ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

На правах рукописи
УДК 512.643

**Ефимов Михаил Александрович**

# Монотонные отображения матриц и операторов

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова».

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | **Гутерман Александр Эмилевич**, доктор физико-математических наук, профессор. |
| Официальные оппоненты: | **Кожухов Игорь Борисович**, доктор физико-математических наук, профессор (ФГАОУ ВПО Национальный исследовательский университет «МИЭТ»); **Богданов Илья Игоревич**, кандидат физико-математических наук, доцент (ФГАОУ ВПО Московский физико-технический институт (государственный университет)). |
| Ведущая организация: | **ФГБОУ ВПО Московский педагогический государственный университет**. |

Защита диссертации состоится 11 апреля 2014 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В.Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д.27, сектор А.

Автореферат разослан 7 марта 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84, созданного на базе
ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В.Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор **Иванов Александр Олегович**

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Диссертация посвящена изучению отображений матриц и операторов, монотонных относительно группового частичного порядка.

Исследование отображений, сохраняющих матричные инварианты, началось с работы Г. Фробениуса[1], в которой получена характеризация линейных биективных отображений пространства матриц, сохраняющих определитель. Эта характеризация помогла Г. Фробениусу решить задачу Р. Дедекинда[2] о разложении группового определителя на множители.

Доказательство характеризационной теоремы у Фробениуса было комбинаторным и достаточно сложным. В 1949 году Ж. Дьёдонне[3] предложил новый подход к изучению линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, базирующийся на основной теореме проективной геометрии. Это был один из первых общих методов решения подобных задач. Дьёдонне получил характеризацию биективных линейных отображений, сохраняющих вырожденные матрицы над произвольным полем.

Эти результаты заложили основу интенсивного и плодотворного изучения линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, продолжающегося по сей день. Подробную информацию об отображениях, сохраняющих матричные инварианты, можно найти в обзорных работах[4] [5] [6].

Частным случаем отображений, сохраняющих матричные инварианты, являются монотонные матричные отображения, то есть отображения, сохраняющие некоторое отношение частичного порядка.

Изучение отображений, монотонных относительно данного частичного порядка, часто оказывается полезной при изучении свойств этого порядка[7]. При этом наиболее интересен вопрос полной характеризации монотонных отображений при некоторых дополнительных условиях на отображение (линейность, аддитивность, биективность, непрерывность и другие). Примеры подобной характеризации монотонных отображений могут быть найдены в ра-

[1] *Фробениус Г.* Теория характеров и представлений групп. Харьков: Гос. науч. техн. изд. Украины, 1937. — С. 106—127.

[2] *Dedekind R.* Gesammelte Mathematische Werke. Vol. II. New York: Chelsea, 1969.

[3] *Dieudonne J.* Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables // Arch. Math. — 1949. — Vol. 1. — P. 282—287.

[4] *Гутерман А. Э., Михалёв А. В.* Общая алгебра и линейные отображения, сохраняющие матричные инварианты // Фундамент. и прикл. матем. — 2003. — **9**, №1, С. 83—101.

[5] *Pierce S. and others.* A Survey of Linear Preserver Problems // Linear and Multilinear Algebra. — 1992. — Vol. 33. — P. 1—119.

[6] *Li C.-K., Tsing N. K.* Linear preserver problems: A brief introduction and some special techniques // Linear Algebra Appl. — 1992. — Vol. 162—164. — P. 217—235.

[7] *Baksalary J. K., Pukelsheim F., Styan G. P. H.* Some properties of matrix partial orderings // Linear Algebra Appl. — 1989. — Vol. 119. — P. 57—85.

ботах Г. Долинара и Ж. Маровта[8], А.Э. Гутермана[9 10], П. Легиша[11], П.Г. Овчинникова[12], П. Шемрла[13 14] и многих других авторов.

Исследуемые в диссертации частичные порядки были введены посредством групповой обратной матрицы, которая является одним из возможных обобщений понятия обратной матрицы на вырожденные матрицы.

Первые результаты в области обобщенных обратных матриц принадлежат Э.Г. Муру[15], который ввел обобщенные обратные для конечных квадратных и прямоугольных матриц. Впоследствии Р. Пенроузом[16] с применением другой техники были отдельно изучены псевдообратные Мура для квадратных матриц, и доказана единственность обратной. Полученные обобщенные обратные матрицы стали называть обратными Мура-Пенроуза.

Известно много обобщений[17 18] обратной матрицы: левые и правые обратные, обратные Дрейзина, обратные Ботта-Даффина, групповые обратные и другие.

Отметим, что на пространстве матриц $M_n(\mathbb{F})$ можно ввести много различных упорядочиваний. Например, для упорядоченных полей может использоваться элементарный порядок ($A \leqslant B$, если $a_{ij} \leqslant b_{ij}$), а для поля комплексных чисел — порядок Левнера ($A \leqslant B$ если $B - A$ — эрмитовая неотрицательно определенная матрица).

Наряду с указанными порядками в последние годы вводятся и активно исследуются другие матричные отношения частичного порядка: порядок Харт-

---

[8] *Dolinar G., Marovt J.* Star partial order on $B(H)$ // Linear Algebra Appl. **434** (2011), 319—326.

[9] *Guterman A.* Linear Preservers for Drazin star partial order // Comm. in Algebra. — 2001. — Vol. 29, no. 9. — P. 3905—3917.

[10] *Гутерман А. Э.* Монотонные аддитивные отображения матриц // Математические заметки. — 2007. — **81**, №5, 681—692.

[11] *Legiša P.* Automorphisms of $M_n$, partially ordered by rank subtractivity ordering // Linear Algebra Appl. — 2004. — Vol. 389. — P. 147—158.

[12] *Ovchinnikov P. G.* Automorphisms of the poset of skew projections // J. of Functional Analysis. — 1993. — Vol. 115. — P. 184—189.

[13] *Šemrl P.* Order-preserving maps on the poset of idempotent matrices // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2003. — Vol. 69. — P. 481—490.

[14] *Šemrl P.* Automorphisms of B(H) with respect to minus partial order // J. Math. Anal. Appl. **369** (2010), 205—213.

[15] *Moore E. H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix // Bull. Amer. Math. Soc. — 1920. — Vol. 26. — P. 394—395.

[16] *Penrose R.* A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1966. — Vol. 62. — P. 673—677.

[17] *Ben-Israel A., Greville T.* Generalized Inverses: Theory and Applications. New York: Hohn Wiley and Sons. — 1974.

[18] *Piziak R., Odell P. L.* Matrix Theory: From Generalized Inverses to Jordan Form. Chapman & Hall/CRC, 2007. P. 548.

вига[19], также известный как минус-порядок, порядок Дрейзина[20], бриллиантовый порядок[21], левый и правый *-порядки[22] и другие.

## Цель работы

Исследование свойств и характеризация монотонных отображений, заданных групповой обратной матрицей. Перед автором стояли следующие задачи:

- Получить характеризацию аддитивных отображений матриц над произвольным полем, мотонных относительно группового порядка.
- Изучить свойства нелинейных монотонных отображений матриц и решить задачу характеризации этих отображений на специальных множествах матриц.
- Ввести операторный аналог частичного порядка, заданного групповой обратной матрицей, и доказать характеризацию аддитивных монотонных отображений операторов на гильбертовом пространстве.

## Научная новизна

Представленные в диссертации результаты являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации следующие:

- Доказана характеризация аддитивных отображений, монотонных относительно порядков, заданных групповой обратной матрицей.
- Введены и построены спектральные ортогональные разложения произвольных матриц, изучены их свойства и взаимосвязь с рассматриваемыми частичными порядками.
- Получена характеризация инъективных отображений диагонализуемых матриц и непрерывных инъективных отображений комплексных матриц, монотонных относительно порядков, заданных групповой обратной матрицей.
- Решена задача о характеризации аддитивных биективных строго монотонных отображений линейных ограниченных операторов на гильбертовом пространстве.

---

[19] *Hartwig R. E.* How to partially order regular elements // Math. Japonica. — 1980. — Vol. 25, no. 1. — P. 1—13.

[20] *Drazin M. P.* Natural structures on semigroups with involution // Bull. Amer. Soc. — 1978. — V. 84. №1. — P. 139—141.

[21] *Baksalary J. K., Hauke J.* A further algebraic version of Cochran's theorem and matrix partial orderings // Linear Algebra Appl. — 1990. — Vol. 127. — P. 157—169.

[22] *Baksalary J. K., Mitra S. K.* Left-star and right-star partial orderings// Linear Algebra Appl. — 1991. — Vol. 149. — P. 73—89.

## Основные методы исследования

В диссертации используются методы теории матриц, теории операторов, комплексного анализа, а также изобретенный автором метод спектральных ортогональных матричных разложений.

## Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны специалистам по абстрактной и линейной алгебре, теории матриц, теории колец, математической статистике, вычислительной математике, квантовой механике.

## Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова:

(1) научно-исследовательский семинар по алгебре под руководством проф. В.Н.Латышева (2012-2013, неоднократно);

(2) семинар «Кольца и модули» под руководством проф. В.Н.Латышева, проф. А.В.Михалева (2010-2013, неоднократно);

(3) семинар «Теория матриц и ее приложения» под руководством А.Э.Гутермана (2010-2013, неоднократно);

а также на всероссийских и международных конференциях:

(1) XVII международная научная конференция «Ломоносов-2010», Москва, 12-15 апреля 2010 г.;

(2) XVIII международная научная конференция «Ломоносов-2011», Москва, 11-15 апреля 2011 г.;

(3) XIX международная научная конференция «Ломоносов-2012», Москва, 9-13 апреля 2012 г.;

(4) Международный алгебраический симпозиум, посвящённый 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А.В.Михалёва, Москва, 15-18 ноября 2010 г;

(5) 3-я международная конференция «Матричные методы в математике и их приложения», ММMA-2011, Москва, 22-25 июня 2011 г.;

(6) международная конференция «Полугруппы и приложения», Уппсала, Швеция, 30 августа - 1 сентября 2012 г.

## Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в девяти работах, список которых приводится в конце автореферата [1-9].

## Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из четырёх глав, первая из которых вводная, и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 144 страницы. Список литературы содержит 69 наименований.

# Краткое содержание работы

## Глава 1

В первой главе изложена история вопроса, показана актуальность темы, сформулированы основные определения и полученные результаты. Также описаны краткое содержание и структура диссертации.

Пусть $M_n(\mathbb{F})$ обозначает пространство квадратных матриц порядка $n$ с коэффициентами из произвольного поля $\mathbb{F}$, $GL_n(\mathbb{F})$ — множество невырожденных матриц, $\leqslant$ — некоторое отношение частичного порядка на $M_n(\mathbb{F})$. Кроме того, обозначим $A < B$ при $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, если $A \leqslant B$, $A \neq B$.

**Определение.** Пусть $M \subseteq M_n(\mathbb{F})$. Отображение $T\colon M \to M$ *монотонно* относительно $\leqslant$-порядка, если для любых матриц $A, B \in M$ из $A \leqslant B$ следует $T(A) \leqslant T(B)$.

**Определение.** Пусть $M \subseteq M_n(\mathbb{F})$. Отображение $T\colon M \to M$ *строго монотонно* относительно $<$-порядка, если для любых матриц $A, B \in M$ условия $A < B$ и $T(A) < T(B)$ эквивалентны.

**Определение.** *Групповая обратная матрица*[23] $A^\sharp$ к матрице $A$ — это матрица, удовлетворяющая следующим соотношениям:
а)$AA^\sharp A = A$; б)$A^\sharp AA^\sharp = A^\sharp$; в)$AA^\sharp = A^\sharp A$.

Оказывается, существование групповой обратной матрицы для данной матрицы $A$ тесно связано со значением индекса матрицы $A$.

**Определение.** Матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ имеет *индекс* $l$ ($\operatorname{Ind} A = l$), если $\operatorname{rk} A^l = \operatorname{rk} A^{l+1}$ и $l$ есть наименьшее натуральное число с таким свойством.

[23] *Mitra S. K.* A new class of g-inverse of square matrices // Sankhyā. Ser. A. — 1963. — Vol. 30. — P. 323—330.

Более точно, групповая обратная матрица $A^\sharp$ к данной матрице $A \in M_n(\mathbb{F})$ существует тогда и только тогда, когда $A$ имеет индекс 1, то есть $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^2$. Кроме того, если $A^\sharp$ существует, то она единственна[24]. Подробное описание свойств групповой обратной матрицы можно найти в монографиях[17 25].

В диссертационной работе изучаются частичные порядки на множестве матриц, заданные при помощи групповой обратной матрицы.

**Определение** (Хартвиг[19])**.** Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $A \overset{-}{\leqslant} B$ для произвольных матриц $A$ и $B$, если и только если $\operatorname{rk}(B - A) = \operatorname{rk} B - \operatorname{rk} A$. Полученное отношение называется *минус-порядком.*

**Определение** (Митра[24])**.** Пусть $A, C \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$, если и только если $A = C$ или $\operatorname{Ind} A = 1$, $AA^\sharp = CA^\sharp = A^\sharp C$.

Заданное отношение рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то есть является частичным порядком. Однако, этот порядок достаточно беден, так как все матрицы, индекс которых больше 1, максимальны. Для устранения этого недостатка Хартвигом и Митрой было введено отношение $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-порядка, расширяющее $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядок.

**Определение.** *Нильпотентным разложением* матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$ называется такое представление $A = C_A + N_A$, что $C_A N_A = N_A C_A = 0$, $\operatorname{Ind} C_A = 1$, $N_A$ нильпотентна.

**Определение** (Хартвиг, Митра[26])**.** Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $A \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} B$, если и только если $C_A \overset{\sharp}{\leqslant} C_B$ и $N_A \overset{-}{\leqslant} N_B$.

Определения различных матричных порядков и их свойства детально описаны в работе Митры, Бхимасанкарама и Малика[27].

**Определение.** Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Матрицы $A$ и $B$ *ортогональны* ($A \perp B$), если $AB = BA = 0$.

Рассмотрим следующее свойство отображений, тесно взаимосвязанное с

---

[24] *Mitra S. K.* On group inverses and the sharp order // Linear Algebra Appl. — 1987. — Vol. 92. — P. 17—37.

[25] *Rao C. R., Mitra S. K.* Generalized Inverse of Matrices and its Applications. New York: Wiley. 1971.

[26] *Hartwig R. E., Mitra S. K.* Partial orders based on outer inverses // Linear Algebra Appl. — 1982. — Vol. 176. — P. 3—20.

[27] *Mitra S. K., Bhimasankaram P., Malik S. B.* Matrix partial orders, Shorted Operators and Applications. Series in Algebra, V. 10, World Scientific, 2009.

монотонностью относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка:

**Определение.** Пусть $M \subseteq M_n(\mathbb{F})$. Отображение $T\colon M \to M$ назовем *0-аддитивным*, если для любых матриц $A, B \in M$ со свойствами $A \perp B$, $\operatorname{Ind} A = 1$, имеем:

а) $T(A) \perp T(B)$; б) $T(A+B) = T(A) + T(B)$.

## Глава 2

Вторая глава посвящена изучению линейных и аддитивных отображений матриц, монотонных относительно частичных порядков, заданных групповой обратной матрицей.

В первом параграфе доказана полная характеризация линейных отображений, монотонных относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- и $\overset{\text{cn}}{\leqslant}$-порядков. Ранее были охарактеризованы линейные биективные отображения над произвольным полем, монотонные относительно $\overset{\sharp}{<}$- и $\overset{\text{cn}}{<}$-порядков:

**Теорема** (Богданов, Гутерман[28]). *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $n > 3$, $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — биективное линейное отображение, монотонное относительно $\overset{\sharp}{<}$- ($\overset{cn}{<}$-) порядка. Тогда существуют $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ и $P \in GL_n(\mathbb{F})$ такие, что $T(X) = \alpha P^{-1}XP$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$ или $T(X) = \alpha P^{-1}X^tP$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$.*

Автором был предложен метод, позволивший снять ограничение биективности. При этом ограничений на размер матриц нет, а ограничение на основное поле — его характеристика должны быть отличной от 2. Сформулируем полученный характеризационный результат:

**Теорема 2.1.10.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, $n \geqslant 1$ — целое число, а линейное отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- (или $\overset{cn}{\leqslant}$-) порядка. Тогда $T$ имеет один из двух видов, указанных ниже ($\alpha \in \mathbb{F}$, $P \in GL_n(\mathbb{F})$):*

*1) $T(X) = \alpha P^{-1}XP$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$;*

*2) $T(X) = \alpha P^{-1}X^tP$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$.*

Здесь и далее для удобства чтения используется нумерация теорем, определений и лемм, совпадающая с нумерацией в диссертации.

[28] *Богданов И. И., Гутерман А. Э.* Монотонные отображения матриц, заданные групповой обратной, и одновременная диагонализуемость // Математический сборник. 2007. Т. 198. №1. С. 3—20.

Следствием доказанной характеризации является автоматическая биективность ненулевого линейного монотонного отображения. Кроме того, оказывается, что для линейных отображений монотонность относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка эквивалентна монотонности относительно $\overset{\text{cn}}{\leqslant}$-порядка.

Во втором параграфе с помощью развитой техники исследуются более общие аддитивные отображения. Доказана следующая теорема:

**Теорема 2.2.8.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — целое число, аддитивное отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- ($\overset{cn}{\leqslant}$-) порядка. Тогда $T$ имеет одну из следующих форм:*

*1) $T(X) = \alpha P^{-1} X^{\varphi} P$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$;*

*2) $T(X) = \alpha P^{-1} (X^{\varphi})^t P$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$;*

*(здесь $\alpha \in \mathbb{F}$, $P \in GL_n(\mathbb{F})$, $\varphi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — инъективный эндоморфизм поля $\mathbb{F}$).*

В теореме 2.2.8 под применением эндоморфизма поля к матрице понимается его поэлементое применение.

Далее в параграфе показано, что эндоморфизмы кольца матриц монотонны относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка. В качестве следствия теоремы 2.2.8 получено новое доказательство характеризации всех эндоморфизмов кольца $M_n(\mathbb{F})$. Подобная характеризация для алгебр известна как теорема Нетер-Сколема[29].

**Теорема 2.2.11.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — целое число, $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — эндоморфизм кольца матриц $M_n(\mathbb{F})$. Тогда существуют такая матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$ и эндоморфизм $\varphi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ поля $\mathbb{F}$, что $T(X) = P^{-1} X^{\varphi} P$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{F})$.*

В заключительной части главы построен пример 2.2.12 линейного монотонного отображения матриц $2 \times 2$ над полем из двух элементов, не представимого в том виде, который получен в теореме 2.2.8. Также приведены примеры неаддитивных монотонных отображений (примеры 2.2.13, 2.2.14).

## Глава 3

В третьей главе изучаются нелинейные монотонные отображения.

В первом параграфе вводятся специальные разложения матриц, тесно связанные с жордановой нормальной формой, названные спектральными ортогональными разложениями. Через $K_A(\lambda)$ обозначим общее количество жордановых блоков матрицы $A$, отвечающих собственному числу $\lambda$, $\overline{\mathbb{F}}$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}$. Заметим, что $\operatorname{Spec}(A) = \{\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \mid K_A(\lambda) > 0\}$.

[29] *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. 1986. М: Мир. 543 с.

**Определение 3.1.15.** Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$, $A = C_A + N_A$ — нильпотентное разложение матрицы $A$. Тогда $S^1_A(0) = N_A$, и для всех $\lambda \neq 0$ матрица $S^1_A(\lambda) = X_\lambda$ такова, что $\operatorname{Ind} X_\lambda = 1$, $X_\lambda \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $K_{X_\lambda}(\lambda) = K_A(\lambda)$ и $K_{X_\lambda}(\mu) = 0$ для всех $\mu \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0, \lambda\}$.

$$S^2_A(\lambda) = S^1_{A+E}(\lambda + 1) - S^1_A(\lambda) \text{ при всех } \lambda \in \overline{\mathbb{F}};$$

$$S^3_A(\lambda) = S^1_A(\lambda) - \lambda S^2_A(\lambda) \text{ при всех } \lambda \in \overline{\mathbb{F}}.$$

Это определение корректно, так как матрица $X_\lambda$ с указанными свойствами существует и единственна для каждого $\lambda \neq 0$ (лемма 3.1.14).

**Теорема 3.1.17.** *Пусть* $A \in M_n(\mathbb{F})$.

*1. Если* $\lambda \notin \operatorname{Spec} A \subseteq \overline{\mathbb{F}}$, *то* $S^i_A(\lambda) = 0$ *при* $i = 1, 2, 3$.

*2.* $\operatorname{rk}(S^2_A(\lambda)) = \deg_{\chi_A}(z - \lambda)$ *является кратностью корня* $\lambda$ *в характеристическом многочлене* $\chi_A$.

*3.* $S^i_A(\lambda) \perp S^j_A(\mu)$ *для всех* $\lambda \neq \mu$, $i, j = 1, 2, 3$.

*4.* $S^i_A(\lambda) S^2_A(\lambda) = S^2_A(\lambda) S^i_A(\lambda) = S^i_A(\lambda)$ *для всех* $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$, $i = 1, 2, 3$.

*5. Матрица* $S^2_A(\lambda)$ *идемпотентна при всех* $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$.

*6. Матрица* $S^3_A(\lambda)$ *нильпотентна при всех* $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$.

*7.* $A = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S^1_A(\lambda) = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} (\lambda S^2_A(\lambda) + S^3_A(\lambda))$, $E = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S^2_A(\lambda)$.

**Определение 3.1.18.** Будем называть разложения вида

$$A = \sum_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S^1_A(\lambda) = \sum_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} (\lambda S^2_A(\lambda) + S^3_A(\lambda))$$

*спектральными ортогональными матричными разложениями.*

Отметим, что спектральные ортогональные разложения могут быть использованы для вычисления многочленов от матриц, а ненулевые элементы разложения конкретной матрицы являются базисом в линейном пространстве значений многочленов от этой матрицы. Более того, введенные разложения оказываются эффективным инструментом исследования свойств рассматриваемых порядков и монотонных отображений. В частности, справедлива следующая теорема:

**Теорема 3.1.20.** *Пусть* $A \in M_n(\mathbb{F})$.

*1. Если* $A$ *коммутирует с некоторой* $B \in M_n(\mathbb{F})$, *то* $S^i_A(\lambda)$ *коммутируют с* $B$ *при всех* $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$ *и* $i = 1, 2, 3$.

*2. Если* $\operatorname{Ind} A = 1$ *и* $A$ *ортогональна некоторой матрице* $B$, *то*

*а) все матрицы* $S^i_A(\lambda)$ *ортогональны* $B$,

*б)* $S^i_{A+B}(\lambda) = S^i_A(\lambda) + S^i_B(\lambda)$ *при* $\lambda \neq 0$ *и* $i = 1, 2, 3$,

*в)* $S^i_A(\lambda) \perp S^j_B(\mu)$ *при всех* $\lambda, \mu \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $i, j = 1, 2, 3$.

*3. Если $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$ для некоторой $C \in M_n(\mathbb{F})$, то при всех $\Lambda \subseteq \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$ имеем $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} S_A^i(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} S_C^i(\lambda)$, $i = 1, 2$. В частности, $S_A^i(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} S_C^i(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$ и $i = 1, 2$.*

Через $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ обозначим множество матриц индекса 1.

Во втором параграфе при помощи спектральных ортогональных разложений получены два важных свойства биективных строго монотонных отображений множества $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ в себя: сохранение ими жордановой формы, с точностью до замены собственных чисел, и эквивалентность монотонности введенному автором понятию 0-аддитивности отображения.

**Теорема 3.2.14.** *Пусть $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ и отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ является биективным и строго монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка при дополнительном ограничении $T(\lambda E) = \lambda E$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогда для произвольной матрицы $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$ существует матрица $P_A \in GL_n(\mathbb{F})$ такая, что $T(A) = P_A^{-1} A P_A$.*

Здесь под $M_0$ понимается множество матриц, имеющих единственный жорданов блок с ненулевым собственным числом. Отметим, что на множестве $M_0$ монотонное отображение может быть определено произвольным образом (лемма 3.2.12), то есть биективное строго монотонное отображение на множестве $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ может быть достаточно «диким».

**Теорема 3.2.18.** *Пусть $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ и отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ является биекцией. Тогда отображение $T$ строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка в том и только том случае, когда отображения $T$ и $T^{-1}$ одновременно являются 0-аддитивными.*

В третьем параграфе доказана характеризация инъективных неаддитивных монотонных отображений множества диагонализуемых матриц в себя. В этом случае результат оказывается значительно более структурированным, чем в случае множества всех матриц индекса 1. Напомним, что матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ называется диагонализуемой, если существует $P \in GL_n(\mathbb{F})$ такая, что $P^{-1}AP$ — диагональная, $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ — диагонализуемые матрицы из $M_n(\mathbb{F})$.

**Теорема 3.3.1.** *Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, $n \geqslant 3$, инъективное отображение $T\colon \mathcal{D}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка. Тогда существуют матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$, ненулевой эндоморфизм $f\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ и $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — инъективное отображение с условием $\sigma(0) = 0$ такие, что*

$$T(A) = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}} \sigma(\lambda) P^{-1} (S_A^2(\lambda))^f P \text{ для всех } A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F}),$$

*или*

$$T(A) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}} \sigma(\lambda) P^{-1} [(S_A^2(\lambda))^f]^t P \text{ для всех } A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F}).$$

В качестве следствия теоремы 3.3.1 получена характеризация строго монотонных отображений диагонализуемых матриц в себя. Приведен пример нетождественного строго монотонного отображения на $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$, ограничение которого на $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ тождественно (пример 3.3.5). Также показана существенность условия инъективности (пример 3.3.6).

В четвертом параграфе решена задача характеризации инъективных непрерывных монотонных отображений множества всех матриц над полем комплексных чисел в себя. За счет непрерывности и использования ряда результатов комплексного анализа, удается показать, что инъективное монотонное отображение автоматически аддитивно, и более того, полулинейно.

**Теорема 3.4.1.** *Пусть $n \geqslant 3$, отображение $T\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ инъективно и непрерывно. Пусть также выполнено хотя бы одно из условий:*

*а) $T$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка;*

*б) $T$ монотонно относительно $\overset{cn}{\leqslant}$-порядка;*

*в) $T$ является 0-аддитивным.*

*Тогда существуют $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такие, что*

$$\begin{array}{ll} T(X) = \alpha P^{-1} X P & \text{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}), \text{ или} \\ T(X) = \alpha P^{-1} X^t P & \text{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}), \text{ или} \\ T(X) = \alpha P^{-1} \overline{X} P & \text{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}), \text{ или} \\ T(X) = \alpha P^{-1} \overline{X}^t P & \text{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}), \end{array}$$

*здесь $\overline{X}$ — матрица, полученная из $X$ поэлементным комплексным сопряжением.*

В случае отсутствия условия непрерывности аналог характеризационного результата неверен, в работе построен пример 3.4.4, подтверждающий этот факт.

## Глава 4

В четвертой главе введен аналог порядка, порожденного групповой обратной матрицей, для множества ограниченных операторов в банаховом пространстве и изучены соответствующие аддитивные монотонные отображения.

В первом параграфе вводится определение $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка на операторах в банаховом пространстве.

В работе П. Шемрла[14] отношение $\overline{\leqslant}$-порядка было перенесено на случай ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве.

Пусть $\mathbb{F}$ — поле вещественных или комплексных чисел, $X$ — банахово пространство над полем $\mathbb{F}$, $B(X)$ — совокупность линейных ограниченных операторов на пространстве $X$.

Оператор $P \in B(X)$ будем называть идемпотентом, если $P^2 = P$, через $\mathrm{I}_1(X)$ обозначим множество всех идемпотентов, $I \in \mathrm{I}_1(X)$ — тождественный оператор.

**Определение 4.1.1** (Шемрл[14]). Пусть $A, B \in B(X)$, $X$ гильбертово. Положим $A \overline{\leqslant} B$, если найдутся такие идемпотенты $P, Q$, что $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} Q$, $PA = PB$, $AQ = BQ$.

**Определение 4.1.2.** Пусть $A, B \in B(X)$. Положим $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, если $A = B$, или найдется такой идемпотент $P \in B(X)$, что $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$, $PA = PB$, $AP = BP$.

В работе доказывается корректность введенного определения, антисимметричность и транзитивность отношения $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка, его совпадение с матричным определением для конечномерных пространств, изучены другие свойства $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка на операторах.

Обозначим через $\mathrm{I}_s(X)$ множество таких $A \in B(X)$, что существует идемпотент $P$ с условиями $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$ и $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$.

**Теорема 4.1.8.** *Пусть $A, B \in B(X)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

*1) $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$;*

*2) $A = B$ или существует такое прямое разложение пространства $X$ в сумму замкнутых подпространств $X = X_1 \oplus X_2$, что линейные операторы $A, B\colon X_1 \oplus X_2 \to X_1 \oplus X_2$ имеют следующие матричные представления:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

*где $A_1\colon X_1 \to X_1$ и $B_1\colon X_2 \to X_2$ — ограниченные линейные операторы, $A_1$ инъективен, $\overline{\operatorname{Im} A} = X_1$;*

*3) $A = B$ или $A \in \mathrm{I}_s(X)$, $A \perp (B - A)$.*

Во втором параграфе доказана характеризация аддитивных биективных отображений на множестве линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, строго монотонных относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка.

Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{F}$ вещественных или комплексных чисел, $\dim H > 1$. Приведем формулировку известной теоремы Овчинникова[12] о монотонных отображениях множества идемпотентов в себя.

**Теорема 4.2.6.** *Пусть* $\varphi\colon \mathrm{I}_1(H) \to \mathrm{I}_1(H)$ *— биективное отображение, строго монотонное относительно стандартного порядка на идемпотентах. Тогда существует* $S\colon H \to H$ *— линейный или полулинейный обратимый ограниченный оператор такой, что* $\varphi(P) = SPS^{-1}$ *для всех* $P \in \mathrm{I}_1(H)$ *или* $\varphi(P) = SP^*S^{-1}$ *для всех* $P \in \mathrm{I}_1(H)$.

Полученный характеризационный результат состоит в следующем:

**Теорема 4.2.7.** *Пусть* $T\colon B(H) \to B(H)$ *— аддитивное биективное отображение, строго монотонное относительно* $\overset{\sharp}{<}$*-порядка. Тогда существуют такие* $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ *и* $S\colon H \to H$ *— линейный или полулинейный обратимый ограниченный оператор, что* $T(A) = \alpha SAS^{-1}$ *для всех* $A \in B(H)$ *или* $T(A) = \alpha SA^*S^{-1}$ *для всех* $A \in B(H)$.

Построены примеры, показывающие существенность условий биективности и аддитивности (примеры 4.2.8, 4.2.9).

В третьем параграфе изучаются биективные строго монотонные отображения на ортогональных идемпотентах и их линейных комбинациях. Более точно, определим множество $\mathrm{I}_l(H) = \{A \in B(H) \mid A = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i P_i,\ P_i \in \mathrm{I}_1(H),\ P_i \perp P_j \text{ при } i \neq j\}$.

**Теорема 4.3.2.** *Пусть биективное отображение* $T\colon \mathrm{I}_l(H) \to \mathrm{I}_l(H)$ *строго монотонно относительно* $\overset{\sharp}{<}$*-порядка. Тогда существуют* $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ *— биекция,* $\sigma(0) = 0$*, и* $S\colon H \to H$ *— линейный или полулинейный обратимый ограниченный оператор такой, что*

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) = S\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma(\lambda_i) P_i\right) S^{-1}$$

*для всех* $P_i$*,* $P_i \perp P_j$ *при* $i \neq j$*, или*

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) = S\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma(\lambda_i) P_i^*\right) S^{-1}$$

*для всех* $P_i$*,* $P_i \perp P_j$ *при* $i \neq j$.

# Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Гутерману Александру Эмилевичу за постановку задач и всестороннее внимание к работе.

Автор благодарен профессору Александру Васильевичу Михалёву и профессору Вячеславу Александровичу Артамонову за полезные дискуссии и комментарии, а также всему коллективу кафедры высшей алгебры МГУ имени М.В.Ломоносова за доброжелательное отношение.

# Работы автора по теме диссертации


[1] *Ефимов М. А.* Монотонные отображения матриц и теорема Нетер-Сколема // Вестник Московского университета. Математика. Механика. 2012. Т. 67. №5. С. 46—66. Translated by Moscow University Mathematics Bulletin. 2012, Vol. 67(5-6). 221–223.

[2] *Ефимов М. А.* О $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядке на множестве линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве // Матем. заметки. 2013. Т. 93. №5. С. 794–797. Translated by Mathematical Notes. 2013. Vol. 93(5). 784–788.

[3] *Гутерман А. Э., Ефимов М. А.* Монотонные отображения матриц индекса 1 // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2012. Т. 405. С. 67–96. Translated by Journal of Mathematical Sciences (New-York). 2013. Vol 191(1). 36–51. *М.А. Ефимову принадлежат главы 2, 5, 6. А.Э. Гутерману принадлежат главы 1, 3, 4.*

[4] *Ефимов М. А.* Линейные отображения матриц, монотонные относительно $\overset{\sharp}{\leq}$, $\overset{\mathrm{cn}}{\leq}$ - порядков // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13. №4. С. 53—66. Translated by Journal of Mathematical Sciences (New-York). 2008. Vol. 155(6). 830–838.

[5] *Ефимов М. А.* Аддитивные отображения матриц, монотонные относительно порядков, заданных групповой обратной матрицей // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. №6. С. 23–40. Translated by Journal of Mathematical Sciences (New-York). 2013. Vol. 193(5). 659–670.

[6] *Guterman A. E., Efimov M. A.* Monotone maps on diagonalizable matrices // Mathematical Inequalities and Applications, accepted, 2013, MIA-3536. *М.А. Ефимову принадлежат главы 1, 2, 3. А.Э. Гутерману принадлежит глава 4.*

[7] *Ефимов М. А.* Монотонные отображения матриц, заданные групповой обратной // XVII Международная научная конференция «Ломоносов-2010», Тезисы докладов, 1, МАКС Пресс, Москва, 2010.

[8] *Ефимов М. А.* Частичные порядки на алгебре матриц и их аналоги для гильбертовых пространств // XVIII Международная научная конференция «Ломоносов-2011», Тезисы докладов, 1-2, МАКС Пресс, Москва, 2011.

[9] *Ефимов М. А.* О частичном порядке, задаваемом связанными идемпотентами в гильбертовом пространстве // XIX Международная научная конференция «Ломоносов-2012», Тезисы докладов, 1-2, МАКС Пресс, Москва, 2012.