Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

ПЛЯШЕЧНИК АНДРЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Специальность 01.01.01
Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Смолянов Олег Георгиевич

Москва — 2013

Оглавление

Введение

В диссертации получены формулы, представляющие эволюционные семейства, порожденные некоторым классом дифференциальных операторов второго порядка с переменными коэффициентами, с помощью пределов кратных интегралов от элементарных функций от коэффициентов и начальных данных при стремлении кратности к бесконечности. Эти эволюционные семейства дают решение соответствующих задач Коши при некотором классе начальных данных. В работе О.Г. Смолянова, А.Г. Токарева и А. Трумена [15] такой способ представления решений было предложено называть формулой Фейнмана. Наиболее часто используются два вида формул Фенймана. В лагранжевых формулах Фейнмана интегрирование производится по конфигурационному пространству. Первое аккуратное доказательство результата (фактически гипотезы) Фейнмана, относящегося к лагранжевым формулам Фейнмана, было получено в работе Е. Нельсона [17] при помощи теоремы Троттера. В гамильтоновых формулах Фейнмана интегрирование производится по фазовому пространству. Первое аккуратное доказательство аналогичного результата Фейнмана о гамильтоновых формулах было проведено в только что процитированной работе [15], где в качестве основного инструмента доказательства использовалась теорема Чернова. Существует еще один способ представления решений с помощью интеграла по бесконечномерному пространству функций, называемый формулой Фейнмана-Каца. Формулы Фейнмана-Каца могут быть получены с помощью формул Фейнмана: конечномерные интегралы аппроксимируют бесконечномерный интеграл по пространству функций(траекторий). В настоящее время интегрирование по траекториям широко используется в квантовой механике и в квантовой теории поля (см., например, книги С. Вайнберга [13], М.Е. Пескина и Д.В. Шредера [14]).

Хотя первые гамильтоновы и лагранжевы формулы Фейнмана были получены самим Р. Фейнманом [12] (опиравшимся на одно наблюдение П.А.М. Дирака) более полувека назад, в настоящее время известно сравнительно немного работ, посвященных строгому исследованию формул такого типа; многие результаты лишь анонсированы. Обзор и ссылки на эту тему можно найти в работах О.Г. Смолянова [21] и [22].

Все сказанное и определяет актуальность темы диссертации.

Из полученных в диссертации формул вытекают, в частности, результаты работ М. Гаделья и О.Г. Смолянова [5] и О.Г. Смолянова, Х.ф. Вайцзеккера и О. Виттиха [4]. В первой из них рассматриваются эволюционные дифференциальные уравнения второго порядка и исследуется сходимость формул Фейнмана в пространстве квадратично интегрируемых функций. Полученные в этой работе результаты обобщаются и усиливаются в диссертации, именно, в диссертации допускается, что коэффициенты при производных могут зависеть как от координат, так и от времени; сходимость формул Фейнмана рассматривается в пространстве непрерывных функций и в различных пространствах интегрируемых функций. Во второй работе рассматриваются формулы Фейнмана для уравнений на римановых многообразиях. В диссертации рассматриваются более общие уравнения с переменным множителем перед оператором Лапласа.

Изучаемые в диссертации эволюционные семейства можно разбить по типу соответствующих уравнений на две группы: параболические уравнения и уравнения типа Шредингера.

Параболическому уравнения второго порядка соответствует стохастическое дифференциальное уравнение, решением которого будет некоторый диффузионный процесс. При этом плотность переходной вероятности полученного случайного процесса, являющаяся также интегральным ядром соответствующего эволюционного семейства, будет фундаментальным решением исходного уравнения в частных производных. Построенный случайный процесс определяет меру на пространстве непрерывных функций, а решение исходного уравнения представляется как интеграл по этой мере. Такое представление называется формулой Фейнмана-Каца. Хотя такой способ и дает точное представление решения, в случае переменных коэффициентов переходные вероятности соответствующего случайного процесса не выражаются через элементарные функции; поэтому на формулы Фейнмана можно смотреть как на применимый для практических вычислений способ приближенного нахождения таких интегралов по бесконечномерному пространству.

Уравнениям типа Шредингера также соответствует интегралы по траекториям; именно они и были введены Фейнманом [12]. Интегрирование в них производится по псевдомере, которая имеет локально неограниченную вариацию; однако свойства таких интегралов во многом схожи со свойствами обычных интегралов. Здесь снова интеграл по траекториям дает точное представление решения, а формулы Фейнмана представляют собой применимый для компьютерных вычислений способ его нахождения.

Перечислим теперь несколько сравнительно недавних результатов о формулах Фейнмана и Фейнмана-Каца, полученных методами, близкими к используемым в диссертации. В работе О.О. Обрезкова [20] рассматривается уравнение типа теплопроводности на компактном римановом многообразии без границы, где старшая часть дифференциального оператора является оператором Лапласа-Бельтрами. В ней также доказаны формулы Фенйнмана-Каца и явно выражена плотность полученной меры относительно меры Винера в терминах геометрических характеристик многообразия. Уравнения типа теплопроводности и Шредингера с оператором Владимирова, являющимся аналогом оператора Лапласа в p-адическом пространстве, с переменным множителем рассмотрены в работе О.Г. Смолянова и Н.Н. Шамарова [23]. Формулы Фейнмана для операторов на разветвленных многообразиях изучаются в работе О.Г. Смолянова и Д.С. Толстыги [24]. В работе А. Трумена и О.Г. Смолянова [10] изучаются формулы Фейнмана для уравнения Шредингера в ограниченной области. Применение формул Фейнмана для решения уравнения Шредингера в бесконечномерном пространстве изучается в работах О.Г. Смолянова [7]; С. Альбеверио, О.Г. Смолянова и А. Хренникова [8]; О.Г. Смолянова и Е.Т. Шавгулидзе [9]. Отметим также пионерскую книгу В.П. Маслова [1], в которой для получения формул типа Фейнмана-Каца используются не формулы Фейнмана, а разложение типа Дайсона, а также книгу О.Г. Смолянова и Е.Т. Шавгулидзе [11], в которой систематически рассматриваются еще несколько методов получения формул Фейнмана-Каца.

В отличие от перечисленных работ, в диссертации коэффициенты в уравнениях зависят как от пространственных координат, так и от времени; при этом соответствующие операторы могут быть не самосопряженными и даже не симметричными. Кроме того, в диссертации используется более широкий набор функциональных пространств.

При доказательстве результатов диссертации используется обобщение формулы Чернова [16], его доказательство также приведено в диссертации. Это обобщение было анонсировано в статье [18]. Формула Чернова представляет собой обобщение формулы Троттера, с помощью которой в указанной ранее работе Е. Нельсона [17] были впервые доказаны результаты, связанные с формулами Фейнмана. Формула Чернова дает способ приближенного представления сильно непрерывной полугруппы операторов в банаховом пространстве, а при достаточно общих условиях решения эволюционных уравнений выражаются именно через такие полугруппы в различных функциональных пространствах. Мы будем использовать обобщение формулы Чернова на случай, когда операторы зависят от времени. В этом случае полугруппа заменяется на двухпараметрическое эволюционное семейство.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

- Доказаны формулы Фейнмана, представляющие решения уравнений типа теплопроводности.

- Доказаны формулы Фейнмана, представляющие решения уравнений типа Шредингера.

Диссертация состоит из трех глав.

В первой главе формулируются необходимые определения и вспомогательные утверждения, а также доказывается обобщенная теорема Чернова.

Во второй главе доказываются формулы Фейнмана для уравнений параболического типа. Здесь получены следующие результаты.

Пусть $H(t)$ - семейство операторов в пространстве X (его свойства описываются ниже), задаваемое формулой

$$H(t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i} + c(t,x).$$

При некоторых условиях оно порождает соответствующую эволюционную систему $U(t,s)$. Определим операторы

$$(F_1(t,s)f)(x) = (2\pi(t-s))^{-n/2}(\det a(s,x))^{-1/2}\times$$
$$\times \int \exp\left(-\frac{(a(s,x)^{-1}(x-y),(x-y))}{2(t-s)}\right) f(y)dy,$$

$$(F_2(t,s)f)(x) = f(x+(t-s)b(s,x)),$$

$$(F_3(t,s)f)(x) = e^{(t-s)c(s,x)}f(x),$$

$$F(t,s) = F_1(t,s)F_2(t,s)F_3(t,s).$$

Тогда

$$U(t,s) = \lim_{n\to\infty,\ \max(t_k - t_{k-1})\to 0} F(t,t_n)\cdot ... \cdot F(t_1,s),$$

где предел понимается в смысле сильной сходимости. Эта формула справедлива в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)_{1<p<\infty}$, а если коэффициенты не зависят от t, то и в пространствах $L_1(\mathbb{R}^n)$ и $C_0(\mathbb{R}^n)$.

Пусть теперь N - риманово многообразие без края, изометрически вложенное в риманово многообразие M. Пусть $b(x)$ - векторное поле на N и $a(x)$, $c(x)$ - скалярные функции на N. Рассмотрим оператор

$$H = \frac{a(x)}{2}\Delta_N + \partial_{b(x)} + c(x),$$

где Δ_N - оператор Лапласа-Бельтрами на N. В этом случае F_3 остается без изменений, F_2 соответствует сдвигу вдоль траекторий $b(x)$, а в качестве F_1 рассматриваюся два различных варианта:

$$(F_1^{M,N}(t)f)(x) = (2\pi t)^{-n/2}a(x)^{-n/2}\int\limits_{U(x)} \exp\left(-\frac{d^2_{M,N}(x,y)}{2a(x)t}\right) f(y)vol(dy),$$

где $U(x)$ - ε–окрестность точки x в многообразии N, а в качестве $d_{M,N}$ можно выбрать d_N - расстояние в N или d_M - расстояние в M. Тогда будет справедлива аналогичная формула

$$U^{M,N}(t,s) = \lim_{n\to\infty,\, \max(t_k - t_{k-1})\to 0} F^{M,N}(t,t_n)\cdot \ldots \cdot F^{M,N}(t_1,s),$$

где $U^{M,N}(t,s)$ порождается оператором $H^{M,N}$, в котором к $c(x)$ добавлена некоторая функция, выражаемая через геометрические характеристики многообразий и их вложения, своя для каждого способа выбора F_1.

В третьей главе доказываются формулы Фейнмана для уравнений типа Шредингера. Рассматриваются операторы

$$H(t) = \frac{i}{2}\alpha(t,x)\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(t)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i} + c(t,x).$$

Операторы $F_2(t,s)$ и $F_3(t,s)$ имеют тот же вид, что и в предыдущей главе, а $F_1(t,s)$ имеет вид

$$(F_1(t,s)f)(x) = (2\pi)^{-n/2}\det\Big((t-s)^{1+\varepsilon}E + i(t-s)a(s,x)\Big)^{-1/2}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\left(\left((t-s)^{1+\varepsilon}E+i(t-s)a(s,x)\right)^{-1}(x-y),(x-y)\right)} f(y)dy,$$

где число ε фиксировано с условием $0<\varepsilon<\frac{1}{2n+6}$. В этом случае также имеет место формула

$$U(t,s) = \lim_{n\to\infty,\, \max(t_k - t_{k-1})\to 0} F(t,t_n)\cdot \ldots \cdot F(t_1,s)$$

для порожденного оператором $H(t)$ эволюционного семейства $U(t,s)$, справедливая в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$.

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Олегу Георгиевичу Смолянову за постановку задач, постоянную поддержку и внимание к работе.

Глава 1

Эволюционные уравнения, полугруппы и теорема Чернова

В этом разделе будет доказана обобщенная теорема Чернова, а также ряд вспомогательных утверждений.

Рассмотрим некоторое банахово пространство X над полем действительных или комплексных чисел.

Определение 1. *Однопараметрическое семейство ограниченных линейных операторов* $\{T(t),\ t \geq 0\}$*, действующих в* X*, называется сильно непрерывной полугруппой, если*

1. $T(t)T(s) = T(t+s)$.

2. $t \mapsto T(t)$ *сильно непрерывно.*

Сильная непрерывность означает, что для каждого $x \in X$ функция $t \mapsto T(t)x$ непрерывна. Рассмотрим в пространстве X задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Hu(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где H - линейный, не обязательно ограниченный оператор в X. Тогда при определенных условиях будет существовать такая сильно непрерывная полугруппа $T(t)$, что $T(t)u_0$ дает классическое решение задачи (1.1) для некоторого класса начальных данных. Стоит отметить, что $T(t)x$ определено для всех $x \in X$, хотя задача (1.1) может иметь решение не для всех начальных данных. Определим оператор $\overline{H}$ по формуле

$$\overline{H}x = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}$$

для всех $x \in X$, для которых этот предел существует. Оператор $\overline{H}$ называется генератором полугруппы $T(t)$. Часто оператор H задается для узкого класса элементов X, например, дифференциальный оператор, заданный на гладких функциях. Тогда $\overline{H}$ будет его замыканием. Для случая, когда $\overline{H}$ ограничен, верна формула $T(t) = e^{t\overline{H}}$. Это обозначение часто используется и в общем случае. Обычная теорема Чернова [6, 3.5, теорема 5.2] дает достаточные условия для существования полугруппы, а также представляет способ вычисления ее элементов.

Теорема 1 (Теорема Чернова). *Рассмотрим в банаховом пространстве* X *семейство ограниченных операторов* $Q(t)_{t\geq 0}$ *таких, что* $||Q(t)^k|| \leq Me^{k\omega t}$ *для всех* $t \geq 0$ *и* $k \in \mathbb{N}$. *Пусть для всех* x *из плотного множества* D *существует предел*

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{Q(t)x - x}{t}$$

и множество $(\lambda_0 - A)D$ *плотно в* X *для некоторого значения* $\lambda_0 > \omega$. *Тогда замыкание оператора* A *является генератором сильно непрерывной полугруппы* $T(t)$ *и справедлива формула*

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} Q(t/n)^n x.$$

Замечание 1. *В большинстве случаев выполнено более простое достаточное условие* $||Q(t)|| \leq e^{\omega t}$.

В более общем случае оператор H зависит от переменной t и задача Коши принимает вид

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = H(t)u(t) \quad 0 \le s \le t \le t_0 \\ u(s) = u_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

В дальнейшем случай зависимости $H(t)$ от времени будем называть общим случаем, а если $H(t)$ не зависит от времени, то это автономный случай.

Определение 2. *Двухпараметрическое семейство ограниченных линейных операторов $U(t, s)$, $0 \le s \le t \le t_0$ называется эволюционной системой, если*

1. $U(s, s) = I$, $U(t, r)U(r, s) = U(t, s)$ *для* $0 \le s \le r \le t \le t_0$.

2. $(t, s) \mapsto U(t, s)$ *сильно непрерывно при* $0 \le s \le t \le t_0$.

Если зависимости от времени нет, то можно вернуться к автономному случаю по формуле $U(t, s) = T(t - s)$.

При определенных условиях существует такое эволюционное семейство $U(t, s)$, что классическое решение задачи имеет вид $U(t, s)u_0$.

Обобщенная теорема Чернова дает способ вычисления $U(t, s)$.

Теорема 2 (обобщенная теорема Чернова). *Пусть имеется семейство замкнутых операторов $\{H(t),\ 0 \le t \le T\}$ таких, что их область определения $Dom(H(t)) = D$ не зависит от t и плотна в X, для всех t оператор $H(t)$ взаимнооднозначно отображает D на X и для каждого $g \in D$ множество $\{H(t)g\}_{0 \le t \le T}$ ограничено в X. Допустим имеется эволюционное семейство $\{U(t, s),\ 0 \le s \le t \le T\}$ такое, что*

$$||U(t, s)|| \le C \tag{1.3}$$

при всех $0 \le s \le t \le T$. Пусть для каждого $g \in D$ выполнено

$$\frac{U(t + \Delta t, t) - I}{\Delta t} g \to H(t)g \tag{1.4}$$

при $\Delta t \downarrow 0$ *равномерно по* t. *Пусть для каждого* $g \in D$ *выполнено* $U(t,s)g \in D$ *и* $H(0)U(t,s)g$ *непрерывно по совокупности переменных* t,s *на множестве* $0 \le s \le t \le T$. *Пусть имеется семейство ограниченных операторов* $\{Q(t,s)\}_{0 \le s < t \le T}$ *такое, что для любого набора* $0 \le t_1 < ... < t_k \le T$ *выполнено*

$$||Q(t_k, t_{k-1})...Q(t_2, t_1)|| < C \tag{1.5}$$

и для каждого $g \in D$

$$\frac{Q(t+\Delta t, t) - I}{\Delta t} g \to H(t)g \tag{1.6}$$

при $\Delta t \downarrow 0$ *равномерно по* t.

Тогда для всех $f \in X$

$$Q(t_n, t_{n-1})...Q(t_1, t_0)f \to U(b,a)f \tag{1.7}$$

при $n \to \infty$, $t_n = b$, $t_0 = a$, $\max |t_{i+1} - t_i| \to 0$ *равномерно на множестве* $0 \le a \le b \le T$.

Доказательство. Зададим в пространстве D норму графика $H(0)$. Тогда D будет банаховым пространством. По теореме о замкнутом графике операторы $H(s)H(0)^{-1}$ ограничены, а потому при всех $0 \le s < t \le T$ операторы $\frac{Q(t,s)-I}{t-s} - H(s) = \frac{Q(t,s)-I}{t-s} - \left(H(s)H(0)^{-1}\right) H(0)$ являются ограниченными операторами из D в X. Для фиксированного $g \in D$ из условия (1.6) следует, что множество $(\frac{Q(t,s)-I}{t-s} - H(s))g$ является ограниченным в X. По теореме Банаха-Штейнгауза это семейство операторов является равномерно ограниченным. Для фиксированного $g \in D$ отображение $U(t,s)g$ является непрерывным в норме графика, а потому образ замкнутого множества $0 \le s \le t \le T$ компактен в D.

Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда найдется конечное множество $g_k \in D,\ k = 1...N$ такое, что для каждой пары t, s найдется g_k с условием $||g_k - U(t,s)g||_D < \varepsilon$. По условию (1.6) найдется $\delta > 0$ так, что при $\Delta t < \delta$ для всех t и k выполнено $\left|\left|\left(\frac{Q(t+\Delta t,t)-I}{\Delta t} - H(t)\right) g_k\right|\right| < \varepsilon$. Тогда получаем

$$\left|\left|\left(\frac{Q(t+\Delta t,t)-I}{\Delta t} - H(t)\right) U(r,s)g\right|\right| \leq \left|\left|\left(\frac{Q(t+\Delta t,t)-I}{\Delta t} - H(t)\right) g_k\right|\right| +$$
$$+ \left|\left|\left(\frac{Q(t+\Delta t,t)-I}{\Delta t} - H(t)\right) (U(r,s)g - g_k)\right|\right| \leq$$
$$\varepsilon + \left|\left|\frac{Q(t+\Delta t,t)-I}{\Delta t} - H(t)\right|\right|_{D\to X} ||(U(r,s)g - g_k)||_D \leq (C+1)\varepsilon.$$

Тем самым, доказана равномерная сходимость

$$\lim_{\Delta t\to 0} \sup_{t,r,s} \left|\left|\left(\frac{Q(t+\Delta t,t)-I}{\Delta t} - H(t)\right) U(r,s)g\right|\right| = 0. \tag{1.8}$$

Аналогичным образом из (1.4) получаем

$$\lim_{\Delta t\to 0} \sup_{t,r,s} \left|\left|\left(\frac{U(t+\Delta t,t)-I}{\Delta t} - H(t)\right) U(r,s)g\right|\right| = 0. \tag{1.9}$$

Теперь докажем (1.7).

$$||Q(t_n,t_{n-1})...Q(t_2,t_1)Q(t_1,t_0)g - U(t_n,t_0)g|| \leq$$
$$\sum_{j=1}^{n} ||Q(t_n,t_{n-1})...Q(t_{j+1},t_j)(Q(t_j,t_{j-1}) - U(t_j,t_{j-1}))U(t_{j-1},t_0)|| \leq$$
$$C\sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) \left|\left|\left(\frac{Q(t_j,t_{j-1})-I}{t_j - t_{j-1}} - \frac{U(t_j,t_{j-1})-I}{t_j - t_{j-1}}\right) U(t_{j-1},t_0)g\right|\right| \leq$$
$$C(t_n - t_0)\Big(\sup_{t,r,s,\Delta t\leq \max(t_{j+1}-t_j)} \left|\left|\left(\frac{Q(t+\Delta t,t)-I}{\Delta t} - H(t)\right) U(r,s)g\right|\right| +$$
$$\sup_{t,r,s,\Delta t\leq \max(t_{j+1}-t_j)} \left|\left|\left(\frac{U(t+\Delta t,t)-I}{\Delta t} - H(t)\right) U(r,s)g\right|\right|\Big).$$

В силу (1.8) и (1.9) это выражение стремится к нулю при $\max(t_{j+1}-t_j) \to 0$ равномерно по $0 \leq t_0 < t_n \leq T$. Т.к. D плотно в X, то из (1.3) и (1.5) получаем, что теорема справедлива для всех $f \in X$. $\square$

Условие (1.6) неудобно проверять для всех элементов из D. Для упрощения такой проверки используется следующее утверждение.

Предложение 1. *В банаховом пространстве $(X, ||\cdot||_X)$ рассмотрим подмножество $D \subset X$, которое также является банаховым пространством с нормой $||\cdot||_D$, причем $||\cdot||_X \leq C||\cdot||_D$. Допустим имеется биективный ограниченный оператор $B : D \mapsto X$. Пусть дано семейство операторов $A(s)$, $0 \leq s \leq T$ с областью определения $D(A(s)) \supseteq D$ в банаховом пространстве X такое, что выполнено $||A(s)x|| \leq C||x||_D$ для всех $x \in D$. Рассмотрим множество $D_0 \subseteq D$, плотное в D по норме $||\cdot||_D$. Возьмем семейство ограниченных операторов $A(t,s)$ в пространстве X такое, что для каждого $x \in D_0$ элементы $A(t,s)x$ сходятся к $A(s)x$ в X при $t \to 0$ равномерно по s, и найдется такая константа C, что для всех $y \in D_0$ и всех t выполнено $||A(t,s)y|| \leq C||y||_D$.*

Тогда $A(t,s)x$ сходятся к $A(s)x$ в X при $t \to 0$ для всех $x \in D$ равномерно по s.

Доказательство. Обратный оператор B^{-1} ограничен по теореме об обратном операторе. Множество $B(D_0)$ будет плотным в X. Выберем $x \in B(D_0)$. Тогда

$$||(A(s) - A(t,s))B^{-1}x|| \leq C||B^{-1}x||_D \leq C||x||.$$

Операторы $(A(s)-A(t,s))B^{-1}$ ограничены, а значит $||(A(s)-A(t,s))B^{-1}|| \leq C$. Пусть $x \in X$. Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем $x_0 \in B(D_0)$ такое, что $||x-x_0|| <$

ε. Тогда

$$||(A(s) - A(t,s))B^{-1}x|| \leq ||(A(s) - A(t,s))B^{-1}x_0|| +$$
$$+ ||(A(s) - A(t,s))B^{-1}(x - x_0)|| \leq ||(A(s) - A(t,s))B^{-1}x_0|| + C\varepsilon.$$

Но $(A(s) - A(t,s))B^{-1}x_0$ сходится к нулю равномерно по s, а значит то же верно и для x. Отсюда следует, что $(A(s) - A(t,s))y$ сходится к нулю для всех $y \in D$ равномерно по s. □

Часто $H(t)$ состоит из нескольких слагаемых. Следующее утверждение дает возможность проверять условия теоремы Чернова для каждой части отдельно.

Предложение 2. *Пусть имеется семейство замкнутых операторов* $\{H(t),\ 0 \leq t \leq T\}$ *таких, что их область определения* $Dom(H(t)) = D$ *не зависит от* t*, плотна в* X*, и для всех* t *оператор* $H(t)$ *взаимнооднозначно отображает* D *на* X*. Пусть* $H(t)$ *представляет собой конечную сумму* $H(t) = H_1(t) + ... + H_n(t)$*, где* $Dom(H_k(t)) \supseteq D$ *и для всех* $x \in D$ *выполнено* $||H_k(t)x|| \leq C||H(t)x||$ *и* $H_k(t)x$ *непрерывна по* t*. Пусть подмножество* D_0 *плотно в* D *в норме графика* $H(0)$*. Рассмотрим для* $1 \leq k \leq n$ *семейства ограниченных линейных операторов* $Q_k(t,s)$ *в пространстве* X*, удовлетворяющих условиям*

$$||Q_k(t,s)|| \leq C, \tag{1.10}$$

для каждого $x \in D_0$ *выполнено*

$$\lim_{t \to s} \frac{Q_k(t,s)x - x}{t - s} = H_k(s)x \tag{1.11}$$

равномерно по s *и*

$$\left|\left|\frac{Q_k(t,s)x - x}{t - s}\right|\right| \leq C||H(0)x||. \tag{1.12}$$

Рассмотрим операторы $Q(t,s) = Q_1(t,s)...Q_n(t,s)$. *Тогда для всех* $x \in D$

$$\lim_{t\to s} \frac{Q(t,s)x - x}{t-s} = H(s)x \tag{1.13}$$

равномерно по s.

Доказательство. Легко проверить, что

$$\frac{Q(t,s)x - x}{t-s} - H(s)x = \sum_{k=1}^{n} \left(Q_1(t,s)...Q_{k-1}(t,s) \frac{Q_k(t,s)x - x}{t-s} - H_k(s)x \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} Q_1(t,s)...Q_{k-1}(t,s) \left(\frac{Q_k(t,s)x - x}{t-s} - H_k(s)x \right) +$$

$$\sum_{k=2}^{n} \left(Q_1(t,s)...Q_{k-1}(t,s) - I \right) H_k(s)x =$$

$$\sum_{k=1}^{n} Q_1(t,s)...Q_{k-1}(t,s) \left(\frac{Q_k(t,s)x - x}{t-s} - H_k(s)x \right) +$$

$$\sum_{k=2}^{n} \sum_{m=1}^{k-1} Q_1(t,s)...Q_{m-1}(t,s)(Q_m(t,s) - I)H_k(s)x.$$

Из ограниченности $Q_k(t,s)$ получаем

$$\left|\left| \frac{Q(t,s)x - x}{t-s} - H(s)x \right|\right| \le$$

$$C \sum_{k=1}^{n} \left|\left| \frac{Q_k(t,s)x - x}{t-s} - H_k(s)x \right|\right| + C \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} ||(Q_m(t,s) - I)H_k(s)x||.$$

Зададим в D норму графика $H(0)$. По теореме о замкнутом графике операторы $H(t)H(s)^{-1}$ являются ограниченными операторами в X, а значит операторы $H(t)$ являются ограниченными операторами из D в X. По условию $H(t)x$ непрерывна для каждого $x \in D$, по теореме Банаха-Штейнгауза отсюда следует, что $||H(t)x|| \le C||x||_D$, где константа не зависит от t. Поэтому $||H_k(t)x|| \le C||x||_D$ и вместе с (1.12) это дает возможность применить предложение 1, откуда получаем

$$\lim_{t\to s} \frac{Q_k(t,s)x - x}{t-s} = H_k(s)x$$

равномерно по s для всех $x \in D$. Используя (1.10) и плотность D в X, отсюда следует, что $\lim_{t\to s} Q_m(t,s)x = x$ для каждого $x \in X$ равномерно по s. По условию для фиксированного $x \in D$ отображение $H_k(s)x$ отрезка $[0,T]$ в X непрерывно. Поэтому его образ компактен. Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to s} Q_m(t,s)H_k(s)x = H_k(s)x$$

равномерно по s. $\square$

Более простой вариант для автономного случая выглядит так:

Предложение 3. *Пусть имеется оператор H и множество $D \subseteq Dom(H)$ плотное в X. Пусть H представляет собой конечную сумму $H = H_1 + ... + H_n$, где $Dom(H) \subseteq Dom(H_k)$. Рассмотрим для $1 \le k \le n$ семейства ограниченных линейных операторов $Q_k(t)$ в пространстве X, удовлетворяющих условиям*

$$||Q_k(t)|| \le C$$

и для каждого $x \in D$ выполнено

$$\lim_{t\to 0} \frac{Q_k(t)x - x}{t} = H_k x.$$

Рассмотрим операторы $Q(t) = Q_1(t)...Q_n(t)$. Тогда для всех $x \in D$

$$\lim_{t\to 0} \frac{Q(t)x - x}{t} = Hx.$$

Доказательство. Аналогично предыдущему получаем

$$\left|\left|\frac{Q(t)x - x}{t} - Hx\right|\right| \le$$
$$C\sum_{k=1}^{n}\left|\left|\frac{Q_k(t)x - x}{t} - H_k x\right|\right| + C\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}||(Q_m(t) - I)H_k x||.$$

Первое слагаемое стремится к нулю по условию. Для каждого $x \in D$ выражение $Q_m(t)x - x$ стремится к нулю. Поэтому в силу плотности D в X и ограниченности $Q_m(t)$ оно же стремится к нулю для всех $x \in X$. $\square$

Глава 2

Параболические уравнения

2.1 Постановка задачи

В качестве $H(t)_{0\leq t\leq T}$ будем рассматривать семейство дифференциальных операторов вида

$$H(t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i} + c(t,x). \tag{2.1}$$

Мы обычно будем записывать первое слагаемое, примененное к функции f, в матричном виде как $\frac{1}{2}tr(a(t,x)f''(x))$.

Коэффициенты $H(t)$ принимают действительные значения и удовлетворяют следующим требованиям:

1. Гладкость коэффициентов. Для каждого значения t коэффициенты перед частной производной k-го порядка лежат в $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ и ограничены равномерно по переменной t:

$$||a^{i,j}(t,\cdot)||_{C_b^2(\mathbb{R}^n)} \leq C, \qquad ||b^i(t,\cdot)||_{C_b^1(\mathbb{R}^n)} \leq C, \qquad ||c(t,\cdot)||_{C_b(\mathbb{R}^n)} \leq C. \tag{2.2}$$

2. Непрерывность по Гельдеру. Существуют константы L и $0 < \alpha \leq 1$ такие, что

$$|a^{i,j}(t,x) - a^{i,j}(s,x)| \leq L|t-s|^\alpha, \qquad |b^i(t,x) - b^i(s,x)| \leq L|t-s|^\alpha,$$
$$|c(t,x) - c(s,x)| \leq L|t-s|^\alpha. \tag{2.3}$$

3. Равномерная эллиптичность. Матрица коэффициентов при старшей производной симметрична $a^{i,j}(t,x) = a^{j,i}(t,x)$, и существует такая положительная постоянная α, что

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2. \tag{2.4}$$

При перечисленных требованиях к коэффициентам $H(t)$ справедливы следующие утверждения:

Теорема 3. *[2, теоремы 3.1.12 и 3.1.13]. Пусть $H(t)$ задан в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)_{1<p<\infty}$ с областью определения $W_p^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда для каждого p найдутся такие константы ω_p и $M_p > 0$, что если $Re\lambda \geq \omega_p$, то $\lambda \in \rho(H(t))$ и для всех $u \in W_p^2(\mathbb{R}^n)$ выполнено*

$$|\lambda|||u||_p + |\lambda|^{1/2}||Du||_p + |||D^2u||_p \leq M_p||\lambda u - H(t)u||_p.$$

Теорема 4. *[19, теорема 6.14] Пусть $c(t,x) \leq 0$. Для каждой функции $f \in C^1(B_R)$ уравнение*

$$\begin{cases} H(t)u = f, \\ u(\partial B_R) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $u \in C^3(B_R)$. Здесь B_R означает замкнутый шар радиуса R.

Следствие 1. *Зададим $H(t)$ на пространстве всех трижды непрерывно дифференцируемых финитных функций $C_0^3(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого пространства $L_p(\mathbb{R}^n)_{1\leq p<\infty}$ или пространства $C_0(\mathbb{R}^n)$, состоящего из непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности, найдется такое $\omega \in \mathbb{R}$, что для всех $\lambda \geq \omega$ образ оператора $\lambda I - H(t)$ плотен.*

2.2 Приближающие операторы

Обозначим через X одно из пространств $L_p(\mathbb{R}^n)_{1\le p\le\infty}$ или пространство ограниченных непрерывных функций $C_b(\mathbb{R}^n)$. Через Y обозначим пространство $L_q(\mathbb{R}^n)$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, или $L_1(\mathbb{R}^n)$ соответственно. Тогда для для $f\in X$ его норма равна $\sup_{g\in Y, g\neq 0}\frac{|(f,g)|}{||g||_Y}$. Всюду в данном разделе C будет обозначать некоторую константу, зависящую только от оценок в (2.2), (2.3), (2.4), размерности n и выбора пространства X. В цепочках неравенств значения этой константы в разных местах не обязаны совпадать.

В дальнейшем мы будем пользоваться известными формулами

$$(2\pi)^{-n/2}(\det A)^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{(A^{-1}z,z)}{2}\right)dz=1, \tag{2.5}$$

$$(2\pi)^{-n/2}(\det A)^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{(A^{-1}z,z)}{2}\right)(Bz,z)dz=tr(AB), \tag{2.6}$$

справедливыми для любой положительно определенной матрицы A и произвольной матрицы B.

Рассмотрим в пространстве X при $0\le s<t\le T$ семейство операторов

$$(F_1(t,s)f)(x)=(2\pi(t-s))^{-n/2}(\det a(s,x))^{-1/2}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{(a(s,x)^{-1}(x-y),(x-y))}{2(t-s)}\right)f(y)dy.$$

Предложение 4.

$$||F_1(t,s)||\le e^{C(t-s)}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Для краткости предположим, что $a(t,x)$ не зависит от t и будем рассматривать оператор

$$(F_1(t)f)(x)=(2\pi t)^{-n/2}(\det a(x))^{-1/2}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{(a(x)^{-1}(x-y),(x-y))}{2t}\right)f(y)dy.$$

Докажем, что $||F_1(t)|| \leq e^{Ct}$. Общее утверждение будет верно т.к. оценки в (2.2) и (2.4) не зависят от t.

Сначала рассмотрим случай $X = C_b(\mathbb{R}^n)$ или $X = L_\infty(\mathbb{R}^n)$. С помощью (2.5) получаем

$$|(F_1(t)f)(x)| \leq$$
$$(2\pi t)^{-n/2}\det(a(x))^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{(a(x)^{-1}(x-y),(x-y))}{2t}\right)|f(y)|dy \leq$$
$$(2\pi t)^{-n/2}\det(a(x))^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{(a(x)^{-1}(x-y),(x-y))}{2t}\right)dy\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|f(\xi)| =$$
$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|f(\xi)|. \quad (2.8)$$

Отсюда следует, что $||F_1(t)|| \leq 1$. Пусть теперь $X = L_1(\mathbb{R}^n)$. В этом случае

$$||F_1(t)f|| \leq$$
$$(2\pi t)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\det(a(x))^{-1/2}\exp\left(-\frac{(a(x)^{-1}(x-y),(x-y))}{2t}\right)|f(y)|dydx =$$
$$(2\pi t)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\det(a(x))^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{(a(x)^{-1}z,z)}{2t}\right)|f(x-z)|dzdx. \quad (2.9)$$

В силу условий (2.4) и (2.2) спектр всех матриц $a(x)$ лежит на некотором отрезке действительной оси $[\lambda_1,\lambda_2]$, где $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 < \infty$. Поэтому положительный квадратный корень $a(x)^{\pm 1/2}$ можно выразить по формуле

$$a(x)^{\pm 1/2} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(zI - a(x))^{-1}\left(\sqrt{z}\right)^{\pm 1}dz,$$

где контур Γ имеет конечную длину, лежит в области $Re(z) > 0$, один раз обходит отрезок $[\lambda_1,\lambda_2]$ на расстоянии $d > 0$ от этого отрезка. Функция $\sqrt{z}$ задана в области $Re(z) > 0$ условием $\sqrt{1} = 1$. Из этого представления и условий (2.2), (2.4) следует, что $a(x)^{\pm 1/2}$ положительно определены, дважды непрерывно дифференцируемы по параметру x, и их производные ограничены. В формуле (2.9) в интеграле по dz перейдем к новой переменной y при помощи замены $y = a(x)^{-1/2}z$, где x рассматривается как параметр. Получим

$$||F_1(t)f|| \leq (2\pi t)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-y^2/2t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x - a(x)^{1/2}y)| dxdy. \tag{2.10}$$

Введем функцию $r(M) = \det(I - M)^{-1}$. Пусть U - множество матриц, удовлетворяющих условию $||M|| < l$, где $l > 0$ выбрано достаточно малым, чтобы функция $r(M)$ вместе с ее двумя первыми производными были определены и ограничены на множестве U. Выберем точку $y_0 > 0$ исходя из условия

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} ||d(a(x)^{1/2})/dx|| < l/y_0. \tag{2.11}$$

Тогда (2.10) можно представить как

$$\begin{gathered}(2\pi t)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-y^2/2t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x - a(x)^{1/2}y)| dxdy = \\ (2\pi t)^{-n/2} \int\limits_{||y|| > y_0} e^{-y^2/2t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x - a(x)^{1/2}y)| dxdy + \\ (2\pi t)^{-n/2} \int\limits_{||y|| \leq y_0} e^{-y^2/2t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x - a(x)^{1/2}y)| dxdy.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Рассмотрим интеграл по dx во втором слагаемом в (2.12). Замена переменной интегрирования $z = x - a(x)^{1/2}y$ при фиксированном y с условием $||y|| \leq y_0$ в силу (2.11) взаимно однозначна и интеграл принимает вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| f(x - a(x)^{1/2}y) \right| dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(z)| \det \left(I - d \left(a(x)^{1/2}y \right) /dx|_{x = x(y,z)} \right)^{-1} dz. \tag{2.13}$$

С помощью оценок

$$\left|\det\left(I - d\left(a(x)^{1/2}y\right)/dx|_{x=x(y,z)}\right)^{-1} - 1 - r'(0)d\left(a(x)^{1/2}y\right)/dx|_{x=x(y,z)}\right| \leq \frac{||y||^2}{2}\sup_{M\in U}||r''(M)||\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}^n}||d(a(x)^{1/2})/dx||^2,$$

$$||d(a(x)^{1/2})/dx|_{x=x(y,z)} - d(a(x)^{1/2})/dx|_{x=z}|| \leq$$

$$\sup_x||d^2(a(x)^{1/2})/dx^2||\cdot||x(y,z)-z|| \leq \sup_x||d^2(a(x)^{1/2})/dx^2||\cdot\sup_x||a(x)^{1/2}||\cdot||y||$$

определитель в (2.13) можно представить в виде

$$\det(I - d(a(x)^{1/2}y)/dx|_{x=x(y,z)})^{-1} = 1 + \alpha(z)y + \beta(y,z), \qquad (2.14)$$

где $||\alpha(z)|| < C$ и $|\beta(y,z)| \leq C||y||^2$. Используя (2.13) и (2.14), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|f(x - a(x)^{1/2}y)\right|dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(z)|(1 + \alpha(z)y + \beta(y,z))dz.$$

Подставим полученное выражение во второе слагаемое в (2.12). Линейный по y член даст ноль при интегрировании по симметричной области $||y|| \leq y_0$. Получаем

$$\int\limits_{||y||\leq y_0}(2\pi t)^{-n/2}e^{-y^2/2t}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x - a(x)^{1/2}y)|dxdy =$$

$$\int\limits_{||y||\leq y_0}(2\pi t)^{-n/2}e^{-y^2/2t}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(z)|(1 + \alpha(z)y + \beta(y,z))dzdy =$$

$$\int\limits_{||y||\leq y_0}(2\pi t)^{-n/2}e^{-y^2/2t}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(z)|(1 + \beta(y,z))dzdy \leq$$

$$\int\limits_{||y||\leq y_0}(2\pi t)^{-n/2}e^{-y^2/2t}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(z)|(1 + C||y||^2)dzdy =$$

$$||f|| \int\limits_{||y||\le y_0} (2\pi t)^{-n/2} e^{-y^2/2t}(1+C||y||^2)dy \le$$

$$||f|| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (2\pi t)^{-n/2} e^{-y^2/2t}(1+C||y||^2)dy =$$

$$||f|| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} e^{-y^2/2}(1+Ct||y||^2)dy \le ||f||(1+Ct). \quad (2.15)$$

Оценим первое слагаемое в (2.12). Из (2.2) и (2.4) следует, что $C_1||z|| \le ||a(x)^{-1/2}z|| \le C_2||z||$, где $C_1 > 0$. Поэтому

$$\int\limits_{||y||>y_0} (2\pi t)^{-n/2} e^{-y^2/2t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x - a(x)^{1/2}y)|dxdy =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{||a(x)^{-1/2}z||>y_0} (2\pi t)^{-n/2}(\det a(x))^{-1/2} e^{-||a(x)^{-1/2}z||^2/2t}|f(x-z)|dzdx \le$$

$$C\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{||z||>C} t^{-n/2}e^{-Cz^2/2t}|f(x-z)|dzdx \le C||f|| \int\limits_{||z||>C} t^{-n/2}e^{-Cz^2/2t}dz \le$$

$$Ce^{-C/t}||f|| \int\limits_{||z||>C} t^{-n/2}e^{-Cz^2/4t}dz \le Ce^{-C/t}||f|| \int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-n/2}e^{-Cz^2/4t}dz = Ce^{-C/t}||f||.$$

Соединяя полученное выражение вместе с (2.15) и (2.12), получаем

$$||F_1(t)f|| \le (1 + Ct + Ce^{-C/t})||f|| \le e^{Ct}||f||.$$

Пусть теперь $X = L_p(\mathbb{R}^n)$, где $1 < p < \infty$. Тогда по теореме Рисса-Торина

$$||F_1(t)||_{L_p} \le ||F_1(t)||_{L_1}^{\frac{1}{p}} ||F_1(t)||_{L_\infty}^{1-\frac{1}{p}} \le e^{Ct}.$$

$\square$

Предложение 5. *Для $f \in C^3_{00}(\mathbb{R}^n)$ выполнено неравенство*

$$||F_1(t,s)f - f|| \le C(t-s)||f''||. \quad (2.16)$$

Пространство $C^3_{00}(\mathbb{R}^n)$ состоит из трижды непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем.

Доказательство. Используя (2.5) и формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, получим

$$
\begin{gathered}
(F_1(t,s)f)(x) - f(x) = \\
(2\pi(t-s))^{-n/2}(\det a(s,x))^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{(a(s,x)^{-1}y,y)}{2(t-s)}\right) f(x+y)dy - f(x) = \\
(2\pi(t-s))^{-n/2}(\det a(s,x))^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{(a(s,x)^{-1}y,y)}{2(t-s)}\right) (f(x+y)-f(x))dy = \\
(2\pi(t-s))^{-n/2}(\det a(s,x))^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{(a(s,x)^{-1}y,y)}{2(t-s)}\right) \times \\
\times \left(f'(x)y + \int\limits_0^1 f''(x+\xi y)(y,y)(1-\xi)d\xi\right) dy = \\
(2\pi(t-s))^{-n/2}(\det a(s,x))^{-1/2}\times \\
\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{(a(s,x)^{-1}y,y)}{2(t-s)}\right) \int\limits_0^1 f''(x+\xi y)(y,y)(1-\xi)d\xi dy.
\end{gathered}
$$

Линейный член исчез из-за интегрирования по симметричной области. Пусть $g \in Y$. Тогда

$$
\begin{gathered}
|(g, F_1(t,s)f - f)| \leq C(t-s)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{C||y||^2}{2(t-s)}\right) ||y||^2 \times \\
\times \int\limits_0^1 (1-\xi)\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\cdot||f''(x+\xi y)||dxd\xi dy \leq \\
C(t-s)^{-n/2}||g||\cdot||f''||\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{C||y||^2}{2(t-s)}\right) ||y||^2 dy = C(t-s)||g||\cdot||f''||.
\end{gathered}
$$

$\square$

Предложение 6. *Для каждой* $f \in C^3_{00}(\mathbb{R}^n)$

$$
\lim_{t\to s}\frac{F_1(t,s)f - f}{t-s} = \frac{1}{2}tr(a(s,\cdot)f''), \tag{2.17}
$$

причем сходимость равномерна по s.

Доказательство. С помощью (2.5), (2.6) и формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме получим

$$(F_1(t,s)f)(x) - f(x) - \frac{t-s}{2} tr(a(s,x)f''(x)) =$$

$$(2\pi(t-s))^{-n/2}(\det a(s,x))^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{(a(s,x)^{-1}y,y)}{2(t-s)}\right) f(x+y)dy -$$

$$f(x) - \frac{t-s}{2} tr(a(s,x)f''(x)) =$$

$$(2\pi(t-s))^{-n/2}(\det a(s,x))^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{(a(s,x)^{-1}y,y)}{2(t-s)}\right) \times$$

$$\times \left(f(x+y) - f(x) - \frac{1}{2} f''(x)(y,y)\right) dy =$$

$$(2\pi(t-s))^{-n/2}(\det a(s,x))^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{(a(s,x)^{-1}y,y)}{2(t-s)}\right) \times$$

$$\times \left(f'(x)y + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 f'''(x+\xi y)(y,y,y)(1-\xi)^2 d\xi\right) dy =$$

$$(2\pi(t-s))^{-n/2}(\det a(s,x))^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{(a(s,x)^{-1}y,y)}{2(t-s)}\right) \times$$

$$\times \int\limits_0^1 f'''(x+\xi y)(y,y,y)(1-\xi)^2 d\xi dy. \quad (2.18)$$

Пусть $g \in Y$. Тогда

$$|(g, F_1(t,s)f - f - \frac{t-s}{2} tr(a(s,\cdot)f'')| \leq$$

$$C(t-s)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{C||y||^2}{t-s}\right) \int\limits_0^1 ||y||^3(1-\xi)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \cdot |f'''(x+\xi y)| dx d\xi dy \leq$$

$$C(t-s)^{-n/2}||g|| \cdot ||f'''|| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{C||y||^2}{t-s}\right) ||y||^3 dy = C(t-s)^{3/2}||g|| \cdot ||f'''||.$$

$\square$

Рассмотрим в пространстве X семейство операторов

$$(F_2(t,s)f)(x) = f(x + (t-s)b(s,x)),$$

на множестве $0 \le t - s < \delta$, где δ достаточно мало.

Предложение 7. *Найдется такая константа C, что*

$$||F_2(t,s)|| \le e^{C(t-s)}. \tag{2.19}$$

Доказательство. В случаях $X = C_b(\mathbb{R}^n)$ или $X = L_\infty(\mathbb{R}^n)$ очевидно, что $||F_2(t,s)|| = 1$. Пусть $X = L_p(\mathbb{R}^n)_{1 \le p < \infty}$. Из (2.2) следует, что найдется такое $\delta > 0$, что при условии $|t-s| < \delta$ преобразование $y = x + (t-s)b(s,x)$ обратимо.

$$||F_2(t,s)f||^p = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x + (t-s)b(s,x))|^p dx =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \det\Big(I + (t-s) \cdot d(b(s,x))/dx|_{x=x(y)}\Big)^{-1} dy =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p (1 + (t-s) \cdot O(1)) dy \le ||f||^p (1 + C(t-s)) \le ||f||^p e^{C(t-s)}.$$

□

Предложение 8. *Существует такая константа C, что для любой функции $f \in C^3_{00}(\mathbb{R}^n)$ справедливо*

$$||F_2(t,s)f - f|| \le C(t-s)||f'||. \tag{2.20}$$

Доказательство.

$$(F_2(t,s)f)(x) - f(x) = f(x + (t-s)b(s,x)) - f(x) =$$

$$\int\limits_0^1 (t-s) f'(x + \xi(t-s)b(s,x)) b(s,x) d\xi.$$

Пусть $g \in Y$. Тогда

$$|(g, F_2(t,s)f - f)| \leq C(t-s) \int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \cdot |f'(x + \xi(t-s)b(s,x))| dx d\xi \leq$$

$$C(t-s)||g|| \int\limits_0^1 ||f'(\cdot + \xi(t-s)b(s,\cdot))|| d\xi =$$

$$C(t-s)||g|| \int\limits_0^1 ||F_2(s + \xi(t-s), s) f'|| d\xi \leq$$

$$C(t-s)||g|| \int\limits_0^1 e^{C\xi(t-s)} ||f'|| d\xi \leq C(t-s)||g|| \cdot ||f'||.$$

□

Предложение 9. *Для любой функции* $f \in C^3_{00}(\mathbb{R}^n)$ *справедливо*

$$\lim_{t \to s} \frac{F_2(t,s)f - f}{t-s} = b(s,\cdot)f', \tag{2.21}$$

причем сходимость равномерна по s.

Доказательство. При помощи формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме получаем

$$(F_2(t,s)f)(x) - f(x) - (t-s)b(s,x)f'(x) =$$

$$f(x + (t-s)b(s,x)) - f(x) - (t-s)b(s,x)f'(x) =$$

$$(t-s)^2 \int\limits_0^1 f''(x + \xi(t-s)b(s,x)) b(s,x)^2 (1-\xi) d\xi.$$

Пусть $g \in Y$. Тогда

$$|(g, F_2(t,s)f - f - (t-s)b(s,\cdot)f)| \leq$$

$$C(t-s)^2 \int\limits_0^1 (1-\xi) \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \cdot |f''(x + \xi(t-s)b(s,x))| dx d\xi \leq$$

$$C(t-s)^2 ||g|| \int\limits_0^1 ||F_2(s + \xi(t-s), s) f''|| d\xi \leq$$

$$C(t-s)^2 ||g|| \int\limits_0^1 e^{C\xi(t-s)} ||f''|| d\xi \leq C(t-s)^2 ||g|| \cdot ||f''||.$$

□

Предложение 10. *Рассмотрим в пространстве X семейство операторов*

$$(F_3(t,s)f)(x) = e^{(t-s)c(s,x)} f(x).$$

Тогда

$$||F_3(t,s)|| \leq e^{C(t-s)},$$

и для любой функции $f \in C^3_{00}(\mathbb{R}^n)$ справедливо

$$||F_3(t,s)f - f|| \leq C(t-s)||f|| \tag{2.22}$$

и

$$\lim_{t \to s} \frac{F_3(t,s)f - f}{t-s} = c(s,\cdot)f,$$

причем сходимость равномерна по s.

Доказательство очевидно.

2.3 Формула Фейнмана для автономного случая

В этом параграфе мы считаем, что коэффициенты оператора H не зависят от переменной t. Пространство X будет одним из пространств $L_p(\mathbb{R}^n)_{1 \leq p < \infty}$

или пространством непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности $C_0(\mathbb{R}^n)$. В автономном случае операторы $F_k(t,s)$, определенные в предыдущем разделе, зависят лишь от разности $t-s$. Поэтому мы можем определить операторы $F_k(t) = F_k(t+s,s)$ и $F(t) = F_1(t)F_2(t)F_3(t)$.

Теорема 5 (Формула Фейнмана). *Если коэффициенты оператора* (2.1) *не зависят от времени, то его замыкание $\overline{H}$ в пространстве X является генератором сильно непрерывной полугруппы $e^{t\overline{H}}$, дающей решение задачи Коши* (1.1) *для начальных данных из $Dom(\overline{H})$. Элементы этой полугруппы могут быть вычислены по формуле*

$$e^{t\overline{H}}f = \lim_{n\to\infty} F(t/n)^n f.$$

Доказательство. Требуемые в теореме Чернова ограниченность и дифференцируемость $F(t)$ следует из доказанных в предыдущем разделе свойств $F_k(t,s)$ и предложения 3. Плотность образа $\lambda_0 I - H$ при некотором λ_0 доказана в следствии 1. Получаем, что выполнены все условия теоремы Чернова. □

Выражение $F(t/n)^n f$ представляет собой n-кратный интеграл, который и называется формулой Фейнмана.

2.4 Формула Фейнмана в общем случае

Теорема 6. *[3, глава 5.6, теорема 6.1]. Рассмотрим в банаховом пространстве X задачу Коши*

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t) \quad 0 \le s \le t \le T \\ u(s) = u_0 \end{cases}$$

Пусть линейные операторы $A(t)$ удовлетворяют следующим требованиям:

1. *Область определения* $Dom(A(t)) = D$ *является плотным подмножеством в* X *и не зависит от* t.

2. *Резольвента* $R(\lambda; A(t))$ *существует для всех* λ *с* $Re\lambda \geq 0$, *и существует такая константа* M, *что*

$$||R(\lambda; A(t))|| \leq \frac{M}{|\lambda| + 1}. \tag{2.23}$$

3. *Существует константы* L *и* $0 < \alpha \leq 1$ *такие, что*

$$||(A(t) - A(s))A(\tau)^{-1}|| \leq L|t - s|^{\alpha}. \tag{2.24}$$

Тогда существует единственное эволюционное семейство операторов $U(t, s)$ *при* $0 \leq s \leq t \leq T$ *удовлетворяющее:*

1. *Операторы равномерно ограничены при* $0 \leq s \leq t \leq T$

$$||U(t, s)|| \leq C. \tag{2.25}$$

2. *При* $0 \leq s < t \leq T$ *операторы* $U(t, s)$ *отображают* X *в* D *и отображение* $t \mapsto U(t, s)x$ *дифференцируемо. Производная* $(\partial/\partial t)U(t, s)$ *является ограниченным оператором и сильно непрерывна при* $0 \leq s < t \leq T$. *Кроме того*

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}U(t, s)x = A(t)U(t, s)x \qquad \text{для } 0 \leq s < t \leq T,\\ \left|\left|\frac{\partial}{\partial t}U(t, s)\right|\right| = ||A(t)U(t, s)|| \leq \frac{C}{t - s},\\ ||A(t)U(t, s)A(s)^{-1}|| \leq C \qquad \text{для } 0 \leq s \leq t \leq T.\end{gathered} \tag{2.26}$$

3. *Для всех* $x \in D$ *и* $t \in (0, T]$ *функция* $U(t, s)x$ *дифференцируема по* s *при* $0 \leq s \leq t \leq T$ *и*

$$\frac{\partial}{\partial s}U(t, s)x = -U(t, s)A(s)x. \tag{2.27}$$

Предложение 11. *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда для каждого $x \in D$ функция $A(0)U(t,s)x$ непрерывна на множестве $0 \leq s \leq t \leq T$.*

Доказательство. Непрерывность при $0 \leq s < t \leq T$ следует из пунктов 2 и 3 теоремы. Нужно доказать непрерывность при $t = s$. Зафиксируем $t_0 \in (0, T)$. Зададим $\varepsilon > 0$. Положим $\delta_1 = (\varepsilon/||A(0)x||)^{1/\alpha}/2$. Тогда для $t_0 - \delta_1 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_0 + \delta_1$ выполнено $||A(t_2)x - A(t_1)x|| < ||(A(t_2) - A(t_1))A(0)^{-1}|| \cdot ||A(0)x|| \leq C(2\delta_1)^\alpha ||A(0)x|| = C\varepsilon$. Поэтому можно выбрать такую $y_0 \in D$, что для всех $t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ выполнено $||y_0 - A(t)x|| < 2C\varepsilon$. Теперь возьмем такое $0 < \delta < \delta_1$, что $\delta ||A(0)y_0|| < \varepsilon$ и $\delta^\alpha ||y_0|| < \varepsilon$. Положим $x_t = A(t)^{-1}y_0$. Пусть $|t - t_0| < \delta$ и $|s - t_0| < \delta$. Тогда

$$||A(0)U(t,s)x - A(0)x|| \leq$$
$$||A(0)U(t,s)(x - x_t) - A(0)(x - x_t)|| + ||A(0)U(t,s)x_t - A(0)x_t||.$$

Первое слагаемое оценивается как

$$||A(0)U(t,s)(x - x_t) - A(0)(x - x_t)|| \leq$$
$$||A(0)A(t)^{-1}|| \cdot ||A(t)U(t,s)A(s)^{-1}|| \cdot ||A(s)A(0)^{-1}|| \cdot ||A(0)(x - x_t)|| +$$
$$+ ||A(0)(x - x_t)|| \leq C||A(0)(x - x_t)|| \leq C||A(0)A(t)^{-1}|| \cdot ||A(t)(x - x_t)|| \leq$$
$$C||A(t)x - y_0|| < C\varepsilon.$$

Второе слагаемое

$$||A(0)U(t,s)x_t - A(0)x_t|| = \left|\left| A(0) \int_s^t U(t,\tau)A(\tau)x_t d\tau \right|\right| \leq$$

$$\left\|A(0)\int\limits_s^t U(t,\tau)(A(\tau)-A(t))x_t d\tau\right\| + \left\|A(0)\int\limits_s^t U(t,\tau)A(t)x_t d\tau\right\| \leq$$

$$||A(0)A(t)^{-1}||\int\limits_s^t ||A(t)U(t,\tau)||\cdot||(A(\tau)-A(t))A(t)^{-1}||\cdot||A(t)x_t||d\tau+$$

$$+\left\|A(0)\int\limits_s^t U(t,\tau)y_0 d\tau\right\| \leq$$

$$C\int\limits_s^t |t-\tau|^{\alpha-1}d\tau||y_0||+$$

$$+||A(0)A(t)^{-1}||\int\limits_s^t ||A(t)U(t,\tau)A(\tau)^{-1}||\cdot||A(\tau)A(0)^{-1}||\cdot||A(0)y_0||d\tau \leq$$

$$C|t-s|^\alpha||y_0||+C|t-s|\cdot||A(0)y_0|| \leq C(2\delta)^\alpha||y_0||+2C\delta\cdot||A(0)y_0|| < C\varepsilon.$$

$\square$

Предложение 12. *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда для каждого $x \in D$*

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{U(t+\Delta t,t)x-x}{\Delta t} = A(t)x$$

равномерно по t.

Доказательство. С помощью (2.27) получаем

$$\frac{U(t+\Delta t,t)x-x}{\Delta t} - A(t)x = -\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{\partial}{\partial s}U(t+\Delta t,s)xds - A(t)x =$$

$$\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}(U(t+\Delta t,s)A(s)x-A(t)x)ds =$$

$$\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}U(t+\Delta t,s)(A(s)-A(t))xds + \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}(U(t+\Delta t,s)-I)A(t)xds.$$

Первое слагаемое оценим с помощью (2.24) и (2.25).

$$\left\|\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t} U(t+\Delta t, s)(A(s)-A(t))x ds\right\| \leq$$

$$\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t} ||U(t+\Delta t, s)||\cdot||(A(s)-A(t))A(0)^{-1}||\cdot||A(0)x||ds \leq C(\Delta t)^{\alpha}||A(0)x||.$$

Для фиксированного $y \in X$ выражение $U(t,s)y$ непрерывно на $0 \leq t \leq s \leq T$, а значит и равномерно непрерывно. Поэтому $(U(t,s)-I)y$ стремится к нулю если $t-s$ стремится к нулю. В силу (2.24) отображение $t \mapsto A(t)x$ непрерывно на отрезке $[0,T]$, а потому его образ компактен. Отсюда следует, что $(U(t+\Delta t, s)-I)A(t)x$ стремится к нулю при стремлении Δt к нулю равномерно по t и $s \in [t, t+\Delta t]$. □

Теорема 7 (формула Фейнмана). *В пространстве* $L_p(\mathbb{R}^n)_{1<p<\infty}$ *семейство операторов* $H(t)$ *вида* (2.1) *порождает двухпараметрическое эволюционное семейство операторов* $U(t,s)$*, дающее решение задачи* (1.2). *Операторы* $U(t,s)$ *могут быть выражены через операторы* $F(t,s) = F_1(t,s)F_2(t,s)F_3(t,s)$ *как*

$$\lim_{n\to\infty,\, t_n=b,\, t_0=a,\, \max(t_{i+1}-t_i)\to 0} F(t_n, t_{n-1})...F(t_1,t_0)f = U(b,a)f,$$

причем для каждой фиксированной $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *предел существует равномерно по* $0 \leq a \leq b \leq T$.

Доказательство. Из теоремы 3 и условия (2.3) следует, что для каждого p найдется такое λ_p, что в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ для семейства операторов $H_{\lambda_p}(t) = H(t) - \lambda_p I$ с областью определения $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ условия теоремы 6 выполнены. Для простоты будем считать $\lambda_p = 0$. С помощью этой теоремы мы получаем семейство эволюционных операторов $U(t,s)$. Осталось проверить условия теоремы 2. Их выполнение следует из доказанных свойств операторов $F_k(t,s)$ и предложения 2, в котором в качестве D_0 выбрано пространство $C^3_{00}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

2.5 Уравнения на римановых многообразиях

Методы, использованные в предыдущих разделах, без труда переносятся на случай многообразий. Рассмотрим риманово многообразие N размерности n без края. Мы предполагаем существование такого $\delta > 0$, что все требуемые далее оценки справедливы в δ–окрестности любой точки $x \in N$ с независящими от x константами. Пусть на N задана дважды непрерывно дифференцируемая ограниченная функция $a(x)$, причем $a(x) > C > 0$. Производные $a(x)$ предполагаются ограниченными в следующем смысле. Найдется такое C, что для любой точки $x \in N$ в окрестности радиуса δ значения производных функции a в нормальных координатах центром в x ограничены числом C. Также пусть задано ограниченное один раз непрерывно дифференцируемое векторное поле $b(x)$, где ограниченность и дифференцируемость понимаются аналогично описанному выше. Кроме того, пусть задана непрерывная ограниченная функция $c(x)$.

Обозначим через X одно из пространств $L_p(N, vol(\cdot))_{1\le p\le\infty}$ или пространство ограниченных непрерывных функций $C_b(N)$. Мера $vol(\cdot)$ означает меру риманова объема.

Рассмотрим в пространстве X при $0 < t \le T$ семейство операторов

$$(F_1^N(t)f)(x) = (2\pi t)^{-n/2} a(x)^{-n/2} \int\limits_{U(x)} \exp\left(-\frac{d_N^2(x,y)}{2a(x)t}\right) f(y) vol(dy).$$

Здесь $U(x)$ обозначает шар с центром в x радиуса δ.

Пусть теперь N изометрически с помощью отображения ϕ вложено в другое риманово многообразие M. Тогда в X можно задать другое семейство операторов

$$(F_1^M(t)f)(x) = (2\pi t)^{-n/2} a(x)^{-n/2} \int\limits_{U(x)} \exp\left(-\frac{d_M^2(x,y)}{2a(x)t}\right) f(y) vol(dy).$$

В обоих формулах можно было бы вместо $U(x)$ использовать все N, если потребовать малость интеграла по дополнению к $U(x)$.

В дальнейшем мы полагаем, что все используемые в доказательствах геометрические характеристики многообразий N и M, отображение ϕ, а также его производные ограничены в приведенном в начале параграфа смысле. Поэтому для всех выражений вида $O(|\xi|^k)$ в нормальных координатах ξ в окрестности некоторой точки x найдется такая не зависящая от x константа C, что для всех $|\xi| < \delta$ выполняется $|O(|\xi|^k)| \leq C|\xi|^k$.

Предложение 13. *Найдется такая константа C, что*

$$||F_1^{N(M)}(t)|| \leq e^{Ct}. \tag{2.28}$$

Доказательство. Пусть $X = L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&||F_1^{N(M)}(t)f|| \leq \\
&\quad (2\pi t)^{-n/2} \int\limits_N a(x)^{-n/2} \int\limits_{U(x)} \exp\left(-\frac{d_{N(M)}^2(x,y)}{2a(x)t}\right) |f(y)| vol(dy) vol(dx) = \\
&(2\pi t)^{-n/2} \int \int\limits_{d^N(x,y)<\delta} a(x)^{-n/2} \exp\left(-\frac{d_{N(M)}^2(x,y)}{2a(x)t}\right) |f(y)| vol(dy) vol(dx) = \\
&\quad (2\pi t)^{-n/2} \int\limits_N |f(y)| \int\limits_{U(y)} a(x)^{-n/2} \exp\left(-\frac{d_{N(M)}^2(x,y)}{2a(x)t}\right) vol(dx) vol(dy) \leq \\
&\qquad \sup_{y\in N} \left((2\pi t)^{-n/2} \int\limits_{U(y)} a(x)^{-n/2} \exp\left(-\frac{d_{N(M)}^2(x,y)}{2a(x)t}\right) vol(dx) \right) ||f||.
\end{aligned}$$

Введем в окрестности точки y нормальные координаты ξ. Тогда $d_N^2(x,y) = |\xi|^2$ и выражение для риманова объема имеет вид $\sqrt{\det g(\xi)} = 1 + O(|\xi|^2)$. Кроме того, введем нормальные координаты в окрестности точки $\phi(y)$. Для $d_M^2(x,y)$ справедливо доказанное в [4, предложение 6] разложение $d_M^2(x,y) = |\xi|^2 + O(|\xi|^4)$.

$$||F_1^M(t)|| \leq (2\pi t)^{-n/2} \sup_{y\in N} \int\limits_{U(y)} a(x)^{-n/2} \exp\left(-\frac{d_M^2(x,y)}{2a(x)t}\right) vol(dx) =$$
$$(2\pi t)^{-n/2} \sup_{y\in N} \int\limits_{|\xi|^2<\delta} a_y(\xi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{d_{M,y}^2(0,\xi)}{2a_y(\xi)t}\right) \sqrt{\det g_y(\xi)} d\xi =$$
$$(2\pi t)^{-n/2} \sup_{y\in N} \int\limits_{|\xi|^2<\delta} a_y(\xi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|\xi|^2 + O(|\xi|^4)}{2a_y(\xi)t}\right) (1 + O(|\xi|^2)) d\xi.$$

Выражения вида $a_y(\xi)$ означают, что рассматриваются нормальные координаты в точке y, и функция в окрестности этой точки выражена через эти координаты. Это делается, чтобы подчеркнуть зависимость от исходной точки. Для $F_1^N(t)$ справедлива более простая формула без $O(|\xi|^4)$ в показателе экспоненты, поэтому утверждение достаточно доказать только для $F_1^M(t)$.

Сделаем в интеграле замену $z = a_y(\xi)^{-1/2}\xi$. Тогда
$$\frac{\partial z_i}{\partial \xi_j} = a_y(\xi)^{-1/2} \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i a'_{y,j}(\xi)}{2a_y(\xi)}\right),$$

$$(2\pi t)^{-n/2} \int\limits_{|\xi|^2<\delta} a_y(\xi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|\xi|^2 + O(|\xi|^4)}{2a_y(\xi)t}\right) (1 + O(|\xi|^2)) d\xi \leq$$
$$(2\pi t)^{-n/2} \int\limits_{|z|^2<C\delta} \exp\left(-\frac{|z|^2 + O(|z|^4)}{2t}\right) (1 + O(|z|^2)) \times$$
$$\times \det\left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i a'_{y,j}(\xi)}{2a_y(\xi)}\right)^{-1} \Big|_{\xi=\xi(z)} dz.$$

Учитывая ограниченность первых двух производных $a(x)$, можно записать

$$\det\left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i a'_{y,j}(\xi)}{2a_y(\xi)}\right)^{-1}\Big|_{\xi=\xi(z)} = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a'_{y,k}(\xi)\xi_k}{a_y(\xi)} + O(|\xi|^2)\right)\Big|_{\xi=\xi(z)} =$$

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a'_{y,k}(\xi) z_k}{a_y(\xi)^{1/2}}\Big|_{\xi=\xi(z)} + O(|z|^2) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a'_{y,k}(0) z_k}{a_y(0)^{1/2}} + O(|z|^2),$$

и интеграл принимает вид

$$(2\pi t)^{-n/2} \int\limits_{|z|^2<C\delta} \exp\left(-\frac{|z|^2 + O(|z|^4)}{2t}\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a'_{y,k}(0) z_k}{a_y(0)^{1/2}} + O(|z|^2)\right) dz. \tag{2.29}$$

Первое слагаемое в (2.29) отличается от единицы на

$$\left|(2\pi t)^{-n/2} \int\limits_{|z|^2<C\delta} \exp\left(-\frac{|z|^2 + O(|z|^4)}{2t}\right) dz - 1\right| \le$$

$$(2\pi t)^{-n/2} \int\limits_{|z|^2<C\delta} \left|\exp\left(-\frac{|z|^2 + O(|z|^4)}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{|z|^2}{2t}\right)\right| dz + Ce^{-Ct} \le$$

$$Ct^{-n/2} \int\limits_{|z|^2<C\delta} \frac{|z|^4}{t} \exp\left(-\frac{C|z|^2}{t}\right) dz + Ce^{-Ct} \le Ct.$$

Второе слагаемое в (2.29)

$$\left|(2\pi t)^{-n/2} \int\limits_{|z|^2<C\delta} z_k \exp\left(-\frac{|z|^2 + O(|z|^4)}{2t}\right) dz\right| =$$

$$\left|(2\pi t)^{-n/2} \int\limits_{|z|^2<C\delta} z_k \left[\exp\left(-\frac{|z|^2 + O(|z|^4)}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{|z|^2}{2t}\right)\right] dz\right| \le$$

$$Ct^{-n/2} \int\limits_{|z|^2<C\delta} \frac{|z|^5}{t} \exp\left(-\frac{C|z|^2}{t}\right) dz \le Ct^{3/2}.$$

Последнее слагаемое в (2.29)

$$\left|(2\pi t)^{-n/2}\int\limits_{|z|^2<C\delta} O(|z|^2)\exp\left(-\frac{|z|^2+O(|z|^4)}{2t}\right)dz\right|\le Ct.$$

Собрав все вместе, получаем $||F_1^M(t)||\le 1+Ct\le e^{Ct}$.

Пусть теперь $X=C_b(\mathbb{R}^n)$ или $X=L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$||F_1^{N(M)}(t)f||=\sup_{x\in N}\left((2\pi t)^{-n/2}a(x)^{-n/2}\int\limits_{U(x)}\exp\left(-\frac{d^2_{N(M)}(x,y)}{2a(x)t}\right)vol(dy)\right).$$

Эта формула еще проще, чем в случае L_1, т.к. знаменатель в экспоненте не зависит от переменной интегрирования. Поэтому аналогичным образом получаем $||F_1^{N(M)}(t)||_X\le e^{Ct}$.

Пусть теперь $X=L_p$, где $1<p<\infty$. Тогда по теореме Рисса-Торина

$$||F_1^{N(M)}(t)||_{L_p}\le ||F_1^{N(M)}(t)||_{L_1}^{\frac{1}{p}}||F_1^{N(M)}(t)||_{L_\infty}^{1-\frac{1}{p}}\le e^{Ct}.$$

$\square$

Предложение 14. *Обозначим через $C^3_{00}(N)$ пространство финитных трижды непрерывно дифференцируемых функций на N, производные которых ограничены в указанном в начале параграфа смысле. Тогда для каждой $f\in C^3_{00}(N)$ выполнено*

$$\lim_{t\to 0}\frac{F_1^M(t)f-f}{t}=\frac{1}{2}a(x)\Delta_N f(x)+a(x)D(x)f(x), \tag{2.30}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{F_1^N(t)f-f}{t}=\frac{1}{2}a(x)\Delta_N f(x)-\frac{1}{6}a(x)Scal_N(x)f(x), \tag{2.31}$$

где функция $D(x)$ выражается через геометрические характеристики как

$$D(x)=-\frac{Scal_N(x)}{8}+\frac{|\tau_\phi(x)|^2}{8}+\frac{\overline{R}_{M/L}(x)}{12}, \tag{2.32}$$

где $Scal_N$ - скалярная кривизна N, τ_ϕ - след второй основной формы вложения ϕ, $\overline{R}_{M/L}$ - частичный след тензора кривизны, а Δ_N - оператор Лапласа-Бельтрами на многообразии N.

Доказательство. С помощью формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме получим

$$(2\pi a(x)t)^{-n/2}\int\limits_{U(x)}\exp\left(-\frac{d_M^2(x,y)}{2a(x)t}\right)(f(y)-f(x))vol(dy)=$$

$$(2\pi a_x(0)t)^{-n/2}\int\limits_{|\xi|<\delta}\exp\left(-\frac{d_{M,x}^2(0,\xi)}{2a_x(0)t}\right)(f_x(\xi)-f_x(0))\sqrt{\det g_x(\xi)}d\xi=$$

$$(2\pi a_x(0)t)^{-n/2}\int\limits_{|\xi|<\delta}\exp\left(-\frac{d_{M,x}^2(0,\xi)}{2a_x(0)t}\right)\left(\frac{d}{d\eta}f_x(\eta)\Big|_{\eta=0}\xi+\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\eta^2}f_x(\eta)\Big|_{\eta=0}(\xi,\xi)+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{d^3}{d\eta^3}f_x(\eta)\Big|_{\eta=z\xi}(\xi,\xi,\xi)(1-z)^2dz\right)\times$$

$$\times\sqrt{\det g_x(\xi)}d\xi. \quad (2.33)$$

Рассмотрим первое слагаемое в (2.33):

$$(2\pi a_x(0)t)^{-n/2}\int\limits_{|\xi|<\delta}\exp\left(-\frac{d_{M,x}^2(0,\xi)}{2a_x(0)t}\right)\frac{d}{d\eta}f_x(\eta)\Big|_{\eta=0}\xi\sqrt{\det g_x(\xi)}d\xi.$$

Отличие $\sqrt{\det g_x(\xi)}$ от единицы дает

$$\left|(2\pi a_x(0)t)^{-n/2}\int\limits_{|\xi|<\delta}\exp\left(-\frac{d_{M,x}^2(0,\xi)}{2a_x(0)t}\right)\frac{d}{d\eta}f_x(\eta)\Big|_{\eta=0}\xi\left(\sqrt{\det g_x(\xi)}-1\right)d\xi\right|\le$$

$$Ct^{-n/2}\left\|\frac{d}{d\eta}f_x(\eta)\right\|\Big|_{\eta=0}\int\limits_{|\xi|<\delta}\exp\left(-|\xi|^2/Ct\right)||\xi||^3d\xi\le Ct^{3/2}\left\|\frac{d}{d\eta}f_x(\eta)\right\|\Big|_{\eta=0}.$$

Оставшаяся часть оценивается как

$$\left|(2\pi a_x(0)t)^{-n/2}\int\limits_{|\xi|<\delta}\exp\left(-\frac{d^2_{M,x}(0,\xi)}{2a_x(0)t}\right)\frac{d}{d\eta}f_x(\eta)\Big|_{\eta=0}\xi d\xi\right| =$$

$$\left|(2\pi a_x(0)t)^{-n/2}\int\limits_{|\xi|<\delta}\left[\exp\left(-\frac{|\xi|^2+O(|\xi|^4)}{2a_x(0)t}\right)-\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2a_x(0)t}\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d}{d\eta}f_x(\eta)\Big|_{\eta=0}\xi d\xi\right| \leq$$

$$Ct^{-n/2}\left\|\frac{d}{d\eta}f_x(\eta)\right\|\Big|_{\eta=0}\int\limits_{|\xi|<\delta}\frac{|\xi|^5}{t}\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{Ct}\right)d\xi \leq Ct^{3/2}\left\|\frac{d}{d\eta}f_x(\eta)\right\|\Big|_{\eta=0}.$$

Второе слагаемое в (2.33):

$$\frac{1}{2}(2\pi a_x(0)t)^{-n/2}\int\limits_{|\xi|<\delta}\exp\left(-\frac{d^2_{M,x}(0,\xi)}{2a_x(0)t}\right)\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\eta^2}f_x(\eta)\Big|_{\eta=0}(\xi,\xi)\sqrt{\det g_x(\xi)}d\xi.$$

Отличие $\sqrt{\det g_x(\xi)}$ от единицы дает слагаемое порядка $Ct^2\left\|\frac{d^2}{d\eta^2}f_x(\eta)\right\|\Big|_{\eta=0}$. В нормальных координатах в исходной точке оператор Лапласа-Бельтрами Δ_N соответствует лапласиану, поэтому с помощью (2.6) получаем, что оставшееся слагаемое дает $\frac{1}{2}a(x)(\Delta_N f)(x)$ с точностью

$$\left|\frac{1}{2}(2\pi a_x(0)t)^{-n/2}\int\limits_{|\xi|<\delta}\exp\left(-\frac{d^2_{M,x}(0,\xi)}{2a_x(0)t}\right)\frac{d^2}{d\eta^2}f_x(\eta)\Big|_{\eta=0}(\xi,\xi)d\xi-\right.$$

$$\left.-\frac{a_x(0)}{2}\Delta_\eta f_x(\eta)\Big|_{\eta=0}\right| =$$

$$\frac{1}{2}(2\pi a_x(0)t)^{-n/2}\times$$

$$\times\left|\int\limits_{|\xi|<\delta}\left[\exp\left(-\frac{|\xi|^2+O(|\xi|^4)}{2a_x(0)t}\right)-\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2a_x(0)t}\right)\right]\frac{d^2}{d\eta^2}f_x(\eta)\Big|_{\eta=0}(\xi,\xi)d\xi-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{|\xi|\geq\delta}\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2a_x(0)t}\right)\frac{d^2}{d\eta^2}f_x(\eta)\Big|_{\eta=0}(\xi,\xi)d\xi\right|\leq$$

$$Ct^{-n/2}\left|\left|\frac{d^2}{d\eta^2}f_x(\eta)\right|\right|\Big|_{\eta=0}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{|\xi|<\delta}\frac{|\xi|^6}{t}\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{Ct}\right)d\xi+\int\limits_{|\xi|\geq\delta}|\xi|^2\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{Ct}\right)d\xi\right)\leq$$

$$Ct^2\left|\left|\frac{d^2}{d\eta^2}f_x(\eta)\right|\right|\Big|_{\eta=0}.$$

Последнее слагаемое в (2.33):

$$\frac{1}{2}(2\pi a_x(0)t)^{-n/2}\int\limits_{|\xi|<\delta}\exp\left(-\frac{d^2_{M,x}(0,\xi)}{2a_x(0)t}\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^1\frac{d^3}{d\eta^3}f_x(\eta)\Big|_{\eta=z\xi}(\xi,\xi,\xi)(1-z)^2\sqrt{\det g_x(\xi)}dzd\xi$$

оценивается так:

$$Ct^{-n/2}\int\limits_0^1\int\limits_{|\xi|<\delta}|\xi|^3\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2Ct}\right)\left|\left|\frac{d^3}{d\eta^3}f_x(\eta)\Big|_{\eta=z\xi}\right|\right|d\xi dz\leq Ct^{3/2}\sup_{|\eta|<\delta}\left|\left|\frac{d^3}{d\eta^3}f_x(\eta)\right|\right|.$$

Собрав все найденные оценки, получим

$$\frac{1}{t}\left|(2\pi a(x)t)^{-n/2}\int\limits_{|\xi|<\delta}\exp\left(-\frac{d^2_M(x,y)}{2a(x)t}\right)(f(y)-f(x))vol(dy)-\frac{a(x)}{2}\Delta_N f(x)\right|\leq$$

$$Ct^{1/2}\left|\left|\frac{d}{d\eta}f_x(\eta)\right|\right|\Big|_{\eta=0}+Ct\left|\left|\frac{d^2}{d\eta^2}f_x(\eta)\right|\right|\Big|_{\eta=0}+Ct^{1/2}\sup_{|\eta|<\delta}\left|\left|\frac{d^3}{d\eta^3}f_x(\eta)\right|\right|.$$

Полученное выражение имеет компактный носитель по x и потому его норма стремится к нулю во всех требуемых пространствах. Для $F_1^N(t)$ получается точно такая же оценка, т.к. для ее получения нужно везде заменить $d^2_{x,M}(0,\xi) = |\xi|^2 + O(|\xi|^4)$ на $d^2_{x,N}(0,\xi) = |\xi|^2$. Для завершения доказательства остается оценить разность

$$f(x)\left(1 - (2\pi a(x)t)^{-n/2} \int\limits_{|\xi|<\delta} \exp\left(-\frac{d^2_{M(N)}(x,y)}{2a(x)t}\right) vol(dy)\right),$$

которая дает отличие первой формулы из доказательства от $\left(F_1^{N(M)} f - f\right)/t$. Мы сошлемся на доказанные в [4, предложения 5, 7] формулы

$$(2\pi a(x)t)^{-n/2} \int\limits_{U(x)} \exp\left(-\frac{d^2_M(x,y)}{2a(x)t}\right) vol(dy) = 1 + ta(x)D(x) + O(t^{3/2}),$$

$$(2\pi a(x)t)^{-n/2} \int\limits_{U(x)} \exp\left(-\frac{d^2_N(x,y)}{2a(x)t}\right) vol(dy) = 1 - \frac{t}{6} a(x) Scal_N(x) + O(t^{3/2}).$$

Там рассматривается случай $a(x) \equiv 1$, но он легко обобщается на рассматриваемое $a(x)$.

$\square$

Пусть $\varphi(t,x)$ - интегральные кривые поля $b(x)$. Легко видеть, что найдется такое $t_0 > 0$, что $\varphi(t,x)$ определено для всех $t \in [0,t_0]$. Рассмотрим в пространстве X для достаточно малых t семейство операторов

$$(F_2(t)f)(x) = f(\varphi(t,x)).$$

Предложение 15. *Найдется такая константа C, что*

$$||F_2(t)|| \leq e^{Ct}. \tag{2.34}$$

Доказательство. В случаях $X = C_b(N)$ или $X = L_\infty(N)$ очевидно, что $||F_2(t)|| = 1$. Пусть $X = L_p(N)_{1\leq p<\infty}$. Обозначим функцию $\varphi(t, y)$ в окрестности точки x в нормальных координатах как $\varphi_x(t, \xi)$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что найдутся такие константы C, $\delta_1 > 0$, $t_1 > 0$, что для каждой точки $x \in N$ функция $\varphi_x(t, \xi)$ с начальным условием из окрестности радиуса δ_1 при $t \in [0, t_1]$ принимает значения в окрестности радиуса δ и ее производная по ξ ограничена константой C. Интеграл $\int_N |f(\varphi(t, x))|^p vol(dx)$ можно свести к сумме интегралов по непересекающимся множествам N_k, каждое из которых лежит в окрестности радиуса δ_1 вокруг некоторой точки x_k.

$$\int\limits_N |f(\varphi(t,\xi))|^p \sqrt{\det g(\xi)}d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{N_k} |f(\varphi(t,\xi))|^p \sqrt{\det g(\xi)}d\xi.$$

Сделаем замену переменных $z = \varphi(t, \xi)$. Т.к. φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,\xi) = b(\varphi(t,\xi)); \quad \varphi(0,\xi) = \xi,$$

а функция $b(\xi)$ и ее первая производная ограничены, то легко проверить, что

$$\varphi(t,\xi) = \xi + tR_1(t,\xi),$$
$$\frac{d}{d\xi}\varphi(t,\xi) = I + tR_2(t,\xi),$$

где $|R_{1,2}(t, \xi)| < C$ для некоторой константы C. Сделаем замену $z = \varphi(t, \xi)$.

$$\int\limits_{N_k} |f(\varphi(t,\xi))|^p \sqrt{\det g(\xi)}d\xi =$$

$$\int\limits_{\varphi(t,N_k)} |f(z)|^p \sqrt{\det g(\xi(z))} \det(I + tR(t,\xi(z)))^{-1} dz =$$

$$\int\limits_{\varphi(t,N_k)} |f(z)|^p \sqrt{\det g(z)}(1 + O(t))dz.$$

Но $\varphi(t,\xi)$ инъективно. Поэтому

$$\int\limits_N |f(\varphi(t,\xi))|^p \sqrt{\det g(\xi)} d\xi \leq \int\limits_N |f(z)|^p \sqrt{\det g(z)} (1+O(t)) dz \leq$$

$$(1+Ct)||f||^p \leq e^{Ct}||f||^p.$$

□

Предложение 16. *Для любой функции* $f \in C^3_{00}(N)$ *справедливо*

$$\lim_{t\to 0} \frac{F_2(t)f - f}{t} = \partial_b f. \tag{2.35}$$

Доказательство. Как и в предыдущем доказательстве разобьем область интегрирования на куски. При помощи формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме получаем

$$(F_2(t)f)(x) - f(x) - t\partial_{b(x)} f(x) = f(\varphi_x(t,\xi)) - f(\varphi_x(0,\xi)) - t\sum_{k=1}^n b_k(\xi) f'_k(\xi) =$$

$$t^2 \int\limits_0^1 (1-\tau) \frac{d^2}{d\tau^2} f(\varphi_x(\tau,\xi)) d\tau =$$

$$t^2 \int\limits_0^1 (1-\tau) \left(\sum_{k,l=1}^n f''_{k,l}(\varphi_x(\tau,\xi)) \frac{d}{d\tau}\varphi_{x,k}(\tau,\xi) \frac{d}{d\tau}\varphi_{x,l}(\tau,\xi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^n f'_k(\varphi_x(\tau,\xi)) \frac{d^2}{d\tau^2}\varphi_{x,k}(\tau,\xi) \right) d\tau =$$

$$t^2 \int\limits_0^1 (1-\tau) \left(\sum_{k,l=1}^n (F_2(\tau) f''_{k,l})(\xi) b_k(\varphi_x(\tau,\xi)) b_l(\varphi_x(\tau,\xi)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k,l=1}^n (F_2(\tau) f'_k)(\xi) b'_{k;l}(\varphi_x(\tau,\xi)) b_l(\varphi_x(\tau,\xi)) \right) d\tau.$$

Требуемый результат следует из доказанной ранее ограниченности $F_2(\tau)$.

□

Предложение 17. *Рассмотрим в пространстве X семейство операторов*

$$(F_3(t)f)(x) = e^{tc(x)}f(x).$$

Тогда

$$||F_3(t)|| \leq e^{Ct},$$

и для любой функции $f \in C^3_{00}(N)$ справедливо

$$\lim_{t\to 0} \frac{F_3(t)f - f}{t} = c(\cdot)f.$$

Доказательство очевидно.

Теорема 8 (Формула Фейнмана). *Пусть X будет одним из пространств $L_p(N)_{1\leq p<\infty}$ или пространством непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности $C_0(N)$. Рассмотрим в пространстве X семейства операторов $F^N(t)$ и $F^M(t)$, заданные по формуле*

$$F^{N(M)}(t) = F_1^{N(M)}(t)F_2(t)F_3(t),$$

и операторы H_N и H_M, действующие на гладкие функции как

$$(H_N f)(x) = \frac{a(x)}{2}(\Delta_N f)(x) + \partial_{b(x)}f(x) + \left(c(x) - \frac{1}{6}a(x)Scal_N(x)\right)f(x),$$

$$(H_M f)(x) = \frac{a(x)}{2}(\Delta_N f)(x) + \partial_{b(x)}f(x) + (a(x)D(x) + c(x))f(x),$$

где $D(x)$ определено в (2.32). Тогда замыкания операторов $H_{M(N)}$ порождают сильно непрерывные полугруппы $T_{M(N)}(t)$ в пространстве X, причем для всех $f \in X$ выполнено

$$T_{M(N)}(t)f = \lim_{n\to\infty} F^{M(N)}(t/n)^n f.$$

Доказательство. Зададим операторы H_N и H_M на множестве $C^3_{00}(N)$. Из теоремы 4 следует для для найдется такое λ, что образы $\lambda - H_N$ и $\lambda - H_M$ будут плотны в X. Поэтому требуемый результат следует из теоремы 1 и предложения 3, выполнение условий которого следует из формул, доказанных в этом разделе. $\square$

Глава 3

Уравнения типа Шредингера

3.1 Постановка задачи

Выберем пространство $X = L_2(\mathbb{R}^n)$ и в качестве операторов $H(t)_{0\le t\le T}$ будем рассматривать операторы вида

$$H(t) = \frac{i}{2}\alpha(t,x)\sum_{k,m=1}^{n} a^{k,m}(t)\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^m} + \sum_{k=1}^{n} b^k(t,x)\frac{\partial}{\partial x^k} + c(t,x). \tag{3.1}$$

В дальнейшем будем обозначать $a^{k,m}(t,x) = \alpha(t,x)a^{k,m}(t)$. Наложим на коэффициенты перед производными следующие требования:

1. Функция $c(t,x)$ принимает комплексные значения, а все остальные коэффициенты принимают действительные значения.

2. Гладкость и ограниченность коэффициентов. Для каждого значения t коэффициенты перед частной производной k-го порядка лежат в $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ и ограничены равномерно по переменной t:

$$||\alpha(t,\cdot)||_{C_b^2(\mathbb{R}^n)} < C, \qquad ||b^i(t,\cdot)||_{C_b^1(\mathbb{R}^n)} < C, \qquad ||c(t,\cdot)||_{C_b(\mathbb{R}^n)} < C, \tag{3.2}$$
$$|a^{k,m}(t)| < C.$$

3. Коэффициенты непрерывно дифференцируемы по переменной t и производные ограничены.

4. Найдется такая положительная постоянная C, что

$$\alpha(t,x) \ge C. \tag{3.3}$$

5. Равномерная эллиптичность. Матрица коэффициентов при старшей производной симметрична $a^{i,j}(t) = a^{j,i}(t)$, и существует такая положительная постоянная C, что

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(t)\xi_i\xi_j \geq C \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2. \tag{3.4}$$

Областью определения $H(t)$ является пространство Соболева $W_2^2(\mathbb{R}^n)$. Она одинакова для всех t.

3.2 Одномерный случай

В этом параграфе будем рассматривать одномерный случай без зависимости от времени. В этом частном случае есть элементарное доказательство существования решения, благодаря которому можно проиллюстрировать некоторые свойства решения. Кроме того, приводится специальный вариант формулы Фейнмана. До конца параграфа считаем, что оператор (3.1) имеет вид

$$(Hf)(x) = \frac{i}{2}a(x)f''(x).$$

Зададим функцию $s(x) = \int_0^x a(\xi)^{-1/2}d\xi$. В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ линейный оператор

$$(Bf)(x) = a(x)^{1/4}f(s(x))$$

ограничен и имеет ограниченный обратный

$$(B^{-1}f)(x) = a(y)^{-1/4}f(y)\Big|_{y=s^{-1}(x)} = a(s^{-1}(x))^{-1/4}f(s^{-1}(x)).$$

Зададим функцию

$$h(x) = \frac{a''(x)}{8} - \frac{3a'(x)^2}{32a(x)}.$$

Предложение 18. $B^{-1}HB = \widetilde{H}$, *где*

$$(\widetilde{H}f)(x) = \frac{i}{2}f''(x) + ih(s^{-1}(x))f(x).$$

Доказательство.

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2}{dx^2}(Bf)(x) = \frac{d^2}{dx^2}\Big(a(x)^{1/4}f(s(x))\Big) = \\
\frac{d^2}{dx^2}\Big(a(x)^{1/4}\Big)f(s(x)) + 2\frac{d}{dx}\Big(a(x)^{1/4}\Big)\frac{d}{dx}\Big(f(s(x))\Big) + a(x)^{1/4}\frac{d^2}{dx^2}\Big(f(s(x))\Big) = \\
\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{4}a(x)^{-3/4}a'(x)\Big)f(s(x)) + \frac{1}{2}a(x)^{-3/4}a'(x)f'(s(x))a(x)^{-1/2} + \\
+ a(x)^{1/4}\frac{d}{dx}\Big(f'(s(x))a(x)^{-1/2}\Big) = \\
\frac{1}{4}\Big(-\frac{3}{4}a(x)^{-7/4}a'(x)^2 + a(x)^{-3/4}a''(x)\Big)f(s(x)) + \frac{1}{2}a(x)^{-5/4}a'(x)f'(s(x)) + \\
a(x)^{1/4}\Big(f''(s(x))a(x)^{-1} - \frac{1}{2}f'(s(x))a(x)^{-3/2}a'(x)\Big) = \\
a(x)^{-3/4}f''(s(x)) + \left(\frac{1}{4}a(x)^{-3/4}a''(x) - \frac{3}{16}a(x)^{-7/4}a'(x)^2\right)f(s(x)).
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
(HBf)(x) = \frac{i}{2}a(x)\frac{d^2}{dx^2}(Bf)(x) = \\
\frac{i}{2}a(x)^{1/4}f''(s(x)) + i\left(\frac{1}{8}a(x)^{1/4}a''(x) - \frac{3}{32}a(x)^{-3/4}a'(x)^2\right)f(s(x)) = \\
ia(x)^{1/4}\left(\frac{1}{2}f''(s(x)) + h(x)f(s(x))\right).
\end{gathered}
$$

$$
(B^{-1}HBf)(x) = i\left(\frac{1}{2}f''(s(y)) + h(y)f(s(y))\right)\Big|_{y=s^{-1}(x)} = \frac{i}{2}f''(x) + ih(s^{-1}(x))f(x).
$$

$\square$

Предложение 19. *Определим на гладких финитных функциях семейства операторов*

$$
(G_1(t)f)(x) = \frac{a(x)^{1/4}}{\sqrt{2\pi it}}\int \exp\left(\frac{-(s(x)-s(z))^2}{2it}\right)a(z)^{-3/4}f(z)dz,
$$

$$
(G_2(t)f)(x) = \frac{a(x)^{1/4}}{\sqrt{2\pi it}}\int \exp\left(\frac{-(s(x)-s(z))^2}{2it} + ith(z)\right)a(z)^{-3/4}f(z)dz,
$$

где квадратный корень вычисляется как $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$*. Тогда операторы* $G_1(t)$ *и* $G_2(t)$ *продолжаются по непрерывности до ограниченных операторов на* *всем* $L_2(\mathbb{R})$. *Полугруппа операторов* e^{tH} *существует и представляется через формулы Фейнмана в виде*

$$e^{tH}f = \lim_{n\to\infty} G_2(t/n)^n f.$$

Положим $(\widehat{H}f)(x) = \frac{i}{2}a(x)f''(x) - ih(x)f(x)$. *Тогда имеется явное представление соответствующей полугруппы операторов*

$$e^{t\widehat{H}}f = G_1(t)f.$$

Доказательство. Зададим операторы

$$(R_1(t)f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i t}}\int \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2it}\right)f(y)dy,$$

$$(R_2(t)f)(x) = e^{ith(s^{-1}(x))}f(x),$$

$$(R(t)f)(x) = (R_1(t)R_2(t)f)(x) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi i t}}\int \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2it} + ith(s^{-1}(y))\right)f(y)dy.$$

Как известно, операторы $R_1(t)$ изометрические и $R_1(t) = e^{tH_0}$, где $H_0 = \frac{i}{2}\frac{d^2}{dx^2}$. Оператор H_1 умножения на $ih(s^{-1}(\cdot))$ ограничен и $(e^{tH_1}f)(x) = (R_2(t)f)(x)$. Поэтому для оператора $\widetilde{H} = H_0 + H_1$ полугруппа операторов $e^{t\widetilde{H}}$ существует по теореме об ограниченном возмущении [6, глава 3.1 теорема 1.3] и по теореме Троттера [6, глава 3.5 следствие 5.8] может быть представлена в виде

$$e^{t\widetilde{H}}f = \lim_{n\to\infty}\left(e^{tH_0/n}e^{tH_1/n}\right)^n f = \lim_{n\to\infty}\left(R_1(t/n)R_2(t/n)\right)^n f = \lim_{n\to\infty} R(t/n)^n f.$$

Поэтому существует полугруппа $e^{tH} = e^{tB\widetilde{H}B^{-1}} = Be^{t\widetilde{H}}B^{-1}$ и

$$e^{tH}f = \lim_{n\to\infty} BR(t/n)^n B^{-1}f = \lim_{n\to\infty}(BR(t/n)B^{-1})^n f = \lim_{n\to\infty} G_2(t/n)^n f,$$

где

$$(G_2(t)f)(x) = \frac{a(x)^{1/4}}{\sqrt{2\pi it}} \int \exp\left(-\frac{(s(x)-y)^2}{2it} + ith(s^{-1}(y))\right)\times$$
$$\times\, a(s^{-1}(y))^{-1/4} f(s^{-1}(y))dy =$$
$$\frac{a(x)^{1/4}}{\sqrt{2\pi it}} \int \exp\left(-\frac{(s(x)-s(z))^2}{2it} + ith(z)\right) a(z)^{-3/4} f(z)dz.$$

Легко проверить, что оператор умножения на $h(x)$ преобразуется как $(B^{-1}h(\cdot)Bf)(x) = h(s^{-1}(x))f(x)$. Поэтому $B^{-1}\widehat{H}B = H_0$ и

$$e^{t\widehat{H}} = B^{-1}e^{tH_0}B = B^{-1}R_1(t)B = G_1(t).$$

$\square$

Замечание 2. *В процессе доказательства мы получили* $B^{-1}e^{tH}B = e^{t\widetilde{H}}$, *где* $||e^{t\widetilde{H}}|| \leq e^{\omega t}$. *Отсюда следует* $||B^{-1}e^{tH}f|| \leq e^{\omega t}||B^{-1}f||$. *Введем норму, эквивалентную исходной, по формуле* $||f||_B = ||B^{-1}f||$. *Тогда*

$$||e^{tH}f||_B \leq e^{\omega t}||f||_B.$$

Эту норму можно выразить через функцию a *как*

$$||f||_B^2 = \int a(s^{-1}(x))^{-1/2}|f(s^{-1}(x))|^2dx = \int a(y)^{-1}|f(y)|^2dy. \qquad (3.5)$$

Предложение 20. *Пусть*

$$(\widehat{H}f)(x) = \frac{i}{2}a(x)f''(x) - ih(x)f(x),$$

где a *удовлетворяет всем указанным в начале главы условиям, и кроме того,* $a(x) = 1 - b(x)$, *где* $b(x) \in L_1(\mathbb{R})$ *и в некоторой точке* $x_0 \in \mathbb{R}$ *выполнено условие* $b(x_0) > 0$. *Тогда существует такая константа* $C > 1$, *что для достаточно малых положительных значений* t *выполнено неравенство*

$$||e^{t\widehat{H}}|| > C.$$

Доказательство. Для каждого значения $t > 0$ возьмем функцию $f_t(x) = \exp\left(\frac{s(x)^2}{2it}\right) g_t(x)$, где $g_t(x)$ гладкая финитная функция вида

$$g_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x - x_0| < t^2, \\ 0, & \text{если } |x - x_0| > 2t^2, \\ \text{монотонно изменяется}, & \text{если } t^2 < |x - x_0| < 2t^2. \end{cases}$$

Тогда $2t^2 < ||f_t||^2 < 4t^2$. В предложении 19 приведена явная формула для $e^{t\widehat{H}}$. С помощью нее получаем

$$||e^{t\widehat{H}} f_t||^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (G_1(t)f)(x)\overline{(G_1(t)f_t)(x)}dx =$$

$$\frac{1}{2\pi t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a(x)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(s(x) - s(y))^2}{2it}\right) a(y)^{-3/4} f_t(y) dy \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{(s(x) - s(z))^2}{2it}\right) a(z)^{-3/4} \overline{f_t}(z) dz dx =$$

$$\frac{1}{2\pi t} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{s(y)^2 - s(z)^2}{2it}\right) (a(y)a(z))^{-3/4} f_t(y) \overline{f_t}(z) \times$$

$$\times \int\limits_{-R}^{R} a(x)^{1/2} \exp\left(\frac{s(x)(s(y) - s(z))}{it}\right) dx dy dz =$$

$$\frac{1}{2\pi t} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_t(y) g_t(z) (a(y)a(z))^{-3/4} \times$$

$$\times \int\limits_{-R}^{R} a(x)^{1/2} \exp\left(\frac{s(x)(s(y) - s(z))}{it}\right) dx dy dz =$$

$$\frac{1}{2\pi t}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_t(y)g_t(z)(a(y)a(z))^{-3/4}\times$$

$$\times\int\limits_{s(-R)}^{s(R)} a(s^{-1}(\xi))\exp\left(\frac{\xi(s(y)-s(z))}{it}\right)d\xi dydz=$$

$$\frac{1}{2\pi t}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_t(y)g_t(z)(a(y)a(z))^{-3/4}\times$$

$$\times\int\limits_{s(-R)}^{s(R)} \big(1-b(s^{-1}(\xi))\big)\exp\left(\frac{\xi(s(y)-s(z))}{it}\right)d\xi dydz=$$

$$\frac{1}{2\pi t}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_t(y)g_t(z)(a(y)a(z))^{-3/4}\int\limits_{s(-R)}^{s(R)}\exp\left(\frac{\xi(s(y)-s(z))}{it}\right)d\xi dydz-$$

$$\frac{1}{2\pi t}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_t(y)g_t(z)(a(y)a(z))^{-3/4}\times$$

$$\times\int\limits_{s(-R)}^{s(R)} b(s^{-1}(\xi))\exp\left(\frac{\xi(s(y)-s(z))}{it}\right)d\xi dydz. \quad (3.6)$$

Т.к. интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} b(s^{-1}(\xi))d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} a(x)^{-1/2}b(x)dx$ сходится, то второе слагаемое в (3.6) можно оценить как

$$\left|\frac{1}{2\pi t}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_t(y)g_t(z)(a(y)a(z))^{-3/4}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{s(-R)}^{s(R)} b(s^{-1}(\xi))\exp\left(\frac{i\xi(s(y)-s(z))}{t}\right)d\xi dydz\right|\leq$$

$$\frac{C}{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_t(y)g_t(z)(a(y)a(z))^{-3/4}dydz\leq Ct^3\leq Ct||f_t||^2,$$

где константа C зависит только от функции a. Первое слагаемое в (3.6) запишем в виде

$$\frac{1}{2\pi t}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_t(y)g_t(z)(a(y)a(z))^{-3/4}\int\limits_{s(-R)}^{s(R)}\exp\left(\frac{\xi(s(y)-s(z))}{it}\right)d\xi dy dz =$$

$$\frac{1}{2\pi t}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{s(-R)}^{s(R)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{\xi s(y)}{it}\right)g_t(y)a(y)^{-3/4}dy\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-\xi s(z)}{it}\right)g_t(z)a(z)^{-3/4}dz d\xi = \frac{1}{2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\overline{\varphi(\xi)}d\xi,$$

где $\varphi(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{\xi s(y)}{it}\right)g_t(y)a(y)^{-3/4}dy$. Сделаем замену переменной интегрирования $y_1=\frac{s(y)}{t}$. Тогда $dy_1=\frac{dy}{ta(y)^{1/2}}$ и

$$\varphi(\xi)=t\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\xi y_1\right)g_t(y(y_1))a(y(y_1))^{-1/4}dy_1.$$

В силу изометрии преобразования Фурье получаем

$$\frac{1}{2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\overline{\varphi(\xi)}d\xi = t\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_t(y(y_1))^2a(y(y_1))^{-1/2}dy_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_t(y)^2a(y)^{-1}dy=$$

$$\int\limits_{x_0-2t^2}^{x_0+2t^2}g_t(y)^2a(y)^{-1}dy\geq\int\limits_{x_0-2t^2}^{x_0+2t^2}g_t(y)^2\left(a(x_0)^{-1}-Ct^2\right)dy=\left(a(x_0)^{-1}-Ct^2\right)||f_t||^2.$$

Окончательная оценка

$$||e^{t\widehat{H}}f_t||^2\geq\left(a(x_0)^{-1}-C_1t-C_2t^2\right)||f_t||^2$$

завершает доказательство.

$\square$

Следствие 2. *Пусть a удовлетворяет всем указанным в начале главы условиям, и кроме того $a(x)=1-b(x)$, где $b(x)\in L_1(\mathbb{R})$ и в некоторой точке $x_0\in\mathbb{R}$ выполнено условие $b(x_0)>0$. Тогда существует такая* *константа* $C > 1$, *что для достаточно малых значений* t *выполнено неравенство*

$$||e^{tH}|| > C.$$

Доказательство. Зафиксируем $t_0 > 0$. Мы уже доказали в предложении 19, что полугруппы $e^{tH}, e^{t\widehat{H}}$ существуют и по общим свойствам полугрупп найдутся такие константы, что для всех $t \le t_0$ выполнено $||e^{tH}|| < C_1, ||e^{t\widehat{H}}|| < C_2$. Т.к. $H = \widehat{H} + H_1$, где H_1 - ограниченный оператор умножения на $ih(x)$, то справедлива формула [6, глава 3.1 следствие 1.7]

$$e^{tH}f = \int\limits_0^t e^{(t-\tau)\widehat{H}} H_1 e^{\tau H} f d\tau + e^{t\widehat{H}} f.$$

По предыдущему предложению существует константа $C > 1$ такая, что $||e^{t\widehat{H}}|| > C$. Поэтому

$$||e^{tH}|| \ge ||e^{t\widehat{H}}|| - \left|\left|\int\limits_0^t e^{(t-\tau)\widehat{H}} H_1 e^{\tau H} d\tau\right|\right| \ge$$

$$||e^{t\widehat{H}}|| - \int\limits_0^t \left|\left|e^{(t-\tau)\widehat{H}} H_1 e^{\tau H}\right|\right| d\tau \ge C - C_3 t.$$

□

В книге [6] дано определение:

Определение 3. *Сильно непрерывная полугруппа операторов* $T(t)$ *называется квазисжимающей если*

$$||T(t)|| \le e^{\omega t}.$$

Из доказанного выше следует, что полугруппа e^{tH} в общем случае не является квазисжимающей. Поэтому для нее справедлива лишь более слабая оценка, которой подчиняются все сильно непрерывные полугруппы

$$||e^{tH}|| \le M e^{\omega t}.$$

3.3 Приближающие операторы

Доказанная в предложении 19 формула Фейнмана для одномерного случая обладает тем недостатком, что в нее входит не только сам коэффициент $a(x)$, но и первообразная $s(x)$. В этом разделе будет доказана другая формула, которая не только применима для многомерного случая, но и имеет более простой вид.

Сначала покажем, что используемый в одномерном случае метод замены переменных не работает в многомерном случае.

Предложение 21. *Пусть* $n = 2$. *Рассмотрим оператор* $(Hf)(x,y) = a(x,y)\Delta f(x,y)$, *где* $a(x,y)$ *- непрерывная ограниченная функция. Пусть некоторой заменой переменных этот оператор преобразуется к виду* $(\widetilde{H}f)(x,y) = \Delta f(x,y) + ...$, *где через ... обозначены слагаемые, содержащие младшие производные от* f. *Тогда* $a(x,y) = const$.

Доказательство. Рассмотрим замену переменных $\widetilde{r} = \widetilde{r}(r)$, где $\widetilde{x} = u(x,y)$ и $\widetilde{y} = v(x,y)$. Обозначим $D = \frac{\partial \widetilde{r}}{\partial r}$. Тогда

$$(\widetilde{H}f)(\widetilde{r}) = tr\left(a(r)\frac{\partial^2}{\partial r^2}f(\widetilde{r}(r))\right)\Big|_{r=r(\widetilde{r})} =$$

$$tr\left(a(r)D(r)\frac{\partial^2 f}{\partial \widetilde{r}^2}(\widetilde{r}(r))D(r)^T + ...\right)\Big|_{r=r(\widetilde{r})} =$$

$$tr\left(a(r)D(r)^T D(r)\frac{\partial^2 f}{\partial \widetilde{r}^2}(\widetilde{r}(r))\right)\Big|_{r=r(\widetilde{r})} + ... =$$

$$tr\left(a(r(\widetilde{r}))D(r(\widetilde{r}))^T D(r(\widetilde{r}))\frac{\partial^2 f}{\partial \widetilde{r}^2}(\widetilde{r})\right) + ...$$

Мы требуем, чтобы часть полученного выражения, содержащая старшие производные, равнялась $tr\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \widetilde{r}^2}(\widetilde{r})\right)$. Отсюда следует

$$a(r(\widetilde{r}))D(r(\widetilde{r}))^T D(r(\widetilde{r})) = E,$$

$$a(r)D(r)^T D(r) = E.$$

Значит матрица $a(r)^{1/2}D(r)$ ортогональная. Положим

$$D(x,y) = a(x,y)^{-1/2}\begin{pmatrix} \cos(\varphi(x,y)) & \sin(\varphi(x,y)) \\ -\sin(\varphi(x,y)) & \cos(\varphi(x,y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ комплексной переменной $z = x + iy$. Она аналитическая, т.к. для нее выполены условия Коши-Римана. Ее производная имеет вид

$$F'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = a(x,y)^{-1/2}e^{i\varphi(x,y)}.$$

Эта функция аналитическая и ее модуль $a(x,y)^{-1/2}$ предполагается ограниченным. Значит $a(x,y) = const$ по теореме Лиувилля. Случай несобственной ортогональной матрицы рассматривается аналогично. □

По аналогии с одномерным случаем будем сокращенно писать $B\xi^2 := (B\xi,\xi)$ и $\xi^2 := ||\xi||^2$ для векторов $\xi \in \mathbb{R}^n$ и квадратных матриц B размера n.

Выберем число ε с условием $0 < \varepsilon < \frac{1}{2n+6}$ и зададим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ при $0 \le s < t \le T$ линейный оператор

$$(F_1(t,s)f)(x) = (2\pi)^{-n/2}\det\Big((t-s)^{1+\varepsilon}E + i(t-s)a(s,x)\Big)^{-1/2}\times \\ \times\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\Big((t-s)^{1+\varepsilon}E+i(t-s)a(s,x)\Big)^{-1}(x-y)^2/2}f(y)dy, \quad (3.7)$$

где E означает единичную матрицу и квадратный корень вычисляется как непрерывное продолжение функции $\det((t-s)^{1+\varepsilon}E + i\xi a(x))^{-1/2}$ по отрезку $\xi \in [0, t-s]$. Если зависимости от времени нет, то коэффициенты имеют вид $a^{k,m}(x) = \alpha(x)a^{k,m}$ и можно определить более простой оператор

$$(F_1(t)f)(x) = (2\pi)^{-n/2}\det(t^{1+\varepsilon}E + ita(x))^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(t^{1+\varepsilon}E+ita(x))^{-1}(x-y)^2/2}f(y)dy.$$

В этом разделе мы будем формулировать утверждения для $F_1(t,s)$, но для краткости доказывать будем для $F_1(t)$. Т.к. наложенные на коэффициенты условия содержат только независимые от переменной t константы, то из доказательств будет легко видно, что полученные в них оценки также верны и для $F_1(t,s)$. В полученных результатах нам важны только малые значения разности $t-s$, поэтому в дальнейшем будем считать, что $t-s<1$.

Предложение 22. *Оператор $F_1(t,s)$ ограничен.*

Доказательство. Пусть $e_k(x)$ - ортонормированный базис из собственных векторов матрицы $a(x)$ с собственными значениями $\lambda_k(x)$. Из требований, наложенных на коэффициенты $H(t)$, следует, что найдутся такие числа M и m, что $0<m\le\lambda_k(x)\le M$. Тогда для произвольного вектора $\xi=\sum_{k=1}^n \xi_k(x)e_k(x)$ запишем

$$Re((\mu E+i\nu a(x))^{-1}\xi,\xi)=Re\sum_{k=1}^n\frac{1}{\mu+i\nu\lambda_k(x)}\xi_k(x)^2=$$
$$\sum_{k=1}^n\frac{\mu}{\mu^2+\nu^2\lambda_k(x)^2}\xi_k(x)^2\ge\sum_{k=1}^n\frac{\mu}{\mu^2+M^2\nu^2}\xi_k(x)^2=$$
$$\frac{\mu}{\mu^2+M^2\nu^2}||\xi||^2\ge\frac{C\mu||\xi||^2}{\max(\mu^2,\nu^2)},\quad(3.8)$$

$$|\det(\mu E+i\nu a(x))|=\prod_{k=1}^n|\mu+i\nu\lambda_k(x)|=\prod_{k=1}^n\left(\mu^2+\nu^2\lambda_k(x)^2\right)^{1/2}\ge$$
$$\left(\mu^2+m^2\nu^2\right)^{n/2}\ge C\max(\nu^n,\mu^n).\quad(3.9)$$

Отсюда получаем

$$|(F_1(t)f)(x)|\le Ct^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-C\frac{||x-y||^2}{2t^{1-\varepsilon}}}|f(y)|dy.$$

Как известно, L_2 норма преобразования $(2\pi d)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{||x-y||^2}{2d}}f(y)dy$ равна единице. Поэтому $||F_1(t)||\le Ct^{-\varepsilon n/2}$. □

Лемма 1. *Пусть функция имеет вид*

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)} g(p) dp, \tag{3.10}$$

где $g(p)$ ограничена, финитна и бесконечно дифференцируема. Тогда

$$(F_1(t)f)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x) - ita(x)p^2/2 - t^{1+\varepsilon}p^2/2} g(p) dp.$$

Доказательство.

$$\begin{gathered}
(F_1(t)f)(x) = \\
(2\pi)^{-n} \det(t^{1+\varepsilon}E + ita(x))^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(t^{1+\varepsilon}E+ita(x))^{-1}(x-y)^2/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,y)} g(p) dp dy = \\
(2\pi)^{-n} \det(t^{1+\varepsilon}E + ita(x))^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(p) \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(t^{1+\varepsilon}E+ita(x))^{-1}(x-y)^2/2 + i(p,y)} dy dp = \\
(2\pi)^{-n} \det(t^{1+\varepsilon}E + ita(x))^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)} g(p) \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(t^{1+\varepsilon}E+ita(x))^{-1}z^2/2 + i(p,z)} dz dp = \\
(2\pi)^{-n} \det(t^{1+\varepsilon}E + ita(x))^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x) - (t^{1+\varepsilon}E+ita(x))p^2/2} g(p) \times \\
\times \int\limits_{\mathbb{R}^n - i(t^{1+\varepsilon}E+ita(x))p} e^{-(t^{1+\varepsilon}E+ita(x))^{-1}\xi^2/2} d\xi dp = \\
(2\pi)^{-n} \det(t^{1+\varepsilon}E + ita(x))^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x) - ita(x)p^2/2 - t^{1+\varepsilon}p^2/2} g(p) \times \\
\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(t^{1+\varepsilon}E+ita(x))^{-1}\xi^2/2} d\xi dp = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x) - ita(x)p^2/2 - t^{1+\varepsilon}p^2/2} g(p) dp.
\end{gathered}$$

Сдвиг области интегрирования с $\mathbb{R}^n - i(t^{1+\varepsilon}E + ita(x))p$ на $\mathbb{R}^n$ производится с помощью теоремы Коши из комплексного анализа с учетом убывания подынтегрального выражения на бесконечности благодаря (3.8). Последнее равенство вида $(2\pi)^{-n/2} \det(B)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(Bz,z)/2} dz = 1$ легко доказывается переходом к собственному базису. $\square$

Лемма 2. *Пусть функция $g(p)$ ограниченная, финитная и бесконечно дифференцируемая. Зададим функции*

$$\varphi(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)} e^{-tp^2} g(p)dp,$$

$$\psi(t,r,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)} e^{-t^{1+\varepsilon}p^2} e^{ira(x)p^2} g(p)dp,$$

где $0 < t \leq 1$ и $0 \leq r \leq t$. Тогда $|\varphi(t,x)| < C(||x||+1)^{-n}$ и $|\psi(t,r,x)| < Ct^{-n\varepsilon/2}(||x||+1)^{-n}$.

Доказательство. Очевидно $|\varphi(t,x)| < C$ и $|\psi(t,x)| < C$. Поэтому достаточно доказать неравенства $|\varphi(t,x)| < C||x||^{-n}$ и $|\psi(t,r,x)| < Ct^{-n\varepsilon/2}||x||^{-n}$. По аналогии с леммой 1

$$\varphi(t,x) = (2\pi t)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-y)^2/2t} f(y)dy,$$

$$\psi(t,r,x) = (2\pi)^{-n/2} \det(t^{1+\varepsilon}E + ira(x))^{-1/2} \int e^{-(t^{1+\varepsilon}E+ira(x))^{-1}(x-y)^2/2} f(y)dy,$$

где функция f, являющаяся обратным преобразованием Фурье функции g, быстро убывает. Используя неравенство $||x||^n \leq (||x-y|| + ||y||)^n \leq C\left(||x-y||^n + ||y||^n\right)$, получаем

$$||x||^n|\varphi(t,x)| \leq$$
$$Ct^{-n/2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-y)^2/2t}||x-y||^n|f(y)|dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-y)^2/2t}||y||^n|f(y)|dy\right) \leq$$
$$Ct^{-n/2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-y)^2/2t}||x-y||^n dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-y)^2/2t} dy\right) \leq C\left(1 + t^{n/2}\right) \leq C.$$

С помощью (3.8) и (3.9) получим

$$||x||^n|\psi(t,r,x)| \leq \frac{C||x||^n}{\max(t^{1+\varepsilon}, r)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{Ct^{1+\varepsilon}||x-y||^2}{\max(t^{2+2\varepsilon}, r^2)}\right)|f(y)|dy.$$

Теперь можно воспользоваться полученным для φ результатом.

$$||x||^n|\psi(t,r,x)| \leq \frac{C}{\max(t^{1+\varepsilon},r)^{n/2}} \times \left(\frac{t^{1+\varepsilon}}{\max(t^{2+2\varepsilon},r^2)}\right)^{-n/2} \times$$
$$\times \left[||x||^n \left(\frac{t^{1+\varepsilon}}{\max(t^{2+2\varepsilon},r^2)}\right)^{n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{Ct^{1+\varepsilon}||x-y||^2}{\max(t^{2+2\varepsilon},r^2)}\right)|f(y)|dy\right] \leq$$
$$\frac{C}{\max(t^{1+\varepsilon},r)^{n/2}} \times \left(\frac{t^{1+\varepsilon}}{\max(t^{2+2\varepsilon},r^2)}\right)^{-n/2} = C\left(\frac{\max(t^{2+2\varepsilon},r^2)}{t^{1+\varepsilon}\max(t^{1+\varepsilon},r)}\right)^{n/2} =$$
$$C\left(\max\left(1,\frac{r}{t^{1+\varepsilon}}\right)\right)^{n/2} \leq Ct^{-n\varepsilon/2}.$$

□

Для применения теоремы Чернова необходимо доказать неравенство $||F(t/n)^n|| \leq C$, причем, как показано при разборе одномерного случая, более сильное неравенство $||F(t)|| \leq e^{Ct}$, вообще говоря, не выполнено. Выражение $F(t/n)^n$ представляет собой кратный интеграл с быстро осциллирующими множителями, который трудно оценить прямо. Эту трудность мы обойдем следующим образом. Известно, что для любой сильно непрерывной полугруппы $T(t)$, удовлетворяющей оценке $||T(t)|| \leq Me^{\omega t}$, можно задать эквивалентную норму $||x||_T = \sup_{t\geq 0}||e^{-\omega t}T(t)x||$, для которой $||T(t)||_T \leq e^{\omega t}$. В нашем случае само существование полугруппы пока не доказано, и в любом случае явной формулы для нее нет. К счастью, мы можем воспользоваться формулой (3.5) из одномерного случая. Хотя никакого оператора замены переменных нет, оказывается, что эта формула работает и в многомерном случае.

Зададим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ семейство норм

$$||f||^2_{\alpha(s)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\alpha(s,x)}|f(x)|^2dx.$$

Предложение 23. *Существует такая константа ω, что выполнено неравенство*

$$||F_1(t,s)||_{\alpha(s)} \leq e^{\omega(t-s)}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Как было сказано ранее, мы будем доказывать более простое неравенство $||F_1(t)||_\alpha \leq e^{\omega t}$. В силу доказанной выше ограниченности $F_1(t)$ это неравенство достаточно доказать для плотного множество функций вида (3.10). С помощью леммы 1 можно записать

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^n \left(||F_1(t)f||_\alpha^2 - ||f||_\alpha^2\right) = \\
&\qquad (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\alpha(x)} \Big[(F(t)f)(x)\overline{(F(t)f)(x)} - f(x)\overline{f(x)}\Big] dx = \\
&\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\alpha(x)} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)-i(q,x)} \left(e^{it(a(x)q^2-a(x)p^2)/2 - t^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2} - 1\right) g(p)\overline{g(q)} dp dq dx = \\
&\qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t e^{i(p,x)-i(q,x)} \left(\frac{i}{2}(aq^2 - ap^2) - \frac{(1+\varepsilon)\tau^\varepsilon}{2\alpha(x)}(p^2+q^2)\right) \times \\
&\qquad\qquad \times e^{i\tau(a(x)q^2-a(x)p^2)/2 - \tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2} g(p)\overline{g(q)} d\tau dp dq dx = \\
&\qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t e^{i(p,x)-i(q,x)} \left(\frac{i}{2}(aq^2 - ap^2) - \frac{(1+\varepsilon)\tau^\varepsilon}{2\alpha(x)}(p^2+q^2)\right) \times \\
&\quad \times e^{-\tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2} \left(1 + \int\limits_0^\tau \frac{i}{2}(a(x)q^2 - a(x)p^2) e^{ir(a(x)q^2-a(x)p^2)/2} dr\right) \times \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times g(p)\overline{g(q)} d\tau dp dq dx.
\end{aligned}
$$

Окончательный результат:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t e^{i(p,x)-i(q,x)} \times \\
&\quad \times \left(\left[\frac{i}{2}(aq^2 - ap^2)\right] - \left[\frac{(1+\varepsilon)\tau^\varepsilon}{\alpha(x)}(p,q)\right] - \left[\frac{(1+\varepsilon)\tau^\varepsilon}{2\alpha(x)}(p-q)^2\right]\right) \times \\
&\qquad\qquad\qquad \times e^{-\tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2} g(p)\overline{g(q)} d\tau dp dq dx +
\end{aligned}
$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{i(p,x)-i(q,x)}\times$$
$$\times\left(-\frac{\alpha(x)}{4}(aq^2-ap^2)^2-\frac{i(1+\varepsilon)\tau^\varepsilon}{4}(aq^2-ap^2)(p^2+q^2)\right)\times$$
$$\times e^{-\tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2}e^{ir(a(x)q^2-a(x)p^2)/2}g(p)\overline{g(q)}drd\tau dpdqdx. \quad (3.12)$$

Напомним, что в полученном выражении a является постоянной матрицей, а $a(x)=\alpha(x)a$ - исходная матрица. Рассмотрим первую половину этого выражения:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t e^{i(p-q,x)}\times$$
$$\times\left(\left[\frac{i}{2}(aq^2-ap^2)\right]-\left[\frac{(1+\varepsilon)\tau^\varepsilon}{\alpha(x)}(p,q)\right]-\left[\frac{(1+\varepsilon)\tau^\varepsilon}{2\alpha(x)}(p-q)^2\right]\right)\times$$
$$\times e^{-\tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2}g(p)\overline{g(q)}d\tau dpdqdx. \quad (3.13)$$

Первое слагаемое в (3.13) имеет вид

$$\frac{i}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t e^{i(p-q,x)}(aq^2-ap^2)e^{-\tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2}g(p)\overline{g(q)}d\tau dpdqdx=$$
$$\frac{i}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p-q,x)}(aq^2-ap^2)e^{-\tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2}g(p)\overline{g(q)}dpdqd\tau dx=$$
$$\frac{i}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t(\varphi(\tau,x)\overline{\psi(\tau,x)}-\psi(\tau,x)\overline{\varphi(\tau,x)})d\tau dx,$$

где $\varphi(\tau,x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(p,x)}e^{-\tau^{1+\varepsilon}p^2}g(p)dp$ и $\psi(\tau,x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(p,x)}ap^2e^{-\tau^{1+\varepsilon}p^2}g(p)dp$. В силу леммы 2 можно изменить порядок интегрирования по dx и $d\tau$. Теперь можно воспользоваться формулой $\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(p-q,x)}dx=(2\pi)^n\delta(p-q)$. Получаем, что первое слагаемое в (3.13) равно нулю.

Второе слагаемое в (3.13)

$$
-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t e^{i(p,x)-i(q,x)}e^{-\tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2}\frac{(1+\varepsilon)\tau^{\varepsilon}}{\alpha(x)}(p,q)g(p)\overline{g(q)}d\tau dpdqdx =
$$

$$
-\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\alpha(x)}\int\limits_0^t(1+\varepsilon)\tau^{\varepsilon}\times
$$

$$
\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)-\tau^{1+\varepsilon}p^2/2}p_k g(p)e^{-i(q,x)-\tau^{1+\varepsilon}q^2/2}q_k\overline{g(q)}dpdqd\tau dx =
$$

$$
-\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\alpha(x)}\int\limits_0^t(1+\varepsilon)\tau^{\varepsilon}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)-\tau^{1+\varepsilon}p^2/2}p_k g(p)dp\right|^2 d\tau dx \leq
$$

$$
-C\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t\tau^{\varepsilon}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)-\tau^{1+\varepsilon}p^2/2}p_k g(p)dp\right|^2 d\tau dx =
$$

$$
-C\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^t\tau^{\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)-\tau^{1+\varepsilon}p^2/2}p_k g(p)dp\right|^2 dxd\tau =
$$

$$
-C\int\limits_0^t\tau^{\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau^{1+\varepsilon}p^2}p^2|g(p)|^2dpd\tau. \quad (3.14)
$$

Здесь $C > 0$. Изменение порядка интегрирования в предпоследнем равенстве возможно, т.к. подынтегральная функция положительна. Последнее равенство следует из того, что преобразование Фурье является изометрией в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Мы получаем в правой части (3.14) отрицательную величину. В дальнейшем доказательстве (3.14) будет использоваться для компенсации похожих слагаемых.

Последнее слагаемое в (3.13)

$$-\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{0}^{t} e^{i(p,x)-i(q,x)}\frac{(1+\varepsilon)\tau^{\varepsilon}}{2\alpha(x)}(p_k-q_k)^2 e^{-\tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2}g(p)\overline{g(q)}d\tau dp dq dx. \tag{3.15}$$

Рассмотрим одно слагаемое с определенным k. Зададим функции φ_l, $l = 0,1,2$

$$\varphi_l(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{0}^{t} e^{i(p,x)-i(q,x)}\frac{(1+\varepsilon)\tau^{\varepsilon}}{2}(p_k-q_k)^l e^{-\tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2}g(p)\overline{g(q)}d\tau dp dq.$$

Тогда $\frac{\partial\varphi_l(x)}{\partial x_k} = i\varphi_{l+1}(x)$. Из леммы 2 следует, что

$$|\varphi_l(t,x)| \le Ct^{1+\varepsilon}||x||^{-2n}. \tag{3.16}$$

Теперь мы можем в (3.15) два раза взять по частям интеграл по dx_k. Из (3.16) следует, что внеинтегральные члены будут равны нулю.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{0}^{t} e^{i(p,x)-i(q,x)}\frac{(1+\varepsilon)\tau^{\varepsilon}}{2\alpha(x)}(p_k-q_k)^2 e^{-\tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2}g(p)\overline{g(q)}d\tau dp dq dx =$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi_2(t,x)}{\alpha(x)}dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\left(\frac{1}{\alpha(x)}\right)\varphi_0(t,x)dx.$$

Из (3.2) следует, что это выражение оценивается как

$$C\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi_0(t,x)|dx = C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{0}^{t}\tau^{\varepsilon}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)}e^{-\tau^{1+\varepsilon}p^2/2}g(p)dp\right|^2 d\tau dx =$$
$$C\int\limits_{0}^{t}\tau^{\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau^{1+\varepsilon}p^2}|g(p)|^2 dp d\tau \le C\int\limits_{0}^{t}\tau^{\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|g(p)|^2 dp d\tau \le Ct^{1+\varepsilon}||g||^2.$$

Вторая половина (3.12) имеет вид

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{i(p,x)-i(q,x)}\times$$
$$\times\left(\frac{\alpha(x)}{4}(aq^2-ap^2)^2+\frac{i(1+\varepsilon)\tau^\varepsilon}{4}(aq^2-ap^2)(p^2+q^2)\right)\times$$
$$\times e^{-\tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2}e^{ir(a(x)q^2-a(x)p^2)/2}g(p)\overline{g(q)}drd\tau dpdqdx. \quad (3.17)$$

В силу симметричности a можем записать $(ap,p)-(aq,q)=(a(p-q),(p+q))=\sum_{k,m=1}^n a^{k,m}(p_k-q_k)(q_m+q_m)$. В развернутом виде получаем

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{i(p,x)-i(q,x)}\times$$
$$\times\Bigg(\alpha(x)\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^n a^{k_1,k_2}a^{k_3,k_4}(p_{k_1}-q_{k_1})(p_{k_2}+q_{k_2})(p_{k_3}-q_{k_3})(p_{k_4}+q_{k_4})+$$
$$+i(1+\varepsilon)\tau^\varepsilon(p^2+q^2)\sum_{k_1,k_2=1}^n a^{k_1,k_2}(p_{k_1}-q_{k_1})(p_{k_2}+q_{k_2})\Bigg)\times$$
$$\times e^{-\tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2}e^{ir(a(x)q^2-a(x)p^2)}g(p)\overline{g(q)}drd\tau dpdqdx. \quad (3.18)$$

Зададим функцию

$$\varphi_l(x,\tau,r)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i(p,x)}p^l e^{-\tau^{1+\varepsilon}p^2/2}e^{ira(x)p^2/2}g(p)dp,$$

где l - мультииндекс, $|l|\leq 6$. Тогда по лемме 2

$$|\varphi_l(x,\tau,r)|\leq C||x||^{-n}\tau^{-n\varepsilon/2}\leq C||x||^{-n}\tau^{-1/4}.$$

Формулу (3.18) можно записать как

$$\sum_{|l_1|+|l_2|=4}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau C_{l_1,l_2}(x,\tau)\varphi_{l_1}(x,\tau,r)\overline{\varphi_{l_2}(x,\tau,r)}drd\tau dx,$$

где $C_{l_1,l_2}(x,\tau)$ ограничены. Отсюда следует, что в (3.18) можно взять интеграл по dx_{k_1} по частям и внеинтегральные члены будут равны нулю. Получим

$$\frac{i}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{i(p,x)-i(q,x)}\Big[\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^n a^{k_1,k_2}a^{k_3,k_4}(p_{k_2}+q_{k_2})(p_{k_3}-q_{k_3})(p_{k_4}+q_{k_4})\times$$

$$\times\left(\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x^{k_1}}+ir\alpha(x)\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x^{k_1}}\sum_{k_5,k_6=1}^n a^{k_5,k_6}(p_{k_5}-q_{k_5})(p_{k_6}+q_{k_6})\right)-$$

$$-(1+\varepsilon)\tau^\varepsilon(p^2+q^2)\sum_{k_1,k_2=1}^n a^{k_1,k_2}(p_{k_2}+q_{k_2})r\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x^{k_1}}\sum_{k_3,k_4=1}^n a^{k_3,k_4}(p_{k_3}-q_{k_3})(p_{k_4}+q_{k_4})\Big]\times$$

$$\times e^{-\tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)}e^{ir(a(x)q^2-a(x)p^2)}g(p)\overline{g(q)}drd\tau dpdqdx.$$

Теперь возьмем по частям интеграл по dx_{k_3}. В результате, после двух интегрирований по частям выражение (3.18) преобразуется к виду

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{i(p,x)-i(q,x)}(P_2(x,\tau,p,q)+rP_4(x,\tau,p,q)+r^2P_6(x,\tau,p,q))$$

$$e^{-\tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2}e^{ir(a(x)q^2-a(x)p^2)/2}g(p)\overline{g(q)}drd\tau dpdqdx, \quad (3.19)$$

где $P_m(x,\tau,p,q)$ - однородный полином порядка m по p,q с ограниченными коэффициентами, зависящими от x,τ. Каждое из слагаемых в (3.19) имеет вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{i(p,x)-i(q,x)}C(x,\tau)r^m p^{l_1}q^{l_2}e^{-\tau^{1+\varepsilon}(p^2+q^2)/2}e^{ir(a(x)q^2-a(x)p^2)/2}\times$$

$$\times g(p)\overline{g(q)}drd\tau dpdqdx, \quad (3.20)$$

где m принимает значения $0,1,2$, а l_1,l_2 - мультииндексы такие, что $|l_1|+|l_2|=2+2m$. Зададим $\gamma=\frac{1-(2n+6)\varepsilon}{6(1+(2n+6)\varepsilon)}$. Тогда $0<\gamma<\frac{1}{6}$. Введем функции $g_1(\tau,p)=p^{l_1}e^{-(1-\gamma)\tau^{1+\varepsilon}p^2/2}g(p)$ и $g_2(\tau,p)=p^{l_2}e^{-(1-\gamma)\tau^{1+\varepsilon}p^2/2}g(p)$. Их обратные преобразования Фурье обозначим $f_1(\tau,x)$ и $f_2(\tau,x)$. С помощью леммы 1 выражение (3.20) можно представить в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau r^m C(x,\tau)\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)}e^{-\gamma\tau^{1+\varepsilon}p^2/2}e^{-ira(x)p^2/2}g_1(\tau,p)dp\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(q,x)}e^{-\gamma\tau^{1+\varepsilon}q^2/2}e^{ira(x)q^2/2}\overline{g_2(\tau,q)}dqdrd\tau dx =$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau r^m C(x,\tau)\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det(\gamma\tau^{1+\varepsilon}E+ira(x))}}e^{-(\gamma\tau^{1+\varepsilon}E+ira(x))^{-1}(x-y)^2/2}f_1(\tau,y)dy\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det(\gamma\tau^{1+\varepsilon}E-ira(x))}}e^{-(\gamma\tau^{1+\varepsilon}E-ira(x))^{-1}(x-z)^2/2}\overline{f_2(\tau,z)}dzdrd\tau dx.$$

С помощью (3.8) и (3.9) это выражение можно оценить как

$$C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau r^m\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\max(\tau^{1+\varepsilon},r)^{n/2}}\exp\left(-\frac{C\tau^{1+\varepsilon}||x-y||^2}{\max(\tau^{2+2\varepsilon},r^2)}\right)|f_1(\tau,y)|dy\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\max(\tau^{1+\varepsilon},r)^{n/2}}\exp\left(-\frac{C\tau^{1+\varepsilon}||x-z||^2}{\max(\tau^{2+2\varepsilon},r^2)}\right)|f_2(\tau,z)|dzdrd\tau dx =$$
$$C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \frac{r^m\max(\tau^{1+\varepsilon},r)^n}{\tau^{(1+\varepsilon)n}}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\tau^{n(1+\varepsilon)/2}}{\max(\tau^{2+2\varepsilon},r^2)^{n/2}}\exp\left(-\frac{C\tau^{1+\varepsilon}||x-y||^2}{\max(\tau^{2+2\varepsilon},r^2)}\right)|f_1(\tau,y)|dy\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\tau^{n(1+\varepsilon)/2}}{\max(\tau^{2+2\varepsilon},r^2)^{n/2}}\exp\left(-\frac{C\tau^{1+\varepsilon}||x-z||^2}{\max(\tau^{2+2\varepsilon},r^2)}\right)|f_2(\tau,z)|dydrd\tau dx$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и учитывая тот факт, что L_2 норма преобразования $\frac{1}{(2\pi d)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x-y||^2/2d}f(y)dy$ равна единице, получаем, что приведенное выше выражение оценивается как

$$C\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \frac{r^m \max(\tau^{1+\varepsilon},r)^n}{\tau^{(1+\varepsilon)n}}||f_1(\tau,\cdot)||_{L_2}||f_2(\tau,\cdot)||_{L_2}drd\tau \leq$$

$$C\int\limits_0^t \tau^{m+1-n\varepsilon}||f_1(\tau,\cdot)||_{L_2}||f_2(\tau,\cdot)||_{L_2}d\tau = C\int\limits_0^t \tau^{m+1-n\varepsilon}||g_1(\tau,\cdot)||_{L_2}||g_2(\tau,\cdot)||_{L_2}d\tau =$$

$$C\int\limits_0^t \tau^{m+1-n\varepsilon}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} p^{2l_1}e^{-(1-\gamma)\tau^{1+\varepsilon}p^2}|g(p)|^2dp\int\limits_{\mathbb{R}^n} q^{2l_2}e^{-(1-\gamma)\tau^{1+\varepsilon}q^2}|g(q)|^2dq\right)^{1/2}d\tau \leq$$

$$C\int\limits_0^t \tau^{m+1-n\varepsilon}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |p|^{2|l_1|}e^{-(1-\gamma)\tau^{1+\varepsilon}p^2}|g(p)|^2dp\int\limits_{\mathbb{R}^n} |q|^{2|l_2|}e^{-(1-\gamma)\tau^{1+\varepsilon}q^2}|g(q)|^2dq\right)^{1/2}d\tau. \tag{3.21}$$

Напомним, что $|l_1|+|l_2| = 2+2m$. С помощью неравенства $||p||^{2k}e^{-\gamma\tau^{1+\varepsilon}||p||^2/2} \leq C\tau^{-k(1+\varepsilon)}$ оценим (3.21) как

$$C\int\limits_0^t \tau^{-m\varepsilon+1-n\varepsilon}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} ||p||^{2k_1}e^{(2\gamma-1)\tau^{1+\varepsilon}||p||^2}|g(p)|^2dp\int\limits_{\mathbb{R}^n} ||q||^{2k_2}e^{(2\gamma-1)\tau^{1+\varepsilon}||q||^2/2}|g(q)|^2dq\right)^{1/2}d\tau \leq$$

$$C\int\limits_0^t \tau^{1-(n+2)\varepsilon}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} ||p||^{2k_1}e^{(2\gamma-1)\tau^{1+\varepsilon}||p||^2}|g(p)|^2dp\int\limits_{\mathbb{R}^n} ||q||^{2k_2}e^{(2\gamma-1)\tau^{1+\varepsilon}||q||^2/2}|g(q)|^2dq\right)^{1/2}d\tau. \tag{3.22}$$

Здесь $k_1+k_2 = 2$. Возможно два различных варианта выбора чисел k_1, k_2: оба равны единице или одно равно нулю, а другое двум.

Пусть $k_1 = 2,\ k_2 = 0$. Тогда (3.22) можно оценить с помощью неравенства $2ab \le \frac{a^2}{M} + Mb^2$, взяв $M = \tau^{(n+2)\varepsilon-1}$, как

$$C\int_0^t \tau^{2-2(n+2)\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} ||p||^4 e^{(2\gamma-1)\tau^{1+\varepsilon}p^2}|g(p)|^2 dp d\tau + C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} e^{(2\gamma-1)\tau^{1+\varepsilon}q^2}|g(q)|^2 dq d\tau.$$

Здесь второе слагаемое не превышает $Ct||g||^2$ т.к. $2\gamma - 1 < 0$. Первое слагаемое оценивается числом

$$C\int_0^t \tau^{2-2(n+2)\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} ||p||^4 e^{(2\gamma-1)\tau^{1+\varepsilon}p^2}|g(p)|^2 dp d\tau \le$$
$$C\int_0^t \tau^{1-(2n+5)\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} ||p||^2 e^{(3\gamma-1)\tau^{1+\varepsilon}p^2}|g(p)|^2 dp d\tau. \quad (3.23)$$

Мы хотим компенсировать (3.23) с помощью отрицательной величины (3.14). Для этого докажем, что для любого $\delta \in (0,1)$ найдутся $t_0 > 0$ и N такие, что для всех функций g и всех $t \in (0, t_0)$ выполнено условие

$$\int_0^t \tau^{1-(2n+5)\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} ||p||^2 e^{(3\gamma-1)\tau^{1+\varepsilon}p^2}|g(p)|^2 dp d\tau \le$$
$$\delta\int_0^t \tau^{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} ||p||^2 e^{-\tau^{1+\varepsilon}p^2}|g(p)|^2 dp d\tau + Nt||g||^2_{L_2}. \quad (3.24)$$

Обозначим область $G_\tau = \{p \in \mathbb{R}^n : ||p||^2 < \tau^{-1-\varepsilon}\left(-\frac{1-(2n+6)\varepsilon}{6\gamma}\ln\tau + \frac{1}{3\gamma}\ln\delta\right)\}$.

$$\int_0^t \tau^{1-(2n+5)\varepsilon}\int_{G_\tau} ||p||^2 e^{(3\gamma-1)\tau^{1+\varepsilon}p^2}|g(p)|^2 dp d\tau =$$
$$\int_0^t \tau^{\varepsilon}\int_{G_\tau} ||p||^2 e^{-\tau^{1+\varepsilon}p^2}|g(p)|^2\left(\tau^{1-(2n+6)\varepsilon}e^{3\gamma\tau^{1+\varepsilon}p^2}\right) dp d\tau \le$$
$$\delta\int_0^t \tau^{\varepsilon}\int_{G_\tau} ||p||^2 e^{-\tau^{1+\varepsilon}p^2}|g(p)|^2 \tau^{(1-(2n+6)\varepsilon)/2} dp d\tau \le \delta\int_0^t \tau^{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} ||p||^2 e^{-\tau^{1+\varepsilon}p^2}|g(p)|^2 dp d\tau.$$

Функция xe^{-dx} убывает при $x > 1/d$. Поэтому из-за множителя $\ln\tau$ в определении G_τ для достаточно малых τ выражение $\tau^{1-(2n+5)\varepsilon}||p||^2 e^{(3\gamma-1)\tau^{1+\varepsilon}p^2}$ в области $\mathbb{R}^n \backslash G_\tau$ будет принимать максимальное значение на границе. Это значение равно

$$\tau^{1-(2n+5)\varepsilon}\tau^{-1-\varepsilon}\left(-\frac{1-(2n+6)\varepsilon}{6\gamma}\ln\tau + \frac{1}{3\gamma}\ln\delta\right)e^{-\frac{(3\gamma-1)(1-(2n+6)\varepsilon)}{6\gamma}\ln\tau}e^{-\frac{(3\gamma-1)}{3\gamma}\ln\delta} \leq$$
$$-\delta^{\frac{1}{3\gamma}-1}\frac{1-(2n+6)\varepsilon}{6\gamma}\tau^{-(2n+6)\varepsilon-\frac{(3\gamma-1)(1-(2n+6)\varepsilon)}{6\gamma}}\ln\tau =$$
$$-\delta^{\frac{1}{3\gamma}-1}\frac{1-(2n+6)\varepsilon}{6\gamma}\tau^{-\frac{1+(2n+6)\varepsilon}{2}+\frac{1-(2n+6)\varepsilon}{6\gamma}}\ln\tau =$$
$$-\delta^{\frac{1}{3\gamma}-1}\frac{1+(2n+6)\varepsilon}{2}\tau^{\frac{1+(2n+6)\varepsilon}{2}}\ln\tau < C,$$

где константа не зависит от τ. Поэтому

$$\int\limits_0^t \tau^{1-(2n+5)\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^n/G_\tau}||p||^2 e^{(3\gamma-1)\tau^{1+\varepsilon}p^2}|g(p)|^2 dpd\tau \leq C\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n/G_\tau}|g(p)|^2 dpd\tau \leq Ct||g||^2.$$

Тем самым, (3.24) доказано.

Если в (3.22) выбрать $k_1 = k_2 = 1$, то получим

$$\int\limits_0^t \tau^{1-(n+2)\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^n}||p||^2 e^{(2\gamma-1)\tau^{1+\varepsilon}p^2/2}|g(p)|^2 dpd\tau \leq$$
$$\int\limits_0^t \tau^{1-(2n+5)\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^n}||p||^2 e^{(3\gamma-1)\tau^{1+\varepsilon}p^2}|g(p)|^2 dpd\tau$$

и нужная оценка следует из (3.24).

Собрав все вместе, мы видим, что

$$||F_1(t)f||^2_\alpha - ||f||^2_\alpha \leq Ct||f||^2 \leq Ct||f||^2_\alpha,$$

а значит

$$||F_1(t)f||^2_\alpha \leq (1+Ct)||f||^2_\alpha \leq e^{Ct}||f||^2_\alpha.$$

$\square$

Предложение 24. *Для функций вида* (3.10) *выполнено неравенство*

$$||F_1(t,s)f - f|| \le C(t-s)||f''||.$$

Доказательство. С помощью леммы 1 запишем

$$(F_1(t)f)(x) - f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)} \left(e^{-ita(x)p^2/2 - t^{1+\varepsilon}p^2/2} - 1\right) g(p)dp =$$

$$-\frac{1}{2}(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^t e^{i(p,x)} \left(ia(x)p^2 + (1+\varepsilon)\tau^\varepsilon p^2\right) e^{-i\tau a(x)p^2/2 - \tau^{1+\varepsilon}p^2/2} g(p)d\tau dp =$$

$$\int\limits_0^t \varphi(\tau,x)d\tau.$$

$$||F_1(t)f - f||^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\int\limits_0^t \varphi(\tau,x)d\tau\right|^2 dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_0^t |\varphi(\tau,x)|d\tau\right)^2 dx \le$$

$$t\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^t |\varphi(\tau,x)|^2 d\tau dx \le t^2 \sup_{\tau\in[0,t]} ||\varphi(\tau,\cdot)||^2.$$

Функцию $\varphi(\tau,x)$ можно записать в виде

$$\varphi(\tau,x) =$$

$$-\frac{1}{2}(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)} \left(ia(x)p^2 + (1+\varepsilon)\tau^\varepsilon p^2\right) e^{-i\tau a(x)p^2/2 - \tau^{1+\varepsilon}p^2/2} g(p)dp =$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n C_{k,m}(x,\tau) \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)} e^{-i\tau a(x)p^2/2 - \tau^{1+\varepsilon}p^2/2} p_k p_m g(p)dp =$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n C_{k,m}(x,\tau)(F_1(\tau)f''_{k,m})(x),$$

где коэффициенты $C_{k,m}(x,\tau)$ ограничены. Поэтому требуемое утверждение следует из (3.11). $\square$

Предложение 25. *Для каждой функции вида* (3.10) *выполнено*

$$\lim_{t\to s}\frac{F_1(t,s)f-f}{t-s}=\frac{i}{2}tr(a(s,\cdot)f''),$$

причем предел существует равномерно по s.

Доказательство. Пусть f имеет вид (3.10). Тогда с помощью леммы 1 запишем

$$(F_1(t)f)(x)-f(x)-\frac{it}{2}tr(a(x)f''(x))=$$

$$(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i(p,x)}\left(e^{-ita(x)p^2/2-t^{1+\varepsilon}p^2/2}-1+\frac{it}{2}a(x)p^2\right)g(p)dp=$$

$$-\frac{1}{2}(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t e^{i(p,x)}\left[\left(ia(x)p^2+(1+\varepsilon)\tau^{\varepsilon}p^2\right)e^{-i\tau a(x)p^2/2-\tau^{1+\varepsilon}p^2/2}-ia(x)p^2\right]\times$$

$$\times\, g(p)d\tau dp=$$

$$\frac{i}{4}(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t\int\limits_0^{\tau}e^{i(p,x)}a(x)p^2\left(ia(x)p^2+(1+\varepsilon)r^{\varepsilon}p^2\right)e^{-ira(x)p^2/2-r^{1+\varepsilon}p^2/2}\times$$

$$\times\, g(p)drd\tau dp-$$

$$-\frac{1}{2}(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t e^{i(p,x)}(1+\varepsilon)\tau^{\varepsilon}p^2e^{-i\tau a(x)p^2/2-\tau^{1+\varepsilon}p^2/2}g(p)d\tau dp=$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^{\tau}\psi(t,r,x)drd\tau+\int\limits_0^t\tau^{\varepsilon}\varphi(x,\tau).$$

Аналогично предыдущему утверждению $||\psi(t,r,\cdot)||\le C||f''''||$ и $||\varphi(t,\cdot)||\le C||f''||$. Поэтому

$$\left|\left|F_1(t)f-f-\frac{it}{2}tr(a(x)f''(x))\right|\right|\le Ct^{1+\varepsilon}||f''||+Ct^2||f''''||.$$

$\square$

В качестве $F_2(t,s)$ и $F_3(t,s)$ рассмотрим такие же, как и в предыдущем разделе семейства

$$(F_2(t,s)f)(x) = f(x + (t-s)b(s,x)),$$
$$(F_3(t,s)f)(x) = e^{(t-s)c(s,x)}f(x).$$

Предложение 26. *Найдется такая константа C, что*

$$||F_2(t,s)||_{\alpha(s)} \leq e^{C(t-s)}. \tag{3.25}$$

Доказательство. Из (3.2) следует, что найдется такое $\delta > 0$, что при условии $|t-s| < \delta$ преобразование $y = x + (t-s)b(s,x)$ обратимо.

$$||F_2(t,s)f||^2_{\alpha(s)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\alpha(s,x)}|f(x+(t-s)b(s,x))|^2 dx =$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\alpha(s,x(y))}|f(y)|^2 \det\Big(I + (t-s)\cdot d(b(s,x))/dx|_{x=x(y)}\Big)^{-1} dy =$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+(t-s)\cdot O(1))}{\alpha(s,x)}|f(y)|^2(1+(t-s)\cdot O(1))dy \leq$$
$$||f||^2_{\alpha(s)}(1+C(t-s)) \leq ||f||^2_{\alpha(s)}e^{C(t-s)}.$$

□

Предложения 8 и 9 также будет верны, если в них заменить функции из $C^3_{00}(\mathbb{R}^n)$ на функции вида 3.10 и использовать норму $||\cdot||_{\alpha(s)}$. Все то же самое верно и для $F_3(t,s)$.

3.4 Формула Фейнмана

Следствием теоремы 3 является

Предложение 27. *Пусть $H(t)$ задан в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ с областью определения $W^2_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда найдутся такие константы μ и $M > 0$, что* *если $\lambda \in \mathbb{R}$, то $i\mu + \lambda \in \rho(H(t))$, и для всех $u \in W_2^2(\mathbb{R}^n)$ выполнено*

$$||u||_{W_2^2} \leq M||(\lambda + i\mu)u - H(t)u||.$$

В дальнейшем для простоты будем считать $\mu = 0$.

Предложение 28. *Для каждого значения $t_0 \in [0, T]$ оператор $H(t_0)$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $T_{t_0}(t)$, причем существует такая константа ω, что*

$$||T_{t_0}(t)||_{\alpha(t_0)} \leq e^{\omega t}.$$

Доказательство. Из доказанных свойств операторов $F_k(t,s)$ и предложений 3 и 27 следует, что для $H(t_0)$ и семейства $F_{t_0}(t) = F_1(t_0 + t, t_0)F_2(t_0 + t, t_0)F_3(t_0+t, t_0)$ выполнены условия теоремы Чернова, откуда следует то, что $T_{t_0}(t)$ существует и задается формулой $T_{t_0}(t)f = \lim_{n\to\infty} F(t_0+t/n, t_0)^n f$. Тогда $||T_{t_0}(t)f||_{\alpha(t_0)} \leq \lim_{n\to\infty} ||F(t_0 + t/n, t_0)^n f||_{\alpha(t_0)} \leq e^{\omega t}||f||_{\alpha(t_0)}$. □

Определение 4. *Пусть для каждого $t \in [0, T]$ линейный оператор $A(t)$ на банаховом пространстве X является генератором сильно непрерывной полугруппы $S_t(s)$. Семейство $A(t)_{t\in[0,T]}$ называется стабильным если найдутся такие константы M и ω, что выполнены условия*

$$(\omega, \infty) \subset \rho(A(t))$$

и для любых конечных последовательностей $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k \leq T$ и $s_j \geq 0$

$$\left|\left|\prod_{j=1}^{k} S_{t_j}(s_j)\right|\right| \leq M \exp\left(\omega \sum_{j=1}^{k} s_j\right).$$

Предложение 29. *Семейство операторов $H(t)$ стабильно.*

Доказательство. Условие на спектр следует из предложения 27. Т.к.

$$\left|\frac{1}{\alpha(t_2, x)} - \frac{1}{\alpha(t_1, x)}\right| \leq C|t_1 - t_2| \leq \gamma\frac{1}{\alpha(t_1, x)}|t_1 - t_2|,$$

то

$$||f||_{\alpha(t_2)} \leq (1+\gamma|t_2-t_1|)||f||_{\alpha(t_1)} \leq e^{\gamma|t_2-t_1|}||f||_{\alpha(t_1)}.$$

$$\left|\left|\prod_{j=1}^{k} S_{t_j}(s_j)\right|\right| \leq C \left|\left|\prod_{j=1}^{k} S_{t_j}(s_j)\right|\right|_{\alpha(t_1)} \leq Ce^{\omega s_1} \left|\left|\prod_{j=2}^{k} S_{t_j}(s_j)\right|\right|_{\alpha(t_1)} \leq$$

$$Ce^{\omega s_1} e^{\gamma(t_2-t_1)} \left|\left|\prod_{j=2}^{k} S_{t_j}(s_j)\right|\right|_{\alpha(t_2)} \leq ... \leq Ce^{\omega(s_1+...+s_k)} e^{\gamma((t_2-t_1)+...+(t_k-t_{k-1}))} \leq$$

$$Ce^{\gamma T} e^{\omega(s_1+...+s_k)}.$$

□

Теорема 9. *[3, глава 5, параграф 4, теорема 4.8] Пусть в банаховом пространстве X задано стабильное семейство генераторов сильно непрерывных полугрупп $A(t)_{t\in[0,T]}$ с константами стабильности M, ω. Пусть их область определения $Dom(A(t)) = D$ не зависит от t. Предположим, что для каждого $x \in D$ функция $A(t)x$ непрерывно дифференцируема. Тогда существует эволюционная система $U(t,s), 0 \leq s \leq t \leq T$ удовлетворяющая следующим условиям:*

1. *Ограниченность*

$$||U(t,s)|| \leq Me^{\omega(t-s)}.$$

2. *Инвариантность области определения*

$$U(t,s)D \subset D.$$

3. *Для всех $x \in D$ функция $U(t,s)x$ непрерывна в D в норме графика $A(0)$.*

4. *Для всех $x \in D$*

$$\frac{\partial^+}{\partial t} U(t,s)x\Big|_{t=s} = A(s)x,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} U(t,s)x = -U(t,s)A(s)x.$$

Предложение 30. *Пусть выполнены условия теоремы 9. Тогда для каждого* $x \in D$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{U(t+\Delta t, t)x - x}{\Delta t} = A(t)x$$

равномерно по t.

Доказательство.

$$\frac{U(t+\Delta t, t)x - x}{\Delta t} - A(t)x = -\frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial s} U(t+\Delta t, s)x ds - A(t)x =$$

$$\frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} (U(t+\Delta t, s)A(s)x - A(t)x) ds =$$

$$\frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} U(t+\Delta t, s)(A(s) - A(t))x ds + \frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} (U(t+\Delta t, s) - I)A(t)x ds.$$

Первое слагаемое оценим как

$$\left|\left| \frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} U(t+\Delta t, s)(A(s) - A(t))x ds \right|\right| \leq$$

$$\frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} ||U(t+\Delta t, s)|| \cdot ||(A(t) - A(s))x|| ds \leq C\Delta t \sup_{\tau \in [0,T]} \left|\left| \frac{d(A(\tau)x)}{d\tau} \right|\right|.$$

Для фиксированного $y \in X$ выражение $U(t,s)y$ непрерывно на $0 \leq t \leq s \leq T$, а значит и равномерно непрерывно. Поэтому $(U(t,s) - I)y$ стремится к нулю если $t - s$ стремится к нулю. Отображение $t \mapsto A(t)x$ непрерывно на отрезке $[0,T]$, а потому его образ компактен. Отсюда следует, что $(U(t + \Delta t, s) - I)A(t)x$ стремится к нулю при стремлении Δt к нулю равномерно по t и $s \in [t, t+\Delta t]$. $\square$

Теорема 10 (Формула Фейнмана). *Пусть* $F(t,s) = F_1(t,s)F_2(t,s)F_3(t,s)$. *Семейство операторов* (3.1) *порождает в пространстве* $L_2(\mathbb{R}^n)$ *семейство эволюционных операторов* $U(t,s)$. *Для каждой функции* $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ *выполнено*

$$F(t_n, t_{n-1})...F(t_1, t_0)f \to U(b,a)f$$

при $n \to \infty$, $t_n = b$, $t_0 = a$, $\max|t_{i+1} - t_i| \to 0$ *равномерно на множестве* $0 \le a \le b \le T$.

Доказательство. Существование $U(t,s)$ следует из теоремы 9 и предложения 29. Для доказательства сходимости осталось проверить выполнение условий теоремы 2.

Пусть $0 \le t_1 < ... < t_k \le T$. Тогда

$$\left\|\left|\prod_{j=1}^{k-1} F(t_{j+1}, t_j)\right|\right\| \le C \left\|\left|\prod_{j=1}^{k-1} F(t_{j+1}, t_j)\right|\right\|_{\alpha(t_1)} \le Ce^{\omega(t_2-t_1)} \left\|\left|\prod_{j=2}^{k-1} F(t_{j+1}, t_j)\right|\right\|_{\alpha(t_1)} \le$$

$$Ce^{\omega(t_2-t_1)}e^{\gamma(t_2-t_1)} \left\|\left|\prod_{j=2}^{k-1} F(t_{j+1}, t_j)\right|\right\|_{\alpha(t_2)} \le ...$$

$$\le Ce^{\omega((t_2-t_1)+...+(t_k-t_{k-1}))}e^{\gamma((t_2-t_1)+...+(t_{k-1}-t_{k-2}))} \le Ce^{\omega T}e^{\gamma T}.$$

Выполнение второго условия теоремы 2 следует из предложения 2.

□

Литература

[1] В. П. Маслов, *Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана*, М.: Наука, 1976.

[2] A. Lunardi, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, Birkhauser, 1995.

[3] A. Pazy, *Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations*, Springer, 1983.

[4] O. G. Smolyanov, H. von Weizsacker, O. Wittich, *Chernoff' theorem and discrete time approximations of brownian motion on manifolds*, Potential Analysis, 2007, **26**, № 1, pp. 1-29.

[5] М. Гадэлья, О. Г. Смолянов, *Формулы Фейнмана для частиц с массой, зависящей от координаты*, ДАН, 2008, **418**, № 6, с. 727-730.

[6] K-J. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer, 2000.

[7] О. Г. Смолянов, *Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы и квантование Шредингера*, ДАН, 1982, **263**, № 3, с. 558-562.

[8] S. Albeverio, A. Khrennikov, O. G. Smolyanov, *The Probabilistic Feynman-Kac Formula for infinite-dimensional Schrodinger Equation with Exponential and Singular Potentials*, Potential Analysis, 1999, **11**, c. 157-181.

[9] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, *Бесконечномерные уравнения Шредингера с полиномиальными потенциалами и интегралы Фейнмана по траекториям*, ДАН, 2006, **408**, № 1, с. 28-33.

[10] О. Г. Смолянов, А. Трумен, *Гамильтоновы формулы Фейнмана для уравнения Шредингера в ограниченных областях*, ДАН, 2004, **399**, № 3, с. 310-314.

[11] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, *Континуальные интегралы*, М.: Издательство МГУ, 1990.

[12] R. P. Feynman, *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Reviews of Modern Physics, 1948, **20**, № 2, pp. 367-387.

[13] С. Вайнберг, *Квантовая теория поля* (в 2х томах), М.: ФМЛ, 2003.

[14] М. Е. Пескин, Д. В. Шредер, *Введение в квантовую теорию поля*, Ижевск: РХД, 2001.

[15] O. G. Smolyanov, A. G. Tokarev, A. Truman, *Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula*, J. of Math. Phys., 2002, **43**, № 10, c. 5161-5171.

[16] R. P. Chernoff, *Note on product formulas for operator semigroups*, J. Funct. Anal., 1968. **2**, № 2, c. 238-242.

[17] E. Nelson, *Feynman Integrals and the Schredinger Equation*, J. Math. Phys., 1964, **5**, № 3, c. 332-343.

[18] О. О. Обрезков, О. Г. Смолянов, А. Трумен, *Обобщенная теорема Чернова и рандомизированная формула Фейнмана*, ДАН, 2005, **400**, № 5, с. 596-602.

[19] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 2001.

[20] O. O. Obrezkov, *The Proof of the Feynman-Kac Formula for Heat Equation on a Compact Riemannian Manifold*, Infnite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topic, 2003, *6*, № 2, c. 311-320.

[21] O. G. Smolyanov, *Feynman formula for evolution equations*, Trends in stochastic analysis, 2009, **453** pp. 284-302.

[22] O. G. Smolyanov, *Schrodinger type semigroups via Feynman formulae and all that*, Quantum bioinformation, 2013, **5** pp. 301-314.

[23] О. Г. Смолянов, Н. Н. Шамаров, *Формулы Фейнмана и интегралы по траекториям для эволюционных уравнений с оператором Владимирова*, Избранные вопросы математической физики и p-адического анализа, Сборник статей, Тр. МИАН, 2009, **265** с.229-240.

[24] О. Г. Смолянов, Д. С. Толстыга, *Формулы Фейнмана для стохастической и квантовой динамики частиц в многомерных областях*, ДАН, 2013, **452**, № 3, с. 256-260.

Работы автора по теме диссертации

[25] A. S. Plyashechnik, *Feynman formula for Schrödinger-Type equations with time- and space-dependent coefficients*, Russian Journal of Mathematical Physics, 2012, **19**, № 3, pp. 340-359.

[26] A. S. Plyashechnik, *Feynman formulas for second-order parabolic equations with variable coefficients*, Russian Journal of Mathematical Physics, 2013, **20**, № 3, pp. 377-379.

[27] А. С. Пляшечник, *Формулы Фейнмана для уравнений второго порядка с переменными коэффициентами*, XIX Международная молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", Тезисы докладов, МАКС Пресс, Москва, 2012.