Далее, заметим, что $\overline{c}'(\beta) = \rho(1 - Q(\beta)) \geq 0$, т.е. $\overline{c}(\beta)$ не убывает. Кроме того, $\overline{c}(0) = c - \rho EY < 0$, а $\lim\limits_{\beta \to \infty} \overline{c}(\beta) = c > 0$. Следовательно, существует точка $\beta_0$ такая, что при $\overline{c}(\beta) \geq 0$ при $\beta \geq \beta_0$. Таким образом, в данном случае множество $\mathcal{D}$ допустимых значений $b$, определенное в первом параграфе, есть $\mathcal{D} = [\beta_0, \infty]$.

В случае перестрахования эксцедента убытка, в отличие от пропорционального перестрахования, явное выражение для оптимального параметра договора можно получить только при $n = 1$. В случае $n = 1$ уравнение (2.21) принимает вид

$$W_1(s) = \inf_{\beta \geq \beta_0} E \max(0, L - s - \overline{c}(\beta) + \min(\beta, Y)).$$

**Теорема 2.8.** *1) Функция $W_1(s)$ дифференцируема по $s$. Кроме того, $W_1'(s) \in [-2, 0]$.*
*2) Оптимальный уровень собственного удержания $\beta^*(s)$ в одношаговой модели равен*

$$\beta^*(s) = \begin{cases} +\infty, \ \textit{при } s \leq L - c + \beta_1, \\ \tilde{\beta}(s), \ \textit{при } s \in [L - c + \beta_1, L - \overline{c}(\beta_1) + \beta_1], \\ \beta_1, \ \textit{при } s \geq L - \overline{c}(\beta_1) + \beta_1, \end{cases}$$

*где $\beta_1 := Q^{-1}(1 - \rho^{-1})$, а $\tilde{\beta}(s)$ — единственное решение уравнения*

$$s + \overline{c}(\beta) - L = \beta_1. \tag{2.44}$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию

$$\psi_1(s, \beta) := E \max(0, L - s - \overline{c}(\beta) + \min(\beta, Y)).$$

Выполним преобразования

$$\psi_1(s,\beta) = \int\limits_0^\beta \max(0, L - s - \overline{c}(\beta) + y) dQ(y) + \max(0, L - s - \overline{c}(\beta) + \beta)(1 - Q(\beta)) =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ при } \gamma(s,\beta) \geq 0, \\ \int\limits_{s+\overline{c}(\beta)-L}^{\beta} (L - s - \overline{c}(\beta) + y) dQ(y) + (L - s - \overline{c}(\beta) + \beta)(1 - Q(\beta)), \text{ при } \gamma(s,\beta) \leq 0, \end{cases} \tag{2.45}$$

где $\gamma(s,\beta) := s + \overline{c}(\beta) - L - \beta$. Заметим, что $\gamma(s,\beta)_\beta = \rho(1 - Q(\beta)) - 1$ и, следовательно,

$$\gamma(s,\beta)_\beta \geq 0 \Leftrightarrow Q(\beta) \leq 1 - \rho^{-1} \Leftrightarrow \beta \leq Q^{-1}(1 - \rho^{-1}) = \beta_1.$$

Таким образом, $\gamma(s,\beta)$ возрастает по $\beta$ при $\beta \leq \beta_1$ и убывает при $\beta \geq \beta_1$. Заметим, что $\beta_1 > 0$, так как $0 < 1 - \rho^{-1} < 1$. Рассмотрим два возможных случая: $\gamma(s,\beta_1) \geq 0$ и $\gamma(s,\beta_1) < 0$.

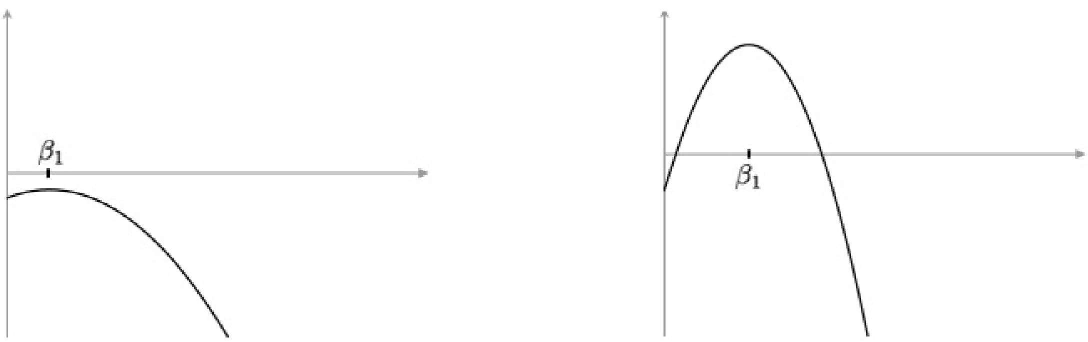


Рис. 2.6: Два типа графика функции $\gamma(s,\beta)$ при фиксированном $s$.

**1.** Пусть $\gamma(s,\beta_1) < 0$, это выполнено при $s < L - \overline{c}(\beta_1) + \beta_1$. В таком случае график функции $\gamma(s,\beta)$ при фиксированном $s$ имеет первый тип (левый график на рис. 2.6). Нетрудно видеть, что в таком случае $\gamma(s,\beta) < 0$ для всех $\beta \geq 0$. Используя выражение для $\psi_1(s,\beta)$ найдем частную производную этой функции при $\gamma(s,\beta) < 0$. Имеем

$$\psi_1(s,\beta)_\beta := \frac{\partial}{\partial\beta}\psi_1(s,\beta) = -\int\limits_0^\beta \overline{c}'(\beta) dQ(y) + (L - s - \overline{c}(\beta) + \beta) q(\beta) + (1 - \overline{c}'(\beta))(1 - Q(\beta) -$$

$$- (L - s - \overline{c}(\beta) + \beta) q(\beta) = \overline{c}'(\beta)(Q(s + \overline{c}(\beta) - L) - 1) + 1 - Q(\beta) =$$

$$= (1 - Q(\beta))(\rho Q(s + \overline{c}(\beta) - L) - \rho + 1). \tag{2.46}$$

Следовательно, $\psi_1(s,\beta)_\beta = 0$ либо при $\beta = +\infty$, либо при

$$Q(s + \overline{c}(\beta) - L) = 1 - \rho^{-1} \Leftrightarrow \tau(s,\beta) := s + \overline{c}(\beta) - L = \beta_1.$$

Заметим, что $\lim_{\beta\to\infty} \tau(s,\beta) = s + c - L$, а $\tau(s,\beta_1) = s + \overline{c}(\beta_1) - L < \beta_1$. Кроме того, $\tau(s,\beta)_\beta = \overline{c}'(\beta) > 0$, т.е. $\tau(s,\beta)$ возрастает по $\beta$. Разберем отдельно две возможности

a) Пусть $s + c - L \geq \beta_1$. В таком случае для каждого $s$ уравнение $\tau(s,\beta) = \beta_1$ имеем строго одно решение $\tilde{\beta}(s)$. При этом, согласно (2.46) при $\beta < \tilde{\beta}(s)$ производная $\psi_1(s,\beta)_\beta < 0$ и функция $\psi_1(s,\beta)$ убывает, а при $\beta > \tilde{\beta}(s)$ функция $\psi_1(s,\beta)$ соответственно возрастает. Значит, минимальное значение функции $\psi_1(s,\beta)$ достигается при $\beta = \tilde{\beta}(s)$. Заметим также, что, поскольку $\tau(s,\beta)$ возрастает по $\beta$ и $\tau(s,\beta_1) < \beta_1$, то $\tilde{\beta}(s) > \beta_1$.

b) Пусть $s + c - L \leq \beta_1$. Тогда $\tau(s,\beta) < \beta_1$ для всех $\beta$, а производная $\psi_1(s,\beta)_\beta < 0$ при $\beta < +\infty$ и $\psi_1(s,\beta) = 0$ при $\beta = +\infty$. Следовательно, минимальное значение функции $\psi_1(s,\beta)$ достигается при $\beta = +\infty$.

**2.** Пусть $\gamma(s,\beta_1) \geq 0$, это выполнено при $s \geq L - \overline{c}(\beta_1) + \beta_1$. Тогда график функции $\gamma(s,\beta)$ при фиксированном $s$ имеет второй тип (правый график на рис. 2.6) и, как несложно видеть, найдутся точки $\beta' < \beta_1 < \beta''$ такие, что $\gamma(s,\beta) > 0$ при $\beta \in (\beta', \beta'')$ (при этом возможно, что $\beta' = 0$). В таком случае $\psi_1(s,\beta) = 0$ при $\beta \in (\beta', \beta'')$, что, очевидно, является минимальным значением. Поскольку нам будет нужна непрерывная версия $\beta^*(s)$ в данном случае положим $\beta^*(s) = \beta_1$.

Собрав воедино разобранные случаи получаем второе утверждение теоремы.

Далее, по определению имеем

$$W_1'(s) = \psi_1(s,\beta^*(s))_\beta \beta^*(s)' + \psi_1(s,\beta^*(s))_s = \psi_1(s,\beta^*(s))_s,$$

так как при $\beta^*(s) = \beta_1$ или $\beta^*(s) = +\infty$ производная $\beta^*(s)' = 0$, а при $\beta^*(s) = \tilde{\beta}(s)$ производная $\psi_1(s,\beta^*(s))_\beta = 0$ по определению $\tilde{\beta}(s)$. Вычислим частную производную $\psi_1(s,\beta)_s$. С помощью (2.45) находим

$$\psi_1(s,\beta)_s = \begin{cases} 0, \text{ при } \gamma(s,\beta) \geq 0, \\ Q(\beta) + Q(s + \overline{c}(\beta) - L) - 2, \text{ при } \gamma(s,\beta) \leq 0. \end{cases}$$

Из полученного выражения следует, что $W_1'(s) = \psi_1(s,\beta^*(s))_s \in [-2, 0]$, что завершает доказательство теоремы. □

**Численная реализация**

Для наглядного представления доказанной выше теоремы, рассмотрим одношаговую модель, считая, что годовой убыток имеет экспоненциальное распределение, т.е. $Y \sim \exp(1/\lambda)$. В таком случае уравнение (2.44) имеет явное решение

$$\tilde{\beta}(s) = -\lambda \ln \frac{s + c - L - \beta_1}{\rho\lambda}.$$

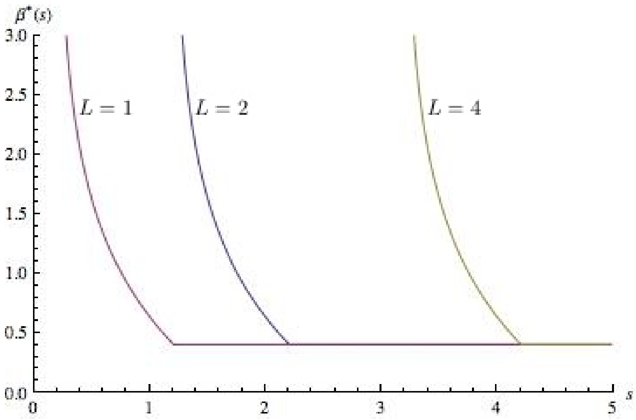


Рис. 2.7: Графики функции $\beta^*(s)$ для различных $L$.

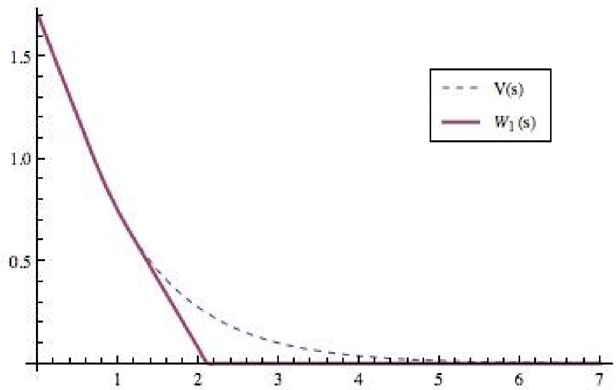


Рис. 2.8: Графики функций $W_1(s)$ и $V(s)$.

Как и в случае пропорционального перестрахования, обозначим $V(s) = E\max(0, L - s - c + Y)$ — вливание капитала при отсутствии перестрахования. На рис. 2.7 показаны графики функции $\beta^*(s)$ для $L = 1, 2, 4$. Заметим, что как и следует из теоремы 2.8, $\lim_{s\to\infty} \beta^*(s) = \beta_1$ для любого $L \geq 0$. Для расчета были взяты следующие значения параметров модели $c = 1.2$, $\lambda = 1$, $\rho = 1.5$. Наконец, на рис. 2.8 изображены графики функций $W_1(s) = E\max(0, L - s - \overline{c}(\beta^*(s)) + \min(\beta^*(s), Y))$ (размер дополнительного капитала при передаче в перестрахование доли $Y - \min(\beta^*(s), Y)$) и $V(s)$ для $s \in [0, 7]$ и $L = 2$.

# Глава 3
# Предельное распределение капитала в модели с дополнительным вливанием капитала

В данной главе исследуется модель работы страховой компании с дискретным временем. Как и во второй главе предполагается, что собственник компании, для того чтобы избежать ее разорения, имеет возможность инвестировать дополнительные средства, если капитал компании по итогам года опустился ниже некоторого фиксированного уровня. Кроме того, компания имеет возможность вкладывать средства в некоторый рисковый актив, причем размер этих вложения остается постоянным на протяжении всего времени работы компании. Иными словами, компания использует постоянную стратегию инвестирования. В предположении, что компания работает неограниченное время, ставится вопрос о существовании предельного распределения капитала компании и нахождения этого распределения. Приводится пример нахождения предельного распределения для случая экспоненциально распределенных убытков и доходности рискового актива, имеющей распределение Лапласа.

## §3.1 Предельное распределение капитала в случае постоянной стратегии инвестирования

Модель, которая изучается в данном параграфе, аналогична модели из параграфа 2.1 главы 2. Точнее, пусть $c > 0$ — суммарный размер страховых премий, поступивших в компанию за год, а $Y_n$ — совокупный размер требований или убытков за $n$-ый год. Предполагается, что $Y_1, Y_2, \ldots$ — н.о.р. неотрицательные с.в. с абсолютно непрерывной функцией распределения $Q(y)$, имеющей непрерывную плотность $q(y)$. Кроме того, страховая компания имеет возможность вкладывать средства в некий рыночный актив. Пусть последовательность с.в. $Z_1, Z_2, \ldots$ определяет результат вложения средств в этот актив, то есть, если в начале $n$-ого периода была вложена одна денежная единица, то в конце $n$-ого периода мы получим $(1 + Z_n)$ денежных единиц. Мы считаем, что рынок, на котором оборачивается данный актив безарбитражный, то есть $P(Z_n \geq 0) \in (0, 1)$ и $EZ_n > 0$. Предполагается, что с.в. $Z_1, Z_2, \ldots$ — н.о.р. с функцией распределения $H(z)$, плотностью распределения $h(z)$ и независимы от $Y_1, Y_2, \ldots$. В данной главе мы будем рассматривать постоянные стратегии инвестирования (см. определение 2.1), т.е. каждый год компания инвестирует в рисковый актив некоторую сумму $A > 0$. Кроме того, как только капитал компании опускается ниже некоторого заданного уровня $L \geq 0$, происходит его восстановление до этого уровня. В такой модели капитал компании $R_n$ на конец $n$-го года равен

$$R_n = \begin{cases} L, & \text{если } R_{n-1} + AZ_n + c - Y_n \leq L, \\ R_{n-1} + AZ_n + c - Y_n, & \text{если } R_{n-1} + AZ_n + c - Y_n \geq L, \end{cases}, \quad R_0 = s, \tag{3.1}$$

где $s > 0$ — величина начального капитала.
Основной задачей данной главы будет доказательство существования слабого предела последовательности $\{R_n\}$, $n \geq 1$, при $n \to \infty$ и поиск вида предельного распределения.

Без ограничения общности положим $s = L$. Найдем функцию распределения $F_n(x) := P(R_n \leq x)$ для произвольного $n \geq 1$. Заметим, что из выражения (3.1) для капитала компании следует, что $F_n(x) = 0$ при $x < L$. Пусть сначала $n = 1$. Если $x \geq L$, то в силу аддитивности вероятности

$$F_1(x) = P(R_1 \le x) = P(L + c + AZ_1 - Y_1 \le L) + P(L \le L + c + AZ_1 - Y_1 \le x) =$$
$$= P(AZ_1 - Y_1 \le x - L - c) = \iint\limits_{\{(y,z)\colon Az - y \le x - L - c\}} dQ(y)dH(z) =$$
$$= \left( \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-L-c}{A}} \int\limits_{0}^{+\infty} + \int\limits_{\frac{x-L-c}{A}}^{+\infty} \int\limits_{Az-x+L+c}^{+\infty} \right) dQ(y)dH(z) = \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-L-c}{A}} dH(z) + \int\limits_{\frac{x-L-c}{A}}^{+\infty} (1 - Q(Az - x + L + c))dH(z) =$$
$$= H\left(\frac{x-L-c}{A}\right) + 1 - H\left(\frac{x-L-c}{A}\right) - \int\limits_{\frac{x-L-c}{A}}^{+\infty} Q(Az - x + L + c)dH(z) = 1 - EQ(Az - x + L + c) =$$
$$= E\overline{Q}(AZ_1 - x + L + c), \quad (3.2)$$

где $\overline{Q}(y) = 1 - Q(y)$. Итак, при $n = 1$ получаем, что

$$F_1(x) = \mathbb{I}(x \ge L)E\overline{Q}(AZ_1 - x + L + c), \quad (3.3)$$

где $\mathbb{I}$ — индикаторная функция.

Перейдем к общему случаю. Введем обозначение $p_n := P(R_n = L)$. Справедлива следующая

**Лемма 3.1.** *1. Для любого $n \ge 1$ функция распределения $F_n$ имеет вид*

$$F_n(x) = \mathbb{I}(x \ge L)\left(p_n + \int\limits_{L}^{x} \tilde{\rho}_n(t)dt\right), \quad (3.4)$$

*где $\tilde{\rho}_n(t)$ — плотность распределения некоторой случайной величины.*
*2. Для любого $n \ge 1$ и $x \ge L$ обозначим $G_n(x) := \mathbb{I}(x \ge L)\int_L^x \tilde{\rho}_n(t)dt$. Положим $p_0 = 1$, $G_0(x) = 0$, тогда для $n \ge 1$ справедливо следующее выражение*

$$G_n(x) = -p_n + p_{n-1}E\overline{Q}(AZ_1 - x + c + L) +$$
$$+ \left( \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-c-L}{A}} \int\limits_{x-c-Az}^{+\infty} + \int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty} \int\limits_{L}^{+\infty} \right) G_{n-1}(y)q(y + c + Az - x)dydH(z), \quad (3.5)$$

$$p_n = p_{n-1}E\overline{Q}(AZ_1 + c) + \left( \int\limits_{-\infty}^{-\frac{c}{A}} \int\limits_{L-c-Az}^{+\infty} + \int\limits_{-\frac{c}{A}}^{+\infty} \int\limits_{L}^{+\infty} \right) G_{n-1}(y)q(y + c + Az - L)dydH(z). \quad (3.6)$$

*Доказательство.* Докажем лемму методом математической индукции. При $n=1$ из вывода формулы (3.3) следует, что

$$F_1(x) = p_1 + \int\limits_L^x \tilde{\rho}_1(t)dt,$$

где $p_1 = P(R_1 = L) = P(L + c + AZ_1 - Y_1 \le L)$, а $\tilde{\rho}_1(t)$ — плотность распределения с.в. $L + c + AZ_1 - Y_1$. При этом $G_1(x) = -p_1 + E\overline{Q}(AZ_1 - x + c + L)$, а $p_1 = E\overline{Q}(AZ_1 + c)$.

Пусть утверждение верно для $n-1$, $n > 1$ и $F_{n-1}(x)$ имеет требуемый вид. Докажем, что $F_n(x)$ также имеет требуемый вид.

Рассмотрим с.в. $\tilde{R}_n := R_{n-1} + c + AZ_n - Y_n$ и пусть $\tilde{F}_n(x) = P(\tilde{R}_n \le x)$ — ее функция распределения. Тогда $F_n(x) = P(\tilde{R}_n \le L) + P(L \le \tilde{R}_n \le x) = p_n + \tilde{F}_n(x) - \tilde{F}_n(L)$. Заметим, что вообще говоря с.в. $\tilde{R}_n$ не является неотрицательной. Из выражения (3.1) для капитала компании следует, что при $x \ge L$

$$F_n(x) = P(R_n \le x) = p_n + P(L \le \tilde{R}_n \le x).$$

Следовательно, для доказательства первого утверждения леммы достаточно установить, что ф.р. $\tilde{F}_n$ абсолютно непрерывная. С учетом предположения индукции имеем по аналогии с выводом формулы (3.2) находим

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_n(x) &= p_{n-1} \iint\limits_{\{(y,z)\colon L+c+Az-y\le x\}} dQ(y)dH(z) + \iiint\limits_{\{(t,y,z)\colon t+c+Az-y\le x,\, t\ge L\}} \tilde{\rho}_{n-1}(t)dtdQ(y)dH(z) = \\
&= p_{n-1}\left( H\left(\frac{x-c-L}{A}\right) + \int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty} \overline{Q}(Az - x + c + L)dH(z) \right) + \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{L+c-x+Az}^{+\infty} \int\limits_{L}^{x+y-c-Az} \tilde{\rho}_{n-1}(t)dtdQ(y)dH(z) = \\
&= p_{n-1}E\overline{Q}(AZ_1 - x + c + L) + \left( \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-c-L}{A}} \int\limits_{0}^{+\infty} + \int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty} \int\limits_{L+c-x+Az}^{+\infty} \right) \int\limits_{L}^{x+y-c-Az} \tilde{\rho}_{n-1}(t)dtdQ(y)dH(z).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Покажем, что функция $\tilde{F}_n(x)$ абсолютно непрерывна, вычислив плотность распределения случайной величины $\tilde{R}_n$. По правилу дифференцирования интегралов по параметру имеем

$$\tilde{\rho}_n(x) = \frac{d\tilde{F}_n(x)}{dx} = \frac{p_{n-1}}{A} h\left(\frac{x-c-L}{A}\right) - \frac{p_{n-1}}{A} h\left(\frac{x-c-L}{A}\right) + p_{n-1}\frac{d}{dx}\int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty} \overline{Q}(Az-x+c+L)h(z)dz+$$

$$+\frac{1}{A}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_L^{x+y-c-Az} \tilde{\rho}_{n-1}(t)h((x-c-L)/A)dtdQ(y) + \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-c-L}{A}}\int\limits_0^{+\infty} \tilde{\rho}_{n-1}(x+y-c-Az)dQ(y)dH(z) -$$

$$-\frac{1}{A}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_L^{x+y-c-Az} \tilde{\rho}_{n-1}(t)h((x-c-L)/A)dtdQ(y) + \int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty}\int\limits_{L+c-x+Az}^{+\infty} \tilde{\rho}_{n-1}(x+y-c-Az)dQ(y)dH(z) =$$

$$= p_{n-1}\int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty} q(Az-x+c+L)dH(z) + \left(\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-c-L}{A}}\int\limits_0^{+\infty} + \int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty}\int\limits_{L+c-x+Az}^{+\infty}\right)\tilde{\rho}_{n-1}(x+y-c-Az)dQ(y)dH(z). \tag{3.8}$$

Таким образом, функция $F_n(x) = p_n + \int_L^x \tilde{\rho}_n(t)dt$, то есть имеет вид (3.4), и первое утверждение леммы доказано.

Теперь найдем величину $p_n$. По определению и с учетом (3.7) имеем

$$p_n = P(R_n = L) = P(\tilde{R}_n \le L) = \tilde{F}_n(L) =$$

$$= p_{n-1}\int\limits_{-\frac{c}{A}}^{+\infty}\overline{Q}(Az+c)dH(z) + p_{n-1}H\left(-\frac{c}{A}\right) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{c+Az}^{+\infty}\int\limits_L^{L+y-c-Az} \tilde{\rho}_{n-1}(t)dtdQ(y)dH(z) =$$

$$= p_{n-1}E\overline{Q}(AZ_1+c) + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\frac{c}{A}}\int\limits_0^{+\infty} + \int\limits_{-\frac{c}{A}}^{+\infty}\int\limits_{c+Az}^{+\infty}\right)\int\limits_L^{L+y-c-Az} \tilde{\rho}_{n-1}(t)dtdQ(y)dH(z) =$$

$$p_{n-1}E\overline{Q}(AZ_1+c) + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\frac{c}{A}}\int\limits_0^{+\infty} + \int\limits_{-\frac{c}{A}}^{+\infty}\int\limits_{c+Az}^{+\infty}\right) G_{n-1}(L+y-c-Az)dQ(y)dH(z). \tag{3.9}$$

Далее, заметим, что для $x \ge L$

$$G_n(x) = \int\limits_L^x \tilde{\rho}_n(t)dt = \int\limits_{-\infty}^x \tilde{\rho}_n(t)dt - \int\limits_{-\infty}^L \tilde{\rho}_n(t)dt = \tilde{F}_n(x) - \tilde{F}_n(L).$$

С учетом формул (3.7) и (3.9), а также, сделав замены в тройном интеграле, находим

$$G_n(x) = -p_n + p_{n-1} E\overline{Q}(AZ_1 - x + c + L) +$$
$$+ \left( \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-c-L}{A}} \int\limits_{x-c-Az}^{+\infty} + \int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty} \int\limits_{L}^{+\infty} \right) G_{n-1}(y) q(y + c + Az - x) dy dH(z),$$

что доказывает второе утверждение леммы. □

*Замечание* 3.1. Формула (3.4) показывает, что для всех $n \geq 1$ функция распределения $F_n(x)$ капитала компании в конце $n$-го года определяется парой $(p_{n-1}, G_{n-1}(x))$.

Воспользуемся леммой 3.1 для того, чтобы установить основные свойства величин $p_n$ и $G_n(x)$. А именно, справедлива следующая

**Лемма 3.2.** *Для всякого $n \geq 1$ вероятность $p_n$ и функция $G_n(x)$ обладают следующими свойствами*

1. $p_n \in [0, 1]$;
2. $G_n(x)$ *— непрерывная неубывающая и неотрицательная функция при* $x \geq L$, $G_n(L) = 0$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} G_n(x) = 1 - p_n$.

*Доказательство.* Аналогично лемме 3.1 доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ первые два свойства очевидны. Установим третье свойство. Имеем

$$G_1(x) = -p_1 + E\overline{Q}(AZ_1 - x + c + L) = -p_1 + \tilde{F}_1(x),$$

где $\tilde{F}_1(x)$ — ф.р. с.в. $L + c + AZ_1 - Y_1$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} G_1(x) = -p_1 + \lim_{x\to\infty} \tilde{F}_1(x) = 1 - p_1.$$

Пусть утверждение леммы верно для пары $(p_{n-1}, G_{n-1}(x))$. Установим справедливость свойств 1-3 для пары $(p_n, G_n)$.

Первое свойство следует из предположения индукции и выражения (3.9) для $p_n$. Аналогично из формулы (3.5) и доказательства леммы 3.1 следует непрерывность $G_n(x)$. Покажем, что $G_n(x) \geq 0$ для $x \geq L$ и не убывает. С учетом формул (3.7) и (3.9) при $x \geq 0$

имеем следующую оценку

$$G_n(x)=p_{n-1}E(Q(AZ_1+c)-Q(AZ_1-x+c+L))+p_{n-1}\left(H\left(\frac{x-c-L}{A}\right)-H\left(-\frac{c}{A}\right)\right)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{L+c+Az-x}^{+\infty}G_{n-1}(x+y-c-Az)q(y)dydH(z)-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{c+Az}^{+\infty}G_{n-1}(L+y-c-Az)q(y)dydH(z)\geq$$

$$\geq\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{c+Az}^{+\infty}(G_{n-1}(x+y-c-Az)-G_{n-1}(L+y-c-Az))q(y)dydH(z)\geq 0,$$

поскольку по предположению индукции $G_{n-1}(x)$ не убывает. Кроме того, из выражения (3.5) следует, что $G_n(L)=0$. Далее, с учетом формулы (3.8) находим, используя результаты леммы 3.1,

$$\frac{dG_n(x)}{dx}=\frac{d\tilde{F}_n(x)}{dx}=p_{n-1}\int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty}q(Az-x+c+L)dH(z)+$$

$$+\left(\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-c-L}{A}}\int\limits_{0}^{+\infty}+\int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty}\int\limits_{L+c-x+Az}^{+\infty}\right)\tilde{\rho}_{n-1}(x+y-c-Az)dQ(y)dH(z)\geq 0,$$

поскольку $q(y)\geq 0$ в силу неотрицательности с.в. $Y_k$, $\tilde{\rho}_{n-1}(x)=G'_{n-1}(x)\geq 0$ по предположению индукции. Осталось установить третье утверждение леммы. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}G_n(x)=\lim_{x\to\infty}(\tilde{F}_n(x)-\tilde{F}_n(L))=1-p_n,$$

поскольку $\tilde{F}_n(x)$ функция распределения. □

Рассмотрим пространство $\mathbb{A}:=\mathbb{R}\times C_b(\mathbb{R})$, где $C_b(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных ограниченных вещественных функций. Определим в пространстве $\mathbb{A}$ метрику $d$ следующим образом

$$d((a_1,f_1(x)),(a_2,f_2(x))):=\max(|a_1-a_2|,\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_1(x)-f_2(x)|),$$

где $a_1,a_2\in\mathbb{R}$, $f_1,f_2\in C_b(\mathbb{R})$. Далее, рассмотрим подпространство $\mathbb{GP}\subseteq\mathbb{A}$, определенное следующим образом

$$\mathbb{GP}:=\{(p,G(x))\in\mathbb{A}:\ p\in[0,1],\ G(x)=0 \text{ при } x\leq L,\ G(x)\geq 0 \text{ при } x\geq L,$$
$$G(x) \text{ — неубывающая},\ \lim_{x\to\infty}G(x)=1-p\}. \quad (3.10)$$

На пространстве $\mathbb{A}$ рассмотрим отображение $\Xi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$, определенное по правилу

$$\Xi[(p, G(x)] = (\Xi p, \Xi[G](x)),$$

$$\Xi p = pE\overline{Q}(AZ_1 + c) + \left( \int\limits_{-\infty}^{\frac{c}{A}} \int\limits_{L-c-Az}^{+\infty} + \int\limits_{-\frac{c}{A}}^{+\infty} \int\limits_{L}^{+\infty} \right) G(y)q(y + c + Az - L)dydH(z),$$

$$\Xi[G](x) = -p + pE\overline{Q}(AZ_1 - x + c + L) +$$

$$+ \left( \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-c-L}{A}} \int\limits_{x-c-Az}^{+\infty} + \int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty} \int\limits_{L}^{+\infty} \right) G(y)q(y + c + Az - x)dydH(z).$$

Справедлива следующая

**Лемма 3.3.** *Пространства $\mathbb{A}$ и $\mathbb{GP}$, а также отображение $\Xi$ обладают следующими свойствами*

1. $(\mathbb{A}, d)$, $(\mathbb{GP}, d)$ *— полные метрические пространства;*

2. $\Xi : \mathbb{GP} \longrightarrow \mathbb{GP}$*;*

3. *Отображение $\Xi$ — сжимающее на пространстве $\mathbb{GP}$, если*

$$\max_{x \geq L} E\overline{Q}(AZ_1 - x + c + L) < \frac{1}{2},$$

$$\max_{x \geq L} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{L}^{+\infty} |q(y + c - x + Az) - q(y + c - L + Az)|dydH(z) < 1.$$

*Доказательство.* Прежде всего докажем, что пространство $(C_b(\mathbb{R}), d_c)$, где $d_c(f, g) := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$, $f, g \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R})$, — полное метрическое пространство. Пусть последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{A}$ удовлетворяет условию Коши, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \text{ такое, что } \forall n, m \geq N : \ \ d_c(f_n, f_m) < \varepsilon. \tag{3.11}$$

Непосредственно из (3.11) следует, что для всякого $x \in \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n, m \geq N$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Значит, согласно критерию Коши существует поточечный предел последовательности $f_n(x)$. Обозначим $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ для $x \in \mathbb{R}$.

Но из (3.11) следует и равномерная сходимость, а значит и непрерывность функции $f(x)$ (см., например, [6]). Действительно, $\forall\varepsilon > 0\ \forall n \geq N$ имеем

$$|f(x)-f_n(x)| = \lim_{m\to\infty}|f_m(x)-f_n(x)| \leq \lim_{m\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}}|f_m(y)-f_n(y)| = \lim_{m\to\infty} d_c(f_m,f) \leq \varepsilon,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Следовательно, $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n \geq N\ d_c(f,f_n) \leq \varepsilon$, что и означает равномерную сходимость. Наконец, покажем, что $f(x)$ ограничена. Из (3.11) вытекает, что найдется $N_0$ такое, что $\forall n \geq N_0\ d_c(f_n, f_{N_0}) < 1$. Кроме того, поскольку $f_{N_0}$ ограничена, найдется постоянная $C_0$ такая, что $|f_{N_0}(x)| \leq C_0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x)-f_{N_0}(x)| + |f_{N_0}(x)| \leq 1 + C_0 =: C_1\ \forall n \geq N_0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Значит, $|f(x)| \leq C_1$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Итак, $(C_b(\mathbb{R}), d_c)$ — полное метрическое пространство. Следовательно, $(\mathbb{A}, d)$ также полное метрическое пространство как декартово произведение полных метрических пространств (см., например, [10]). Далее, установим, что предел $(p, G(x)) \in \mathbb{A}$ всякой фундаментальной последовательности $(p_n, G_n(x)) \in \mathbb{GP}$ также лежит в пространстве $\mathbb{G}P$, т.е. удовлетворяет свойствам (3.10). Действительно, ясно, что $p \in [0,1]$, неотрицательность и монотонность функций $G_n(x)$ сохраняется при предельном переходе. Последнее свойство из определения (3.10) также очевидно $\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\infty} G_n(x) = 1-p$. **Первое** утверждение леммы доказано.

**Второе** утверждение леммы следует из леммы 3.2. Далее, пусть $(p_1, G_1(x)), (p_2, G_2(x))$ — пара элементов из $\mathbb{GP}$. Заметим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-\frac{c}{A}}\int\limits_{L-c-Az}^{+\infty}|G_1(y)-G_2(y)|q(y+c+Az-L)dydH(z) \leq \int\limits_{-\infty}^{-\frac{c}{A}}\int\limits_{L}^{+\infty}|G_1(y)-G_2(y)|q(y+c+Az-L)dydH(z).$$

Тогда по определению $\Xi$ имеем

$$|\Xi p_1 - \Xi p_2| = \Big|(p_1 - p_2)E\overline{Q}(AZ_1 + c) + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\frac{c}{A}} \int\limits_{L-c-Az}^{+\infty} + \int\limits_{-\frac{c}{A}}^{+\infty} \int\limits_{L}^{+\infty}\right)(G_1(y) - G_2(y))q(y + c + Az - L)dydH(z)\Big| \leq$$

$$\leq |p_1 - p_2|(E\overline{Q}(AZ_1 + c)) + \sup_{x \geq L}|G_1(x) - G_2(x)| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{L}^{+\infty} q(y + c + Az - L)dydH(z) \leq$$

$$\leq 2d((p_1, G_1(x)), (p_2, G_2(x)))E\overline{Q}(AZ_1+c) \leq 2d((p_1, G_1(x)), (p_2, G_2(x))) \max_{x \geq L} E\overline{Q}(AZ_1-x+c+L). \tag{3.12}$$

Аналогично,

$$|\Xi G_1(x) - \Xi G_2(x)| \leq |p_1 - p_2||E\overline{Q}(AZ_1 - x + c + L) - \overline{Q}(AZ_1 + c)| + d_c(G_1, G_2) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{L}^{+\infty} |q(y + c - x + Az) - q(y + c - L + Az)|dydH(z) \leq$$

$$\leq 2|p_1 - p_2| \max_{x \geq L} E\overline{Q}(AZ_1 - x + c + L) + d_c(G_1, G_2) \times \max_{x \geq L} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{L}^{+\infty} |q(y + c - x + Az) - q(y + c - L + Az)|dydH(z) \leq$$

$$\leq d((p_1, G_1(x)), (p_2, G_2(x))) \times \max\left\{2 \max_{x \geq L} E\overline{Q}(AZ_1 - x + c + L), \max_{x \geq L} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{L}^{+\infty} |q(y + c - x + Az) - q(y + c - L + Az)|dydH(z)\right\}. \tag{3.13}$$

Собрав воедино (3.12) и (3.13), получаем, что $d((\Xi p_1, \Xi G_1(x)), (\Xi p_2, \Xi G_2(x))) \leq$

$$\max\left\{2 \max_{x \geq L} E\overline{Q}(AZ_1 - x + c + L), \max_{x \geq L} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{L}^{+\infty} |q(y + c - x + Az) - q(y + c - L + Az)|dydH(z)\right\} \times d((p_1, G_1(x)), (p_2, G_2(x))).$$

Из последнего неравенства следует **третье** утверждение леммы. $\square$

Вернемся к основной задаче данной главы — предельному распределению с.в. $R_n$ и сформулируем основной результат.

**Теорема 3.1.** *Пусть функции $Q(y)$, $q(y)$ и $H(z)$ таковы, что выполнены следующие условия*

$$\max_{x\geq L} E\overline{Q}(AZ_1 - x + c + L) < \frac{1}{2}, \tag{3.14}$$

$$\max_{x\geq L} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{L}^{+\infty} |q(y+c-x+Az) - q(y+c-L+Az)|dydH(z) < 1. \tag{3.15}$$

*Тогда последовательность $R_n$ имеет слабый предел при $n \to \infty$. Причем предельная функция распределения $F_\infty(x)$ равна*

$$F_\infty(x) = \mathbb{I}(x \geq L)(p_\infty + G_\infty(x)),$$

*где пара $(p_\infty, G_\infty(x))$ определяется из следующих уравнений*

$$p_\infty = p_\infty E\overline{Q}(AZ_1 + c) + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\frac{c}{A}}\int\limits_{L-c-Az}^{+\infty} + \int\limits_{-\frac{c}{A}}^{+\infty}\int\limits_{L}^{+\infty}\right) G_\infty(y)q(y+c+Az-L)dydH(z),$$

$$G_\infty(x) = p_\infty EQ(AZ_1 - x + c + L) +$$
$$+\left(\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-c-L}{A}}\int\limits_{x-c-Az}^{+\infty} + \int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty}\int\limits_{L}^{+\infty}\right) G_\infty(y)q(y+c+Az-x)dydH(z).$$

*Доказательство.* Из леммы 3.1 вытекает, что распределение с.в. $R_n$ полностью определяется парой $(p_n, G_n(x))$, где $p_n \in [0,1]$, неубывающая $G_n(x) \in C_b(\mathbb{R})$. При этом функция распределения $F_n(x)$ с.в. $R_n$ равна $F_n(x) = p_n + G_n(x)$. Кроме того, пара $(p_{n+1}, G_{n+1}(x)) = U(p_n, G_n(x))$, а третье утверждение леммы 3.3 содержит достаточные условия, при которых отображение $U$ будет сжимающим. Следовательно, согласно принципу сжимающих отображений и лемме 3.3 существует единственная пара $(p_\infty, G_\infty(x)) \in \mathbb{GP}$ такая, что $(Up_\infty, UG_\infty(x)) = (p_\infty, G_\infty(x))$ и $(p_n, G_n(x)) \longrightarrow (p_\infty, G_\infty(x))$ при $n \to \infty$. Ясно, что при этом функция $F_\infty(x) = \mathbb{I}(x \geq L)(p_\infty + G_\infty(x))$ является пределом последовательности функций $F_n(x)$. $\square$

## §3.2 Случай экспоненциального распределения требований

Рассмотрим теперь пример нахождения предельного распределения для некоторого вида функций распределения $Q(y)$ и $H(z)$. Пусть размер убытков $Y_k$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, т.е. $Q(y) = 1 - e^{-\lambda y}$, $q(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ и пусть $\lambda < 1/A$. Далее, пусть доходность рискового актива $Z_k$ имеет распределение Лапласа с параметром сдвига $\mu > 0$, т.е. плотность $h(z) = \frac{1}{2}e^{-|z-\mu|}$, а функция распределения

$$H(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{z-\mu}, & \text{если } z \leq \mu, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-(z-\mu)}, & \text{если } z > \mu. \end{cases}$$

Как мы увидим позднее, даже в таком простом случае не удается найти явное выражение для предельной функции распределения. Итак, пусть функция $F(x) = \mathbb{I}\{x \geq L\}(p + G(x))$ искомая.

Согласно (3.5) и теореме 3.1 функция $G(x)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$G(x) = -p + p\left(H\left(\frac{x-c-L}{A}\right) + \int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty} \overline{Q}(Az - x + c + L)dH(z)\right) + \\ + \left(\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-c-L}{A}} \int\limits_{x-c-Az}^{+\infty} + \int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty} \int\limits_{L}^{+\infty}\right) G(y)q(y + c + Az - x)dydH(z).$$

Воспользуемся формулой (3.8) и вычислим $G'(x)$ при $x \geq L$. Заметим, что в случае экспоненциально распределенных убытков $\overline{q}(y) = \lambda\overline{Q}(y)$. Имеем

$$G'(x) = \lambda\left(p\int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty} \overline{Q}(Az - x + c + L) + \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-c-L}{A}} \int\limits_{x-c-Az}^{+\infty} G(y)q(y + x + Az - x)dydH(z) + \right. \\ \left. + \int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty} \int\limits_{L}^{+\infty} G(y)q(y + x + Az - x)dydH(z)\right) + \frac{p}{A}h\left(\frac{x-c-L}{A}\right) - \\ - \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-c-L}{A}} G(x - c - Az)q(0)dH(z) \pm \lambda pH\left(\frac{x-c-L}{A}\right).$$

Тогда

$$G'(x) = \lambda(G(x)+p) + \frac{p}{A}h\left(\frac{x-c-L}{A}\right) - \lambda p H\left(\frac{x-c-L}{A}\right) - \frac{\lambda}{A}\int\limits_{L}^{+\infty} G(z)h\left(\frac{x-c-z}{A}\right)dz. \tag{3.16}$$

Рассмотрим несколько случаев. Пусть сначала $L \le x \le L+c+\mu A$, то есть $\frac{x-c-L}{A} \le \mu$. Тогда (3.16) примет вид

$$G'(x) = \lambda(G(x)+p) + \frac{p}{2A}\exp\left(\frac{x-c-L-\mu A}{A}\right) - \frac{1}{2}\lambda\exp\left(\frac{x-c-L-\mu A}{A}\right) - \\ - \frac{\lambda}{2A}\int\limits_{L}^{+\infty} G(z)\exp\left(\frac{x-c-z-\mu A}{A}\right)dz. \tag{3.17}$$

Продифференцируем обе части уравнения (3.17). Получим, что $G(x)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$G''(x) = \lambda G'(x) + \frac{p}{2A}\exp\left(\frac{x-c-L-\mu A}{A}\right)\left(\frac{1}{A}-\lambda\right) - \frac{\lambda}{2A^2}\int\limits_{L}^{+\infty} G(z)\exp\left(\frac{x-c-z-\mu A}{A}\right)dz. \tag{3.18}$$

Умножим уравнение (3.18) на $A$ и вычтем из него уравнение (3.17). Находим линейное дифференциальное уравнение второго порядка.

$$AG''(x) - G'(x) = \lambda AG'(x) - \lambda G(x) - \lambda p.$$

Это уравнение имеет решение $G(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\frac{x}{A}} - p$, где $C_1, C_2$ — неизвестные постоянные. Подставив это решение в начальное уравнение (3.17), а также из условия $G(L) = 0$, находим постоянные $C_1 = pe^{-\lambda L}, C_2 = 0$. Таким образом, при $L \le x \le L+c+\mu A$ мы нашли

$$G(x) = p(e^{\lambda(x-L)} - 1). \tag{3.19}$$

Далее, пусть $x \ge L+c+\mu A$. Уравнение (3.16) примет вид

$$G'(x) = \lambda G(x) + \frac{p}{2}\exp\left(-\frac{x-c-L-\mu A}{A}\right)\left(\frac{1}{A}+\lambda\right) - \\ - \frac{\lambda}{2A}\int\limits_{L}^{x-c-\mu A} G(z)\exp\left(-\frac{x-c-z-\mu A}{A}\right)dz - \frac{\lambda}{2A}\int\limits_{x-c-\mu A}^{+\infty} G(z)\exp\left(\frac{x-c-z-\mu A}{A}\right)dz. \tag{3.20}$$

Действуя по аналогии с предыдущим случаем, продифференцируем обе части уравнения (3.20), умножим получившееся уравнение на $A$ и сложим результат с (3.20). Получим, что $G(x)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$AG''(x) + G'(x) = \lambda AG'(x) + \lambda G(x) - \frac{\lambda}{A} \int\limits_{x-c-\mu A}^{+\infty} G(z) \exp\left(\frac{x-c-z-\mu A}{A}\right) dz. \qquad (3.21)$$

Далее, продифференцируем обе части уравнения (3.21).

$$AG'''(x)+G''(x) = \lambda AG''(x)+\lambda G'(x)-\frac{\lambda}{A^2} \int\limits_{x-c-\mu A}^{+\infty} G(z) \exp\left(\frac{x-c-z-\mu A}{A}\right) dz+\frac{\lambda}{A}G(x-c-\mu A).$$

Умножим полученное уравнение на $A$ и вычтем из него (3.21). Получим линейное дифференциальное уравнение 3 порядка

$$A^2G'''(x) - \lambda A^2G''(x) - G'(x) + \lambda G(x) = \frac{\lambda}{A}G(x-c-\mu A). \qquad (3.22)$$

Пусть $x \in [L+c+\mu A, L+2(c+\mu A)]$, тогда $L \leq x-c-\mu A \leq L+c+\mu A$. С учетом найденного решения (3.19) уравнение (3.22) преобразуется к виду

$$A^2G'''(x) - \lambda A^2G''(x) - G'(x) + \lambda G(x) = \frac{\lambda p}{A}\left(e^{\lambda(x-c-\mu A-L)} - 1\right)$$

с решением $G(x) = C_1' e^{\lambda x} + C_2' e^{\frac{x}{A}} + C_3' e^{-\frac{x}{A}} + \frac{p}{A}\left(e^{\lambda(x-c-\mu A-L)} - 1\right)$, где $C_1', C_2', C_3'$ — некоторые постоянные. Постоянные $C_1', C_2', C_3'$ определяются методом вариации постоянных при подстановке в (3.16), а также требованием непрерывности $G(x)$ и $G'(x)$ в точке $x = L+c+\mu A$:

$$C_1' = \frac{\lambda A p}{\lambda A - 1}e^{-\lambda L},\ C_2' = 0,\ C_3' = \frac{p}{1-\lambda A}e^{\lambda(c+\mu A)+(L+c+\mu A)/A}.$$

Таким образом, при $x \in [L+c+\mu A, L+2(c+\mu A)]$ решение уравнения (3.16) равно

$$G(x) = \frac{\lambda A p}{\lambda A - 1}e^{\lambda(x-L)} + \frac{p}{1-\lambda A}e^{\left(\frac{L+c+\mu A-x}{A}+\lambda(c+\mu A)\right)} + \frac{p}{A}\left(e^{\lambda(x-c-\mu A-L)} - 1\right). \qquad (3.23)$$

Далее, заметим, что из (3.22) вытекает, что, зная выражение для функции $G(x)$ для $x \in [L+(m-1)(c+\mu A), L+m(c+\mu A)]$, можно найти функцию $G(x)$ для $x \in [L+m(c+\mu A), L+(m+1)(c+\mu A)]$, $m \geq 2$. Более точно, справедливо следующее

**Утверждение 3.1.** *Для любого $m \geq 2$ решение уравнения (3.22) для $x \in [L+(m-1)(c+\mu A), L+m(c+\mu A)]$ имеет вид*

$$G_m(x) := C_{1,m}e^{\lambda x} + C_{2,m}e^{x/A} + C_{3,m}e^{-x/A} + \frac{1}{A}G_{m-1}(x-c-\mu A), \qquad (3.24)$$

*где $G_{m-1}(x)$ — решение уравнения (3.22) для $x \in [L+(m-2)(c+\mu A), L+(m-1)(c+\mu A)]$.*

*Доказательство.* Докажем утверждение по индукции. Заметим, что для доказательства утверждения достаточно показать, что для всякого $m \geq 2$ для $x \in [L+(m-1)(c+\mu A), L+m(c+\mu A)]$ функция $\frac{1}{A}G_{m-1}(x-c-\mu A)$ является частным решением неоднородного линейного дифференциального уравнения (3.22). При $m = 2$ это доказано выше. Допустим, что для некоторого $m$ функция $\frac{1}{A}G_{m-1}(x-c-\mu A)$ для $x \in [L+(m-1)(c+\mu A), L+m(c+\mu A)]$ является частным решением уравнения

$$A^2G'''(x) - \lambda A^2 G''(x) - G'(x) + \lambda G(x) = \frac{\lambda}{A}G_{m-1}(x-c-\mu A). \tag{3.25}$$

Пусть $G_m(x)$ — решение (3.25) для $x \in [L+(m-1)(c+\mu A), L+m(c+\mu A)]$. Пусть $x \in [L+m(c+\mu A), L+(m+1)(c+\mu A)]$ и имеется уравнение

$$A^2G'''(x) - \lambda A^2 G''(x) - G'(x) + \lambda G(x) = \frac{\lambda}{A}G_m(x-c-\mu A). \tag{3.26}$$

Покажем, что частным решением является $\frac{1}{A}G_m(x-c-\mu A)$. Подставив эту функцию в (3.26), с учетом вида (3.24) функции $G_m(x)$ находим

$$\frac{1}{A}(A^2G_m'''(x-c-\mu A) - \lambda A^2 G_m''(x-c-\mu A) - G_m'(x-c-\mu A)) =$$
$$= \frac{1}{A}(A^2G_{m-1}'''(x-2(c+\mu A)) - \lambda A^2 G_{m-1}''(x-2(c+\mu A)) - G_{m-1}'(x-2(c+\mu A))) = 0,$$

так как при $x \in [L+m(c+\mu A), L+(m+1)(c+\mu A)]$ величина $(x-c-\mu A) \in [L+(m-1)(c+\mu A), L+m(c+\mu A)]$, функция $\frac{1}{A}G_{m-1}(x-c-\mu A)$ — частное решение (3.25). □

Таким образом,

$$G(x) = \begin{cases} p(e^{\lambda(x-L)}-1), \text{ при } x \in [L, L+c+\mu A], \\ G_m(x), \text{ при } x \in [L+(m-1)(c+\mu A), L+m(c+\mu A)],\ m \geq 2, \end{cases}$$

где $G_m(x)$ для $m \geq 2$ задается равенством (3.24). Величина $p$ затем определяется из уравнения в теореме 3.1.

## §3.3 Предельное распределение капитала в случае постоянной стратегии инвестирования и перестрахования

Добавим в рассмотренную ранее модель перестрахование. Пусть страховая компания кроме вложений в рисковый актив также имеет возможность заключать договора перестрахования. Предполагается, что любой договор перестрахования характеризуется некоторым параметром $b$, который может принимать значения из некоторого подмножества $D_r \subseteq \mathbb{R}^+$. Пусть функция $r(\beta, y)$ такова, что, если заключен договор перестрахования с параметром $\beta$ и $Y$ — величина поступившего требования, то цедент оплачивает часть $r(\beta, Y)$ убытка, а перестраховщик $Y - r(\beta, Y)$. Ясно, что $r(\beta, Y) \leq Y$ п.н. Пусть перестраховочная премия вычисляется по принципу среднего с нагрузкой безопасности, т.е. величина премии, оставшейся у цедента после выплаты перестраховочной премии равна $\overline{c}(\beta) := c - \rho E(Y - r(\beta, Y))$, где $(\rho - 1) > 0$. В такой ситуации капитала компании $R_n$ на конец $n$-го года равен

$$R_n = \max(L, R_{n-1} + AZ_n + \overline{c}(\beta) - r(\beta, Y_n)),\ n \geq 1,$$

где $R_0 = L$ — начальный капитал.

Обозначим $\tilde{Y}_n := \rho(Y_n - r(\beta, Y_n)) + r(\beta, Y_n)$. Заметим, что с.в. $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \ldots$ — н.о.р. Пусть $\tilde{Q}(y)$ и $\tilde{q}(y)$ соответственно функция распределения и плотность с.в. $\tilde{Y}_1$. В новых обозначениях капитал компании $R_n$ запишется в виде

$$R_n = \max(L, R_{n-1} + AZ_n + c - \tilde{Y}_n),\ n \geq 1. \tag{3.27}$$

Заметим, что выражение (3.27) эквивалентно (3.1). Следовательно, зная функцию распределения $\tilde{Q}(y)$ и плотность $\tilde{q}(y)$ можно применить теорему 3.1 для нахождения предельного распределения последовательности $R_n$, заданной (3.27). Мы рассмотрим случаи пропорционального и непропорционального (на примере перестрахования эксцедента убытка) перестрахования.

Заметим, что

1. в случае квотного перестрахования $r(\beta, Y) = \beta Y$ и $\beta \in (0, 1]$ — доля убытка, выплачиваемая цедентом;
2. в случае перестрахования экцседента убытка $r(\beta, Y) = \min(\beta, Y)$ и $\beta > 0$ — уровень собственного удержания цедента.

**Теорема 3.2.** *Пусть функции $\tilde{Q}(y)$, $\overline{\tilde{Q}}(y)$ и $\tilde{q}(y)$ заданы следующим образом*

1. *для случая квотного перестрахования*

$$\tilde{Q}(y) = Q(\tilde{\rho}^{-1} y),\ \overline{\tilde{Q}}(y) = 1 - \tilde{Q}(y),\ \tilde{q}(y) = \tilde{\rho}^{-1} q(\tilde{\rho}^{-1} y),$$

*где $\tilde{\rho} = \rho - \beta(\rho - 1)$;*

*2. для случая перестрахования эксцедента убытка*

$$\tilde{Q}(y) = Q\left(\frac{y+\beta(\rho-1)}{\rho}\right)\overline{Q}(\beta) + Q(y)Q(\beta),\ \overline{\tilde{Q}}(y) = 1 - Q(y),$$
$$\tilde{q}(y) = \rho^{-1}q\left(\frac{y+\beta(\rho-1)}{\rho}\right)\overline{Q}(\beta) + q(y)Q(\beta).$$

*Пусть также выполнены следующие условия*

$$\max_{x\geq L} E\overline{\tilde{Q}}(AZ_1 - x + c + L) < \frac{1}{2}, \tag{3.28}$$

$$\max_{x\geq L}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{L}^{+\infty}|\tilde{q}(y+c-x+Az) - \tilde{q}(y+c-L+Az)|dydH(z) < \tilde{\rho}. \tag{3.29}$$

*Тогда последовательность $R_n$ имеет слабый предел при $n\to\infty$. Причем предельная функция распределения $F_\infty(x)$ равна*

$$F_\infty(x) = \mathbb{I}(x\geq L)(p_\infty + G_\infty(x)),$$

*где пара $(p_\infty, G_\infty(x))$ определяется из следующих уравнений*

$$p_\infty = p_\infty E\overline{\tilde{Q}}(AZ_1 + c) + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\frac{c}{A}}\int\limits_{L-c-Az}^{+\infty} + \int\limits_{-\frac{c}{A}}^{+\infty}\int\limits_{L}^{+\infty}\right)G_\infty(y)\tilde{q}(y+c+Az-L)dydH(z),$$
$$G_\infty(x) = p_\infty E\tilde{Q}(AZ_1 - x + c + L) +$$
$$+\left(\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-c-L}{A}}\int\limits_{x-c-Az}^{+\infty} + \int\limits_{\frac{x-c-L}{A}}^{+\infty}\int\limits_{L}^{+\infty}\right)G_\infty(y)\tilde{q}(y+c+Az-x)dydH(z).$$

*Доказательство.* Для доказательства теоремы найдем функцию распределения $\tilde{Q}(y)$ и плотность $\tilde{q}(y)$ в обоих случаях (пропорционального и непропорционального перестрахования).

В случае пропорционального перестрахования $(r(\beta, Y) = \beta Y)$ имеем

$$\tilde{Q}(y) = P(\tilde{Y}_n \leq y) = P(\rho(1-\beta)Y_n + \beta Y_n \leq y) = P(Y_n \leq \tilde{\rho}^{-1}y) = Q(\tilde{\rho}^{-1}y),$$
$$\tilde{q}(y) = \tilde{Q}'(y) = \tilde{\rho}^{-1}q(\tilde{\rho}^{-1}y),$$

где $\tilde{\rho} = \rho - \beta(\rho-1)$.

В случае перестрахования типа эксцедента убытка находим

$$\tilde{Q}(y) = P(\tilde{Y}_n \le y) = P(\rho(Y_n - \min(\beta, Y_n)) + \min(\beta, Y_n) \le y) =$$
$$= P(\rho Y_n - \beta(\rho - 1) \le y) P(Y_n \ge \beta) + P(Y_n \le y) P(Y_n \le \beta) = Q\left(\frac{y + \beta(\rho - 1)}{\rho}\right) \overline{Q}(\beta) + Q(y) Q(\beta),$$

$$\tilde{q}(y) = \tilde{Q}'(y) = \rho^{-1} q\left(\frac{y + \beta(\rho - 1)}{\rho}\right) \overline{Q}(\beta) + q(y) Q(\beta).$$

Далее применяем уже доказанную теорему 3.1 к процессу риска (3.27), размер ежегодных требований $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \ldots$ в котором имеет ф.р. $\tilde{Q}(y)$ и плотность $\tilde{q}(y)$.

$\square$

# Список литературы

[1] Белкина Т.А., Матвеева М.В. *Об оптимальных стратегиях перестрахования моделях с диффузионной аппроксимацией процесса риска*, В сб. «Инновационная система государства и переспективы ее развития», Гомель: ЦИИР, 2010, 43–54.

[2] Беллман, Р. *Динамическое программирование*, М.: Иностранная литература, 1960.

[3] Булинская Е.В. *Теория риска и перестрахование*, М.: Мэйлор, 2009.

[4] Булинский А.В., Ширяев А.Н. *Теория случайных процессов*, М.: Физико-математическая литература, 2005.

[5] Голубин А.Ю. *Оптимизация дележа риска в статической модели с перестрахованием*, Автоматика и телемеханика, 2009, 8, 133–143.

[6] Зорич В.А. *Математический анализ. Том II*, М.: МЦНМО, 2007.

[7] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*, М.: Физико-математическая литература, 2004.

[8] Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. *Введение в математическую теорию актуарных рассчетов*, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2002.

[9] Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. *Математические основы теории риска*, М.: Физико-математическая литература, 2007.

[10] Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа*, М.: Наука, 1965.

[11] Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. *Принцип максимума в оптимальном управлении*, М.: Издательство ЦПИ, 2004.

[12] Рыков В.В. *Управляемые марковские процессы с конечными пространствами состояний и управлений*, Теория вероятностей и ее применения, 1966, Том 11, в. 2, 343–351.

[13] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2*, М.: Мир, 1984.

[14] Ширяев А.Н. *Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты, модели*, М.: Фазис, 1998.

[15] Шишкин Г.А. *Линейные интегродифференциальные уравнения Фредгольма*, Улан-Удэ: Издательство Бурятского госуниверситета, 2007.

[16] Belkina T., Hipp C., Luo S., Taksar M. *Optimal constrained investment in the Cramer-Lunberg model*, Cornell University Library, 2011, http://arxiv.org/abs/1112.4007.

[17] Bertsekas D., Shreve S.E. *Stochastic optimal control: the discrete-time case*, Academic Press, New York, 1978.

[18] Bremaud P. *Point processes and queues: martingale dynamics*, Springer–Verlag, Berlin, 1981.

[19] Cramer H. *On the mathematical theory of risk*, Försäkringsaktiebolaget Skandia 1855–1930, Stockholm, 1930, 2, 7–84.

[20] Cramer H. *The theory of risk in its application to life insurance problems*, Proceedings of Ninth International Congress Actuaries, 1931, 2, 380–394.

[21] Cramer H. *The theory of risk in its application to life insurance problems*, The Jubilee Volume of Skandia Insurance Company, Stockholm, 1955, 1–92.

[22] Dickson D.C.M., Waters H.R. *Recursive calculation of survival probabilities*, Astin Bulletin, 1991, 21, 199–221.

[23] Dickson D.C.M., Waters H.R. *Some optimal dividend problems*, Astin Bulletin, 2004, 34, 49–74.

[24] Eisenberg J., Schmidli, H. *Optimal control of capital injections by reinsurace in a diffusion approximation*, Blátter der DGVFM, 2009, 30(1), 1–13.

[25] Frolova A., Kabanov Y., Pergamenschikov S. *In the insurance business risky investments are dangerous*, Finance and Stochastics, 2002, 6, 227–235.

[26] Gaier J., Grandits P. *Ruin probabilities in the presence of regularly varying tails and optimal investment*, Insurance: Mathematics and Economics, 2002, 30, 211—217.

[27] Gaier J., Grandits P., Schachermayer W. *Asymptotic ruin probabilities and optimal investment*, Ann. Appl. Prob., 2003, 13, 1054—1076.

[28] Grandell J. *Aspects of risk theory*, Springer, 1991.

[29] Hipp C. *Stochastic control with application in insurance*, Stochastic methods in finance, Lecture noter in Math, 2004, Springer–Verlag, 127–165.

[30] Hipp C., Plum M. *Optimal investment for insurers*, Insurance: Mathematics and Economics, 2000, 27, 215–218.

[31] Hipp C., Plum M. *Optimal investment for investors with state dependent income and for insurers*, Finance and Stochastics, 2000, 7, 299–321.

[32] Hipp C., Vogt M. *Optimal dynamic XL reinsurance*, ASTIN Bulletin, 1991, 33, 193–207.

[33] Hojgaard B., Taksar M. *Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models*, Scand. Actuarial J., 1998, 22, 166–180.

[34] Kulenko N., Schmidli H. *Optimal dividend strategies in a Cramer–Lundberg model with capital injections*, Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 43, 270–278.

[35] Last G., *Lectures on stochastic geometry*, University of Wroclaw, Mathematical Institute, 2006.

[36] Last G., Brandt A. *Marked point processes on the real line: The dynamic approach*, Springer–Verlag, New-York, 1995.

[37] Lundberg F. *Approximations of the probability function / Reinsurance of Collective Risks*, Doctoral thesis, 1903.

[38] Polyanin A.D., Manzhirov A.V. *Handbook of integral equations*, Chapman & Hall, 2008.

[39] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley Series in Probability and Statistics, 1998.

[40] Schäl M. *On piecewise deterministic Markov control processes: Control of jumps and of risk processes in insurance*, Insurance: Mathematics and Economics, 1998, 22, 75–91.

[41] Schmidli H. *On Cramer-Lundberg approximations for ruin probabilities under optimal excess of loss reinsurance*, Journal of Num. and Appl. Mathematics, 2008, 96, 198–205.

[42] Schmidli H. *On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance*, Ann. Appl. Prob., 2002, 12, 890–907.

[43] Schmidli H. *On optimal investment and subexponential claims*, Insurance: Mathematics and Economics, 2005, 36, 25–35.

[44] Schmidli H. *Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting*, Scand. Actuarial J., 2000, 1, 55–68.

[45] Schmidli H. *Stochastic control in insurance*, Springer–Verlag, London, 2008.

[46] Striebel C. *Martingal conditions for the optimal control of conditions time stochastic systems*, Stochastic Process. Appl., 1984, 18, 328–347.

[47] Wua H., Guoa J., Tang L. *Optimal dividend strategies in discrete risk model with capital injections*, Appl. Stochastic Models Bus. Ind., 2011, 27, 557—566.

[48] Yushkevich A.A. *Bellman inequalities in Markov decision deterministic drift processes*, Stochastics, 1987, 23, 25–77.

[49] Громов А.Н. *Оптимальная стратегия перестрахования эксцедента убытка*, Вестник Московского Университета. Серия 1, Математика. Механика, 2012, в. 4, 17–22.

[50] Громов А.Н. *Оптимальная стратегия перестрахования и инвестирования*, Вестник Московского Университета. Серия 1, Математика. Механика, 2013, в. 2, 6–12.

[51] Громов А.Н. *Оптимальное инвестирование в модели с возможностью вливания капитала*, Сборник «Современные проблемы математики и механики», 2013, Том VIII, Математика, в.3, стр. 52–60.

[52] Громов А.Н. *Оптимальные стратегии инвестирования и перестрахования*, Тезисы Международной конференции «Теория вероятностей и ее приложения», посвященной 100-летию со дня рождения Б.В.Гнеденко, 2012, с. 322.

[53] Громов А.Н. *Оптимальная стратегия страховщика при возможности перестрахования и вложения в рисковый актив*, Тезисы XVIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2011», 2011, с. 42.

[54] Громов А.Н. *Предельное распределение капитала в модели с возможностью вливания капитала и инвестированием*, Деп. в ВИНИТИ, №354–В2013, 19 стр.

[55] Gromov A. *Optimal investment for an Erlang(n) risk process*, Abstracts of the XXX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 2012, p. 28.

[56] Gromov A. *Optimal investment strategy in the risk model with capital injections*, Abstracts of the XXXI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 2013, p.99.

[57] Gromov A. *Modeling the optimal investment strategy in Sparre–Andersen risk model*, Abstracts of the Seventh International Workshop on Simulation, 2013, p. 183-185.