МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.983.53

Пляшечник Андрей Сергеевич

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Специальность 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Смолянов Олег Георгиевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Орлов Юрий Николаевич, зав. отделом института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
	кандидат физико-математических наук Толстыга Диана Сергеевна, компания Волга-Днепр, ведущий специалист
Ведущая организация:	Московский физико-технический институт (государственный университет)

Защита диссертации состоится 25 апреля 2014 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан 24 марта 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В диссертации получены формулы, представляющие эволюционные семейства, порожденные некоторым классом дифференциальных операторов второго порядка с переменными коэффициентами, с помощью пределов кратных интегралов от элементарных функций от коэффициентов и начальных данных при стремлении кратности к бесконечности. Эти эволюционные семейства дают решение соответствующих задач Коши при некотором классе начальных данных. В работе О.Г. Смолянова, А.Г. Токарева и А. Трумена[1] такой способ представления решений было предложено называть формулой Фейнмана. Наиболее часто используются два вида формул Фенймана. В лагранжевых формулах Фейнмана интегрирование производится по конфигурационному пространству. Первое аккуратное доказательство результата (фактически гипотезы) Фейнмана, относящегося к лагранжевым формулам Фейнмана, было получено в работе Е. Нельсона[2] при помощи теоремы Троттера. В гамильтоновых формулах Фейнмана интегрирование производится по фазовому пространству. Первое аккуратное доказательство аналогичного результата Фейнмана о гамильтоновых формулах было проведено в только что процитированной работе[1], где в качестве основного инструмента доказательства использовалась теорема Чернова. Существует еще один способ представления решений с помощью интеграла по бесконечномерному пространству функций, называемый формулой Фейнмана-Каца. Формулы Фейнмана-Каца могут быть получены с помощью формул Фейнмана: конечномерные интегралы аппроксимируют бесконечномерный интеграл по пространству функций(траекторий). В настоящее время интегрирование по траекториям широко используется в квантовой механике и в квантовой теории поля (см., например, книги С. Вайнберга[3], М.Е. Пескина и Д.В. Шредера[4]).

Хотя первые гамильтоновы и лагранжевы формулы Фейнмана были по-

[1]O. G. Smolyanov, A. G. Tokarev, A. Truman, "Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula", J. of Math. Phys., 2002, **43**, № 10, c. 5161-5171.

[2]E. Nelson, "Feynman Integrals and the Schredinger Equation", J. Math. Phys., 1964, **5**, № 3, c. 332-343.

[3]С. Вайнберг, "Квантовая теория поля"(в 2х томах), М.: ФМЛ, 2003.

[4]М. Е. Пескин, Д. В. Шредер, "Введение в квантовую теорию поля", Ижевск: РХД, 2001.

лучены самим Р. Фейнманом[5] (опиравшимся на одно наблюдение П.А.М. Дирака) более полувека назад, в настоящее время известно сравнительно немного работ, посвященных строгому исследованию формул такого типа; многие результаты лишь анонсированы. Обзор и ссылки на эту тему можно найти в работах О.Г. Смолянова [6].

Все сказанное и определяет актуальность темы диссертации.

Из полученных в диссертации формул вытекают, в частности, результаты работ М. Гаделья и О.Г. Смолянова[7] и О.Г. Смолянова, Х.ф. Вайцзеккера и О. Виттиха [8]. В первой из них рассматриваются эволюционные дифференциальные уравнения второго порядка и исследуется сходимость формул Фейнмана в пространстве квадратично интегрируемых функций. Полученные в этой работе результаты обобщаются и усиливаются в диссертации, именно, в диссертации допускается, что коэффициенты при производных могут зависеть как от координат, так и от времени; сходимость формул Фейнмана рассматривается в пространстве непрерывных функций и в различных пространствах интегрируемых функций. Во второй работе рассматриваются формулы Фейнмана для уравнений на римановых многообразиях. В диссертации рассматриваются более общие уравнения с переменным множителем перед оператором Лапласа.

Изучаемые в диссертации эволюционные семейства можно разбить по типу соответствующих уравнений на две группы: параболические уравнения и уравнения типа Шредингера.

Параболическому уравнения второго порядка соответствует стохастическое дифференциальное уравнение, решением которого будет некоторый диффузионный процесс. При этом плотность переходной вероятности получен-

[5] R. P. Feynman, "Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics", Reviews of Modern Physics, 1948, **20**, №2, pp. 367-387.

[6] O. G. Smolyanov, "Feynman formula for evolution equations", Trends in stochastic analysis, 2009, **453**, pp. 284-302.

O. G. Smolyanov, "Schrodinger type semigroups via Feynman formulae and all that", Quantum bioinformation, 2013, **5**, pp. 301-314.

[7] М. Гадэлья, О. Г. Смолянов "Формулы Фейнмана для частиц с массой, зависящей от координаты", ДАН, 2008, **418**, № 6, с. 727-730.

[8] O. G. Smolyanov, H. von Weizsacker, O. Wittich, "Chernoff' theorem and discrete time approximations of brownian motion on manifolds", Potential Analysis, 2007, **26**, № 1, pp. 1-29.

ного случайного процесса, являющаяся также интегральным ядром соответствующего эволюционного семейства, будет фундаментальным решением исходного уравнения в частных производных. Построенный случайный процесс определяет меру на пространстве непрерывных функций, а решение исходного уравнения представляется как интеграл по этой мере. Такое представление называется формулой Фейнмана-Каца. Хотя такой способ и дает точное представление решения, в случае переменных коэффициентов переходные вероятности соответствующего случайного процесса не выражаются через элементарные функции; поэтому на формулы Фейнмана можно смотреть как на применимый для практических вычислений способ приближенного нахождения таких интегралов по бесконечномерному пространству.

Уравнениям типа Шредингера также соответствует интегралы по траекториям; именно они и были введены Фейнманом[2]. Интегрирование в них производится по псевдомере, которая имеет локально неограниченную вариацию; однако свойства таких интегралов во многом схожи со свойствами обычных интегралов. Здесь снова интеграл по траекториям дает точное представление решения, а формулы Фейнмана представляют собой применимый для компьютерных вычислений способ его нахождения.

Перечислим теперь несколько сравнительно недавних результатов о формулах Фейнмана и Фейнмана-Каца, полученных методами, близкими к используемым в диссертации. В работе О.О. Обрезкова[9] рассматривается уравнение типа теплопроводности на компактном римановом многообразии без границы, где старшая часть дифференциального оператора является оператором Лапласа-Бельтрами. В ней также доказаны формулы Фенйнмана-Каца и явно выражена плотность полученной меры относительно меры Винера в терминах геометрических характеристик многообразия. Уравнения типа теплопроводности и Шредингера с оператором Владимирова, являющимся аналогом оператора Лапласа в p-адическом пространстве, с переменным множителем рассмотрены в работе О.Г. Смолянова и Н.Н. Шамарова[10]. Форму-

[9] O. O. Obrezkov, "The Proof of the Feynman-Kac Formula for Heat Equation on a Compact Riemannian Manifold", Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topic, 2003, *6*, № 2, с. 311-320.

[10] О. Г. Смолянов, Н. Н. Шамаров, "Формулы Фейнмана и интегралы по траекториям для эволюционных уравнений с оператором Владимирова", Избранные вопросы математической физики и p-адического анализа, Сборник статей, Тр. МИАН, 2009, **265** с.229-240.

лы Фейнмана для операторов на разветвленных многообразиях изучаются в работе О.Г. Смолянова и Д.С. Толстыги[11]. В работе А. Трумена и О.Г. Смолянова[12] изучаются формулы Фейнмана для уравнения Шредингера в ограниченной области. Применение формул Фейнмана для решения уравнения Шредингера в бесконечномерном пространстве изучается в работах О.Г. Смолянова[13] ; С. Альбеверио, О.Г. Смолянова и А. Хренникова[14] ; О.Г. Смолянова и Е.Т. Шавгулидзе[15]. Отметим также пионерскую книгу В.П. Маслова[16], в которой для получения формул типа Фейнмана-Каца используются не формулы Фейнмана, а разложение типа Дайсона, а также книгу О.Г. Смолянова и Е.Т. Шавгулидзе[17], в которой систематически рассматриваются еще несколько методов получения формул Фейнмана-Каца.

В отличие от перечисленных работ, в диссертации коэффициенты в уравнениях зависят как от пространственных координат, так и от времени; при этом соответствующие операторы могут быть не самосопряженными и даже не симметричными. Кроме того, в диссертации используется более широкий набор функциональных пространств.

При доказательстве результатов диссертации используется обобщение формулы Чернова[18], его доказательство также приведено в диссертации. Это обобщение было анонсировано в статье[19]. Формула Чернова представляет собой обобщение формулы Троттера, с помощью которой в указанной ранее работе Е. Нельсона[3] были впервые доказаны результаты, связанные с формулами Фейнмана. Формула Чернова дает способ приближенного представле-

[11] О. Г. Смолянов, Д. С. Толстыга "Формулы Фейнмана для стохастической и квантовой динамики частиц в многомерных областях", ДАН, 2013, **452**, № 3, с. 256-260.

[12] О. Г. Смолянов, А. Трумен, "Гамильтоновы формулы Фейнмана для уравнения Шредингера в ограниченных областях", ДАН, 2004, **399**, № 3, с. 310-314.

[13] О. Г. Смолянов, "Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы и квантование Шредингера", ДАН, 1982, **263**, № 3, с. 558-562.

[14] S. Albeverio, A. Khrennikov, O. G. Smolyanov, "The Probabilistic Feynman-Kac Formula for infinite-dimensional Schrodinger Equation with Exponential and Singular Potentials", Potential Analysis, 1999, **11**, с. 157-181.

[15] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, "Бесконечномерные уравнения Шредингера с полиномиальными потенциалами и интегралы Фейнмана по траектория", ДАН, 2006, **408**, № 1, с. 28-33.

[16] В. П. Маслов, "Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана", М.: Наука, 1976.

[17] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, "Континуальные интегралы", М.: Издательство МГУ, 1990.

[18] R. P. Chernoff, "Note on product formulas for operator semigroups", J. Funct. Anal., 1968. **2**, № 2, с. 238-242.

[19] О. О. Обрезков, О. Г. Смолянов, А. Трумен, "Обобщенная теорема Чернова и рандомизированная формула Фейнмана", ДАН, 2005, **400**, № 5, с. 596-602.

ния сильно непрерывной полугруппы операторов в банаховом пространстве, а при достаточно общих условиях решения эволюционных уравнений выражаются именно через такие полугруппы в различных функциональных пространствах. Мы будем использовать обобщение формулы Чернова на случай, когда операторы зависят от времени. В этом случае полугруппа заменяется на двухпараметрическое эволюционное семейство.

Цель работы. Целью диссертации является доказательство формул Фейнмана, представляющих решения некоторых эволюционных дифференциальных уравнений второго порядка в виде предела кратных интегралов при стремлении кратности к бесконечности.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми, опубликованы в статьях автора, и заключаются в следующем:

1. Доказаны формулы Фейнмана, представляющие решения уравнений типа теплопроводности. Формулы доказаны в пространствах интегрируемых функций L_p, $1 \leq p < \infty$ и в пространстве непрерывных функций. При рассмотрении уравнения в евклидовом пространстве коэффициенты при старших производных зависят от координат и времени и составляют положительно определенную матрицу. Оператор в правой части уравнений в римановых многообразиях содержит оператор Лапласа-Бельтрами, умноженный на зависящий от координат множитель.
2. Доказаны формулы Фейнмана, представляющие решения уравнений типа Шредингера. Формулы доказаны в пространстве квадратично интегрируемых функций. Старшие коэффициенты образуют матрицу, элементы которой зависят от времени, умноженную на зависящий от координат множитель. Стоит отметить, что в этом случае оператор, вообще говоря, не является ни самосопряженным, ни даже симметричным.

Основные методы исследования. При получении результатов диссертационной работы были использованы методы бесконечномерного анализа и ряд специальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность работы. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для нахождения приближенных решений уравнений типа теплопроводности и Шредингера.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях:

- Семинар механико-математического факультета МГУ под руководством О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе (2007–2012 гг., неоднократно)
- XIX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (2012 г.)
- Семинар "Проблемы необратимости"в МИАН им. В.А. Стеклова РАН под руководством И.В. Воловича, В.В. Козлова, С.В. Козырева, О.Г. Смолянова (2011г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 работах, список которых приведён в конце автореферата. Из них 2 статьи в журналах, рекомендованных ВАК, 1 тезисы в материалах международной конференции. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав и списка литературы из 27 наименований. Общий объём диссертации — 82 страницы

Содержание работы.

Во **введении** проводится обзор работ, связанных с темой диссертации, и кратко излагается основное содержание диссертации.

В **первой главе** приводятся используемые далее обозначения, определения, вспомогательные утверждения. Также в ней доказывается обобщенная теорема Чернова.

Рассмотрим некоторое банахово пространство X над полем действительных или комплексных чисел.

Определение 1. *Однопараметрическое семейство ограниченных линейных операторов* $\{T(t),\ t \geq 0\}$*, действующих в* X*, называется сильно непрерывной полугруппой, если*

1. $T(t)T(s) = T(t+s)$.

2. $t \mapsto T(t)$ *сильно непрерывно.*

Сильная непрерывность означает, что для каждого $x \in X$ функция $t \mapsto T(t)x$ непрерывна. Рассмотрим в пространстве X задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Hu(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

где H - линейный, не обязательно ограниченный оператор в X. Тогда при определенных условиях будет существовать такая сильно непрерывная полугруппа $T(t)$, что $T(t)u_0$ дает классическое решение задачи для некоторого класса начальных данных. Стоит отметить, что $T(t)x$ определено для всех $x \in X$, хотя задача может иметь решение не для всех начальных данных. Теорема Чернова задает условия на оператор H, достаточные для существования полугруппы, а также представляет способ вычисления ее элементов.

В общем случае оператор H зависит от переменной t и задача Коши принимает вид

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = H(t)u(t) \quad 0 \leq s \leq t \leq t_0 \\ u(s) = u_0, \end{cases}$$

Определение 2. *Двухпараметрическое семейство ограниченных линейных операторов* $\{U(t,s),\ 0 \leq s \leq t \leq t_0\}$*, действующих в* X*, называется эволюционной системой, если*

1. $U(s,s) = I,\ U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$ *для* $0 \leq s \leq r \leq t \leq t_0$.

2. $(t,s) \mapsto U(t,s)$ *сильно непрерывно при* $0 \leq s \leq t \leq t_0$.

При определенных условиях существует такое эволюционное семейство $U(t,s)$, что классическое решение задачи имеет вид $U(t,s)u_0$.

Обобщенная теорема Чернова дает способ вычисления $U(t,s)$.

Теорема 1 (обобщенная теорема Чернова). *Пусть имеется семейство замкнутых операторов* $\{H(t),\ 0 \le t \le T\}$ *таких, что их область определения* $Dom(H(t)) = D$ *не зависит от* t *и плотна в* X, *для всех* t *оператор* $H(t)$ *взаимнооднозначно отображает* D *на* X *и для каждого* $g \in D$ *множество* $H(t)g$ *ограничено в* X. *Рассмотрим эволюционное семейство* $\{U(t,s),\ 0 \le s \le t \le T\}$ *такое, что*

$$||U(t,s)|| \le C$$

при всех $0 \le s \le t \le T$. *Пусть для каждого* $g \in D$ *выполнено*

$$\frac{U(t+\Delta t, t) - I}{\Delta t} g \to H(t)g$$

при $\Delta t \downarrow 0$ *равномерно по* t. *Пусть для каждого* $g \in D$ *выполнено* $U(t,s)g \in D$ *и* $H(0)U(t,s)g$ *непрерывно по совокупности переменных* t, s *на множестве* $0 \le s \le t \le T$. *Пусть имеется семейство ограниченных операторов* $Q(t,s)$, $0 \le s < t \le T$ *такое, что для любого набора* $0 \le t_1 < ... < t_k \le T$ *выполнено*

$$||Q(t_k, t_{k-1})...Q(t_2, t_1)|| < C$$

и для каждого $g \in D$

$$\frac{Q(t+\Delta t, t) - I}{\Delta t} g \to H(t)g$$

при $\Delta t \downarrow 0$ *равномерно по* t.

Тогда для всех $f \in X$

$$\lim_{n\to\infty,\, t_n = b,\, t_0 = a,\, \max(t_{i+1}-t_i)\to 0} Q(t_n, t_{n-1})...Q(t_1, t_0)f = U(b,a)f$$

равномерно на множестве $0 \le a \le b \le T$.

Во **второй главе** приводится доказательство формул Фейнмана для уравнений типа теплопроводности в различных функциональных пространствах. Рассмотрим семейство дифференциальных операторов $\{H(t),\ 0 \le t \le T\}$:

$$H(t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i} + c(t,x).$$

Коэффициенты $H(t)$ принимают действительные значения и удовлетворяют следующим требованиям:

1. Гладкость коэффициентов. Для каждого значения t коэффициенты перед частной производной k-го порядка лежат в $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ и ограничены равномерно по переменной t:

$$||a^{i,j}(t,\cdot)||_{C_b^2(\mathbb{R}^n)} \le C, \qquad ||b^i(t,\cdot)||_{C_b^1(\mathbb{R}^n)} \le C, \qquad ||c(t,\cdot)||_{C_b(\mathbb{R}^n)} \le C.$$

2. Непрерывность по Гельдеру. Существуют константы L и $0 < \alpha \le 1$ такие, что

$$|a^{i,j}(t,x) - a^{i,j}(s,x)| \le L|t-s|^\alpha, \qquad |b^i(t,x) - b^i(s,x)| \le L|t-s|^\alpha,$$
$$|c(t,x) - c(s,x)| \le L|t-s|^\alpha.$$

3. Равномерная эллиптичность. Старший коэффициент симметричен $a^{i,j}(t,x) = a^{j,i}(t,x)$ и существует такая положительная постоянная α, что

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j \ge \alpha \sum_{k=1}^n \xi_k^2.$$

Рассмотрим семейства операторов

$$(F_1(t,s)f)(x) = (2\pi(t-s))^{-n/2}(\det a(s,x))^{-1/2}\times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{(a(s,x)^{-1}(x-y),(x-y))}{2(t-s)}\right) f(y)dy,$$
$$(F_2(t,s)f)(x) = f(x+(t-s)b(s,x)),$$
$$(F_3(t,s)f)(x) = e^{(t-s)c(s,x)}f(x),$$

где $0 \le s < t \le T$ и $t-s$ достаточно мало.

Пусть коэффициенты оператора H не зависят от переменной t. Пусть пространство X будет одним из пространств $L_p(\mathbb{R}^n)_{1\le p<\infty}$ или пространством непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности $C_0(\mathbb{R}^n)$. В качестве области определения H возьмем пространство $C_{00}^3(\mathbb{R}^n)$ трижды непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем. Операторы $F_k(t,s)$ зависят лишь от разности $t-s$, поэтому мы можем определить операторы $F_k(t) = F_k(t+s,s)$ и $F(t) = F_1(t)F_2(t)F_3(t)$.

Теорема 2. *Замыкание оператора $\overline{H}$ в пространстве X является генератором сильно непрерывной полугруппы $T(t)$. Элементы этой полугруппы могут быть вычислены по формуле*

$$T(t)f = \lim_{n\to\infty} F(t/n)^n f.$$

Рассмотрим общий случай с зависимостью от времени. Пусть $1 < p < \infty$. Будем рассматривать $H(t)$ в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ на области определения $W_p^2(\mathbb{R}^n)$. Семейство $H(t)$ порождает эволюционную систему $U(t,s)$ в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$. Положим $F(t,s) = F_1(t,s)F_2(t,s)F_3(t,s)$.

Теорема 3. *Для любой $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$*

$$\lim_{n\to\infty,\, t_n=b,\, t_0=a,\, \max(t_{i+1}-t_i)\to 0} F(t_n,t_{n-1})...F(t_1,t_0)f = U(b,a)f$$

равномерно на множестве $0 \le a \le b \le T$.

Пусть имеется риманово многообразие без края N размерности n, изометрически вложенное в риманово многообразие M. Пусть $b(x)$ - векторное поле на N и $a(x)$, $c(x)$ - скалярные функции на N, причем $a(x) > C > 0$. Пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что в ε окрестности любой точки N в нормальных координатах $a(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, $b(x)$ - один раз непрерывно дифференцируема, $c(x)$ - ограничена, причем функции и производные ограничены одной константой, независимо от исходной точки. Кроме того, пусть функция вложения N в M и достаточное количество ее производных ограничены в том же смысле. Рассмотрим семейства операторов

$$(F_1^{M,N}(t)f)(x) = (2\pi t)^{-n/2}a(x)^{-n/2}\int\limits_{U(x)} \exp\left(-\frac{d^2_{M,N}(x,y)}{2a(x)t}\right) f(y)vol(dy),$$

где $U(x)$ - ε–окрестность точки x в многообразии N, а в качестве $d_{M,N}$ можно выбрать d_N - расстояние в N или d_M - расстояние в M,

$$(F_2(t)f)(x) = f(\varphi(t,x)),$$

где $\varphi(t,x)$ - интегральная кривая поля $b(\cdot)$ с начальной точкой x,

$$(F_3(t)f)(x) = e^{tc(x)}f(x).$$

Теорема 4. *Пусть X будет одним из пространств $L_p(N)_{1\le p<\infty}$ или пространством непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности $C_0(N)$. Рассмотрим в пространстве X семейства операторов $F^N(t)$ и $F^M(t)$, заданные по формуле*

$$F^{N(M)}(t) = F_1^{N(M)}(t)F_2(t)F_3(t),$$

и операторы H_N и H_M, действующие на гладкие функции как

$$(H_N f)(x) = \frac{a(x)}{2}(\Delta_N f)(x) + \partial_{b(x)} f(x) + \left(c(x) - \frac{1}{6}a(x)Scal_N(x)\right) f(x),$$

$$(H_M f)(x) = \tfrac{a(x)}{2}(\Delta_N f)(x) + \partial_{b(x)} f(x) + \\ + a(x)\left(-\frac{Scal_N(x)}{8} + \frac{|\tau_\phi(x)|^2}{8} + \frac{\overline{R}_{M/L}(x)}{12}\right) f(x) + c(x)f(x),$$

где $Scal_N$ - скалярная кривизна N, τ_ϕ - след второй основной формы, $\overline{R}_{M/L}$ - частичный след тензора кривизны, а Δ_N - оператор Лапласа-Бельтрами на многообразии N. Тогда замыкания операторов $H_{M(N)}$ порождают сильно непрерывные полугруппы $T_{M(N)}(t)$ в пространстве X, причем для всех $f \in X$ выполнено

$$T_{M(N)}(t)f = \lim_{n\to\infty} F^{M(N)}(t/n)^n f.$$

В **третьей главе** рассматриваются формулы Фейнмана для уравнений типа Шредингера в пространстве квадратично интегрируемых функций. Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ операторы $\{H(t),\ 0 \le t \le T\}$ вида

$$H(t) = \frac{i}{2}\alpha(t,x)\sum_{k,m=1}^{n} a^{k,m}(t)\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^m} + \sum_{k=1}^{n} b^k(t,x)\frac{\partial}{\partial x^k} + c(t,x).$$

Наложим на коэффициенты перед производными следующие требования:

1. Функция $c(t,x)$ принимает комплексные значения, а все остальные коэффициенты принимают действительные значения.

2. Гладкость и ограниченность коэффициентов. Для каждого значения t коэффициенты перед частной производной k-го порядка лежат в $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ и ограничены равномерно по переменной t:

$$||\alpha(t,\cdot)||_{C_b^2(\mathbb{R}^n)} < C, \qquad ||b^i(t,\cdot)||_{C_b^1(\mathbb{R}^n)} < C, \qquad ||c(t,\cdot)||_{C_b(\mathbb{R}^n)} < C,$$

$$|a^{k,m}(t)| < C.$$

3. Коэффициенты непрерывно дифференцируемы по переменной t и производные ограничены.

4. Найдется такая положительная постоянная C, что

$$\alpha(t,x) \geq C.$$

5. Равномерная эллиптичность. Старший коэффициент симметричен $a^{i,j}(t) = a^{j,i}(t)$ и существует такая положительная постоянная C, что

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(t)\xi_i\xi_j \geq C \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2.$$

Областью определения $H(t)$ является пространство Соболева $W_2^2(\mathbb{R}^n)$. Она одинакова для всех t. Семейство $H(t)$ порождает эволюционную систему $U(t,s)$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Выберем число ε с условием $0 < \varepsilon < \frac{1}{2n+6}$ и рассмотрим операторы

$$(F_1(t,s)f)(x) = (2\pi)^{-n/2} \det\Big((t-s)^{1+\varepsilon}E + i(t-s)a(s,x)\Big)^{-1/2} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\Big(\Big((t-s)^{1+\varepsilon}E + i(t-s)a(s,x)\Big)^{-1}(x-y),(x-y)\Big)/2} f(y)dy,$$

где E означает единичную матрицу, а квадратный корень вычисляется как непрерывное продолжение функции $\det((t-s)^{1+\varepsilon}E + i\xi a(x))^{-1/2}$ по отрезку $\xi \in [0, t-s]$,

$$(F_2(t,s)f)(x) = f(x + (t-s)b(s,x)),$$
$$(F_3(t,s)f)(x) = e^{(t-s)c(s,x)}f(x).$$

Обозначим $F(t,s) = F_1(t,s)F_2(t,s)F_3(t,s)$.

Теорема 5. *Для каждой функции* $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ *выполнено*

$$\lim_{n\to\infty,\, t_n=b,\, t_0=a,\, \max(t_{i+1}-t_i)\to 0} F(t_n, t_{n-1})...F(t_1,t_0)f = U(b,a)f$$

равномерно на множестве $0 \leq a \leq b \leq T$.

В заключение выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Олегу Георгиевичу Смолянову за постановку задач, за помощь и поддержку на протяжении всей научно-исследовательской деятельности.

Работы автора по теме диссертации

[1] A. S. Plyashechnik, *Feynman formula for Schrödinger-Type equations with time- and space-dependent coefficients*, Russian Journal of Mathematical Physics, 2012, **19**, № 3, pp. 340-359.

[2] A. S. Plyashechnik, *Feynman formulas for second-order parabolic equations with variable coefficients* , Russian Journal of Mathematical Physics, 2013, **20**, № 3, pp. 377-379.

[3] А. С. Пляшечник, *Формулы Фейнмана для уравнений второго порядка с переменными коэффициентами*, XIX Международная молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", Тезисы докладов, МАКС Пресс, Москва, 2012.