ФГБОУ ВПО «Московский государственный
университет имени М.В.Ломоносова»

На правах рукописи

УДК 512.643

Ефимов Михаил Александрович

МОНОТОННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МАТРИЦ И ОПЕРАТОРОВ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор А.Э. Гутерман

Москва – 2013

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1 Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Диссертация посвящена изучению отображений матриц и операторов, монотонных относительно некоторых специальных частичных порядков. Исследуемые порядки были введены посредством групповой обратной матрицы, которая является одним из возможных обобщений понятия обратной матрицы на вырожденные матрицы.

Пусть $M_n(\mathbb{F})$ обозначает пространство квадратных матриц порядка n с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$, $GL_n(\mathbb{F})$ — полная линейная группа (обратимые матрицы из $M_n(\mathbb{F})$), $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, через $\det A$ обозначен определитель матрицы A, A^t — транспонированная матрица. Через E_{ij} будем обозначать матрицу с 1 в позиции (i, j) и нулями в остальных, E — единичная матрица, через $\mathrm{Spec}(A)$ обозначим спектр матрицы A, то есть множество всех ее собственных чисел.

Обобщенные обратные матрицы

Первое упоминание об обобщенных обратных операторах может быть найдено в работе Фредгольма 1903 года (см. [25]), в которой вводятся псевдообратные интегральные операторы, позже охарактеризованные Гурвицем в работе [35]. Кроме того, обобщенные обратные для дифференциальных операторов использовались Гильбертом в работе [33] при исследовании свойств обобщенных функций Грина.

Изучение обобщенных обратных для дифференциальных и интегральных операторов привело к появлению понятия обобщенных обратных матриц. Фактически, первые результаты в этой области принадлежат Муру, который ввел обобщенные обратные для конечных квадратных и прямоугольных матриц (см. [45]). Впоследствии Пенроузом с применением другой техники были отдельно изучены псевдообратные Мура для квадратных матриц, и доказана единственность обратной. Полученные обобщенные обратные матрицы стали называть обратными Мура-Пенроуза (см. [49]).

Определение 1.1.1. [49] Пусть $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ — прямоугольная матрица. Матрица $G \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ является *обратной матрицей Мура-Пенроуза*, если выполнены следующие равенства:

1) $AGA = A$;
2) $GAG = G$;
3) $(AG)^* = AG$;
4) $(GA)^* = GA$.

Для любой матрицы $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ существует ровно одна матрица $G \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ такая, что выполнены свойства 1) – 4) в определении 1.1.1. Обозначим эту матрицу через $A^\dagger = G$.

Если рассматривать только часть свойств из определения 1.1.1, то можно получить другие обобщения понятия обратной матрицы. Так, если матрица G удовлетворяет соотношению 1), то G называется *обобщенной обратной* (записывается как A^-). Отметим, что A^- это не конкретная матрица, а любая матрица со свойством $AA^-A = A$. Если же матрица G удовлетворяет соотношениям 1) и 2), то G называется *рефлексивной обобщенной обратной*, и обозначается A_r^-.

Кроме некоторых из свойств 1) – 4) для определения классов обобщенных обратных матриц могут использоваться и другие, например, коммутативность G и A. Различные определения обобщенных обратных матриц и их свойства можно найти в монографиях [12, 52].

Отметим, что обобщенные обратные матрицы имеют различные приложения. С их помощью можно находить точные и приближенные решения систем линейных алгебраических уравнений, решать разностные и дифференциальные линейные уравнения, определять используемые в физике параллельные суммы матриц (см. [12]). Обобщенные обратные имеют многочисленные применения в математической статистике: решение задачи линейной регрессии, вычисление стационарных точек цепей Маркова, и другие (см. [58]).

В рамках данной диссертационной работы наиболее интересным является случай групповой обратной матрицы.

Определение 1.1.2 (Митра, [40])**.** *Групповая обратная матрица* $A^\sharp$ *к матрице* A *— это матрица, удовлетворяющая следующим соотношениям:*

$$\text{а)} AA^\sharp A = A; \quad \text{б)} A^\sharp AA^\sharp = A^\sharp; \quad \text{в)} AA^\sharp = A^\sharp A.$$

Название «групповая обратная» было введено И. Эрдели в работе [23] в связи с тем фактом, что матрица $A^\sharp$ является обратной для A в абелевой группе по умножению, порожденной A. Оказывается, существование групповой обратной матрицы для данной матрицы A тесно связано со значением индекса матрицы A.

Определение 1.1.3. Матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ имеет *индекс* l, $\operatorname{Ind} A = l$, если $\operatorname{rk} A^l = \operatorname{rk} A^{l+1}$ и l есть наименьшее натуральное число с таким свойством.

Групповая обратная матрица $A^\sharp$ к данной матрице $A \in M_n(\mathbb{F})$ существует тогда и только тогда, когда A имеет индекс 1, то есть $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^2$ (см. [22, 40]). Кроме того, если $A^\sharp$ существует, то она единственна (см. [41, 54]). Подробное описание свойств групповой обратной матрицы может быть найдено в работах [12, 53].

Обозначим через $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ подмножество матриц индекса 1 из $M_n(\mathbb{F})$. Заметим, что по определению множество матриц индекса 1 содержит множество идемпотентов, однако, множество матриц индекса 1 шире. В частности, оно содержит все диагонализуемые матрицы и все жордановы блоки с ненулевыми собственными значениями.

Отношения порядка на пространстве матриц

Существует много различных упорядочиваний пространства матриц $M_n(\mathbb{F})$. Например, для упорядоченных полей может использоваться элементарный порядок ($A \leqslant B$, если $a_{ij} \leqslant b_{ij}$), а для поля комплексных чисел — порядок Лёвнера ($A \leqslant B$ если $B - A$ — эрмитовая неотрицательно определенная матрица).

В последние 40 лет наряду с указанными порядками вводятся и активно исследуются другие матричные отношения частичного порядка.

Определение 1.1.4 (Хартвиг, [31])**.** Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $A \overset{-}{\leqslant} B$ для произвольных матриц A и B, если и только если $\operatorname{rk}(B - A) = \operatorname{rk} B - \operatorname{rk} A$. Полученное отношение называется *минус-порядком.*

Можно дать и другое эквивалентное определение минус-порядка, основанное на применении обобщенных обратных матриц. А именно: $A\overset{-}{\leqslant}B$, если и только если существует обобщенная обратная A^- такая, что $AA^- = BA^-$, $A^-A = A^-B$.

Аналогичным образом можно задать $\leqslant^*$-порядок на матрицах, если в качестве A^- рассматривать $A^\dagger$. Полученный $\leqslant^*$-порядок называют порядком Дрейзина (см. [21]). Если же $A^- = A^\sharp$, то получаем определение $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка:

Определение 1.1.5 (Митра, [41])**.** Пусть $A, C \in M_n(\mathbb{F})$, $\operatorname{Ind} A = 1$. Тогда $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$, если и только если $AA^\sharp = CA^\sharp = A^\sharp C$. Кроме того, если $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$ и $A \neq C$, то $A \overset{\sharp}{<} C$.

Если рассматривать только одно из соотношений $AA^- = BA^-$ и $A^-A = A^-B$, и добавить условие $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B$ или $\operatorname{Im} A^t \subseteq \operatorname{Im} B^t$, соответственно, то можно определить односторонний минус-порядок (совпадающий с минус-порядком), а также односторонние $\leqslant^*$- и $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядки (не совпадающие с двусторонними).

Другими примерами порядков могут служить бриллиантовый порядок (см. [9]), сингулярные порядки, f-порядки (см. [4]), и прочие.

Следующее разложение произвольной матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$ существует и единственно (см. [12, глава 4.8]):

Определение 1.1.6. *Нильпотентным разложением* матрицы A называется такое представление $A = C_A + N_A$, что $C_A N_A = N_A C_A = 0$, $\operatorname{Ind} C_A = 1$, N_A нильпотентна.

Отношение $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка является в некотором смысле бедным, так как любая матрица индекса больше 1 максимальна. Для устранения этого недостатка Хартвигом и Митрой было введено следующее отношение порядка, расширяющее $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядок.

Определение 1.1.7. [32] Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $A \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} B$, если и только если $C_A \overset{\sharp}{\leqslant} C_B$ и $N_A \overline{\lessgtr} N_B$.

Отметим, что детальное описание свойств различных матричных порядков может быть найдено в монографии [43].

Отображения, сохраняющие матричные инварианты

Исследование отображений, сохраняющих матричные инварианты, началось с работы [3] Г. Фробениуса, в которой получена характеризация линейных биективных отображений пространства матриц, сохраняющих определитель. Эта характеризация помогла Г. Фробениусу решить задачу Р. Дедекинда (см. [14]) о разложении группового определителя на множители.

Теорема 1.1.8. *(Фробениус,* [3]*) Пусть* $T\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ *— биективное линейное преобразование,* $\det T(X) = \det X$ *для всех* X*. Тогда найдутся такие матрицы* $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ *с условием* $\det(PQ) = 1$*, что* $T(X) = PXQ$ *для всех матриц* $X \in M_n(\mathbb{C})$ *или* $T(X) = PX^tQ$ *для всех матриц* $X \in M_n(\mathbb{C})$*.*

Доказательство этой теоремы у Фробениуса было комбинаторным и достаточно сложным. В 1949 году Дьёдонне [17] предложил новый подход к изучению линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, базирующийся на основной теореме проективной геометрии. Это был один из первых общих методов решения подобных задач (см. [16]). Дьёдонне получил характеризацию биективных линейных отображений, сохраняющих вырожденные матрицы над произвольным полем.

Теорема 1.1.9. ([17], см. также [18, лемма 1]) Пусть $\mathbb{F}$ произвольное поле и T — обратимое линейное отображение на $M_n(\mathbb{F})$, сохраняющее вырожденность (то есть, если $\det X = 0$, то $\det T(X) = 0$). Тогда найдутся такие матрицы $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$, что $T(X) = PXQ$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{C})$ или $T(X) = PX^tQ$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{C})$.

Эти результаты заложили основу интенсивного и плодотворного изучения линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, продолжающегося по сей день. Примерами работ в этой области являются [1, 8, 15, 27, 28, 39, 50, 60]).

В качестве примера приложений описываемой теории отметим доказательство известной теоремы Моцкина и Тасской, полученное Омладичем и Шемрлом в работе [47]. Это доказательство основано на характеризации линейных отображений, сохраняющих диагонализуемость матриц. Напомним, теорема Моцкина и Тасской утверждает, что матрицы A и B с комплексными коэффициентами одновременно диагонализуемы тогда и только тогда, когда каждый элемент матричного пучка $\lambda A + \mu B$ диагонализуем. Первоначально она имела сложное доказательство, основанное на глубоких результатах алгебраической геометрии.

Подробную информацию об отображениях, сохраняющих матричные инварианты, можно найти в обзорных работах [5, 38, 44, 51].

Монотонные отображения

Частным случаем отображений, сохраняющих матричные инварианты, являются монотонные матричные отображения. Предметом изучения данной диссертационной работы являются монотонные отображения, монотонные относительно специальных порядков, заданных при помощи групповой обратной матрицы. Итак, пусть $\leqslant$ — некоторое отношение частичного порядка на $M_n(\mathbb{F})$.

Определение 1.1.10. Пусть $M \subseteq M_n(\mathbb{F})$. Отображение $T\colon M \to M$ *монотонно* относительно $\leqslant$-порядка, если для любых $A, B \in M$ из $A \leqslant B$ следует $T(A) \leqslant T(B)$.

Определение 1.1.11. Пусть $M \subseteq M_n(\mathbb{F})$. Отображение $T\colon M \to M$ *строго монотонно* относительно $<$-порядка, если для любых матриц $A, B \in M$ условия $A < B$ и $T(A) < T(B)$ эквивалентны.

Отметим, что изучение отображений, монотонных относительно данного $\leqslant$-порядка, часто оказывается полезной при изучении свойств этого частичного порядка, для примера см. [11]. При этом наиболее интересен вопрос полной характеризации монотонных отображений при некоторых дополнительных условиях на отображение (линейность, аддитивность, биективность, непрерывность и другие). Примеры подобной характеризации монотонных отображений могут быть найдены в работах [13, 20, 36, 37, 48, 55, 56, 57].

Важным для данной работы отношением на матрицах является ортогональность, см. [55].

Определение 1.1.12. [55] Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Матрицы A и B *ортогональны* ($A \perp B$), если $AB = BA = 0$.

Рассмотрим следующее свойство отображений, тесно взаимосвязанное с монотонностью относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка:

Определение 1.1.13. Пусть $M \subseteq M_n(\mathbb{F})$. Отображение $T\colon M \to M$ назовем *0-аддитивным*, если для любых матриц $A, B \in M$ со свойствами $A \perp B$, $\operatorname{Ind} A = 1$, имеем:

а) $T(A) \perp T(B)$; б) $T(A + B) = T(A) + T(B)$.

Нам потребуются примеры монотонных отображений. Непосредственная проверка показывает, что справедлива лемма:

Лемма 1.1.14. *Следующие отображения пространства матриц аддитивны и монотонны относительно* $\overset{\sharp}{<}$*-,* $\overline{<}$*- и* $\overset{cn}{<}$*-порядков:*

1. $T_\alpha(X) = \alpha X$, *где* $\alpha \in \mathbb{F}$.

2. $T_P(X) = P^{-1}XP$, *где* $P \in GL_n(\mathbb{F})$.

3. $T_\varphi(X) = X^\varphi$, *где* $\varphi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ *— эндоморфизм поля* $\mathbb{F}$.

4. $T_t(X) = X^t$.

В лемме 1.1.14 под применением эндоморфизма поля к матрице понимается его поэлементое применение.

Цель работы

Исследование свойств и характеризация монотонных отображений, заданных групповой обратной матрицей. Перед автором стояли следующие задачи:

- Получить характеризацию аддитивных отображений матриц над произвольным полем, монотонных относительно группового порядка.

- Изучить свойства нелинейных монотонных отображений матриц и решить задачу характеризации этих отображений на специальных множествах матриц.

- Ввести операторный аналог частичного порядка, заданного групповой обратной матрицей, и доказать характеризацию аддитивных монотонных отображений операторов на гильбертовом пространстве.

Научная новизна

Представленные в диссертации результаты являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации следующие:

- Доказана характеризация аддитивных отображений, монотонных относительно порядков, заданных групповой обратной матрицей.

- Введены и построены спектральные ортогональные разложения произвольных матриц, изучены их свойства и взаимосвязь с рассматриваемыми частичными порядками.

- Получена характеризация инъективных отображений диагонализуемых матриц и непрерывных инъективных отображений комплексных матриц, монотонных относительно порядков, заданных групповой обратной матрицей.

- Решена задача о характеризации аддитивных биективных строго монотонных отображений линейных ограниченных операторов на гильбертовом пространстве.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы теории матриц, теории операторов, комплексного анализа, а также изобретенный автором метод спектральных ортогональных матричных разложений.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны специалистам по абстрактной и линейной алгебре, теории матриц, теории колец, математической статистике, вычислительной математике, квантовой механике.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова:

(1) научно-исследовательский семинар по алгебре под руководством профессора Латышева В.Н. (2012-2013, неоднократно);

(2) семинар «Кольца и модули» под руководством профессора Латышева В.Н., профессора Михалева А.В. (2010-2013, неоднократно);

(3) семинар «Теория матриц и ее приложения» под руководством профессора Гутермана А.Э. (2010-2013, неоднократно);

а также на всероссийских и международных конференциях:

(1) XVII международная научная конференция «Ломоносов-2010», Москва, 12-15 апреля 2010 г.;

(2) XVIII международная научная конференция «Ломоносов-2011», Москва, 11-15 апреля 2011 г.;

(3) XIX международная научная конференция «Ломоносов-2012», Москва, 9-13 апреля 2012 г.;

(4) Международный алгебраический симпозиум, посвящённый 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А.В.Михалёва, Москва, 15-18 ноября 2010 г;

(5) 3-я международная конференция «Матричные методы в математике и их приложения», МММА-2011, Москва, 22-25 июня 2011 г.;

(6) международная конференция «Полугруппы и приложения», Уппсала, Швеция, 30 августа - 1 сентября 2012 г.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из четырёх глав, первая из которых вводная, и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 144 страницы. Список литературы содержит 69 наименований.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в девяти работах [61-69].

1.2 Краткое содержание работы

Глава 1

В первой главе диссертации изложена история вопроса, показана актуальность темы, сформулированы основные определения и полученные результаты.

Глава 2

Вторая глава посвящена изучению линейных и аддитивных отображений матриц, монотонных относительно частичных порядков, заданных групповой обратной матрицей.

В первом параграфе доказана полная характеризация линейных отображений, монотонных относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-порядков. Ранее были охарактеризованы линейные биективные отображения над произвольным полем, монотонные относительно $\overset{\sharp}{<}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{<}$-порядков:

Теорема (Богданов, Гутерман, [2]). Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $n > 3$, $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — биективное линейное отображение, монотонное относительно $\overset{\sharp}{<}$- ($\overset{\mathrm{cn}}{<}$-) порядка. Тогда существуют $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ и $P \in GL_n(\mathbb{F})$ такие, что $T(X) = \alpha P^{-1}XP$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$ или $T(X) = \alpha P^{-1}X^tP$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$.

Автором был предложен метод, позволивший снять ограничение биективности. При этом ограничений на размер матриц нет, а ограничение на основное поле — его характеристика должны быть отличной от 2. Сформулируем полученный характеризационный результат:

Теорема 2.1.10. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, $n \geqslant 1$ — целое число, а линейное отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- (или $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-) порядка. Тогда T имеет один из двух видов, указанных ниже ($\alpha \in \mathbb{F}$, $P \in GL_n(\mathbb{F})$):

1) $T(X) = \alpha P^{-1}XP$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$;

2) $T(X) = \alpha P^{-1}X^tP$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$.

Здесь и далее для удобства чтения используется нумерация определений, теорем, лемм и примеров, совпадающая с нумерацией в основном тексте диссертации.

Следствием доказанной характеризации является автоматическая биективность ненулевого линейного монотонного отображения. Кроме того, оказывается, что для линейных отображений монотонность относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка эквивалентна монотонности относительно $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-порядка.

Во втором параграфе с помощью развитой техники исследуются более общие аддитивные отображения. Доказана следующая теорема:

Теорема 2.2.8. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — целое число, аддитивное отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- ($\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-) порядка. Тогда T имеет одну из следующих форм:

1) $T(X) = \alpha P^{-1} X^{\varphi} P$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$;

2) $T(X) = \alpha P^{-1} (X^{\varphi})^t P$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$;

(здесь $\alpha \in \mathbb{F}$, $P \in GL_n(\mathbb{F})$, $\varphi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — инъективный эндоморфизм поля $\mathbb{F}$).

В теореме 2.2.8 под применением эндоморфизма поля к матрице понимается его поэлементое применение.

Далее в параграфе показано, что эндоморфизмы кольца матриц монотонны относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка. В качестве следствия теоремы 2.2.8 получено новое доказательство характеризации всех эндоморфизмов кольца $M_n(\mathbb{F})$. Подобная характеризация для алгебр известна как теорема Нетер-Сколема (см. [6]).

Теорема 2.2.11. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — целое число, $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — эндоморфизм кольца матриц $M_n(\mathbb{F})$. Тогда существуют такая матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$ и эндоморфизм $\varphi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ поля $\mathbb{F}$, что $T(X) = P^{-1} X^{\varphi} P$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{F})$.

В заключительной части главы построен пример 2.2.12 линейного монотонного отображения матриц 2×2 над полем из двух элементов, не представимого в том виде, который получен в теореме 2.2.8. Также приведены примеры неаддитивных монотонных отображений (примеры 2.2.13, 2.2.14).

Глава 3

В третьей главе изучаются нелинейные монотонные отображения.

В первом параграфе вводятся специальные разложения матриц, тесно связанные с жордановой нормальной формой, названные спектральными ортогональными разложениями. Через $K_A(\lambda)$ обозначим общее количество жордановых блоков матрицы A, отвечающих собственному числу λ, $\overline{\mathbb{F}}$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}$. Заметим, что $\mathrm{Spec}(A) = \{\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \mid K_A(\lambda) > 0\}$.

Определение 3.1.15. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$, $A = C_A + N_A$ — нильпотентное разложение матрицы A. Тогда $S_A^1(0) = N_A$, и для всех $\lambda \neq 0$ матрица $S_A^1(\lambda) = X_\lambda$ такова, что $\mathrm{Ind}\, X_\lambda = 1$, $X_\lambda \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $K_{X_\lambda}(\lambda) = K_A(\lambda)$ и $K_{X_\lambda}(\mu) = 0$ для всех $\mu \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0, \lambda\}$.

$$S_A^2(\lambda) = S_{A+E}^1(\lambda + 1) - S_A^1(\lambda) \text{ при всех } \lambda \in \overline{\mathbb{F}};$$

$$S_A^3(\lambda) = S_A^1(\lambda) - \lambda S_A^2(\lambda) \text{ при всех } \lambda \in \overline{\mathbb{F}}.$$

Это определение корректно, так как матрица X_λ с указанными свойствами существует и единственна для каждого $\lambda \neq 0$ (лемма 3.1.14).

Теорема 3.1.17. Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. Если $\lambda \notin \operatorname{Spec} A \subseteq \overline{\mathbb{F}}$, то $S_A^i(\lambda) = 0$ при $i = 1, 2, 3$.

2. $\operatorname{rk}(S_A^2(\lambda)) = \deg_{\chi_A}(z - \lambda)$ является кратностью корня λ в характеристическом многочлене χ_A.

3. $S_A^i(\lambda) \perp S_A^j(\mu)$ для всех $\lambda \neq \mu$, $i, j = 1, 2, 3$.

4. $S_A^i(\lambda) S_A^2(\lambda) = S_A^2(\lambda) S_A^i(\lambda) = S_A^i(\lambda)$ для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$, $i = 1, 2, 3$.

5. Матрица $S_A^2(\lambda)$ идемпотентна при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$.

6. Матрица $S_A^3(\lambda)$ нильпотентна при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$.

7. $A = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S_A^1(\lambda) = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} (\lambda S_A^2(\lambda) + S_A^3(\lambda))$, $E = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S_A^2(\lambda)$.

Определение 3.1.18. Будем называть разложения вида

$$A = \sum_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S_A^1(\lambda) = \sum_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} (\lambda S_A^2(\lambda) + S_A^3(\lambda))$$

спектральными ортогональными матричными разложениями.

Отметим, что спектральные ортогональные разложения могут быть использованы для вычисления многочленов от матриц, а ненулевые элементы разложения конкретной матрицы являются базисом в линейном пространстве значений многочленов от этой матрицы. Более того, введенные разложения оказываются эффективным инструментом исследования свойств рассматриваемых порядков и монотонных отображений. В частности, справедлива следующая теорема:

Теорема 3.1.20. Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. Если A коммутирует с некоторой $B \in M_n(\mathbb{F})$, то $S_A^i(\lambda)$ коммутируют с B при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$ и $i = 1, 2, 3$.

2. Если $\operatorname{Ind} A = 1$ и A ортогональна некоторой матрице B, то

а) все матрицы $S_A^i(\lambda)$ ортогональны B,

б) $S_{A+B}^i(\lambda) = S_A^i(\lambda) + S_B^i(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$ и $i = 1, 2, 3$, в) $S_A^i(\lambda) \perp S_B^j(\mu)$ при всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $i, j = 1, 2, 3$.

3. Если $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$ для некоторой $C \in M_n(\mathbb{F})$, то при всех $\Lambda \subseteq \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$ имеем $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} S_A^i(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} S_C^i(\lambda)$, $i = 1, 2$. В частности, $S_A^i(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} S_C^i(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$ и $i = 1, 2$.

Во втором параграфе при помощи спектральных ортогональных разложений получены два важных свойства биективных строго монотонных отображений множества $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ матриц индекса 1 в себя: сохранение ими жордановой формы, с точностью до замены собственных чисел, и эквивалентность монотонности введенному автором понятию 0-аддитивности отображения.

Теорема 3.2.14. Пусть $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ и отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ является биективным и строго монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка при дополнительном ограничении $T(\lambda E) = \lambda E$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогда для произвольной матрицы $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$ существует матрица $P_A \in GL_n(\mathbb{F})$ такая, что $T(A) = P_A^{-1} A P_A$.

Здесь под M_0 понимается множество матриц, имеющих единственный жорданов блок с ненулевым собственным числом. Отметим, что на множестве M_0 монотонное отображение может быть определено произвольным образом (лемма 3.2.12), то есть биективное строго монотонное отображение на множестве $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ может быть достаточно «диким».

Теорема 3.2.18. Пусть $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ и отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ является биекцией. Тогда отображение T строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка в том и только том случае, когда отображения T и T^{-1} одновременно являются 0-аддитивными.

В третьем параграфе доказана характеризация инъективных неаддитивных монотонных отображений множества диагонализуемых матриц в себя. В этом случае результат оказывается значительно более структурированным, чем в случае множества всех матриц индекса 1. Напомним, что матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ называется диагонализуемой, если существует $P \in GL_n(\mathbb{F})$ такая, что $P^{-1}AP$ — диагональная, $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ — диагонализуемые матрицы из $M_n(\mathbb{F})$.

Теорема 3.3.1. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, $n \geqslant 3$, инъективное отображение $T\colon \mathcal{D}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка. Тогда существуют матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$, ненулевой эндоморфизм $f\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ и $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — инъективное отображение с условием $\sigma(0) = 0$ такие, что

$$T(A) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}} \sigma(\lambda) P^{-1} (S_A^2(\lambda))^f P \text{ для всех } A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F}),$$

или

$$T(A) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}} \sigma(\lambda) P^{-1} [(S_A^2(\lambda))^f]^t P \text{ для всех } A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F}).$$

В качестве следствия теоремы 3.3.1 получена характеризация строго монотонных отображений множества диагонализуемых матриц в себя. Приведен пример нетождественного строго монотонного отображения на $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$, ограничение которого на $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ тождественно (пример 3.3.5). Также показана существенность условия инъективности (пример 3.3.6).

В четвертом параграфе решена задача характеризации инъективных непрерывных монотонных отображений множества всех матриц над полем комплексных чисел в себя. За счет непрерывности и использования ряда результатов комплексного анализа, удается показать, что инъективное монотонное отображение автоматически аддитивно, и более того, полулинейно.

Теорема 3.4.1. Пусть $n \geqslant 3$, отображение $T\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ инъективно и непрерывно. Пусть также выполнено хотя бы одно из условий:

а) T монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка;

б) T монотонно относительно $\overset{\text{cn}}{\leqslant}$-порядка;

в) T является 0-аддитивным.

Тогда существуют $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такие, что

$$\begin{aligned}
&T(X) = \alpha P^{-1} X P && \text{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}), \text{ или}\\
&T(X) = \alpha P^{-1} X^t P && \text{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}), \text{ или}\\
&T(X) = \alpha P^{-1} \overline{X} P && \text{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}), \text{ или}\\
&T(X) = \alpha P^{-1} \overline{X}^t P && \text{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}),
\end{aligned}$$

здесь $\overline{X}$ — матрица, полученная из X поэлементным комплексным сопряжением.

В случае отсутствия условия непрерывности аналог характеризационного результата неверен, в работе построен пример 3.4.4, подтверждающий этот факт.

Глава 4

В четвертой главе введен аналог порядка, порожденного групповой обратной матрицей, для множества ограниченных операторов в банаховом пространстве и изучены соответствующие аддитивные монотонные отображения.

В первом параграфе вводится определение $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка на операторах в банаховом пространстве.

В работе [57] П. Шемрла отношение $\overline{\leqslant}$-порядка было перенесено на случай ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве.

Пусть $\mathbb{F}$ — поле вещественных или комплексных чисел, X — банахово пространство над полем $\mathbb{F}$, $B(X)$ — совокупность линейных ограниченных операторов на пространстве X.

Оператор $P \in B(X)$ будем называть идемпотентом, если $P^2 = P$, через $\mathrm{I}_1(X)$ обозначим множество всех идемпотентов, $I \in \mathrm{I}_1(X)$ — тождественный оператор.

Определение 4.1.1 (Шемрл, [57]). Пусть $A, B \in B(X)$, X гильбертово. Положим $A \overline{\leqslant} B$, если найдутся такие идемпотенты P, Q, что $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} Q$, $PA = PB$, $AQ = BQ$.

Определение 4.1.2. Пусть $A, B \in B(X)$. Положим $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, если $A = B$, или найдется такой идемпотент $P \in B(X)$, что $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$, $PA = PB$, $AP = BP$.

В работе доказывается корректность введенного определения, антисимметричность и транзитивность отношения $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка, его совпадение с матричным определением для конечномерных пространств, изучены другие свойства $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка на операторах.

Обозначим через $\mathrm{I}_s(X)$ множество таких $A \in B(X)$, что существует идемпотент P с условиями $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$ и $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$.

Теорема 4.1.8. Пусть $A, B \in B(X)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$;

2) $A = B$ или существует такое прямое разложение пространства X в сумму замкнутых подпространств $X = X_1 \oplus X_2$, что линейные операторы $A, B\colon X_1 \oplus X_2 \to X_1 \oplus X_2$ имеют следующие матричные представления:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

где $A_1\colon X_1 \to X_1$ и $B_1\colon X_2 \to X_2$ — ограниченные линейные операторы, A_1 инъективен, $\overline{\operatorname{Im} A} = X_1$;

3) $A = B$ или $A \in \mathrm{I}_s(X)$, $A \perp (B - A)$.

Во втором параграфе доказана характеризация аддитивных биективных отображений на множестве линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, строго монотонных относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка.

Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{F}$ вещественных или комплексных чисел, $\dim H > 1$. Приведем формулировку известной теоремы Овчинникова о монотонных отображениях множества идемпотентов в себя.

Теорема 4.2.6 (Овчинников, [48])**.** Пусть $\varphi\colon \mathrm{I}_1(H) \to \mathrm{I}_1(H)$ — биективное отображение, строго монотонное относительно стандартного порядка на идемпотентах. Тогда существует $S\colon H \to H$ — линейный или полулинейный обратимый ограниченный оператор такой, что $\varphi(P) = SPS^{-1}$ для всех $P \in \mathrm{I}_1(H)$ или $\varphi(P) = SP^*S^{-1}$ для всех $P \in \mathrm{I}_1(H)$.

Полученный характеризационный результат состоит в следующем:

Теорема 4.2.7. Пусть $T\colon B(H) \to B(H)$ — аддитивное биективное отображение, строго монотонное относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Тогда существуют такие $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ и $S\colon H \to H$ — линейный или полулинейный обратимый ограниченный оператор, что $T(A) = \alpha SAS^{-1}$ для всех $A \in B(H)$ или $T(A) = \alpha SA^*S^{-1}$ для всех $A \in B(H)$.

Построены примеры, показывающие существенность условий биективности и аддитивности (примеры 4.2.8, 4.2.9).

В третьем параграфе изучаются биективные строго монотонные отображения на ортогональных идемпотентах и их линейных комбинациях. Более точно, определим множество

$$\mathrm{I}_l(H) = \{A \in B(H) \mid A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i, P_i \in \mathrm{I}_1(H), P_i \perp P_j \text{ при } i \neq j\}.$$

Теорема 4.3.2. Пусть биективное отображение $T\colon \mathrm{I}_l(H) \to \mathrm{I}_l(H)$ строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Тогда существуют такие $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — биекция, $\sigma(0) = 0$, и $S\colon H \to H$ — линейный или полулинейный обратимый ограниченный оператор, что

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) = S\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma(\lambda_i) P_i\right) S^{-1}$$

для всех P_i, $P_i \perp P_j$ при $i \neq j$, или

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) = S\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma(\lambda_i) P_i^*\right) S^{-1}$$

для всех P_i, $P_i \perp P_j$ при $i \neq j$.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Гутерману Александру Эмилевичу за постановку задач и всестороннее внимание к работе.

Автор благодарен профессору Александру Васильевичу Михалёву и профессору Вячеславу Александровичу Артамонову за полезные дискуссии и комментарии, а также всему коллективу кафедры высшей алгебры МГУ имени М.В.Ломоносова за доброжелательное отношение.

Глава 2

Аддитивные и линейные монотонные отображения матриц

2.1 Линейные отображения

В этом параграфе будут введены необходимые определения и получена полная характеризация линейных отображений, монотонных относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-порядков. При этом ограничений на размер матриц нет, а ограничение на основное поле — его характеристика должны быть отличной от 2. Ранее в работе [2] И. И. Богданов и А. Э. Гутерман охарактеризовали линейные биективные отображения над произвольным полем, монотонные относительно $\overset{\sharp}{<}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{<}$-порядков. Автором был предложен метод, позволивший снять ограничение биективности из [2].

Нам потребуется следующее определение:

Определение 2.1.1. Набор из n матриц $A_1, A_2, \ldots, A_n \in M_n(\mathbb{F})$ будем называть *B-набором*, если выполнены следующие условия:

1) Все A_i имеют ранг и индекс 1;

2) A_i и A_j ортогональны при любых различных i и j.

Сформулируем и докажем две вспомогательные леммы:

Лемма 2.1.2. *Пусть $A = \{a_{ij}\}$ — произвольная квадратная матрица. Тогда $A \perp E_{ii}$, если и только если $a_{ij} = a_{ji} = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство.

$$E_{ii}A = \sum_j a_{ij}E_{ij} = 0,$$

откуда получаем условие $a_{ij} = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Аналогично, имеем условие $a_{ji} = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. □

Лемма 2.1.3. *Пусть матрицы $X_1, X_2, \ldots, X_n \in M_n(\mathbb{F})$ образуют B-набор. Тогда существуют такие ненулевые $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ и такая матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$, что $P^{-1}X_iP = \alpha_iE_{ii}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Докажем по индукции. При $n = 1$ утверждение очевидно верно ($\alpha_1 \neq 0$, так как матрица X_1 имеет ранг 1).

Пусть $n > 1$. По условию, матрица X_1 имеет индекс и ранг 1, поэтому существует такая матрица $P_1 \in GL_n(\mathbb{F})$, что $X_1 = P_1^{-1}\alpha_1E_{11}P_1$ для некоторого $\alpha_1 \neq 0$. Но тогда матрицы $P_1X_1P_1^{-1} = \alpha_1E_{11}$, $P_1X_2P_1^{-1}, \ldots, P_1X_nP_1^{-1}$ также образуют B-набор. Без ограничения общности, можем считать, что $X_1 = \alpha_1E_{11}$.

Будем обозначать через M_{ij} элемент матрицы M, стоящий на позиции (i, j). Применяя лемму 2.1.2, получим $(X_k)_{1j} = (X_k)_{j1} = 0$ при всех $k, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ с условием $k > 1$, то есть X_k - блочно-диагональная матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X'_k \end{pmatrix}$. Отметим, что ранг X'_k совпадает с рангом X_k

и равен 1, $(X'_k)^2 \neq 0$, то есть индекс X'_k также равен 1. Тогда из правил умножения матриц следует, что $X'_2, X'_3, \ldots, X'_n \in M_{n-1}(\mathbb{F})$ образуют B-набор. По предположению индукции, найдется матрица $P' \in GL_{n-1}(\mathbb{F})$, что $(P')^{-1}X'_{i+1}P' = \beta_i E_{ii}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$, все β_i ненулевые. Обозначим $\alpha_2 = \beta_1, \alpha_3 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_{n-1}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$.

Тогда $P^{-1}X_1P = \alpha_1 E_{11}$ и $P^{-1}X_iP = \alpha_i E_{ii}$ при $i > 1$. Утверждение доказано. □

Вообще говоря, непосредственная проверка условия монотонности для данного отображения — трудная техническая задача. С другой стороны, на определенных семействах матриц монотонные отображения ведут себя довольно предсказуемо. В работе [2] было введено следующее определение:

Определение 2.1.4. [2, определение 3.2] Назовем последовательность матриц $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in (M_n(\mathbb{F}))^n$ *выделенной*, если существуют такие ненулевые скаляры $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ и матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$, что $A_i = P(a_1E_{11} + \ldots + a_iE_{ii})P^{-1}$ для всех i, $i = 1, \ldots, n$.

В той же работе была сформулирована лемма о выделенной последовательности:

Лемма 2.1.5. [2, лемма 3.4] *Для данной последовательности матриц* $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in (M_n(\mathbb{F}))^n$ *равносильны утверждения:*

(i) последовательность $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *является выделенной;*

(ii) $0 \overset{\sharp}{<} A_1 \overset{\sharp}{<} A_2 \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} A_n$*;*

(iii) $0 \overset{cn}{<} A_1 \overset{cn}{<} A_2 \overset{cn}{<} \cdots \overset{cn}{<} A_n$.

Из этой леммы можно вывести следующее важное для характеризации свойство линейных монотонных отображений:

Теорема 2.1.6. *Пусть матрицы $X_1, X_2, \ldots, X_n \in M_n(\mathbb{F})$ образуют B-набор, а линейное отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$ (или $\overset{cn}{\leqslant}$)-порядка. Кроме того, для каждого значения $i = 1, 2, \ldots, n$ матрица $X_i \notin \operatorname{Ker} T$. Тогда матрицы $T(X_1), T(X_2), \ldots, T(X_n)$ образуют B-набор.*

Доказательство. В силу леммы 2.1.3, найдется такая обратимая матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$, что $P^{-1}X_iP = \alpha_i E_{ii}$ для некоторых ненулевых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Рассмотрим выделенную последовательность $(X_1, X_1 + X_2, \ldots, X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ и применим лемму 2.1.5. Получим:

$$0 \overset{\sharp}{\leqslant} X_1 \overset{\sharp}{\leqslant} X_1 + X_2 \overset{\sharp}{\leqslant} \cdots \overset{\sharp}{\leqslant} X_1 + X_2 + \ldots + X_n;$$
$$0 \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} X_1 \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} X_1 + X_2 \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} \cdots \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

По условию теоремы, T — линейное отображение, монотонное относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$ (или $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$)-порядка. Обозначая $Y_i = T(X_i)$ и с учетом равенства $T(0) = 0$, получим

$$0 \overset{\sharp}{\leqslant} Y_1 \overset{\sharp}{\leqslant} Y_1 + Y_2 \overset{\sharp}{\leqslant} \cdots \overset{\sharp}{\leqslant} Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \text{ или}$$

$$0 \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} Y_1 \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} Y_1 + Y_2 \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} \cdots \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n.$$

Так как $X_i \notin \operatorname{Ker} T$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то $Y_i = T(X_i) \neq 0$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому все неравенства — строгие. Повторно применяя лемму 2.1.5, можем утверждать, что последовательность $(Y_1, Y_1 + Y_2, \ldots, Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)$ — выделенная.

Но тогда существует $Q \in GL_n(\mathbb{F})$ такая, что

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_i = Q(\beta_1 E_{11} + \beta_2 E_{22} + \ldots + \beta_i E_{ii})Q^{-1}$$

для некоторых ненулевых $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$, откуда $Y_i = Q\beta_i E_{ii} Q^{-1}$. Таким образом, матрица Y_i имеет ранг и индекс 1 для каждого i. Кроме того, $E_{ii}E_{jj} = E_{jj}E_{ii} = 0$ при $i \neq j$. Следовательно, Y_i и Y_j ортогональны при $i \neq j$. В результате, матрицы $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ образуют B-набор. □

Из доказанной теоремы нетрудно получить следующее

Следствие 2.1.7. *Пусть $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — биективное линейное отображение, T монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$ (или $\overset{cn}{\leqslant}$)-порядка. Тогда оно переводит матрицы ранга и индекса 1 в матрицы ранга и индекса 1.*

Доказательство. Пусть A — некоторая матрица, и выполнены соотношения $\operatorname{rk} A = \operatorname{Ind} A = 1$. Тогда существуют $P \in GL_n(\mathbb{F})$ и ненулевое $\lambda \in \mathbb{F}$, что $A = \lambda P^{-1}E_{11}P$. Рассмотрим набор из n матриц $X_1 = A = \lambda P^{-1}E_{11}P, X_2 = P^{-1}E_{22}P, \ldots, X_n = P^{-1}E_{nn}P$. Как отмечалось выше, они образуют B-набор. Кроме того, в силу биективности, $X_i \notin \operatorname{Ker} T$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.

По теореме 2.1.6, матрицы $T(X_1), T(X_2), \ldots, T(X_n)$ также образуют B-набор. Поэтому матрица $T(A) = T(X_1)$ имеет ранг и индекс 1. Что и требовалось доказать. □

В дальнейшем нам потребуется следующее определение:

Определение 2.1.8. Матрицу $A \in M_n(\mathbb{F})$ будем называть матрицей типа (i, j), где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, если существуют такие $a_{ii}, a_{ij}, a_{ji}, a_{jj} \in \mathbb{F}$, что $A = a_{ii}E_{ii} + a_{ij}E_{ij} + a_{ji}E_{ji} + a_{jj}E_{jj}$.

В теореме 2.1.6 рассматриваются B-наборы, все матрицы которых не лежат в ядре отображения T. В связи с этим возникает вопрос о существовании таких наборов. Ответ на него дает следующая лемма: если B-наборов с этим свойством нет, то отображение T тождественно нулевое (достаточно положить $V = \operatorname{Ker} T$).

Лемма 2.1.9. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с условием* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, *$n \geqslant 1$ — целое число, V — такое подпространство $M_n(\mathbb{F})$, что в любом B-наборе найдется матрица, лежащая в V. Тогда $V = M_n(\mathbb{F})$.*

Доказательство. Докажем индукцией по n. При $n = 1$ утверждение очевидно верно. Пусть $n > 1$. Покажем, что все матрицы ранга и индекса 1 лежат в V. Предположим, найдется матрица $A_0 \notin V$ с условием $\operatorname{rk} A_0 = \operatorname{Ind} A_0 = 1$. Рассмотрим некоторый B-набор, содержащий A_0 и воспользуемся условием теоремы. Тогда найдется матрица B_0 ортогональная с A_0, что $B_0 \in V$, $\operatorname{rk} B_0 = \operatorname{Ind} B_0 = 1$. Как отмечалось выше, существуют матрица $P_1 \in GL_n(\mathbb{F})$ и элемент поля $\lambda_1 \neq 0$, что $B_0 = \lambda_1 P_1^{-1} E_{11} P_1$. Обозначим $V_1 = \lambda_1^{-1} P_1 V P_1^{-1}$. Тогда $E_{11} \in V_1$ и найдется матрица $A_1 = \lambda_1^{-1} P_1 A_0 P_1^{-1}$ ранга и индекса 1, ортогональная с E_{11}, что $A_1 \notin V_1$.

Рассматриваем всевозможные B-наборы, содержащие E_{11}.

1. В каждом B-наборе матриц $X_1 = E_{11}, X_2, \ldots, X_n$ найдется отличная от E_{11} матрица, лежащая в V_1. Обозначим W подпространство матриц с нулевыми первой строкой и столбцом, $V' = V_1 \cap W$. Пусть $\overline{V'}$ — это V', рассмотренное как подпространство $M_{n-1}(\mathbb{F})$. В силу леммы 2.1.2, все ортогональные с E_{11} матрицы лежат в W, $X_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X'_k \end{pmatrix}$ для всех $k = 2, 3, \ldots, n$. Поэтому $X'_2, X'_3, \ldots, X'_n$ — B-набор в пространстве $M_{n-1}(\mathbb{F})$ и в каждом таком наборе найдется лежащая в $\overline{V'}$. Применим утверждение индукции и получим, что $\overline{V'} = M_{n-1}(\mathbb{F})$, то есть $V' = W$ и $W \subseteq V_1$. Но A_1 ортогональна E_{11}, следовательно $A_1 \in W \subseteq V_1$. Противоречие.

2. Найдется такой B-набор $X_1 = E_{11}, X_2, X_3, \ldots, X_n$, что $X_i \notin V_1$ для всех $i = 2, 3, \ldots, n$. С учетом леммы 2.1.3, найдется такая матрица $P_2 \in GL_n(\mathbb{F})$ и такие ненулевые $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, что

$X_k = \lambda_i P_2 E_{ii} P_2^{-1}$ для всех $k = 2, 3, \ldots, n$ и $X_1 = P_2 E_{11} P_2^{-1} = E_{11}$. Обозначим $V_2 = P_2^{-1} V_1 P_2$, получим $E_{11} \in V_2$, $\lambda_k E_{kk} \notin V_2$ для всех $k = 2, 3, \ldots, n$. Но V_2 является подпространством в $M_n(\mathbb{F})$. Поэтому $E_{22}, E_{33}, \ldots, E_{nn} \notin V_2$.

Далее будем рассматривать наборы вида $A, B, E_{33}, \ldots, E_{nn}$, где матрицы A и B — ортогональны, типа $(1, 2)$ и имеют ранг и индекс 1. Из условия теоремы следует, что либо $A \in V_2$, либо $B \in V_2$.

1) Покажем, что $E_{12} \in V_2$. Пусть $A = E_{11} + xE_{12}$, $B = -xE_{12} + E_{22}$, где $x \in \mathbb{F}$ и $x \neq 0$. Тогда

$$AB = BA = 0, \quad A^2 = A, \quad B^2 = B, \quad \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B = 1.$$

Но это означает, что A и B удовлетворяют всем требуемым условиям. Если при некотором значении $x = x_0$ матрица $A = E_{11} + x_0 E_{12} \in V_2$, то используя линейность V_2 и условие $E_{11} \in V_2$, получим $E_{12} \in V_2$.

Если же такого значения x_0 нет, то найдутся ненулевые $x_1 \neq x_2$, что матрицы $-x_1 E_{12} + E_{22} \in V_2$ и $-x_2 E_{12} + E_{22} \in V_2$. Это следует из того, что $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$ и в поле $\mathbb{F}$ не меньше трех элементов. С учетом линейности V_2, имеем $E_{12} \in V_2$.

2) Полагая $A = E_{11} + xE_{21}$, $B = -xE_{21} + E_{22}$, аналогично пункту 1), получаем $E_{21} \in V_2$.

3) Пусть $A = E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}$, $B = E_{11} - E_{12} - E_{21} + E_{22}$. Проверим, что $AB = 0$ и $BA = 0$:

$$AB = (E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22})(E_{11} - E_{12} - E_{21} + E_{22}) =$$

$$(E_{11} - E_{12}) + (-E_{11} + E_{12}) + (E_{21} - E_{22}) + (-E_{21} + E_{22}) = 0;$$

$$BA = (E_{11} - E_{12} - E_{21} + E_{22})(E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}) =$$

$$(E_{11} + E_{12}) + (-E_{11} - E_{12}) + (E_{21} + E_{22}) + (-E_{21} - E_{22}) = 0.$$

Обозначим $d = 1 + 1$. Так как характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна 2, $d \neq 0$. Покажем, что $A^2 \neq 0$, $B^2 \neq 0$. Для этого рассмотрим матрицы $E_{11}A^2E_{11}$ и $E_{11}B^2E_{11}$:

$$E_{11}A^2E_{11} = E_{11}(E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22})(E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22})E_{11} =$$

$$(E_{11} + E_{12})(E_{11} + E_{21}) = E_{11} + E_{11} = dE_{11} \neq 0;$$

$$E_{11}B^2E_{11} = E_{11}(E_{11} - E_{12} - E_{21} + E_{22})(E_{11} - E_{12} - E_{21} + E_{22})E_{11} =$$

$$(E_{11} - E_{12})(E_{11} - E_{21}) = E_{11} + E_{11} = dE_{11} \neq 0.$$

Ясно, что $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B = 1$. С учетом неравенства $A^2 \neq 0$ имеем $0 < \operatorname{rk} A^2 \leqslant \operatorname{rk} A = 1$. Следовательно, $\operatorname{rk} A^2 = 1 = \operatorname{rk} A$ и $\operatorname{Ind} A = 1$. Аналогично, $\operatorname{Ind} B = 1$. Можем утверждать, что либо $A \in V_2$, либо $B \in V_2$. Но тогда $E_{22} \in V_2$, так как $E_{11} \in V_2$, $E_{12} \in V_2$, $E_{21} \in V_2$. Противоречие.

Таким образом, все матрицы ранга и индекса 1 лежат в V. Покажем, что произвольная матрица лежит в V. Для этого представим ее в виде суммы матриц ранга 1. Если среди слагаемых встретится матрица S индекса не 1, то $S = Q^{-1}E_{12}Q$ для некоторой матрицы $Q \in GL_n(\mathbb{F})$. Но $E_{12} = (E_{11} + E_{12}) - E_{11}$, причем матрицы E_{11} и $E_{11} + E_{12}$ имеют ранг и индекс 1. Поэтому

$$S = Q^{-1}((E_{11} + E_{12}) - E_{11})Q =$$

$$= Q^{-1}(E_{11} + E_{12})Q - Q^{-1}E_{11}Q = A_1 - A_2 \in V,$$

так как сопряжение сохраняет ранг и индекс матриц. Тем самым, все матрицы ранга 1 лежат в V. А значит, и их сумма. Это наблюдение завершает доказательство. $\square$

Теорема 2.1.10. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле,* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$*,* $n \geqslant 1$ *— целое число, а линейное отображение* $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ *монотонно относительно* $\overset{\sharp}{\leqslant}$*- (или* $\overset{cn}{\leqslant}$*-) порядка. Тогда* T *имеет один из двух видов, указанных ниже* ($\alpha \in \mathbb{F}$, $P \in GL_n(\mathbb{F})$)*:*

1) $T(X) = \alpha P^{-1} X P$ *для всех* $X \in M_n(\mathbb{F})$*;*

2) $T(X) = \alpha P^{-1} X^t P$ *для всех* $X \in M_n(\mathbb{F})$*.*

Доказательство. 1. Если $T \equiv 0$, то T — отображение указанного вида при $\alpha = 0$. Далее будем считать $T \not\equiv 0$. Для доказательства утверждения теоремы будем видоизменять отображение T, комбинирую его с различными сопряжениями, умножениями на скаляры и транспонированиями. С учетом леммы 1.1.14, полученное отображение также будет линейным и мотононным относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- (или $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-) порядка. В результате применения такой серии замен будет получено тождественное отображение, а значит любое линейное монотонное отображение T имеет требуемый вид.

2. Как отмечено в замечании перед леммой 2.1.9, найдется B-набор $X_1, X_2, \ldots, X_n$, что $X_i \notin \operatorname{Ker} T$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Применим лемму 2.1.3 и получим, что $X_i = \beta_i Q_0 E_{ii} Q_0^{-1}$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ для некоторых ненулевых $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$ и $Q_0 \in GL_n(\mathbb{F})$. Сделаем замену $T(X) \to T_1(X) = T(Q_0 X Q_0^{-1})$. Тогда $T_1(\beta_i E_{ii}) \notin \operatorname{Ker} T_1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. С учетом линейности отображения T_1, матрицы $E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn} \notin \operatorname{Ker} T_1$.

Далее, матрицы $Y_1 = T_1(E_{11}), Y_2 = T_1(E_{22}), \ldots, Y_n = T_1(E_{nn})$ образуют B-набор по теореме 2.1.6. Тогда $Y_i = \alpha_i P_0 E_{ii} P_0^{-1}$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ для некоторых ненулевых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ и матрицы $P_0 \in GL_n(\mathbb{F})$. Заменяя $T_1(X) \to T_2(X) = P_0^{-1} T_1(X) P_0$, получим $T_2(E_{ii}) = \alpha_i E_{ii}$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. Итак, существуют такие ненулевые $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, что $T_2(E_{ii}) = \alpha_i E_{ii}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажем, что $T_2(E_{ij}) = b_{ij}E_{ij} + c_{ij}E_{ji}$ для некоторых $b_{ij} \in \mathbb{F}$ и $c_{ij} \in \mathbb{F}$ при всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, причем $b_{ij}c_{ij} = 0$. Кроме того, если существуют i и j такие, что $\alpha_i \neq \alpha_j$, то для этих i и j справедливо $T_2(E_{ij}) = 0$.

а) Фиксируем произвольные различные $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и введем обозначение $M = T_2(E_{ij})$. Далее будем рассматривать наборы матриц вида $A, B, E_{11}, \ldots, \widehat{E_{ii}}, \ldots, \widehat{E_{jj}}, \ldots, E_{nn}$, где A и B ортогональны, имеют ранг и индекс 1, их тип (i, j) (символ $\widehat{X}$ означает отсутствие матрицы X в наборе). Ясно, что все такие совокупности матриц являются B-наборами. Если же, кроме того, $T_2(A) \neq 0$ и $T_2(B) \neq 0$, то, с учетом теоремы 2.1.6, $T_2(A)$ и $T_2(B)$ также имеют ранг и индекс 1 и ортогональны. В силу равенств $T_2(E_{kk}) = \alpha_k E_{kk}$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$, матрицы $T_2(A)$ и $T_2(B)$ имеют тип (i, j) в этом случае.

Пусть t — некоторый ненулевой элемент поля $\mathbb{F}$, $A_t = tE_{ii} + E_{ij}$, $B_t = -tE_{jj} + E_{ij}$. Тогда A_t и B_t ортогональны. Кроме того, они имеют ранг и индекс 1, так как $t \neq 0$. Если бы обе матрицы $T_2(A_t)$ и $T_2(B_t)$ были ненулевыми, то они имели бы ранг 1. Таким образом, если ранг одной из них больше 1, то другая обязана быть нулевой.

Докажем, что $T_2(A_t) \neq 0$ при $t \neq 0$. Предположим, существует такое ненулевое $t_0 \in \mathbb{F}$, что выполнено равенство $T_2(A_{t_0}) = 0$. Но $T_2(A_{t_0}) = \alpha_i t_0 E_{ii} + M$, откуда $M = -\alpha_i t_0 E_{ii}$. Тогда

$$\operatorname{rk} T_2(B_t) = \operatorname{rk}(-\alpha_j t E_{jj} + M) = \operatorname{rk}(-\alpha_j t E_{jj} - \alpha_i t_0 E_{ii}) = 2$$

при любом $t \neq 0$. Следовательно, $T_2(A_t) = 0$ при всех $t \neq 0$.

Покажем, что равенство $T_2(A_t) = 0$ может выполняться не более, чем при одном значении t. В самом деле, если справедливы равенства

$T_2(A_{t_1'}) = T_2(A_{t_2'}) = 0$ для некоторых различных $t_1', t_2' \in \mathbb{F}$, то $0 = T_2(A_{t_1'}) - T_2(A_{t_2'}) = T_2((t_1' - t_2')E_{ii}) = \alpha_i(t_1' - t_2')E_{ii} \neq 0$. Но в поле $\mathbb{F}$ по крайней мере 2 ненулевых элемента, так как $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$. Противоречие. Таким образом, $T_2(A_t) \neq 0$ при $t \neq 0$. Аналогично, $T_2(B_t) \neq 0$ при $t \neq 0$.

Фиксируем некоторые ненулевые и различные $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$. Так как матрицы $T_2(A_{t_k})$ при $k = 1, 2$ имеют тип (i, j), то и $M = T_2(A_{t_k}) - t_k\alpha_i E_{ii}$, $k = 1, 2$ также имеет тип (i, j). Обозначим $M = aE_{ii} + bE_{ij} + cE_{ji} + dE_{jj}$.

Матрицы $T_2(A_{t_1})$ и $T_2(A_{t_2})$ имеют ранг 1. Запишем равенство нулю соответствующих 2×2 миноров этих матриц:

$$(t_1\alpha_i + a)d - bc = 0; \quad (t_2\alpha_i + a)d - bc = 0.$$

Комбинируя написанные равенства, получим $d = 0$, $bc = 0$. Аналогично, рассматривая $T_2(B_{t_1})$ и $T_2(B_{t_2})$, показываем, что $a = 0$. В результате, $T_2(E_{ij}) = b_{ij}E_{ij} + c_{ij}E_{ji}$, причем $b_{ij}c_{ij} = 0$.

б) Покажем, что если $\alpha_i \neq \alpha_j$, то $T_2(E_{ij}) = 0$. В дальнейшем покажем, что $T_2(E_{ij})$ не может быть нулевым, а значит все α_i равны.

Предположим, $T_2(E_{ij}) \neq 0$ и $\alpha_i \neq \alpha_j$. Без ограничения общности, будем считать, что $b_{ij} \neq 0$, $c_{ij} = 0$. Тогда из условия ортогональности матриц $T_2(A_{t_1}) = t_1\alpha_i E_{ii} + b_{ij}E_{ij}$ и $T_2(B_{t_1}) = -t_1\alpha_j E_{jj} + b_{ij}E_{ij}$ получим:

$$0 = (t_1\alpha_i E_{ii} + b_{ij}E_{ij})(-t_1\alpha_j E_{jj} + b_{ij}E_{ij}) =$$

$$t_1\alpha_i b_{ij}E_{ij} - t_1\alpha_j b_{ij}E_{ij} = (\alpha_i - \alpha_j)t_1 b_{ij}E_{ij}.$$

Но равенство последнего выражения нулю невозможно, так как $\alpha_i \neq \alpha_j$, $t_1 \neq 0$, $b_{ij} \neq 0$. Получили противоречие. Поэтому условие $\alpha_i \neq \alpha_j$ влечет выполнение равенства $T_2(E_{ij}) = 0$.

4. При $i \neq j$ рассмотрим выражение $T_2(E_{ij} + E_{ji})$. Используя результат предыдущего пункта, можем утверждать, что $T_2(E_{ij} + E_{ji}) = p_{ij}E_{ij} + q_{ij}E_{ji}$ для некоторых p_{ij} и q_{ij} при всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Покажем, что $p_{ij}q_{ij} \neq 0$.

Как и в пункте 3, рассмотрим матрицы $A = E_{ii} + E_{ij} + E_{ji} + E_{jj}$, $B = E_{ii} - E_{ij} - E_{ji} + E_{jj}$. Аналогично пункту 3) леммы 2.1.9 доказываем, что матрицы A и B ортогональны и имеют ранг и индекс 1, так как характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна 2. Кроме того, эти матрицы имеют тип (i, j) и $T_2(A) \neq 0$, $T_2(B) \neq 0$. Поэтому $\operatorname{rk} T_2(A) = 1$. Но $T_2(A) = \alpha_i E_{ii} + p_{ij}E_{ij} + q_{ij}E_{ji} + \alpha_j E_{jj}$, откуда

$$\alpha_i\alpha_j - p_{ij}q_{ij} = 0, \quad p_{ij}q_{ij} = \alpha_i\alpha_j \neq 0.$$

5. Докажем, что $T_2(E_{ij}) \neq 0$ при всех различных $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Предположим, что $T_2(E_{ij}) = 0$. Тогда $T_2(E_{ji}) = T_2(E_{ij} + E_{ji})$. По пункту 3, $T_2(E_{ji}) = b_{ji}E_{ij} + c_{ji}E_{ji}$, $b_{ji}c_{ji} = 0$. С другой стороны, в пункте 4 показано, что $T_2(E_{ij} + E_{ji}) = p_{ij}E_{ij} + q_{ij}E_{ji}$, $p_{ij}q_{ij} \neq 0$.

$$b_{ji}E_{ij} + c_{ji}E_{ji} = T_2(E_{ji}) = T_2(E_{ij} + E_{ji}) = p_{ij}E_{ij} + q_{ij}E_{ji}.$$

Эти равенства возможны, только если $b_{ji} = p_{ij}$ и $c_{ji} = q_{ij}$. Но тогда

$$0 = b_{ji}c_{ji} = p_{ij}q_{ij} \neq 0.$$

Противоречие. Следовательно, $T_2(E_{ij}) \neq 0$ при любых значениях $i, j = 1, 2, \ldots, n$ и все α_i совпадают.

6. Докажем биективность отображения T_2. Фиксируем базис из n^2 матриц $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{n,n-1}, E_{nn}$ в $M_n(\mathbb{F})$.

В этом базисе отображение T_2 выражается матрицей порядка n^2, все столбцы которой содержат единственный ненулевой элемент. Это следует из того факта, что матричные единицы переходят в матричные единицы с некоторым ненулевым коэффициентом. В самом деле, как показано в пункте 2, $T_2(E_{ii}) = \alpha_i E_{ii}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, в пункте 3 доказано, что $T_2(E_{ij}) = b_{ij}E_{ij} + c_{ij}E_{ji}$ для всех различных $i, j = 1, 2, \ldots, n$. При этом $b_{ij}c_{ij} = 0$, то есть хотя бы один из коэффициентов b_{ij} и c_{ij} нулевой. А результат пункта 5 позволяет утверждать, что ровно один.

Отметим также, что различные матричные единицы переходят в различные. Действительно, пусть матрицы E_{ij} и $E_{i'j'}$ различны, а $T_2(E_{ij})$ и $T_2(E_{i'j'})$ пропорциональны. С учетом выражения для $T_2(E_{ij})$, это возможно, только если $i \neq j$, $j' = i$, $i' = j$. Но если бы матрицы $T_2(E_{ij})$ и $T_2(E_{ji})$ при некоторых различных i и j были пропорциональны одной матричной единице, то матрица $T_2(E_{ij} + E_{ji})$ также была бы пропорциональна матричной единице. С учетом результата пункта 4, это невозможно. Поэтому каждая строка матрицы отображения T_2 содержит единственный ненулевой элемент. Следовательно, она имеет ранг n^2 и обратима. Получили, что отображение T_2 — биекция.

7. Как показано в пункте 5, все α_i равны. Заменяя отображение $T_2(X)$ на $T_3(X) = \alpha_1^{-1}T_2(X)$, получим $T_3(E_{ii}) = E_{ii}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим $\widehat{b}_{ij} = \alpha_1^{-1}b_{ij}$, $\widehat{c}_{ij} = \alpha_1^{-1}c_{ij}$.

8. В пункте 3 доказано, что $T_2(E_{ij}) = b_{ij}E_{ij} + c_{ij}E_{ji}$ при всех различных $i, j = 1, 2, \ldots, n$, причем $b_{ij}c_{ij} = 0$, откуда $T_3(E_{ij}) = \widehat{b}_{ij}E_{ij} + \widehat{c}_{ij}E_{ji}$ при любых различных $i, j = 1, 2, \ldots, n$, кроме того $\widehat{b}_{ij}\widehat{c}_{ij} = 0$.

С учетом равенства $\widehat{b}_{12}\widehat{c}_{12} = 0$, хотя бы одно из этих чисел нулевое.

1) $\widehat{c}_{12} = 0$. Обозначим $T_4(X) = T_3(X), \widetilde{b}_{ij} = \widehat{b}_{ij}, \widetilde{c}_{ij} = \widehat{c}_{ij}$;

2) $\widehat{b}_{12} = 0$. Обозначим $T_4(X) = (T_3(X))^t, \widetilde{b}_{ij} = \widehat{c}_{ij}, \widetilde{c}_{ij} = \widehat{b}_{ij}$.

В результате, $T_4(E_{ij}) = \widetilde{b}_{ij}E_{ij} + \widetilde{c}_{ij}E_{ji}$ при любых различных значениях $i, j = 1, 2, \ldots, n$, а коэффициент $\widetilde{c}_{12} = 0$. Кроме того, справедливо равенство $T_4(E_{ii}) = E_{ii}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

9. Так как отображение T_2 биективно по пункту 6, T_4 также биективно и к нему применимо следствие 2.1.7. Получаем, что отображение T_4 переводит матрицы ранга и индекса 1 в матрицы ранга и индекса 1.

Коэффициент $\widetilde{c}_{12} = 0$, поэтому $T_4(E_{12}) = \widetilde{b}_{12}E_{12}$. Покажем, что в этом случае $T_4(E_{1j}) = \widetilde{b}_{1j}E_{1j}$ при всех $j > 2$. Для этого рассмотрим матрицу $E_{11} + E_{12} + E_{1j}$, имеющую ранг и индекс 1. Под действием отображения T_4 эта матрица переходит в матрицу

$$T_4(E_{11} + E_{12} + E_{1j}) = E_{11} + \widetilde{b}_{12}E_{12} + \widetilde{b}_{1j}E_{1j} + \widetilde{c}_{1j}E_{j1} = S.$$

Допуская, что неравенство $\widetilde{c}_{1j} \neq 0$ выполнено, получаем $\operatorname{rk} S = 2$. Но это противоречит следствию 2.1.7. Поэтому $T_4(E_{1j}) = \widetilde{b}_{1j}E_{1j}$ при любом $j > 1$. А так как различные матричные единицы переходят в различные, $T_4(E_{i1}) = \widetilde{b}_{i1}E_{i1}$ при любом $i > 1$.

Для доказательства равенства $T_4(E_{ij}) = \widetilde{b}_{ij}E_{ij}$ при всех i и j необходимо проверить его при $i > 1$, $j > 1$, $i \neq j$. В силу условий на i и j, матричные единицы E_{ii}, E_{i1} и E_{ij} различны, а потому матрица $E_{ii} + E_{i1} + E_{ij}$ имеет ранг и индекс 1. А значит и матрица $T_4(E_{ii} + E_{i1} + E_{ij}) = E_{ii} + \widetilde{b}_{i1}E_{i1} + \widetilde{b}_{ij}E_{ij} + \widetilde{c}_{ij}E_{ji}$ имеет ранг 1. Последнее возможно только при $\widetilde{c}_{ij} = 0$, откуда $T_4(E_{ij}) = \widetilde{b}_{ij}E_{ij}$.

Положим $\widetilde{b}_{ii} = 1$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Получим $T_4(E_{ij}) = \widetilde{b}_{ij}E_{ij}$ при всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

10. Обозначим $B = \sum\limits_k \widetilde{b}_{1k}E_{kk}$. Тогда $B^{-1} = \sum\limits_s (\widetilde{b}_{1s})^{-1}E_{ss}$ Заменим отображение T_4 на отображение $T_5(X) = BT_4(X)B^{-1}$ и вычислим мат-

рицу $T_5(E_{ij})$:

$$T_5(E_{ij}) = BT_4(E_{ij})B^{-1} = (\sum_k \widetilde{b}_{1k}E_{kk})\widetilde{b}_{ij}E_{ij}(\sum_s (\widetilde{b}_{1s})^{-1}E_{ss}) =$$

$$\widetilde{b}_{1i}\widetilde{b}_{ij}(\widetilde{b}_{1j})^{-1}E_{ij} = f_{ij}E_{ij}, \text{ где } f_{ij} = \widetilde{b}_{1i}\widetilde{b}_{ij}(\widetilde{b}_{1j})^{-1}.$$

Как отмечено в пункте 9, $\widetilde{b}_{ii} = 1$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$, откуда $f_{ii} = 1$ и $f_{1i} = 1$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$. Покажем, что в этом случае $f_{ij} = 1$ при всех i и j. Так как отображение T_5 получено из T_4 сопряжением, к T_5 применимо следствие 2.1.7. Рассмотрим матрицу $C_{ij} = (E_{11} + E_{1j}) + (E_{i1} + E_{ij})$ при всех $i > 1$ и $j > 1$. Ее ранг равен 1. Докажем, что ее индекс также равен 1. При $i = j$ это уже было сделано в пункте 4. Пусть $i \neq j$. Заметим, что

$$E_{11}C_{ij}^2E_{11} = (E_{11} + E_{1j})(E_{11} + E_{i1}) = E_{11} \neq 0.$$

Это означает, что $C_{ij}^2 \neq 0$. Но тогда $\operatorname{Ind} C_{ij} = 1$. По свойству отображения T_5, $\operatorname{rk} T_5(C_{ij}) = 1$. Отметим, что $T_5(C_{ij}) = (f_{11}E_{11} + f_{1j}E_{1j}) + (f_{i1}E_{i1} + f_{ij}E_{ij})$. Запишем равенство нулю соответствующего 2×2 минора:

$$f_{11}f_{ij} - f_{1j}f_{i1} = 0; \quad f_{11}f_{ij} = f_{1j}f_{i1}.$$

Известно, что $f_{kk} = 1$, $f_{1k} = 1$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Полагая $i = j$ в равенстве $f_{11}f_{ij} = f_{1j}f_{i1}$, получаем $f_{i1} = 1$ при любом $i = 1, 2, \dots, n$. Но тогда из того же соотношения $f_{ij} = 1$ при всех $i > 1$, $j > 1$.

В результате, $f_{ij} = 1$ и $T_5(E_{ij}) = E_{ij}$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$. В силу линейности отображения T_5 имеем $T_5(X) = X$ для любой матрицы X. Теорема доказана. $\square$

Укажем некоторые непосредственные следствия теоремы 2.1.10:

Следствие 2.1.11. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— поле,* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, $n \geqslant 1$ *— целое число, а линейное отображение* $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ *монотонно относительно* $\overset{\sharp}{\leqslant}$*- (или* $\overset{cn}{\leqslant}$*-) порядка. Тогда* T *либо тождественно нулевое, либо биективное.*

Следствие 2.1.12. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— поле,* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, $n \geqslant 1$ *— целое число,* $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ *— линейное отображение. Тогда* T *монотонно относительно* $\overset{\sharp}{\leqslant}$*- порядка, если и только если* T *монотонно относительно* $\overset{cn}{\leqslant}$*- порядка.*

Следствие 2.1.13. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— поле,* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, $n \geqslant 1$ *— целое число, а линейное отображение* $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ *монотонно относительно* $\overset{\sharp}{\leqslant}$*- (или* $\overset{cn}{\leqslant}$*-) порядка. Тогда* T *строго монотонно относительно* $\overset{\sharp}{\leqslant}$*- (или* $\overset{cn}{\leqslant}$*-) порядка.*

2.2 Аддитивные отображения

В предыдущем параграфе была получена характеризация линейных монотонных отображений. Оказывается, можно охарактеризовать и более общие аддитивные отображения, действуя аналогичным способом. Более точно, в этом параграфе будет получен общий вид аддитивных отображений матриц порядка $n \geqslant 2$, монотонных относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- или $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-порядков, над полем из трех и более элементов. Также будут построены примеры неаддитивных монотонных отображений. Кроме того, в параграфе показано, что эндоморфизмы кольца матриц монотонны относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка, и, как следствие, получена характеризация всех эндоморфизмов кольца $M_n(\mathbb{F})$. Подобная характеризация для алгебр известна как теорема Нетер-Сколема (см. [6]).

Для начала, заметим, что в доказательстве теоремы 2.1.6 используется только аддитивность отображения T, поэтому справедлива

Теорема 2.2.1. *Пусть матрицы* $X_1, X_2, \ldots, X_n \in M_n(\mathbb{F})$ *образуют* B*-набор, аддитивное отображение* $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ *монотонно относительно* $\overset{\sharp}{\leqslant}$*- или* $\overset{cn}{\leqslant}$*-порядка. Кроме того,* $X_i \notin \operatorname{Ker} T$ *для каждого* $i = 1, 2, \ldots, n$*. Тогда матрицы* $T(X_1), T(X_2), \ldots, T(X_n)$ *образуют* B*-набор.*

Кроме того, результат леммы 2.1.9 также может быть расширен:

Лемма 2.2.2. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле с числом элементов* $|\mathbb{F}| \geqslant 3$*,* $n \geqslant 1$ *— целое число,* V *— некоторая аддитивная подгруппа* $M_n(\mathbb{F})$ *и такая, что в любом* B*-наборе найдется матрица, лежащая в* V*. Тогда* $V = M_n(\mathbb{F})$*.*

Доказательство. Докажем индукцией по n. При $n = 1$ утверждение очевидно верно. Пусть $n > 1$. Предположим, найдется матрица A_1 ранга и индекса 1, что $A_1 \notin V$. Рассмотрим некоторый B-набор $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Тогда $A_j \in V$ для некоторого $j > 1$. По определению, матрицы A_1 и A_j ортогональны и $\operatorname{rk} A_j = \operatorname{Ind} A_j = 1$. Следовательно, существуют $P_1 \in GL_n(\mathbb{F})$ и $\lambda_1 \neq 0$ такие, что $A_j = \lambda_1 P_1^{-1} E_{11} P_1$. Обозначим $V_1 = P_1 V P_1^{-1}$ и $B_1 = P_1 A_1 P_1^{-1}$. Получим $\lambda_1 E_{11} \in V_1$, $B_1 \notin V_1$. Более того, матрицы $\lambda_1 E_{11}$ и B_1 ортогональны.

1. Предположим, что в каждом B-наборе матриц, содержащем $\lambda_1 E_{11}$, найдется отличная от $\lambda_1 E_{11}$ матрица, принадлежащая V_1. Применим утверждение индукции к матрицам с нулевыми первой строкой и столбцом. Получим, что любая матрица такого вида лежит в V_1. В том числе и B_1 в силу леммы 2.1.2. Противоречие.

2. Найдется такой B-набор матриц $\{X_1 = \lambda_1 E_{11}, X_2, X_3, \ldots, X_n\}$, что $X_i \notin V_1$ для всех $i = 2, 3, \ldots, n$. С учетом леммы 2.1.3, найдет-

ся матрица $P_2 \in GL_n(\mathbb{F})$ и ненулевые скаляры $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, что $X_i = \lambda_i P_2^{-1} E_{ii} P_2$ для всех $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Обозначим $V_2 = P_2^{-1} V_1 P_2$. Нетрудно видеть, что $\lambda_i E_{ii} \in V_2$, если и только если $i = 1$.

1) Фиксируем некоторое ненулевое $\lambda \in \mathbb{F}$. Рассмотрим B-набор матриц $\lambda E_{11}, \lambda_2 E_{22}, \lambda_3 E_{33}, \dots, \lambda_n E_{nn}$. В силу предположений и с учетом условия теоремы $\lambda E_{11} \in V_2$. Поэтому можем утверждать, что $\lambda E_{11} \in V_2$ при любом $\lambda \in \mathbb{F}$, так как при $\lambda = 0$ это также верно.

Далее будем рассматривать наборы вида $A, B, \lambda_3 E_{33}, \dots, \lambda_n E_{nn}$, где матрицы A и B имеют ранг и индекс 1, ортогональны и типа $(1, 2)$. Нетрудно видеть, что указанные наборы являются B-наборами. Из условия леммы следует, что либо $A \in V_2$, либо $B \in V_2$.

2) Покажем, что найдется такое ненулевое $y \in \mathbb{F}$, что $y E_{12} \in V_2$. Пусть $A = E_{11} + x E_{12}$, $B = -x E_{12} + E_{22}$, где $x \in \mathbb{F}$ и $x \neq 0$. Если при некотором значении $x = x_0$ матрица $A = E_{11} + x_0 E_{12}$ лежит в V_2, то используя аддитивность V_2 и условие $E_{11} \in V_2$, получим $x_0 E_{12} \in V_2$. Тогда положим $y = x_0 \neq 0$ и имеем требуемое.

Если же такого значения x_0 нет, то в силу условия $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, найдутся ненулевые $x_1 \neq x_2$, что $-x_1 E_{12} + E_{22} \in V_2$ и $-x_2 E_{12} + E_{22} \in V_2$. Используя аддитивность V_2, получим $(x_2 - x_1) E_{12} \in V_2$ и положим $y = x_2 - x_1 \neq 0$.

Можем утверждать, что $-y E_{12} + \lambda_2 E_{22} \notin V_2$, так как иначе $\lambda_2 E_{22} \in V_2$, что неверно. Рассматривая матрицы $A = \mu(\lambda_2 E_{11} + y E_{12})$, $B = -y E_{12} + \lambda_2 E_{22}$ при любом ненулевом $\mu \in \mathbb{F}$, получаем, что $\mu \lambda_2 E_{11} + \mu y E_{12} \in V_2$ при любом ненулевом $\mu \in \mathbb{F}$. Кроме того, при $\mu = 0$ условие $\mu \lambda_2 E_{11} + \mu y E_{12} \in V_2$ также выполнено. Но, как отмечалось выше, $\nu E_{11} \in V_2$ при любом $\nu \in \mathbb{F}$, откуда $\mu y E_{12} \in V_2$. Таким образом, $\alpha E_{12} \in V_2$ при любом $\alpha \in \mathbb{F}$ $(\mu = \frac{\alpha}{y})$.

3) Полагая $A = E_{11}+xE_{21}$, $B = -xE_{21}+E_{22}$, аналогично пункту 2), получаем $\beta E_{21} \in V_2$ при любом $\beta \in \mathbb{F}$.

4) Покажем, что найдутся такие скаляры $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{F}$, что $\alpha_0\beta_0 \neq 0$ и $\alpha_0\beta_0 \neq -1$. Действительно, если бы для всех $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ было выполнено $\alpha\beta = -1$, то при ненулевых $\alpha_1 \neq \alpha_2$, получим $\alpha_1\beta = -1 = \alpha_2\beta$, откуда $\alpha_1 = \alpha_2$.

Положим

$$A = \alpha_0\beta_0 E_{11} + \alpha_0 E_{12} + \beta_0 E_{21} + E_{22},$$

$$B = \alpha_0^{-1}\beta_0^{-1}E_{11} - \beta_0^{-1}E_{12} - \alpha_0^{-1}E_{21} + E_{22}.$$

Проверим, что эти матрицы ортогональны:

$$AB = (\alpha_0\beta_0 E_{11} + \alpha_0 E_{12} + \beta_0 E_{21} + E_{22})\times$$

$$\times(\alpha_0^{-1}\beta_0^{-1}E_{11} - \beta_0^{-1}E_{12} - \alpha_0^{-1}E_{21} + E_{22}) =$$

$$= (E_{11}-\alpha_0E_{12})+(-E_{11}+\alpha_0E_{12})+(\alpha_0^{-1}E_{21}-E_{22})+(-\alpha_0^{-1}E_{21}+E_{22}) = 0;$$

$$BA = (\alpha_0^{-1}\beta_0^{-1}E_{11} - \beta_0^{-1}E_{12} - \alpha_0^{-1}E_{21} + E_{22})\times$$

$$\times(\alpha_0\beta_0 E_{11} + \alpha_0 E_{12} + \beta_0 E_{21} + E_{22}) =$$

$$= (E_{11}+\beta_0^{-1}E_{12})+(-E_{11}-\beta_0^{-1}E_{12})+(-\beta_0E_{21}-E_{22})+(\beta_0E_{21}+E_{22}) = 0.$$

В силу условий $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$, $\alpha_0\beta_0 \neq -1$, имеем $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B = 1$. Покажем, что $\operatorname{Ind} A = 1$. Рассмотрим матрицу $E_{11}A^2E_{11}$:

$$E_{11}A^2E_{11} = E_{11}(\alpha_0\beta_0 E_{11} + \alpha_0 E_{12} + \beta_0 E_{21} + E_{22})\times$$

$$\times(\alpha_0\beta_0 E_{11} + \alpha_0 E_{12} + \beta_0 E_{21} + E_{22})E_{11} =$$

$$= (\alpha_0\beta_0E_{11} + \alpha_0E_{12})(\alpha_0\beta_0E_{11} + \beta_0E_{21}) = \alpha_0\beta_0(\alpha_0\beta_0 + 1)E_{11} \neq 0.$$

Таким образом $A^2 \neq 0$, откуда $0 < \operatorname{rk} A^2 \leqslant \operatorname{rk} A = 1$. Следовательно $\operatorname{rk} A^2 = 1 = \operatorname{rk} A$, $\operatorname{Ind} A = 1$. Аналогично, $\operatorname{Ind} B = 1$. Можем утверждать, что либо $\lambda_2 A \in V_2$, либо $\lambda_2 B \in V_2$. С учетом пунктов 1), 2) и 3) имеем $\lambda_2 E_{22} \in V_2$. Противоречие.

Таким образом, все матрицы ранга и индекса 1 лежат в V. Покажем, что произвольная матрица лежит в V. Для этого представим ее в виде суммы матриц ранга 1. Если среди слагаемых встретится матрица S индекса не 1, то $S = Q^{-1}E_{12}Q$ для некоторой матрицы $Q \in GL_n(\mathbb{F})$. Но $E_{12} = (E_{11} + E_{12}) - E_{11}$, причем E_{11} и $E_{11} + E_{12}$ имеют ранг и индекс 1. Поэтому $S = Q^{-1}(E_{11} + E_{12})Q - Q^{-1}E_{11}Q = A_1 - A_2 \in V$, так как сопряжение переводит матрицы ранга и индекса 1 в матрицы ранга и индекса 1. Тем самым, все матрицы ранга 1 лежат в V. А значит, и их сумма. Это наблюдение завершает доказательство. $\square$

Лемма 2.2.3. *Пусть аддитивное отображение* $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ *монотонно относительно* $\overset{\sharp}{\leqslant}$*-* ($\overset{cn}{\leqslant}$*-*) *порядка,* $n \geqslant 2$ *— целое число. Известно, что существуют* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ *с условием* $T(\alpha_k E_{kk}) = \beta_k E_{kk}$ *для любого* $k = 1, 2, \ldots, n$*. Кроме того, матрицы* X *и* Y *имеют ранг и индекс 1, ортогональны и типа* (i, j)*. Тогда* $T(X)$ *и* $T(Y)$ *также ортогональны. Если они обе ненулевые, то имеют тип* (i, j)*,* $\operatorname{rk} T(X) = \operatorname{rk} T(Y) = 1$*,* $\operatorname{rk}(T(X) + T(Y)) = 2$*.*

Доказательство. Если среди матриц $T(X)$ и $T(Y)$ есть нулевая, то

$$T(X)T(Y) = 0, \quad T(Y)T(X) = 0.$$

Пусть $T(X) \neq 0$, $T(Y) \neq 0$. Обозначим $\Gamma_0 = \{\alpha_1 E_{11}, \ldots, \alpha_n E_{nn}\}$. Заменим $\alpha_i E_{ii}$ на X и $\alpha_j E_{jj}$ на Y в наборе Γ_0, получим набор Γ. Нетрудно видеть, что Γ является B-набором. Так как T монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- и $\overset{\text{cn}}{\leqslant}$-порядков, то $T(\Gamma)$ также является B-набором. В частности, матрицы $T(X)$ и $T(Y)$ ортогональны.

Применяя лемму 2.1.2 к матрицам $T(X)$ и $T(\alpha_k E_{kk}) = \beta_k E_{kk}$ при всех $k \neq i$, $k \neq j$, получаем, что $T(X)$ имеет тип (i, j). Аналогично, $T(Y)$ имеет тип (i, j).

Кроме того, найдется такая обратимая матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$ и такие ненулевые $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$, что $T(X) = \lambda_1 P^{-1} E_{11} P$, $T(Y) = \lambda_2 P^{-1} E_{22} P$. Следовательно, $\operatorname{rk} T(X) = \operatorname{rk} T(Y) = 1$ и $\operatorname{rk}(T(X) + T(Y)) = 2$. $\square$

Замечание 2.2.4. Если выполнены условия предыдущей леммы и известно, что ранг матрицы $T(X)$ больше 1, то матрица $T(Y)$ нулевая.

Лемма 2.2.5. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — целое число, аддитивное отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- ($\overset{cn}{\leqslant}$-) порядка. Пусть, кроме того, существуют такие скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, что $T(\alpha_k E_{kk}) = \beta_k E_{kk}$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда существуют аддитивные инъективные функции $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, удовлетворяющие соотношениям $T(tE_{ii}) = f_i(t) E_{ii}$ при всех $t \in \mathbb{F}$ и всех $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Покажем, что для любого $t \in \mathbb{F}$ и любого значения $i = 1, 2, \ldots, n$, найдется такое $s \in \mathbb{F}$, что $T(tE_{ii}) = sE_{ii}$. В силу равенства $T(0) = 0$, при $t = 0$ соответствующее s равно 0. Пусть $t \neq 0$. Рассмотрим B-набор $\Gamma = \{\alpha_1 E_{11}, \ldots, \alpha_n E_{nn}\}$. Заменяя $\alpha_i E_{ii}$ на tE_{ii} в Γ, получим B-набор Γ_t. По теореме 2.2.1, набор матриц $T(\Gamma_t)$ также является B-набором. Так как $T(\alpha_j E_{jj}) = \beta_j E_{jj}$ при всех $j = 1, 2, \ldots, n$, то $T(tE_{ii}) = sE_{ii}$ для некоторого $s \in \mathbb{F}$.

С учетом выражения для $T(tE_{ii})$ при $t \in \mathbb{F}$, определим n функций $f_i\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ равенствами $T(tE_{ii}) = f_i(t) E_{ii}$. В силу аддитивности отображения T, для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ выполнено $T((t_1 + t_2)E_{ii}) =$

$T(t_1E_{ii}) + T(t_2E_{ii})$, откуда $f_i(t_1 + t_2) = f_i(t_1) + f_i(t_2)$. Поэтому f_i — аддитивные функции при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Покажем, что $f_i(t) \neq 0$ при $t \neq 0$ и $i = 1, 2, \ldots, n$. Предположим, найдется такое ненулевое $\lambda \in \mathbb{F}$, что $f_i(\lambda) = 0$. Фиксируем некоторые $t \in \mathbb{F}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Рассмотрим матрицы $\lambda E_{ii} + tE_{ij}$ и $-tE_{ij} + \lambda E_{jj}$. Как показано выше, эти матрицы имеют ранг и индекс 1, ортогональны и типа (i, j). Итак, можем применить лемму 2.2.3.

Отметим, что

$$T(\lambda E_{ii} + \lambda E_{jj}) = f_i(\lambda)E_{ii} + f_j(\lambda)E_{jj} = f_j(\lambda)E_{jj},$$

откуда $\operatorname{rk} T(\lambda E_{ii} + \lambda E_{jj}) = \operatorname{rk}(f_j(\lambda)E_{jj}) \leqslant 1$. С другой стороны, если $T(\lambda E_{ii} + tE_{ij}) \neq 0$ и $T(-tE_{ij} + \lambda E_{jj}) \neq 0$, то из леммы 2.2.3 следует, что

$$\operatorname{rk} T(\lambda E_{ii} + \lambda E_{jj}) = \operatorname{rk}(T(\lambda E_{ii} + tE_{ij}) + T(-tE_{ij} + \lambda E_{jj})) = 2.$$

Тем самым $T(\lambda E_{ii} + tE_{ij}) = 0$ или $T(-tE_{ij} + \lambda E_{jj}) = 0$. Поэтому либо $T(tE_{ij}) = -f_i(\lambda)E_{ii} = 0$, либо $T(tE_{ij}) = f_j(\lambda)E_{jj}$. В результате, определена функция $g_{ij} \colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ такая, что выполнено $T(tE_{ij}) = g_{ij}(t)E_{jj}$. Аналогично, существует функция $g_{ji} \colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, удовлетворяющая соотношению $T(tE_{ji}) = g_{ji}(t)E_{jj}$. Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть матрицы $\lambda E_{ii} + tE_{ji}$ и $-tE_{ji} + \lambda E_{jj}$.

Так как $|F| \geqslant 3$, то найдутся такие ненулевые $\mu, \nu \in \mathbb{F}$, что $\mu\nu \neq -1$.

Нетрудно заметить, что $\alpha_i(E_{ii} + \nu^{-1}E_{ij} + \mu^{-1}E_{ji} + \mu^{-1}\nu^{-1}E_{jj}) \perp \alpha_i(E_{ii} - \mu E_{ij} - \nu E_{ji} + \mu\nu E_{jj})$, эти матрицы имеют ранг и индекс 1 и тип (i, j). В самом деле, аналогичное утверждение было проверено при доказательстве леммы 2.2.2. По лемме 2.2.3, образы этих матриц при отображении T также ортогональны. Следовательно,

$$T(\alpha_i(E_{ii} + \nu^{-1}E_{ij} + \mu^{-1}E_{ji} + \mu^{-1}\nu^{-1}E_{jj}))\times$$

$$\times T(\alpha_i(E_{ii} - \mu E_{ij} - \nu E_{ji} + \mu\nu E_{jj})) = 0,$$

$$(f_i(\alpha_i)E_{ii} + (g_{ij}(\alpha_i\nu^{-1}) + g_{ji}(\alpha_i\mu^{-1}) + f_j(\alpha_i\mu^{-1}\nu^{-1}))E_{jj})\times$$

$$(f_i(\alpha_i)E_{ii} + (g_{ij}(-\alpha_i\mu) + g_{ji}(-\alpha_i\nu) + f_j(\alpha_i\mu\nu))E_{jj}) = 0.$$

Отметим, что коэффициент при E_{ii} равен $f_i^2(\alpha_i) = \beta_i^2 \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что $f_i(t) \neq 0$ при $t \neq 0$. В силу аддитивности f_i, имеем инъективность f_i при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Лемма 2.2.6. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — целое число, аддитивное отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- ($\overset{cn}{\leqslant}$-) порядка. Кроме того, существуют инъективные аддитивные функции $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, удовлетворяющие условию $T(tE_{ii}) = f_i(t)E_{ii}$ для всех $t \in \mathbb{F}$ и $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для любых значений индексов $i, j = 1, 2, \ldots, n$ и любых $p, q \in \mathbb{F}$ существуют такие $r, s \in \mathbb{F}$, что $T(pE_{ij} + qE_{ji}) = rE_{ij} + sE_{ji}$, причем число нулевых элементов в паре (p, q) совпадает с числом нулевых элементов в паре (r, s).*

Доказательство. Фиксируем $p \in \mathbb{F}$ и $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Если $i = j$, то можем положить $r = f_i(p)$ и $s = f_i(q)$.

Пусть $i \neq j$, $t \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Как отмечалось выше, матрицы $tE_{ii} + pE_{ij}$ и $-pE_{ij} + tE_{jj}$ имеют ранг и индекс 1, ортогональны и типа (i, j). Следовательно, к ним применима лемма 2.2.3.

Предположим, что $T(t_1E_{ii} + pE_{ij}) = 0$ при некотором $t_1 \neq 0$. Тогда $T(pE_{ij}) = -f_i(t_1)E_{ii}$. Так как f_i и f_j инъективны, то

$$\operatorname{rk} T(-pE_{ij} + tE_{jj}) = \operatorname{rk}(f_i(t_1)E_{ii} + f_j(t)E_{jj}) = 2$$

при всех ненулевых $t \in \mathbb{F}$. По замечанию 2.2.4, $T(tE_{ii} + pE_{ij}) = 0$ при $t \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Отметим также, что $|\mathbb{F}| \geqslant 3$ и найдется ненулевое $t_2 \in \mathbb{F}$,

$t_2 \neq t_1$. Но тогда

$$0 = T(t_1 E_{ii} + pE_{ij}) - T(t_2 E_{ii} + pE_{ij}) =$$

$$= T((t_1 - t_2)E_{ii}) = f_i(t_1 - t_2)E_{ii} \neq 0.$$

Противоречие.

Итак, $T(tE_{ii}+pE_{ij}) \neq 0$ при $t \neq 0$. Аналогично, $T(-pE_{ij}+tE_{jj}) \neq 0$ при $t \neq 0$. По лемме 2.2.3, эти матрицы имеют ранг 1 и тип (i, j). Более того, матрица $T(tE_{ii}) = f_i(t)E_{ii}$ имеет тип (i, j), откуда $T(pE_{ij})$ также имеет тип (i, j). Обозначим $S = T(pE_{ij})$.

Пусть $S = aE_{ii} + bE_{ij} + cE_{ji} + dE_{jj}$. По доказанному выше, матрицы $f_i(t)E_{ii} + S$ и $f_j(t)E_{jj} - S$ имеют ранг 1. Тем самым 2×2-минор, образованный пересечением i и j строк с i и j столбцами, нулевой. Следовательно

$$(f_i(t) + a)d - bc = 0, \quad (-a)(f_j(t) - d) - (-b)(-c) = 0$$

при всех $t \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Пусть $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ — различные ненулевые скаляры. Имеем

$$0 = ((f_i(t_1) + a)d - bc) - ((f_i(t_2) + a)d - bc) = f_i(t_1 - t_2)d.$$

Но $f_i(t_1 - t_2) \neq 0$, откуда $d = 0$. Кроме того, из второго равенства получим $a = 0$. Следовательно, $bc = 0$. Другими словами, при всех $p \in \mathbb{F}$ найдутся $b, c \in \mathbb{F}$ такие, что $bc = 0$ и $T(pE_{ij}) = bE_{ij} + cE_{ji}$. Аналогично, при всех $q \in \mathbb{F}$ существуют $b', c' \in \mathbb{F}$ такие, что $b'c' = 0$ и $T(qE_{ji}) = b'E_{ij} + c'E_{ji}$. Итак, доказано, что для любых $p, q \in \mathbb{F}$ существуют $r, s \in \mathbb{F}$, удовлетворяющие соотношению $T(pE_{ij} + qE_{ji}) = rE_{ij} + sE_{ji}$. Отметим также, что $rs = 0$ при $pq = 0$.

Пусть далее $pq \neq 0$, $pq \neq -1$. Аналогично доказательству леммы 2.2.2, проверяем, что матрицы

$$A_0 = E_{ii} + pE_{ij} + qE_{ji} + pqE_{jj}, \quad A_1 = -pqE_{ii} + pE_{ij} + qE_{ji} - E_{jj}$$

ортогональны, имеют ранг и индекс 1 и тип (i, j). Более того,

$$T(A_0) = f_i(1)E_{ii} + rE_{ij} + sE_{ji} + f_j(pq)E_{jj}$$

для некоторых $r, s \in \mathbb{F}$. Так как f_i и f_j инъективны, то $T(A_0) \neq 0$. Аналогично, $T(A_1) \neq 0$. По лемме 2.2.3, $\mathrm{rk}(T(A_0)) = 1$, откуда

$$f_i(1)f_j(pq) - rs = 0 \Rightarrow rs = f_i(1)f_j(pq) \neq 0.$$

Если $p = q = 0$, то $r = s = 0$. Покажем, что если $p \neq 0$ и $q = 0$, то в паре (r, s) ровно один нулевой элемент. Пусть не так, $r = s = 0$ и $T(pE_{ij}) = 0$. Фиксируем некоторое $q_0 \in \mathbb{F}$, $q_0 \neq 0$, $pq_0 \neq -1$. Тогда $T(pE_{ij}) = 0$ и

$$T(q_0E_{ji}) = T(pE_{ij} + q_0E_{ji}) = r_0E_{ij} + s_0E_{ji},$$

то есть соотношения $r_0s_0 = 0$ и $r_0s_0 \neq 0$ выполнены одновременно. Противоречие. Аналогично доказываем, что при $p = 0$ и $q \neq 0$ в паре (r, s) ровно один нулевой элемент.

Как показано выше, если $pq \neq 0$ и $pq \neq -1$, то $rs \neq 0$. Пусть $pq = -1$. Докажем, что $rs \neq 0$ в этом случае. Предположим противное, $pq = -1$, $rs = 0$, $T(pE_{ij} + qE_{ji}) = rE_{ij} + sE_{ji}$. Так как $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, то существует ненулевое $p_1 \in \mathbb{F}$, $p \neq p_1$.

Через $r_1, s_1 \in \mathbb{F}$ обозначим ненулевые коэффициенты матрицы $T(p_1E_{ij} + +qE_{ji}) = r_1E_{ij} + s_1E_{ji}$. Кроме того, обозначим $p_2 = p - p_1$, $r_2 = r - r_1$, $s_2 = s - s_1$, $T(p_2E_{ij}) = r_2E_{ij} + s_2E_{ji}$. Как показано выше, $r_1s_1 \neq 0$, $r_2s_2 = 0$.

Без ограничения общности, $s = 0$. Тогда $s_2 = -s_1 \neq 0$, $r_2 = 0$, $r = r_1 \neq 0$. Таким образом либо $T(qE_{ji}) = s_1E_{ji}$, либо $T(qE_{ji}) = r_1E_{ij}$. Если $T(qE_{ji}) = s_1E_{ji}$, то $T(p_2E_{ij} + qE_{ji}) = (s_2 + s_1)E_{ji} = 0$, хотя $p_2q \neq -1$. Итак, $T(qE_{ji}) = r_1E_{ij} = T(pE_{ij} + qE_{ji})$ и $T(pE_{ij}) = 0$. Полученное противоречие доказывает, что число нулевых элементов в паре (p, q) совпадает с числом нулевых элементов в паре (r, s). $\square$

Лемма 2.2.7. *Пусть отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ инъективно, аддитивно и монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- ($\overset{cn}{\leqslant}$-) порядка. Пусть A — некоторая матрица ранга и индекса 1. Тогда $T(A)$ также имеет ранг и индекс 1.*

Доказательство. Так как $\operatorname{rk} A = \operatorname{Ind} A = 1$, то существует такая обратимая матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$ и ненулевое $\lambda \in \mathbb{F}$, что $A = \lambda P^{-1} E_{11} P$. Рассмотрим матрицы $X_1 = A$, $X_2 = P^{-1} E_{22} P$, …, $X_n = P^{-1} E_{nn} P$. Легко показать, что $\Gamma = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ является B-набором.

Более того, T инъективно и $X_i \notin \operatorname{Ker} T$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ По теореме 2.2.1, набор матриц $T(\Gamma)$ также является B-набором. Поэтому матрица $T(A) = T(X_1)$ имеет ранг и индекс 1. Но это именно то, что требовалось доказать. $\square$

Теорема 2.2.8. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — целое число, аддитивное отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- ($\overset{cn}{\leqslant}$-) порядка. Тогда T имеет одну из следующих форм:*

1) $T(X) = \alpha P^{-1} X^{\varphi} P$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$;

2) $T(X) = \alpha P^{-1} (X^{\varphi})^t P$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$;

(здесь $\alpha \in \mathbb{F}$, $P \in GL_n(\mathbb{F})$, $\varphi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — инъективный эндоморфизм поля $\mathbb{F}$).

Доказательство. Очевидно, $T \equiv 0$, если $\alpha = 0$. Пусть $T \not\equiv 0$.

Для доказательства теоремы будем модифицировать отображение T, аналогично тому, что делалось при доказательстве 2.1.10. Фактически, отображение T будет комбинироваться с различными сопряжениями, умножениями на скаляры и транспонированиями, и результатом этих операций будет аддитивное отображение T', монотонное относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- или $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-порядка. Доказательство теоремы будет завершено, если $T'(X) = X^{\varphi}$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{F})$, где φ — инъективный эндоморфизм поля $\mathbb{F}$.

Так как $T \not\equiv 0$, то используя лемму 2.2.2, делаем вывод, что существует B-набор $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ такой, что $X_i \notin \operatorname{Ker} T$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим $Y_i = T(X_i)$ при всех $i = 1, 2 \ldots, n$. По теореме 2.2.1, набор из n матриц $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ также является B-набором. Из леммы 2.1.3 следует, что существуют такие ненулевые скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$ и обратимые матрицы $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$, что $X_i = \alpha_i P^{-1} E_{ii} P$, $Y_i = \beta_i Q^{-1} E_{ii} Q$ при всех $i = 1, 2 \ldots, n$. Положим $T_1(X) = QT(P^{-1}XP)Q^{-1}$ при всех $X \in M_n(\mathbb{F})$. С учетом леммы 1.1.14, отображение T_1 аддитивно и монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- или $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-порядка. Кроме того, $T_1(\alpha_i E_{ii}) = \beta_i E_{ii}$ при всех $i = 1, 2 \ldots, n$.

Применяя лемму 2.2.5, получим, что существуют аддитивные инъективные отображения $f_1, f_2, \ldots, f_n \colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ такие, что $T_1(tE_{ii}) = f_i(t)E_{ii}$ при всех $t \in \mathbb{F}$ и $i = 1, 2, \ldots, n$. Но тогда, в силу леммы 2.2.6, для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ с условием $i \neq j$ и любых $p, q \in \mathbb{F}$ существуют такие $r, s \in \mathbb{F}$, что $T(pE_{ij} + qE_{ji}) = rE_{ij} + sE_{ji}$, причем число нулевых элементов в паре (p, q) совпадает с числом нулевых элементов в паре (r, s).

Докажем, что отображение T_1 инъективно. Пусть матрица X такова, что $T_1(X) = 0$, $X = \{x_{ij}\}$. Обозначим $X_{ij} = x_{ij}E_{ij}$ и $Y_{ij} = T_1(X_{ij})$ при всех $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда $X = \sum\limits_{i,j} X_{ij}$ и $\sum\limits_{i,j} Y_{ij} = 0$.

По доказанному выше, $Y_{ii} = T_1(x_{ii}E_{ii}) = f_i(x_{ii})E_{ii} = y_i E_{ii}$ при некоторых $y_i \in \mathbb{F}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, $Y_{ij} + Y_{ji} = y_{ij}E_{ij} + y_{ji}E_{ji}$

при некоторых $y_{ij} \in \mathbb{F}$ и $y_{ji} \in \mathbb{F}$, $i < j$. Таким образом

$$\sum_i y_i E_{ii} + \sum_{i<j} (y_{ij} E_{ij} + y_{ji} E_{ji}) = 0.$$

Легко видеть, что коэффициенты y_i и y_{ij} нулевые. Так как функции f_i инъективны и $f_i(x_{ii}) = y_i = 0$, то $x_{ii} = 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$. Более того, $y_{ij} = y_{ji} = 0$ и $x_{ij} = x_{ji} = 0$ по лемме 2.2.6 при всех $i < j$. В результате, $X = 0$ и отображение T_1 инъективно.

Применяя лемму 2.2.7, получаем, что T_1 переводит матрицы ранга и индекса 1 в матрицы ранга и индекса 1.

Если $T_1(E_{12}) = c_{12} E_{12}$ для некоторого ненулевого $c_{12} \in \mathbb{F}$, то обозначим $T_2(X) = T_1(X)$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{F})$. Иначе положим $T_2(X) = (T_1(X))^t$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$. В обоих случаях имеем $T_2(E_{12}) = c_{12} E_{12}$ для некоторого ненулевого $c_{12} \in \mathbb{F}$.

Ясно, что при всех значениях $q \neq 0$ существует такое $s \in \mathbb{F}$, что $T_2(qE_{21}) = sE_{21}$. Тогда $T_2(pE_{12}) = rE_{12}$ для некоторого $r \in \mathbb{F}$ при $p \in \mathbb{F}$.

Покажем, что для каждого $j > 2$ имеем $T_2(pE_{1j}) = rE_{1j}$ для подходящего $r \in \mathbb{F}$ при $p \in \mathbb{F}$. Рассмотрим матрицу $E_{11}+E_{12}+pE_{1j}$. Нетрудно проверить, что эта матрица имеет ранг и индекс 1. Предположим, что $T_2(pE_{1j}) = s_p E_{j1}$ для $s_p \in \mathbb{F}$. Тогда

$$T_2(E_{11} + E_{12} + pE_{1j}) = E_{11} + c_{12} E_{12} + s_p E_{j1} = S.$$

В силу неравенства $s_p \neq 0$ имеем $\operatorname{rk} S = 2$. С другой стороны, $\operatorname{rk} S = 1$ по лемме 2.2.7. Это противоречие доказывает, что $T_2(pE_{1j}) = rE_{1j}$ для некоторого $r \in \mathbb{F}$ при любом $p \in \mathbb{F}$ и $j > 1$. Аналогично, при всех $q \in \mathbb{F}$ и $i > 1$ существует $s \in \mathbb{F}$ такое, что $T_2(qE_{i1}) = sE_{i1}$. Обозначим $T_2(E_{i1}) = c_{i1} E_{i1}$.

Докажем равенство $T_2(pE_{ij}) = rE_{ij}$ для подходящего $r \in \mathbb{F}$ при $p \in \mathbb{F}$ и $i > 1$, $j > 1$, $i \neq j$ В силу условий на i и j, матричные единицы E_{ii}, E_{i1} и E_{ij} различны, а потому матрица $E_{ii} + E_{i1} + pE_{ij}$ имеет ранг и индекс 1. Если $T_2(pE_{ij}) = s_pE_{ji}$, то матрица $T_2(E_{ii} + E_{i1} + pE_{ij}) = E_{ii} + c_{i1}E_{i1} + s_pE_{ji}$ имеет ранг 2, что противоречит лемме 2.2.7. Тем самым доказано, что $T_2(pE_{ij}) = rE_{ij}$ для подходящего $r \in \mathbb{F}$ при всех $p \in \mathbb{F}$ и $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Таким образом, определены n^2 аддитивных инъективных функций $f_{ij}\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, с условием $T_2(tE_{ij}) = f_{ij}(t)E_{ij}$ при всех $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $t \in \mathbb{F}$.

Фиксируем произвольные различные $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $t \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$. Как отмечалось выше, матрицы $tE_{ii} + E_{ij}$ и $E_{ij} - tE_{jj}$ ортогональны. Кроме того, они имеют ранг и индекс 1 и тип (i, j). По лемме 2.2.3, матрицы $T_2(tE_{ii} + E_{ij})$ и $T_2(E_{ij} - tE_{jj})$ также ортогональны.

$$0 = T_2(tE_{ii} + E_{ij})T_2(E_{ij} - tE_{jj}) = (f_{ii}(t)E_{ii} + f_{ij}(1)E_{ij})\times$$

$$\times(f_{ij}(1)E_{ij} - f_{jj}(t)E_{jj}) = (f_{ii}(t)f_{ij}(1) - f_{ij}(1)f_{jj}(t))E_{ij}.$$

Следовательно, $f_{ij}(1)(f_{ii}(t) - f_{jj}(t)) = 0$. Так как $f_{ij}(1) \neq 0$, то $f_{ii}(t) = f_{jj}(t)$ при всех $t \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ и $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Кроме того, $f_{ii}(0) = 0 = f_{jj}(0)$. Обозначим $\alpha = f_{11}(1) \neq 0$, $f'_{ij}(t) = \alpha^{-1}f_{ij}(t)$ при всех $t \in \mathbb{F}$, $T_3(X) = \alpha^{-1}T_2(X)$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{F})$. Из леммы 1.1.14 следует, что отображение T_3 аддитивно и монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- или $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-порядка. Очевидно, $T_3(tE_{ij}) = f'_{ij}(t)E_{ij}$ и $f'_{ii}(1) = 1$.

Через c'_{ij} обозначим $f'_{ij}(1)$ при всех $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. По доказанному, $c'_{ii} = 1$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим матрицу $B = \sum\limits_{i=1}^{n} c'_{1i}E_{ii} \in GL_n(\mathbb{F})$. Обозначим

$$T_4(X) = BT_3(X)B^{-1}, \quad T_4(tE_{ij}) = \widetilde{f}_{ij}(t)E_{ij}, \quad \widetilde{c}_{ij} = \widetilde{f}_{ij}(1).$$

Так как $T_4(E_{ii}) = E_{ii}$ и $T_4(E_{1i}) = E_{1i}$ при любом $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\widetilde{c}_{ii} = \widetilde{c}_{1i} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Положим $\varphi(t) = \widetilde{f}_{11}(t)$. Итак, отображение φ аддитивно и инъективно, $\varphi(1) = 1$. Кроме того, $\widetilde{f}_{ii}(t) = \varphi(t)$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $t \in \mathbb{F}$.

Вновь фиксируем произвольные индексы i и j, $i \neq j$. Пусть, для начала, $x, y \in \mathbb{F}$ таковы, что $xy \neq 0$, $xy \neq -1$. Рассмотрим матрицу $E_{ii} + xE_{ij} + yE_{ji} + xyE_{jj}$. Так как эта матрица имеет ранг и индекс 1, то $\operatorname{rk} T_4(E_{ii} + xE_{ij} + yE_{ji} + xyE_{jj}) = 1$. Тогда $\widetilde{f}_{ii}(1)\widetilde{f}_{jj}(xy) - \widetilde{f}_{ij}(x)\widetilde{f}_{ji}(y) = 0$. Более того, $\widetilde{f}_{ii}(1) = 1$, $\widetilde{f}_{jj}(xy) = \varphi(xy)$. Таким образом

$$\varphi(xy) = \widetilde{f}_{ij}(x)\widetilde{f}_{ji}(y). \tag{$*$}$$

Если $x = 0$ или $y = 0$, то соотношение (*) также выполнено. Пусть $xy = -1$. Так как $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, то найдется ненулевое $x_1 \in \mathbb{F}$, $x_1 \neq x$. Следовательно, $x_1 y \neq -1$ и $\varphi(x_1 y) = \widetilde{f}_{ij}(x_1)\widetilde{f}_{ji}(y)$. Кроме того, $x_2 = x - x_1 \neq x$, $x_2 y \neq -1$ и $\varphi(x_2 y) = \widetilde{f}_{ij}(x_2)\widetilde{f}_{ji}(y)$,

$$\varphi(xy) = \varphi(x_1 y + x_2 y) = \varphi(x_1 y) + \varphi(x_2 y) =$$

$$= \widetilde{f}_{ij}(x_1)\widetilde{f}_{ji}(y) + \widetilde{f}_{ij}(x_2)\widetilde{f}_{ji}(y) = \widetilde{f}_{ij}(x_1 + x_2)\widetilde{f}_{ji}(y) = \widetilde{f}_{ij}(x)\widetilde{f}_{ji}(y).$$

Тем самым доказано, что соотношение $(*)$ имеет место при всех $x, y \in \mathbb{F}$ и всех $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ с условием $i \neq j$.

Если $x = y = 1$ и $j = 1$, то $\widetilde{c}_{i1}\widetilde{c}_{1i} = 1$, откуда $\widetilde{c}_{i1} = 1$ при всех $i > 1$.

Докажем, что $\widetilde{c}_{ij} = 1$ при всех $i > 1$, $j > 1$, $i \neq j$. Рассмотрим матрицу $C = (E_{11} + E_{1j}) + (E_{i1} + E_{ij})$. Очевидно, $C^2 \neq 0$, $\operatorname{rk} C = 1$. Итак, $\operatorname{Ind} C = 1$. Но тогда и

$$\operatorname{rk} T_4(C) = (E_{11} + E_{1j}) + (E_{i1} + \widetilde{c}_{ij}E_{ij}) = 1.$$

Следовательно, $\widetilde{c}_{ij} = 1$ для всех $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

В заключение докажем, что $\widetilde{f}_{ij}(t) = \varphi(t)$ при всех i и j, $i \neq j$. Для этого положим $x = t$, $y = 1$ в $(*)$ и воспользуемся равенством $\widetilde{f}_{ji}(1) = 1$. Получим, что $T_4(X) = X^{\varphi}$ для любой матрицы X. Кроме того, так как $\widetilde{f}_{ij}(x) = \varphi(x)$ и $\widetilde{f}_{ji}(y) = \varphi(y)$, то имеем равенство $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ при всех $x, y \in \mathbb{F}$. Следовательно, φ — инъективный эндоморфизм поля $\mathbb{F}$. $\square$

Укажем некоторые непосредственные следствия теоремы 2.2.8.

Следствие 2.2.9. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — целое число, а аддитивное отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- или $\overset{cn}{\leqslant}$-порядка. Тогда T либо тождественно нулевое, либо инъективное.*

Следствие 2.2.10. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — целое число, $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — аддитивное отображение. Тогда T монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка, если и только если T монотонно относительно $\overset{cn}{\leqslant}$-порядка.*

Следующая теорема представляет собой кольцевую версию известной теоремы Нетер-Сколема для алгебр. Ее доказательство будет получено в качестве следствия теоремы 2.2.8.

Теорема 2.2.11. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — целое число, $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — эндоморфизм кольца матриц $M_n(\mathbb{F})$. Тогда существуют такая матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$ и эндоморфизм $\varphi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ поля $\mathbb{F}$, что $T(X) = P^{-1}X^{\varphi}P$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{F})$.*

Доказательство. Покажем, что отображение T монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка.

1) Заметим, что $T(X^\sharp) = (T(X))^\sharp$ для произвольной матрицы X индекса 1. В самом деле, нетрудно проверить, что $T(X^\sharp)$ удовлетворяет всем трем тождествам для $(T(X))^\sharp$, и равенство следует из единственности групповой обратной матрицы.

2) Пусть $X \overset{\sharp}{\leqslant} Y$. Тогда $XX^\sharp = YX^\sharp = X^\sharp Y$, откуда

$$T(X)(T(X))^\sharp = T(Y)(T(X))^\sharp = (T(X))^\sharp T(Y),$$

и $T(X) \overset{\sharp}{\leqslant} T(Y)$.

Аддитивность эндоморфизма T очевидна. Следовательно, имеем возможность применить теорему 2.2.8. Тем самым, существуют такие $\alpha \in \mathbb{F}$, $P \in GL_n(\mathbb{F})$ и ψ — инъективный эндоморфизм поля $\mathbb{F}$, что отображение T имеет вид $T(X) = \alpha P^{-1} X_\psi P$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{F})$ или $T(X) = \alpha P^{-1} X_\psi^t P$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{F})$.

Ясно, что $T(E) = \alpha E$, где $E = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{nn} \in M_n(\mathbb{F})$ — единичная матрица. Кроме того, $T(E) = T(EE) = (T(E))^2$, откуда $\alpha E = \alpha^2 E$. Следовательно, $\alpha(\alpha - 1) = 0$, и либо $\alpha = 0$, либо $\alpha = 1$.

1) Случай $\alpha = 0$. Положим $\varphi(t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{F}$. Тогда для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{F})$ имеем $T(X) = P^{-1} X^\varphi P$, и теорема доказана.

2) Случай $\alpha = 1$. Положим $\varphi(t) = \psi(t)$ для всех $t \in \mathbb{F}$. Предположим, что $T(X) = P^{-1}(X^\varphi)^t P$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{F})$ и рассмотрим матрицу $T(E_{11})$:

$$P^{-1}E_{11}P = T(E_{11}) = T(E_{12}E_{21}) = T(E_{12})T(E_{21}) =$$

$$= (P^{-1}E_{21}P)(P^{-1}E_{12}P) = P^{-1}E_{22}P.$$

Следовательно, $E_{11} = E_{22}$ в этом случае, что неверно. Тем самым доказано, что $T(X) = P^{-1}X^\varphi P$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{F})$. $\square$

Если $|\mathbb{F}| = 2$ и $n = 2$, то существуют линейные отображения, монотонные относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-порядков, но не представимые в том виде, который получен в характеризационном результате (теорема 2.2.8).

Пример 2.2.12. Пусть $|\mathbb{F}| = 2$, $n = 2$, T линейно , $T(E_{ii}) = E_{ii}$, $T(E_{ij}) = 0$ при $i \neq j$. Тогда T монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-порядков.

Доказательство. Имеем 3 пары ортогональных матриц:
$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}.$$
Таким образом, имеется всего 3 B-набора, переходящих при действии отображения T в B-набор $\{E_{11}, E_{22}\}$.

Покажем, что отображение T монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-порядков. Пусть матрицы X и Y таковы, что $X \overset{\sharp}{\leqslant} Y$ ($X \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} Y$). Если $X = Y$ или $X = 0$, то $T(X) \overset{\sharp}{\leqslant} T(Y)$ ($T(X) \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} T(Y)$) и все доказано. Пусть $X \neq Y$, $X \neq 0$. Тогда $0 \overset{\sharp}{<} X \overset{\sharp}{<} Y$ ($0 \overset{\mathrm{cn}}{<} X \overset{\mathrm{cn}}{<} Y$) и $\operatorname{rk} Y = 2$, то есть матрица Y невырождена. Следовательно, матрицы X и $Y - X$ образуют B-набор. По доказанному выше, матрицы $T(X)$ и $T(Y - X)$ также образуют B-набор. Поэтому
$$0 \overset{\sharp}{<} T(X) \overset{\sharp}{<} T(X) + T(Y - X) = T(Y)$$
и $0 \overset{\mathrm{cn}}{<} T(X) \overset{\mathrm{cn}}{<} T(Y)$. □

Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $n \geqslant 2$ — целое число. Следующий пример показывает, что существует неаддитивное отображение T, монотонное относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-порядков.

Пример 2.2.13. Пусть $T(X) = \begin{cases} 0, & \text{если } X = E_{11}; \\ X, & \text{иначе.} \end{cases}$

Тогда T монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-порядков.

Доказательство. Пусть $X \overset{\sharp}{\leqslant} Y$. Ясно, что при $X = E_{11}$ или $X = 0$ имеем $T(X) = 0 \overset{\sharp}{\leqslant} T(Y)$. Более того, если $Y = E_{11}$, то либо $X = E_{11}$, либо $X = 0$.

Пусть $X \neq E_{11}$ и $Y \neq E_{11}$; тогда $T(X) = X \overset{\sharp}{\leqslant} Y = T(Y)$. Таким образом T монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка. Аналогично, T монотонно относительно $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-порядка. □

Отметим, что отображение T в примере 2.2.13 не является монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{<}$-порядков. С другой стороны, существует неаддитивное монотонное отображение, монотонное относительно $\overset{\sharp}{<}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{<}$-порядков.

Пример 2.2.14. Пусть $T(X) = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{kk}$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$, где $k = \operatorname{rk} X$. Тогда T монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{<}$-порядков.

Доказательство. Пусть $X \overset{\sharp}{<} Y$ или $X \overset{\mathrm{cn}}{<} Y$; тогда $\operatorname{rk} X < \operatorname{rk} Y$. Нетрудно видеть, что $T(X) \overset{\sharp}{<} T(Y)$ и $T(X) \overset{\mathrm{cn}}{<} T(Y)$. Таким образом T монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{<}$-порядков. □

Глава 3

Нелинейные монотонные отображения

В этой главе будут рассматриваться нелинейные отображения пространства матриц, монотонные относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$- порядков.

В первом параграфе будут введены специальные разложения матриц, тесно связанные с жордановой нормальной формой, названные спектральными ортогональными разложениями. Эти разложения оказываются эффективным инструментом исследования свойств рассматриваемых порядков и монотонных отображений. Кроме того, вводимые разложения имеют некоторое количество других интересных свойств. В частности, они могут быть использованы для вычисления многочленов от матриц, а ненулевые элементы разложения конкретной матрицы являются базисом в линейном пространстве значений многочленов от этой матрицы.

Во втором параграфе полученные результаты применяются для изучения свойств нелинейных биективных отображений матриц индекса 1, монотонных относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка. Кроме того, будет построен ряд примеров «диких» биективных монотонных отображений, не являющихся аддитивными. Также во втором параграфе будет установлено, что биективное отображение является строго-монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка на множестве матриц индекса 1 тогда и только тогда, когда это отображение является 0-аддитивным, в смысле определения 1.1.13. Более того построен пример, наглядно демонстрирующий отсутствие требуемой сюръективности без дополнительного условия строгой монотонности.

В третьем параграфе развитая техника будет применяться для получения характеризации инъективных монотонных отображений на множестве диагонализуемых матриц. Также будут построены примеры, показывающие существенность требования инъективности.

В четвертом параграфе изучаются непрерывные инъективные монотонные отображения на пространстве матриц с комплексными коэффициентами. Оказывается, что непрерывные монотонные отображения ведут себя достаточно предсказуемо на диагонализуемых матрицах. Более того, сочетание непрерывности и монотонности влечет за собой голоморфность специальной «спектральной функции» отображения, и для изучения могут быть применены методы комплексного анализа. В результате получена полная характеризация непрерывных инъективных монотонных отображений, из которой, в частности, следует, что все отображения с этими свойствами аддитивны.

3.1 Спектральные ортогональные разложения матриц

Пусть $\overline{\mathbb{F}}$ – алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}$. Через $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ обозначим блочно-диагональную матрицу с блоками $A_1 \in M_k(\mathbb{F})$ и $A_2 \in M_{n-k}(\mathbb{F})$, $0 \leqslant k \leqslant n$. При этом, если $k = 0$, то $A = A_2$, а если $k = n$, то $A = A_1$. Кроме того, если $A_1 \in GL_k(\mathbb{F})$, то подматрица A_1 обратима при $k > 0$.

Утверждение 3.1.1. Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $A \perp B$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $A_1 \in GL_k(\mathbb{F})$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ для некоторых $B_1 \in M_{n-k}(\mathbb{F})$.

Доказательство. Будем считать, что B представлена в виде

$$B = \begin{pmatrix} B_4 & B_3 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}, \quad B_4 \in M_k(\mathbb{F}), \quad B_1 \in M_{n-k}(\mathbb{F}).$$

Так как $AB = BA = 0$, то $A_1B_4 = 0$, $A_1B_3 = 0$ и $B_2A_1 = 0$. Но $A_1 \in GL_k(\mathbb{F})$, откуда $B_2 = B_3 = B_4 = 0$ и B имеет требуемую форму. □

Утверждение 3.1.2. Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$, $\operatorname{Ind} A = 1$, $\operatorname{rk} A = k$. Тогда существуют такие обратимые матрицы $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$ и $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$, что $A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Доказательство. Так как $\operatorname{Ind} A = 1$, то A не имеет нильпотентных жордановых блоков, и утверждение напрямую следует из теоремы о жордановой нормальной форме матрицы. □

Утверждение 3.1.3. Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $A \perp B$, $\operatorname{Ind} A = 1$, $\operatorname{rk} A = k$. Тогда существуют матрицы $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$, $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$ и $B_1 \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$ такие, что выполнены равенства

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Доказательство. По утверждению 3.1.2 существуют такие матрицы $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$ и $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$, что $A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Так как матрицы A и B ортогональны, то матрицы $\widetilde{A} = P^{-1}AP$ и $\widetilde{B} = P^{-1}BP$ также ортогональны. Таким образом, по утверждению 3.1.1 матрица $\widetilde{B}$ имеет вид $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$, где $B_1 \in M_{n-k}(\mathbb{F})$. $\square$

Лемма 3.1.4. *Пусть* $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $A \perp B$, $\operatorname{Ind} A = 1$. *Тогда*

1) $\operatorname{rk}(A + B) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$*;*

2) $\operatorname{Ind}(A + B) = \operatorname{Ind} B$.

Доказательство. По утверждению 3.1.3 найдется такая обратимая матрица $P \in GL(\overline{\mathbb{F}})$, что $A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, $B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} P^{-1}$ для некоторых $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$ и $B_1 \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

1) Заметим, что $\operatorname{rk}(A + B) = \operatorname{rk} A_1 + \operatorname{rk} B_1 = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$.

2) Далее, пусть i — произвольное натуральное число. Так как матрицы A и B ортогональны, то $(A + B)^i = A^i + B^i$. Тем самым, $\operatorname{rk}(A^i + B^i) = \operatorname{rk} A^i + \operatorname{rk} B^i$, а по условию $\operatorname{rk} A^i = \operatorname{rk} A$. Следовательно

$$\operatorname{rk}(A + B)^i = \operatorname{rk}(A^i + B^i) = \operatorname{rk} A^i + \operatorname{rk} B^i = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B^i \text{ для всех } i.$$

Если $\operatorname{Ind} B = 1$, то $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} B^k$ для всех целых $k > 0$. Тем самым,

$$\operatorname{rk}(A + B)^i = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B^i = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B = \operatorname{rk}(A + B)$$

и $\operatorname{Ind}(A+B)=1$.

Если же $\operatorname{Ind} B = l > 1$, то $\operatorname{rk} B^{l-1} \neq \operatorname{rk} B^{l} = \operatorname{rk} B^{l+1} = \operatorname{rk} B^{l+k}$ для всех целых $k>0$. Для такого l имеем $\operatorname{rk}(A+B)^{l-1} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B^{l-1} \neq \operatorname{rk}(A+B)^{l} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B^{l} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B^{l+1} = \operatorname{rk}(A+B)^{l+1}$ и $\operatorname{Ind}(A+B)=l$.

В результате $\operatorname{Ind}(A+B) = \operatorname{Ind} B$. □

Лемма 3.1.5. *Пусть $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$, $\operatorname{Ind} A = 1$.*

1. $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$ тогда и только тогда, когда $A \perp (C-A)$.

2. Если $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$ и $C \perp B$, то $A \perp B$.

Доказательство. 1. Пусть $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$. По определению $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка имеем $AA^{\sharp} = CA^{\sharp} = A^{\sharp}C$. Тогда

$$(C-A)A = (C-A)AA^{\sharp}A = (CA^{\sharp} - AA^{\sharp})A^2 = 0.$$

Аналогично, $A(C-A)=0$, т.е. $A \perp (C-A)$.

Кроме того, если $A \perp (C-A)$, то $(C-A)A^{\sharp} = (C-A)A(A^{\sharp})^2 = 0$ и $CA^{\sharp} = AA^{\sharp}$. Аналогично, $A^{\sharp}C = AA^{\sharp}$ и $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$.

2. Так как $C \perp B$, то $CB = 0$ и $BC = 0$. Следовательно,

$$AB = AA^{\sharp}AB = AA^{\sharp}CB = 0.$$

Аналогично, $BA = 0$ и $A \perp B$. □

Напомним, что $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\overline{\mathbb{F}}$ — его алгебраическое замыкание, $A \in M_n(\mathbb{F})$. Ниже будут рассмотрены две хорошо известные функции, описывающие структуру жордановой формы матрицы.

Определение 3.1.6. Функцию $k_A \colon \overline{\mathbb{F}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+$ определим по следующему правилу: для $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$ и $r \in \mathbb{N}$ значение функции $k_A(\lambda, r)$ равно количеству жордановых блоков матрицы A порядка r, отвечающих собственному значению λ. Если таких жордановых блоков у матрицы A нет, то положим $k_A(\lambda, r) = 0$.

Определение 3.1.7. Функция $K_A\colon \overline{\mathbb{F}} \to \mathbb{Z}_+$ определяет общее количество жордановых блоков матрицы A, отвечающих собственному числу λ, т.е. $K_A(\lambda) = \sum\limits_{r=1}^{\infty} k_A(\lambda, r)$.

Заметим, что $\operatorname{Spec} A = \{\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \mid K_A(\lambda) > 0\}$.

Лемма 3.1.8. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле, матрицы* $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $\operatorname{Ind} A = 1$. *Тогда из* $A \perp B$ *следует, что* $k_{A+B}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r) + k_B(\lambda, r)$ *для всех* $\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$ *и* $r \in \mathbb{N}$.

Доказательство. По утверждению 3.1.3 найдется такая обратимая матрица $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$, что $A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, $B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} P^{-1}$ для некоторых $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$ и $B_1 \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Тогда для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$ и $r \in \mathbb{N}$ имеем

$$k_{A+B}(\lambda, r) = k_{A_1}(\lambda, r) + k_{B_1}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r) + k_B(\lambda, r).$$

□

Лемма 3.1.9. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле, матрицы* $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $\operatorname{Ind} A = 1$. *Тогда из* $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$ *следует, что* $k_A(\lambda, r) \leqslant k_B(\lambda, r)$ *для всех* $\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$ *и* $r \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Так как $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, имеем $A \perp (B - A)$ по лемме 3.1.5. Тогда по лемме 3.1.8

$$k_B(\lambda, r) = k_A(\lambda, r) + k_{B-A}(\lambda, r) \geqslant k_A(\lambda, r)$$

для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$ и $r \in \mathbb{N}$. □

Для дальнейших рассуждений нам потребуется следующая лемма, которая может быть непосредственно проверена и является частным случаем результата [59, гл. VII].

Лемма 3.1.10. [59, гл. VII] *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле,*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}), \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}),$$

$AB = BA$, *и* $\operatorname{Spec} A_1 \cap \operatorname{Spec} A_2 = \varnothing$. *Тогда* $B_{12} = 0$ *и* $B_{21} = 0$.

Лемма 3.1.11. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле,* $A, A', B \in M_n(\mathbb{F})$. *Пусть матрицы* A *и* A' *подобны,* $\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind} A' = 1$, $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, $A' \overset{\sharp}{\leqslant} B$, *и* $K_A(\lambda) \cdot (K_B(\lambda) - K_A(\lambda)) = 0$ *при всех* $\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$. *Тогда* $A = A'$.

Доказательство. 1. Так как $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, то $A \perp (B - A)$ по лемме 3.1.5. По утверждению 3.1.3 найдется такая обратимая матрица $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$, что $A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, $B - A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} P^{-1}$ для некоторых $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$ и $B_1 \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$, где $0 \leqslant k \leqslant n$. Обозначим $\widetilde{A} = P^{-1}AP$, $\widetilde{B} = P^{-1}BP$. Тогда имеем $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$.

2. По условию $K_A(\lambda) \cdot (K_B(\lambda) - K_A(\lambda)) = 0$ при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}},\ \lambda \neq 0$, что может быть эквивалентно переписано как $K_{A_1}(\lambda) \cdot K_{B_1}(\lambda) = 0$ при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}, \lambda \neq 0$, т.е. матрицы A_1 и B_1 не имеют общих ненулевых собственных значений. Более того, $0 \notin \operatorname{Spec} A_1$. Тем самым, $\operatorname{Spec} A_1 \cap \operatorname{Spec} B_1 = \varnothing$.

3. Обозначая $\widetilde{A}' = P^{-1}A'P$, получаем $\widetilde{A}' \overset{\sharp}{\leqslant} \widetilde{B}$. Так как матрицы A и A' подобны, то $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}'$ также подобны, т.е. найдется такая обратимая

матрица $Q_1 \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$, что $\widetilde{A} = Q_1^{-1}\widetilde{A}'Q_1$. Положим $\widetilde{C} = Q_1^{-1}\widetilde{B}Q_1$. Тогда

$$\widetilde{A} = Q_1^{-1}\widetilde{A}'Q_1 \overset{\sharp}{\leqslant} Q_1^{-1}\widetilde{B}Q_1 = \widetilde{C}.$$

Следовательно, $\widetilde{A} \perp (\widetilde{C} - \widetilde{A})$ по лемме 3.1.5. Тем самым,

$$\widetilde{C} - \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$$

для некоторой матрицы $C_1 \in M_m(\overline{\mathbb{F}})$ по утверждению 3.1.1.

4. Так как матрицы $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ подобны, то подматрицы $B_1 \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$ и $C_1 \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$ также подобны, т.е. найдется такая обратимая матрица $P_1 \in GL_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$, что $B_1 = P_1^{-1}C_1P_1$. Положим

$$Q_2 = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} \in GL_n(\overline{\mathbb{F}}), \quad Q = Q_1Q_2.$$

Прямые вычисления показывают, что $Q_2^{-1}\widetilde{A}Q_2 = \widetilde{A}$ и $Q_2^{-1}\widetilde{C}Q_2 = \widetilde{B}$. Следовательно, $Q^{-1}\widetilde{A}'Q = \widetilde{A}$ и $Q^{-1}\widetilde{B}Q = \widetilde{B}$.

5. Разобьем матрицу Q на блоки, согласованные со структурой матриц A и B, т.е. $Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \in M_n(\overline{\mathbb{F}})$, где $Q_{11} \in M_k(\overline{\mathbb{F}})$, $Q_{22} \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$. По лемме 3.1.10 согласно пунктам 2 и 4 получаем, что $Q_{12} = 0$ и $Q_{21} = 0$. Более того $A_1Q_{11} = Q_{11}A_1$. Тем самым $\widetilde{A}Q = Q\widetilde{A}$ и $\widetilde{A} = Q\widetilde{A}Q^{-1} = \widetilde{A}'$. Следовательно, $A = P\widetilde{A}P^{-1} = P\widetilde{A}'P^{-1} = A'$. $\square$

В следующей лемме будут охарактеризованы матрицы A, удовлетворяющие условию $K_A(\lambda) \leqslant 1$.

Лемма 3.1.12. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда число матриц $X \in M_n(\overline{\mathbb{F}})$ индекса 1, удовлетворяющих условию $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$, конечно тогда и только тогда, когда $K_A(\lambda) \leqslant 1$ при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$, $\lambda \neq 0$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $K_A(\lambda) \geqslant 2$ для некоторого $\lambda \neq 0$. Пусть матрица $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$ такова, что матрица $P^{-1}AP$ — жорданова нормальная форма матрицы A и жордановы блоки, отвечающие собственному числу λ, расположены в левом верхнем углу. Положим $A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} P^{-1}$, где $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$ — первый жорданов блок. Отметим, что по сделанному предположению первое собственное число матрицы A_2 также равно λ.

Зафиксируем некоторое $\mu \in \overline{\mathbb{F}}$ и рассмотрим прямоугольную матрицу $Z_\mu = \mu E_{1,k} \in M_{n-k,k}(\overline{\mathbb{F}})$. Тогда

$$Z_\mu A_1 = \mu E_{1,k} \cdot \lambda E_{k,k} = \lambda\mu E_{1,k} = \lambda E_{1,1} \cdot \mu E_{1,k} = A_2 Z_\mu.$$

Положим $X_\mu = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ Z_\mu & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. Так как $\lambda \neq 0$, то $\operatorname{Ind} X_\mu = 1$. Кроме того, $X_\mu \perp (A - X_\mu)$. Следовательно,

$$X_\mu(A - X_\mu) = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ Z_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -Z_\mu & A_2 \end{pmatrix} P^{-1} = 0,$$

$$(A - X_\mu)X_\mu = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -Z_\mu & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ Z_\mu & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = 0,$$

так как $-Z_\mu A_1 + A_2 Z_\mu = 0$. Тем самым доказано, что $X_\mu \overset{\sharp}{\leqslant} A$ по лемме 3.1.5.

Более того, $X_{\mu_1} \neq X_{\mu_2}$ для любых $\mu_1 \neq \mu_2 \in \overline{\mathbb{F}}$. Поле $\overline{\mathbb{F}}$ алгебраически замкнуто и, следовательно, бесконечно. Тогда множество

$\{X \in M_n(\overline{\mathbb{F}}) \mid \operatorname{Ind} X = 1, X \overset{\sharp}{\leqslant} A\}$ также бесконечно. Полученное противоречие показывает, что $K_A(\lambda) \leqslant 1$ для всех $\lambda \neq 0$.

Достаточность. Предположим, что $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$. Тогда

$$0 \leqslant K_X(\lambda) \leqslant K_A(\lambda) \leqslant 1 \text{ при } \lambda \neq 0.$$

Следовательно, $K_X(\lambda)\cdot(K_A(\lambda)-K_X(\lambda)) = 0$ при $\lambda \neq 0$. По лемме 3.1.11 для всех $\Lambda \subseteq \operatorname{Spec} A \setminus \{0\}$ найдется по крайней мере одна матрица X, такая, что $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$ и $\operatorname{Spec} X \setminus \{0\} = \Lambda$. Из леммы 3.1.9 следует, что $\operatorname{Spec} X \subseteq \operatorname{Spec} A \cup \{0\}$ для всех $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$. Тем самым, множество матриц $\{X \in M_n(\overline{\mathbb{F}}) \mid \operatorname{Ind} X = 1, X \overset{\sharp}{\leqslant} A\}$ конечно. □

В качестве иллюстрации доказанной леммы приведем следующий пример.

Пример 3.1.13. Легко видеть, что

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \overset{\sharp}{>} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ при } a \notin \{0, 1\},$$

и нет других матриц, меньших A, относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Однако нетрудно заметить, что $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\sharp}{>} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ для всех $b \in \mathbb{F}$.

Таким образом, существует бесконечно много матриц, меньших B, и ровно две матрицы, меньшие A.

Лемма 3.1.14. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле,* $A \in M_n(\mathbb{F})$. *Фиксируем* $\lambda \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$. *Тогда существует единственная матрица* $X \in M_n(\overline{\mathbb{F}})$ *такая, что* $\operatorname{Ind} X = 1$, $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $K_X(\lambda) = K_A(\lambda)$, *и* $K_X(\mu) = 0$ *при всех* $\mu \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0, \lambda\}$.

Доказательство. Если $K_A(\lambda) = 0$, положим $X = 0$. Предположим, что $K_A(\lambda) > 0$. Пусть матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$ такова, что $P^{-1}AP$ — жорданова нормальная форма матрицы A и имеет вид $A = P\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}P^{-1}$, где $\operatorname{Spec} A_1 = \{\lambda\}$, $\lambda \notin \operatorname{Spec} A_2$. Положим $X = P\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$. Тогда $\operatorname{Ind} X = 1$, $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $K_X(\lambda) = K_A(\lambda)$ и $K_X(\mu) = 0$ для всех ненулевых $\mu \neq \lambda$, что и требовалось.

Пусть $X' \in M_n(\overline{\mathbb{F}})$, $X' \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $K_{X'}(\lambda) = K_A(\lambda)$ и $K_{X'}(\mu) = 0$ для всех $\mu \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0, \lambda\}$. Так как для всех $Y \in M_n(\overline{\mathbb{F}})$ имеем $K_Y(\lambda) = \sum\limits_{r \in \mathbb{N}} k_Y(\lambda, r)$ и $k_{X'}(\lambda, r) \leqslant k_A(\lambda, r)$ при $r \in \mathbb{N}$ по лемме 3.1.9, то $k_{X'}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r) = k_X(\lambda, r)$ для всех $r \in \mathbb{N}$. Тем самым $k_X(\mu, r) = k_{X'}(\mu, r)$ для всех ненулевых $\mu \in \overline{\mathbb{F}}$ и $r \in \mathbb{N}$. Более того $k_X(0, r) = 0 = k_{X'}(0, r)$ при всех $r > 1$, откуда $k_X(0, 1) = k_{X'}(0, 1)$. Следовательно, матрицы X и X' подобны, и $X = X'$ по лемме 3.1.11. $\square$

Известно, что любая матрица $A \in M_n(\overline{\mathbb{F}})$ может быть приведена к нормальной жордановой форме. Заметим, что эта матричная форма определена единственным образом с точностью до перестановки жордановых блоков, и существует много жордановых базисов для данной матрицы. Нашей целью является представление произвольной матрицы в виде суммы некоторых единственным образом определенных матриц $S^1_A(\lambda)$, где $\operatorname{Spec} S^1_A(\lambda) \subseteq \{0, \lambda\}$, $S^1_A(\lambda) \perp S^1_A(\mu)$ при всех $\lambda \neq \mu$. Такое представление матрицы A назовем *спектральным ортогональным матричным разложением*. Рассматриваемые матрицы $S^1_A(\lambda)$ имеют ряд полезных свойств. В частности, для любого $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$ найдется такой многочлен $f_\lambda \in \overline{\mathbb{F}}[t]$, что $S^1_A(\lambda) = f_\lambda(A)$.

Ниже определим отображения $S^i : \overline{\mathbb{F}} \times M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\overline{\mathbb{F}})$ при $i = 1, 2, 3$. Для удобства будем обозначать $S^i(\lambda, A) = S^i_A(\lambda)$. Пусть матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ фиксирована, тогда рассмотрим S_A^i как отображение $\overline{\mathbb{F}} \to M_n(\overline{\mathbb{F}})$.

Определение 3.1.15. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$, $A = C_A + N_A$ — нильпотентное разложение матрицы A. Тогда $S_A^1(0) = N_A$, и для всех $\lambda \neq 0$ матрица $S_A^1(\lambda) = X_\lambda$ такова, что $\operatorname{Ind} X_\lambda = 1$, $X_\lambda \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $K_{X_\lambda}(\lambda) = K_A(\lambda)$ и $K_{X_\lambda}(\mu) = 0$ для всех $\mu \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0, \lambda\}$.

$$S_A^2(\lambda) = S_{A+E}^1(\lambda + 1) - S_A^1(\lambda) \text{ при всех } \lambda \in \overline{\mathbb{F}};$$

$$S_A^3(\lambda) = S_A^1(\lambda) - \lambda S_A^2(\lambda) \text{ при всех } \lambda \in \overline{\mathbb{F}}.$$

Это определение корректно, так как по лемме 3.1.14 матрица X_λ с вышеперечисленными свойствами существует и единственна для всех $\lambda \neq 0$.

Замечание 3.1.16. Из определения 3.1.15 следует, что

$$S_{P^{-1}AP}^i(\lambda) = P^{-1} S_A^i(\lambda) P$$

при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$, $A \in M_n(\mathbb{F})$, $P \in GL_n(\mathbb{F})$, и $i = 1, 2, 3$. Следовательно, матрицы $S_A^i(\lambda)$ определяют не только разложение матрицы A, но также разложение соответствующего линейного оператора на $\mathbb{F}^n$.

Теорема 3.1.17. *Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$.*

1. Если $\lambda \notin \operatorname{Spec} A \subseteq \overline{\mathbb{F}}$, то $S_A^i(\lambda) = 0$ при $i = 1, 2, 3$.

2. $\operatorname{rk}(S_A^2(\lambda)) = \deg_{\chi_A}(z - \lambda)$ является кратностью корня λ в характеристическом многочлене χ_A.

3. $S_A^i(\lambda) \perp S_A^j(\mu)$ для всех $\lambda \neq \mu$, $i, j = 1, 2, 3$.

4. $S_A^i(\lambda) S_A^2(\lambda) = S_A^2(\lambda) S_A^i(\lambda) = S_A^i(\lambda)$ для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$, $i = 1, 2, 3$.

5. Матрица $S_A^2(\lambda)$ идемпотентна при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$.

6. Матрица $S_A^3(\lambda)$ нильпотентна при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$.

7. $A = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S_A^1(\lambda) = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} (\lambda S_A^2(\lambda) + S_A^3(\lambda))$, $E = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S_A^2(\lambda)$.

Доказательство. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ различные собственные значения матрицы A и через $r_1, \ldots, r_p$ — кратности этих собственных значений.

Пусть $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$ такова, что $P^{-1}AP$ — жорданова нормальная форма матрицы A, тогда

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix} P^{-1},$$

где $A_s \in M_{r_s}(\overline{\mathbb{F}})$, $\operatorname{Spec} A_s = \{\lambda_s\}$ при $s = 1, \ldots, p$. Обозначим

$$X_s = P \begin{pmatrix} \delta_{s1}A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_{sp}A_p \end{pmatrix} P^{-1},$$

где $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{если } s = t, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ Тогда $S_A^1(\lambda) = \begin{cases} X_s, & \text{если } \lambda = \lambda_s, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$ так как $S_A^1(0) = N_A$, и все необходимые условия для матрицы $S_A^1(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$ выполнены. Положим

$$D_s = P \begin{pmatrix} \delta_{s1}I_{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_{sp}I_{r_p} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Легко видеть, что $S_{A+E}^1(\lambda + 1) = \begin{cases} X_s + D_s, & \text{если } \lambda = \lambda_s, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Следовательно, $S_A^2(\lambda) = \begin{cases} D_s, & \text{если } \lambda = \lambda_s, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

1. Если $\lambda \notin \operatorname{Spec} A$, то $S_A^1(\lambda) = 0$ и $S_A^2(\lambda) = 0$, откуда $S_A^3(\lambda) = 0$.

2. Так как $\operatorname{rk} D_s = \operatorname{rk} I_{r_s} = r_s$, то $\operatorname{rk} S_A^2(\lambda) = \begin{cases} r_s, & \text{если } \lambda = \lambda_s, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

3. Перемножением блочных матриц проверяем, что $S_A^i(\lambda) \perp S_A^j(\mu)$ для всех $\lambda \neq \mu$, $i, j = 1, 2, 3$.

4. Аналогично, $S_A^i(\lambda) S_A^2(\lambda) = S_A^2(\lambda) S_A^i(\lambda) = S_A^i(\lambda)$ для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$ и $i = 1, 2, 3$.

5. Из пункта 4 следует, что матрица $S_A^2(\lambda)$ идемпотентна.

6. Непосредственной проверкой доказывается, что $\operatorname{Spec} S_A^3(\lambda) = \{0\}$, таким образом, матрица $S_A^3(\lambda)$ нильпотентна.

7. Наконец, $\sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S_A^1(\lambda) = \sum\limits_{s=1}^{p} X_s = A$ и $\sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S_A^2(\lambda) = \sum\limits_{s=1}^{p} D_s = E$. □

Определение 3.1.18. Будем называть разложения вида

$$A = \sum_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} S_A^1(\lambda) = \sum_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} (\lambda S_A^2(\lambda) + S_A^3(\lambda))$$

спектральными ортогональными матричными разложениями.

Это определение корректно по теореме 3.1.17. Ниже спектральные ортогональные разложения будут использованы для вычисления многочленов от матриц.

Теорема 3.1.19. *Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$.*

1. Для любого многочлена $f \in \overline{\mathbb{F}}[t]$ имеем

$$f(A) = \sum_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} \left(f(\lambda) S_A^2(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!} S_A^3(\lambda) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} (S_A^3(\lambda))^{n-1} \right).$$

2. $\overline{\mathbb{F}}[A] = \{f(A)\}_{f \in \overline{\mathbb{F}}[t]} = \langle \{S_A^2(\lambda), S_A^3(\lambda), \ldots, (S_A^3(\lambda))^{n-1}\}_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}} \rangle$, и ненулевые матрицы системы $\{S_A^2(\lambda), S_A^3(\lambda), \ldots, (S_A^3(\lambda))^{n-1}\}_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}}$ линейно независимы.

3. Если $\lambda \in \mathbb{F}$, то $S_A^i(\lambda) \in M_n(\mathbb{F})$, $i = 1, 2, 3$.

Доказательство. 1. С учетом линейности доказываемого равенства, достаточно проверить его для $f(t) = t^d$, где $d \geqslant 0$.

Если $d = 0$, то $f(A) = E = \sum\limits_{\lambda\in\overline{\mathbb{F}}} S_A^2(\lambda)$ по пукту 7 теоремы 3.1.17. Если же $d \geqslant 1$, то $f(A) = A^d = (\sum\limits_{\lambda\in\overline{\mathbb{F}}} S_A^1(\lambda))^d = \sum\limits_{\lambda\in\overline{\mathbb{F}}} (S_A^1(\lambda))^d$ так как матрицы $S_A^1(\lambda)$ и $S_A^1(\mu)$ ортогональны при $\lambda \neq \mu$. Итак,

$$(S_A^1(\lambda))^d = (\lambda S_A^2(\lambda) + S_A^3(\lambda))^d =$$

$$= \lambda^d S_A^2(\lambda) + d\lambda^{d-1} S_A^3(\lambda) + \frac{d(d-1)}{2}\lambda^{d-2}(S_A^3(\lambda))^2 + \ldots + (S_A^3(\lambda))^d =$$

$$= f(\lambda) S_A^2(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!} S_A^3(\lambda) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}(S_A^3(\lambda))^{n-1},$$

так как $(S_A^3(\lambda))^d = 0$ при всех $d \geqslant n$, и утверждение доказано.

2. Положим $\mathcal{A} = \langle\{S_A^2(\lambda), S_A^3(\lambda), \ldots, (S_A^3(\lambda))^{n-1}\}_{\lambda\in\overline{\mathbb{F}}}\rangle$. Тогда по пункту 1 имеем $\overline{\mathbb{F}}[A] \subseteq \mathcal{A}$. Докажем, что $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathbb{F}}[A]$.

Фиксируем $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$ и построим такой многочлен $f_0 \in \overline{\mathbb{F}}[t]$, что $f_0(A) = S_A^2(\lambda)$. Если $\lambda \notin \operatorname{Spec} A$, то $S_A^2(\lambda) = 0$ и $f_0(t) \equiv 0$. Если же $\lambda \in \operatorname{Spec} A$, то $\lambda = \lambda_q$ для некоторого $q = 1, \ldots, p$.

Обозначим через $g(t)$ характеристический многочлен матрицы A, $h_0(t) = \frac{g(t)}{(t-\lambda_q)^{r_q}} \in \overline{\mathbb{F}}[t]$, $h_0(\lambda_q) \neq 0$. Положим $h(t) = (h_0(\lambda_q))^{-1} h_0(t)$. Тогда $h(\lambda_q) = 1$, $h^{(j)}(\lambda_s) = 0$ при всех $s \neq q$, $j = 0, 1, \ldots, r_s - 1$. По пункту 1 имеем $h(A) = S_A^2(\lambda) + N$, где

$$N = \frac{h'(\lambda)}{1!} S_A^3(\lambda) + \ldots + \frac{h^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}(S_A^3(\lambda))^{n-1}.$$

Нетрудно видеть, что $S_A^2(\lambda) N = N S_A^2(\lambda) = N$ и матрица N нильпотента. Тем самым, $(E - h(A))^n = E - S_A^2(\lambda)$. Тогда если $f_0(t) = 1 - (1 - h(t))^n \in \overline{\mathbb{F}}[t]$, то $f_0(A) = S_A^2(\lambda)$.

Следовательно, $S_A^2(\lambda) = f_0(A) \in \overline{\mathbb{F}}[A]$, $S_A^3(\lambda) = (A - \lambda E) f_0(A) \in \overline{\mathbb{F}}[A]$, откуда $(S_A^3(\lambda))^j \in \overline{\mathbb{F}}[A]$ при $j = 1, \ldots, n-1$.

Предположим, что скаляры $\alpha_s^{(j)} \in \overline{\mathbb{F}}$ таковы, что

$$\sum_{s=1}^{p}(\alpha_s^{(0)} S_A^2(\lambda_s) + \alpha_s^{(1)} S_A^3(\lambda_s) + \ldots + \alpha_s^{(n-1)}(S_A^3(\lambda_s))^{n-1}) = 0,$$

и $\alpha_s^{(j)} = 0$, если $(S_A^3(\lambda_s))^j = 0$, при $s = 1, \ldots, p$, $j = 0, \ldots, n-1$.

Умножая на $S_A^2(\lambda_s)$ имеем

$$\alpha_s^{(0)} S_A^2(\lambda_s) + \alpha_s^{(1)} S_A^3(\lambda_s) + \ldots + \alpha_s^{(n-1)}(S_A^3(\lambda_s))^{n-1} = 0$$

при всех $s = 1, \ldots, p$. Предположим, что эта линейная комбинация нетривиальна. Если $S_A^3(\lambda_s) = 0$, то $\alpha_s^{(j)} = 0$ при $j > 0$, и $\alpha_s^{(0)} S_A^2(\lambda_s) = 0$, откуда $\alpha_s^{(0)} = 0$. Итак, $S_A^3(\lambda_s) \neq 0$. Положим

$$j_1 = \min\{j = 0, 1, \ldots, n-1 \mid \alpha_s^{(j)} \neq 0\},$$

$$j_2 = \max\{j = 1, \ldots, n-1 \mid (S_A^3(\lambda_s))^j \neq 0\}.$$

Тогда $j_1 \leqslant j_2$. Умножая линейную комбинацию на $(S_A^3(\lambda_s))^{j_2 - j_1}$ имеем $\alpha_s^{(j_1)}(S_A^3(\lambda_s))^{j_2} = 0$, что невозможно. Тем самым, ненулевые матрицы системы $\{S_A^2(\lambda), S_A^3(\lambda), \ldots, (S_A^3(\lambda))^{n-1}\}_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}}$ линейно независимы.

3. По построению полинома $f_0(t)$ имеем $f_0(t) \in \mathbb{F}[t]$. Таким образом, $S_A^2(\lambda) = f_0(A) \in M_n(\mathbb{F})$. Следовательно, $S_A^1(\lambda), S_A^3(\lambda) \in M_n(\mathbb{F})$. $\square$

В следующей теореме изучается взаимосвязь между спектральными ортогональными матричными разложениями и ортогональностью матриц, а также $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядком.

Теорема 3.1.20. *Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$.*

1. Если A коммутирует с некоторой $B \in M_n(\mathbb{F})$, то $S_A^i(\lambda)$ коммутируют с B при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$ и $i = 1, 2, 3$.

2. Если $\operatorname{Ind} A = 1$ *и A ортогональна некоторой матрице B, то* *а) все матрицы* $S^i_A(\lambda)$ *ортогональны* B,

б) $S^i_{A+B}(\lambda) = S^i_A(\lambda) + S^i_B(\lambda)$ *при* $\lambda \neq 0$ *и* $i = 1, 2, 3$,

в) $S^i_A(\lambda) \perp S^j_B(\mu)$ *при всех* $\lambda, \mu \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $i, j = 1, 2, 3$.

3. Если $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$ *для некоторой* $C \in M_n(\mathbb{F})$, *то при всех* $\Lambda \subseteq \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$ *имеем* $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S^i_A(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S^i_C(\lambda)$, $i = 1, 2$. *В частности,* $S^i_A(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} S^i_C(\lambda)$ *при* $\lambda \neq 0$ *и* $i = 1, 2$.

Доказательство. 1. Так как матрицы A и B коммутируют, то все матрицы из множества $\overline{\mathbb{F}}[A]$ коммутируют с B. По теореме 3.1.19(2) имеем $S^i_A(\lambda) \in \overline{\mathbb{F}}[A]$ при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$, $i = 1, 2, 3$.

2. По условию, $\operatorname{Ind} A = 1$, $A \perp B$. По утверждению 3.1.3 найдет такая обратимая матрица $Q \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$, что $A = Q \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$, $B = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} Q^{-1}$ для некоторых $A_1 \in GL_k(\overline{\mathbb{F}})$ и $B_1 \in M_{n-k}(\overline{\mathbb{F}})$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Нетрудно видеть, что

$$S^i_A(\lambda) = Q \begin{pmatrix} S^i_{A_1}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}, \; S^j_B(\mu) = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S^j_{B_1}(\mu) \end{pmatrix} Q^{-1}$$

при всех ненулевых $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{F}}$ и $i, j = 1, 2, 3$. Следовательно, $S^i_A(\lambda) \perp B$, $S^i_A(\lambda) \perp S^j_B(\mu)$ при $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$, $i, j = 1, 2, 3$. Более того,

$$S^i_{A+B}(\lambda) = Q \begin{pmatrix} S^i_{A_1}(\lambda) & 0 \\ 0 & S^i_{B_1}(\lambda) \end{pmatrix} Q^{-1}$$

и $S^i_{A+B}(\lambda) = S^i_A(\lambda) + S^i_B(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$, $i = 1, 2, 3$.

3. Если $A = C$, то доказывать нечего. Пусть $A \neq C$, $\operatorname{Ind} A = 1$. Так как $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$, то $A \perp (C - A)$ по лемме 3.1.5. Положим $B = C - A$.

Тогда $S_A^i(\lambda) \perp S_B^i(\mu)$ при всех $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$, $i = 1, 2$ по пункту 2. Следовательно, $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S_A^i(\lambda) \perp \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S_B^i(\lambda)$. Однако $S_C^i(\lambda) = S_A^i(\lambda) + S_B^i(\lambda)$ при всех $\lambda \neq 0$, откуда $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S_A^i(\lambda) \perp \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} (S_C^i(\lambda) - S_A^i(\lambda))$. Более того, $\operatorname{Ind}\left(\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S_A^i(\lambda)\right) = 1$ по лемме 3.1.4, и $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S_A^i(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} S_C^i(\lambda)$ по лемме 3.1.5. □

Следствие 3.1.21. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле,* $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$, $\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind} B = 1$, $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$, $B \overset{\sharp}{\leqslant} C$ *и* $\operatorname{Spec} A \cap \operatorname{Spec} B \subseteq \{0\}$. *Тогда* $A \perp B$.

Доказательство. Если $\lambda \notin \operatorname{Spec} A$, то $S_A^1(\lambda) = 0$ по пункту 1 теоремы 3.1.17. Более того, $\operatorname{Ind} A = 1$ и $S_A^1(0) = N_A = 0$. Обозначим $\Lambda_A = \operatorname{Spec} A \setminus \{0\}$, $\Lambda_B = \operatorname{Spec} B \setminus \{0\}$. Имеем $S_A^1(\lambda) = 0$ при $\lambda \notin \Lambda_A$. Однако $A = \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{F}} S_A^1(\lambda)$ по пункту 7 теоремы 3.1.17 и $A = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda_A} S_A^1(\lambda)$. Аналогично, $B = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda_B} S_B^1(\lambda)$. Так как $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$ и $B \overset{\sharp}{\leqslant} C$, то

$$A = \sum_{\lambda \in \Lambda_A} S_A^1(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} \sum_{\lambda \in \Lambda_A} S_C^1(\lambda), \ B = \sum_{\lambda \in \Lambda_B} S_B^1(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} \sum_{\lambda \in \Lambda_B} S_C^1(\lambda)$$

по пункту 3 теоремы 3.1.20. Заметим, что $\Lambda_A \cap \Lambda_B = \varnothing$, и при всех $\lambda \neq \mu$ имеем $S_C^1(\lambda) \perp S_C^1(\mu)$. Тем самым, $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda_A} S_C^1(\lambda) \perp \sum\limits_{\lambda \in \Lambda_B} S_C^1(\lambda)$. Следовательно, $A \perp \sum\limits_{\lambda \in \Lambda_B} S_C^1(\lambda)$ по лемме 3.1.5, и $A \perp B$ по той же лемме. □

Лемма 3.1.22. *Пусть* $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$, $\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind} B = 1$, $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$, $B \overset{\sharp}{\leqslant} C$ *и* $A \perp B$. *Тогда* $A + B \overset{\sharp}{\leqslant} C$.

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{Ind}(A+B) = \operatorname{Ind} B = 1$ по лемме 3.1.4. Обозначим $F = C - (A + B)$. Так как $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$, то $A \perp (C - A)$ по лемме 3.1.5. Кроме того, $A \perp B$, откуда следует, что матрицы A и

$F = (C - A) - B$ ортогональны. Аналогично, так как $B \perp (C - B)$ и $B \perp A$, то $B \perp F = (C - B) - A$. Следовательно, $(A + B) \perp F$ и по лемме 3.1.5 имеем $A + B \overset{\sharp}{\leqslant} C$. $\square$

3.2 Биективные отображения матриц индекса 1

Свойства матричных цепей

Напомним, что через $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ обозначено подмножество $M_n(\mathbb{F})$ матриц индекса 1.

Определение 3.2.1. Семейство матриц $0 \neq A_1, A_2, \ldots, A_m$ назовем *левой цепью* для матрицы A относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, если

$$A_1 \overset{\sharp}{<} A_2 \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} A_m \overset{\sharp}{<} A.$$

Аналогично, $A_1, A_2, \ldots, A_l$ назовем *правой цепью*, если

$$A \overset{\sharp}{<} A_1 \overset{\sharp}{<} A_2 \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} A_l.$$

Значения m и l будем называть *длинами* цепей.

Определение 3.2.2. Максимальное возможное значение длины левой (соотв. правой) цепи для матрицы A над полем $\mathbb{F}$ относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка назовем *левой* (соотв. *правой*) *длиной* матрицы A и обозначим $L_{\mathbb{F}}(A)$ (соотв. $R_{\mathbb{F}}(A)$). Если левых (соотв. правых) цепей для A относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка нет, то соответствующее значение полагаем равным нулю.

Замечание 3.2.3. Пример 3.2.4 показывает, что левая длина матрицы зависит от основного поля, однако в лемме 3.2.6 будет доказано, что правая длина не зависит от поля.

Пример 3.2.4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Тогда ненулевые матрицы, которые строго меньше A относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, — это $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$ и $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \setminus M_2(\mathbb{R})$, и только они. Тем самым, $L_{\mathbb{C}}(A) = 1$, но $L_{\mathbb{R}}(A) = 0$.

Замечание 3.2.5. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, биективное отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Тогда из

$$A_1 \overset{\sharp}{<} A_2 \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} A_k \overset{\sharp}{<} A$$

следует, что

$$T(A_1) \overset{\sharp}{<} T(A_2) \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} T(A_k) \overset{\sharp}{<} T(A),$$

и $L_{\mathbb{F}}(T(A)) \geqslant L_{\mathbb{F}}(A)$ при всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Аналогично, $R_{\mathbb{F}}(T(A)) \geqslant R_{\mathbb{F}}(A)$ при всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Более того, если биективное отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, то $L_{\mathbb{F}}(T(A)) = L_{\mathbb{F}}(A)$ и $R_{\mathbb{F}}(T(A)) = R_{\mathbb{F}}(A)$ при всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$.

Лемма 3.2.6. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда*

1. $L_{\overline{\mathbb{F}}}(A) = \sum\limits_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}, \lambda \neq 0} K_A(\lambda)$ *для всех* $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$;
2. $R_{\mathbb{F}}(A) = n - \operatorname{rk} A$ *для всех* $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Тогда найдется такая обратимая матрица $P \in GL_n(\overline{\mathbb{F}})$, что $P^{-1}AP$ — жорданова нормальная форма матрицы A, и $A = P \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, где

$$C_1 = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix} \in GL_k(\overline{\mathbb{F}}), \quad k = \operatorname{rk} A.$$

Так как $\operatorname{Ind} A = 1$, то у A нет ненулевых нильпотентных жордановых блоков.

1.а) Положим $L_A^0 = \sum\limits_{\lambda\in\overline{\mathbb{F}},\lambda\neq 0} K_A(\lambda) = p$. Покажем, что в этом случае $L_{\overline{\mathbb{F}}}(A) \geqslant L_A^0$.

Для всех $s = 1,\ldots,p$ через $\widetilde{A}_s$ обозначим блочно-диагональную матрицу из $M_n(\mathbb{F})$ с блоками $J_1,\ldots,J_s$ на диагонали и нулевым блоком подходящего размера. Обозначим также $A_s = P\widetilde{A}_sP^{-1}$ для $s = 1,\ldots,p$. Тогда $0 \overset{\sharp}{<} A_1 \overset{\sharp}{<} A_2 \overset{\sharp}{<} \ldots \overset{\sharp}{<} A_{p-1} \overset{\sharp}{<} A_p = A$ и $L_{\overline{\mathbb{F}}}(A) \geqslant p = L_A^0$.

1.б) Покажем, что $L_{\overline{\mathbb{F}}}(A) \leqslant L_A^0$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — такое семейство матриц, что $A_1 \overset{\sharp}{<} A_2 \cdots \overset{\sharp}{<} A_m \overset{\sharp}{<} A$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что из условия $X \overset{\sharp}{<} Y$ для некоторых матриц X и Y индекса 1 следует неравенство $L_X^0 < L_Y^0$. В самом деле, $k_X(\lambda,r) \leqslant k_Y(\lambda,r)$ для всех $\lambda \neq 0$ и $r \in \mathbb{N}$ по лемме 3.1.9 имеем

$$L_X^0 = \sum_{\lambda\in\overline{\mathbb{F}},\lambda\neq 0} K_X(\lambda) = \sum_{\substack{\lambda\in\overline{\mathbb{F}},\lambda\neq 0\\ r\in\mathbb{N}}} k_X(\lambda,r) \leqslant \sum_{\substack{\lambda\in\overline{\mathbb{F}},\lambda\neq 0\\ r\in\mathbb{N}}} k_Y(\lambda,r) = L_Y^0,$$

причем равенство возможно только в случае $X = Y$. Следовательно,

$$L_A^0 \geqslant L_{A_m}^0 + 1 \geqslant \cdots \geqslant L_{A_1}^0 + m \geqslant m, \text{ и } L_{\overline{\mathbb{F}}}(A) \leqslant L_A^0.$$

2.а) Покажем, что $R_{\mathbb{F}}(A) \geqslant n - \operatorname{rk} A$.

Применим теореому о рациональной канонической форме к матрице A, см. [26, стр.144], [30, теорема 11.20]. Так как у A нет ненулевых нильпотентных блоков, то найдется такая матрица $P_1 \in GL_n(\mathbb{F})$, что $A = P_1 \begin{pmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1}$ для некоторой $C_2 \in GL_k(\mathbb{F})$. Для любого

$s = 1, 2, \ldots, n-k$ положим $\widetilde{B}_s = \sum\limits_{i=k+1}^{k+s} E_{ii} \in M_n(\mathbb{F})$, $B_s = P_1 \widetilde{B}_s P_1^{-1}$. Тогда

$$A \overset{\sharp}{<} A + B_1 \overset{\sharp}{<} A + B_2 \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} A + B_{n-k},$$

т.е. $R_{\mathbb{F}}(A) \geqslant n - k = n - \operatorname{rk} A$.

2.б) Покажем, что $R_{\mathbb{F}}(A) \leqslant n - \operatorname{rk} A$ для всех матриц $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — некоторое семейство матриц, $A \overset{\sharp}{<} A_1 \overset{\sharp}{<} A_2 \cdots \overset{\sharp}{<} A_m$. Тогда

$$\operatorname{rk} A_m \geqslant \operatorname{rk} A_{m-1} + 1 \geqslant \cdots \geqslant \operatorname{rk} A_1 + (m-1) \geqslant \operatorname{rk} A + m,$$

откуда $m \leqslant \operatorname{rk} A_m - \operatorname{rk} A \leqslant n - \operatorname{rk} A$ и $R_{\mathbb{F}}(A) \leqslant n - \operatorname{rk} A$. □

Замечание 3.2.7. В дальнейшем вместо $R_{\mathbb{F}}(A)$ будет использоваться обозначение $R(A)$, так как эта величина не зависит от поля.

Примеры монотонных отображений

Оказывается, есть тесная взаимосвязь между монотонностью отображения относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$- ($\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-) порядка, и 0-аддитивностью в смысле определения 1.1.13. Напомним, 0-аддитивность отображения T означает, что T сохраняет ортогональность матриц и аддитивно на ортогональных парах матриц.

Лемма 3.2.8. *Пусть отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ является 0-аддитивным. Тогда T монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка.*

Доказательство. Пусть $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$ для некоторых матриц $A, C \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Тогда $A \perp (C - A)$ по лемме 3.1.5. Так как отображение T является 0-аддитивным, то $T(A) \perp T(C - A)$ и $T(C) = T(A) + T(C - A)$.

Следовательно, $T(A) \overset{\sharp}{\leqslant} T(C)$ по лемме 3.1.5. Тем самым, T монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка. $\square$

С учетом теоремы 2.1.10 для линейных монотонных отображений всегда выполнено условие $T(\lambda E) = \alpha\lambda E$ для $\lambda \in \mathbb{F}$. Однако, оказывается, что для произвольной биекции $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, для которой $\sigma(0) = 0$, существует нелинейное биективное строго монотонное отображение T_σ, удовлетворяющее соотношению $T_\sigma(\lambda E) = \sigma(\lambda)E$ при $\lambda \in \mathbb{F}$. В следующей лемме дается конкретный пример такого «дикого» отображения, основанный на спектральном ортогональном матричном разложении.

Лемма 3.2.9. *Пусть $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$, $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — биекция, $\sigma(0) = 0$. Определим отображение $T_\sigma\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ по следующему правилу:*

$$T_\sigma(A) = \sum_{\lambda \neq 0} (\sigma(\lambda) S_A^2(\lambda) + S_A^3(\lambda))$$

для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Тогда T_σ биективно, нелинейно и строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Кроме того, $T_\sigma(\lambda E) = \sigma(\lambda)E$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$.

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$, $A \perp B$. По теореме 3.1.20(2) имеем $S_A^i(\lambda) \perp S_B^j(\mu)$, $S_{A+B}^i(\lambda) = S_A^i(\lambda) + S_B^i(\lambda)$ для всех $\lambda, \mu \neq 0$, $i, j = 1, 2, 3$. Тогда $T_\sigma(A) \perp T_\sigma(B)$, $T_\sigma(A+B) = T_\sigma(A) + T_\sigma(B)$ и отображение T_σ является 0-аддитивным и монотонным относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка по лемме 3.2.8. Из теорем 3.1.17, 3.1.19, 3.1.20 получаем

$$S^1_{T_\sigma(A)}(\sigma(\lambda)) = \sigma(\lambda) S_A^2(\lambda) + S_A^3(\lambda),\ S^i_{T_\sigma(A)}(\sigma(\lambda)) = S_A^i(\lambda)$$

для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$, $\lambda \neq 0$, $i = 2, 3$. Более того, для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ имеем $S^1_{T_\sigma(A)}(0) = 0$ и $T_\sigma(A) \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$, $T_\sigma(\lambda E) = \sigma(\lambda)E$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$.

Пусть $\sigma' : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — некоторая биекция, $\sigma'(0) = 0$. Тогда

$$T_\sigma(T_{\sigma'}(A)) = \sum_{\mu \neq 0} (\sigma(\mu) S^2_{T'_\sigma(A)}(\mu) + S^3_{T'_\sigma(A)}(\mu)) =$$

$$= \sum_{\lambda \neq 0} \left[\sigma(\sigma'(\lambda)) S^2_{T'_\sigma(A)}(\sigma'(\lambda)) + S^3_{T'_\sigma(A)}(\sigma'(\lambda)) \right] =$$

$$= \sum_{\lambda \neq 0} ((\sigma \circ \sigma')(\lambda) S^2_A(\lambda) + S^3_A(\lambda)) = T_{\sigma \circ \sigma'}(A)$$

для всех $A \in \mathrm{I}^1_n(\mathbb{F})$. Тем самым, $T_\sigma \circ T_{\sigma'} = T_{\sigma \circ \sigma'}$. Если $\mathrm{id}\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — тождественное отображение, то $T_{\mathrm{id}}(A) = A$ для всех $A \in \mathrm{I}^1_n(\mathbb{F})$. Следовательно, $(T_\sigma)^{-1} = T_{\sigma^{-1}}$ и T_σ биективно. Таким образом, $T_{\sigma^{-1}}$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка и T_σ строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка.

Непосредственно проверяется, что отображение T_σ не является линейным. □

Замечание 3.2.10. Из приведенного выше доказательства следует, что рассмотрев неинъективное или несюръективное отображение σ, получим отображение T_σ, которое также будет соответственно неинъективным или несюръективным и монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка.

Определение 3.2.11. Пусть $M_0 = \{A \in \mathrm{I}^1_n(\mathbb{F}) \mid \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{F}} K_A(\lambda) = 1\}$ — подмножество $M_n(\mathbb{F})$, состоящее из матриц, имеющих единственный жорданов блок порядка n с ненулевым собственным числом.

Приведем другой пример строго монотонного биективного отображения, не имеющего хорошей структуры на множестве $\mathrm{I}^1_n(\mathbb{F})$.

Лемма 3.2.12. *Пусть $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$, отображение $T\colon \mathrm{I}^1_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}^1_n(\mathbb{F})$ биективно, $T(M_0) = M_0$, $T(X) = X$ для всех $X \notin M_0$. Тогда T строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка.*

Доказательство. Пусть матрицы $A, B \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$, $A \perp B$. Покажем, что $T(A) \perp T(B)$, $T(A+B) = T(A) + T(B)$. Если $A = 0$ или $B = 0$, то утверждение верно. Предположим, что $A \neq 0$, $B \neq 0$. Тогда из $A \perp B$ следует, что $0 < \operatorname{rk} A < n$, $0 < \operatorname{rk} B < n$. Тем самым $A \notin M_0$ и $B \notin M_0$. Следовательно, $T(A) = A$ и $T(B) = B$.

Проверим, что $T(A+B) = A+B$. По лемме 3.1.8 имеем

$$\sum_{\lambda \neq 0} K_{A+B}(\lambda) = \sum_{\lambda \neq 0} K_A(\lambda) + \sum_{\lambda \neq 0} K_B(\lambda) \geqslant 2,$$

откуда $A + B \notin M_0$. Тогда $T(A) = A \perp B = T(B)$, $T(A+B) = T(A) + T(B)$ и отображение T является 0-аддитивным. По лемме 3.2.8 отображение T монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка, откуда, в силу биективности, T монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка.

Заметим, что обратное отображение T^{-1} существует и удовлетворяет условиям $T^{-1}(M_0) = M_0$, $T^{-1}(X) = X$ при всех $X \notin M_0$. Следовательно, T^{-1} монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка по доказанному, и T строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка.

Непосредственно проверяется, что отображение T_σ не является линейным. $\square$

Ниже приведен конкретный пример отображения, удовлетворяющего условиям леммы 3.2.12.

Пример 3.2.13. Пусть отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ определено по правилу: $T(X) = \begin{cases} X, & X \notin M_0, \\ -X, & X \in M_0. \end{cases}$ Тогда T биективно, не является линейным, однако, T строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка.

Сохранение жордановой формы

Определим структуру монотонных отображений на дополнении к множеству M_0 в $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Напомним, что M_0 является множеством матриц, состоящих из одного жорданового блока. Доказательство основано на технике спектрально-ортогональных матричных разложений, развитой в параграфе 3.1.

Теорема 3.2.14. *Пусть $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ и отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ является биективным и строго монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка при дополнительном ограничении $T(\lambda E) = \lambda E$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогда для произвольной матрицы $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$ существует матрица $P_A \in GL_n(\mathbb{F})$ такая, что $T(A) = P_A^{-1} A P_A$.*

Доказательство. 1. В силу замечания 3.2.5 $R(T(A)) = R(A)$ для всех матриц $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$. Кроме того, $R(A) = n - \operatorname{rk} A$, $R(T(A)) = n - \operatorname{rk} T(A)$ по лемме 3.2.6. Следовательно $\operatorname{rk} T(A) = \operatorname{rk} A$ для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$, таким образом отображение T сохраняет ранг.

2. Обозначим $M_1 = \{A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \mid K_A(\lambda) \leqslant 1 \text{ если } \lambda \neq 0\}$. Покажем, что $T(M_1) = M_1$. С этой целью рассмотрим $A \in M_1$. По лемме 3.1.12 число матриц X, удовлетворяющих условию $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$, конечно. Так как отображение T является биективным и строго-монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, получаем, что число матрицs Y, удовлетворяющих условию $Y \overset{\sharp}{\leqslant} T(A)$ также является конечным. По лемме 3.1.12 имеем $T(A) \in M_1$. Следовательно $T(M_1) \subseteq M_1$.

Так как отображение T^{-1} также является биективным и строго-монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, то $T(M_1) = M_1$.

3. Зафиксируем $\lambda \neq 0$ и рассмотрим следующее множество матриц

$M_{2,\lambda} = \{A \in \mathrm{I}^1_n(\mathbb{F}) \setminus M_0 \mid L_A = K_A(\lambda) = 1\}$. Покажем, что выполнено соотношение $T(M_{2,\lambda}) \subseteq M_{2,\lambda}$.

Пусть $A \in M_{2,\lambda}$ и $P \in GL_n(\mathbb{F})$ такая матрица, что $P^{-1}AP$ имеет жорданову форму следующего вида $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $A_1 \in GL_k(\mathbb{F})$, $k < n$, $m = n - k$. Обозначим $B_1 = \lambda E_{11} \in M_m(\mathbb{F})$, $B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} P^{-1}$, $C = A + B$. Тогда $A \perp B$, $\operatorname{Ind} B = 1$. Следовательно, $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$ и $B \overset{\sharp}{\leqslant} C$ по лемме 3.1.5. Таким образом, $A' = T(A) \overset{\sharp}{\leqslant} T(C) = C'$, $B' = T(B) \overset{\sharp}{\leqslant} C'$. Заметим, что $C \notin M_1$, $L_A = L_B = 1$, $L_C = 2$ по лемме 3.2.6. Следовательно, $C' \notin M_1$, $L_{C'} = 2$ и существует $\lambda' \neq 0$, что $K_{C'}(\lambda') = 2$.

Так как $B \overset{\sharp}{\leqslant} \lambda E$, то $B' \overset{\sharp}{\leqslant} T(\lambda E) = \lambda E$. По лемме 3.1.9 получаем, что $K_{B'}(\mu) = 0$ для всех $\mu \in \mathbb{F} \setminus \{0, \lambda\}$. Однако $\operatorname{rk} B' = \operatorname{rk} B = 1$ и $K_{B'}(\lambda) = 1$. Более того $K_{C'}(\lambda) \geqslant K_{B'}(\lambda)$. Тогда $\lambda = \lambda'$. Следовательно, $K_{A'}(\mu) = 0$ для всех $\mu \in \mathbb{F} \setminus \{0, \lambda\}$, $L_{A'} = L_A = 1$. Таким образом, $K_{A'}(\lambda) = 1$ и $A' \in M_{2,\lambda}$.

4. Зафиксируем $\lambda \neq 0$ и рассмотрим множество матриц $M_{3,\lambda} = \{A \in \mathrm{I}^1_n(\mathbb{F}) \setminus M_0 \mid L_A = K_A(\lambda)\}$. Покажем, что $T(M_{3,\lambda}) \subseteq M_{3,\lambda}$.

Пусть $A \in M_{3,\lambda}$, $A' = T(A)$. Если $L_A = 1$ то $T(A) \in M_{3,\lambda}$ по пункту 3. Предположим, что $L_A \geqslant 2$ и рассмотрим $B \in \mathrm{I}^1_n(\mathbb{F})$ такую, что $B \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $L_B = 1$. Тогда $B \in M_{2,\lambda}$ и $B' = T(B) \in M_{2,\lambda}$ по пункту 3. Более того $B' \overset{\sharp}{\leqslant} A'$ и по лемме 3.1.9 получаем, что $K_{A'}(\lambda) \geqslant K_{B'}(\lambda) = L_{B'} = 1$.

Предположим, что существует значение $\mu' \in \mathbb{F} \setminus \{0, \lambda\}$ такое, что $K_{A'}(\mu') \geqslant 1$. Рассмотрим такую матрицу $X' \in \mathrm{I}^1_n(\mathbb{F})$, что $K_{X'}(\lambda) =$

$K_{X'}(\mu') = 1$, $L_{X'} = 2$, $X' \overset{\sharp}{\leqslant} A'$. Положим $X = T^{-1}(X')$, тогда $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $X \in M_1$ в силу пункта 2. Таким образом, существует $\mu \in \mathbb{F} \setminus \{0, \lambda\}$ такое, что $K_A(\mu) \geqslant K_X(\mu) \geqslant 1$. Полученное противоречие позволяет заключить, что $A' \in M_{3,\lambda}$.

5. Покажем при помощи метода математической индукции, что число и размер жордановых блоков сохраняется под действием T на множестве $M_{3,\lambda}$ для всех $\lambda \neq 0$. Пусть $A \in M_{3,\lambda}$, $A' = T(A)$. В случае $A = 0$ получаем $T(A) = 0$, что доказывает требуемый результат. Предположим, что $A \neq 0$ и продолжим доказательство при помощи индукции по L_A.

База индукции. Случай $L_A = 1$. Результат справедлив в силу сохранения ранга и пункта 3.

Шаг индукции. Пусть для всех матриц X, удовлетворяющих $L_X < L_A$, утверждение верно. Возможны два случая:

а) Существуют различные числа r_1, r_2, такие, что $k_A(\lambda, r_1) \geqslant 1$, $k_A(\lambda, r_2) \geqslant 1$. Рассмотрим все матрицы X_1 такие, что $k_{X_1}(\lambda, r_1) = 0$, $k_{X_1}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r)$, если $r \neq r_1$, $X_1 \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $X_1' = T(X_1)$. По предположению индукции и лемме 3.1.9 получаем:

$$k_{A'}(\lambda, r) \geqslant k_{X_1'}(\lambda, r) = k_{X_1}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r),$$

если $r \neq r_1$. Аналогично для матрицы X_2, $X_2 \overset{\sharp}{\leqslant} A$, $k_{X_2}(\lambda, r_1) = k_A(\lambda, r_1)$, $k_{X_2}(\lambda, r) = 0$, если $r \neq r_1$, тогда $k_{A'}(\lambda, r_1) \geqslant k_A(\lambda, r_1)$. Так как ранги матриц A' и A совпадают, $k_{A'}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r)$ для всех $r \in \mathbb{N}$.

б) Существует r такое, что $K_A(\lambda) = k_A(\lambda, r)$. Предположим также, что существуют $r' \neq r$ такие, что $k_{A'}(\lambda, r') \geqslant 1$. Рассмотрим матрицу X'

такую, что $L_{X'} = 1$, $k_{X'}(\lambda, r') = 1$, $X' \overset{\sharp}{\leqslant} A'$, $X = T^{-1}(X')$. Тогда $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$ и $k_A(\lambda, r') \geqslant k_X(\lambda, r') = 1$, что не верно. Следовательно, $k_{A'}(\lambda, r') = 0$, если $r' \neq r$. Однако $L_{A'} = L_A$ и $k_{A'}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r)$. Таким образом $k_{A'}(\mu, r) = k_A(\mu, r)$ для всех $\mu \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$, что доказывает требуемое утверждение.

6. Пусть $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$, $A' = T(A)$. Тогда по теореме 3.1.17 получаем $A = \sum\limits_{\lambda \neq 0} S_A^1(\lambda)$. Более того, $S_A^1(\lambda) \in M_{3,\lambda}$ и $S_A^1(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} A$ для любого $\lambda \neq 0$, таким образом, матрица $T(S_A^1(\lambda))$ подобна матрице $S_A^1(\lambda)$ в силу пункта 5. Следовательно $k_{A'}(\lambda, r) \geqslant k_{T(S_A^1(\lambda))}(\lambda, r) = k_{S_A^1(\lambda)}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r)$ для всех $r \in \mathbb{N}$. Таким образом $k_{A'}(\lambda, r) = k_A(\lambda, r)$ для произвольного $\lambda \neq 0$ и $r \in \mathbb{N}$, так как ранги матриц A и A' совпадают. Получаем, что $k_{A'}(0, r) = k_A(0, r)$, если $r \in \mathbb{N}$, что доказывает данную теорему. $\square$

Следующие следствия дают характеризацию действия отображения T и связывают результат применения T с жордановой нормальной формой матрицы A и считающими функциями k_A.

Следствие 3.2.15. *Пусть $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$, отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ биективно и строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, $T(\lambda E) = \lambda E$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогда отображение T сохраняет жорданову нормальную форму матриц из $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$.*

Следствие 3.2.16. *Пусть $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$, отображение $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ биективно и строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Тогда существует биекция $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ такая, что $\sigma(0) = 0$, $k_A(\lambda, r) = k_{T(A)}(\sigma(\lambda), r)$ для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $r \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Если $n = 1$, то доказывать нечего. Пусть $n \geqslant 2$,

$C = \lambda E$, $\lambda \neq 0$, $C' = T(C)$. Тогда $L_C = n$, $R_C = 0$ по лемме 3.2.6. Следовательно $L_{C'} = n$, $R_{C'} = 0$. Таким образом матрица C' является диагонализуемой с ненулевыми собственными значениями.

Предположим, что существуют пара различных собственных чисел λ_1 и λ_2. Пусть матрица A' имеет индекс 1 и $A' \overset{\sharp}{\leqslant} C'$, $L_{A'} = 2$, кроме того $K_{A'}(\lambda_1) = K_{A'}(\lambda_2) = 1$. Тогда число матриц X', имеющих индекс 1 и удовлетворяющих условию $X' \overset{\sharp}{\leqslant} A'$, конечно по лемме 3.1.12. Следовательно, число матриц X индекса один, удовлетворяющих условию $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$, также является конечным, здесь $A = T^{-1}(A')$. Так как $L_A = 2$, то матрица A имеет различные собственные числа и условие $A \overset{\sharp}{\leqslant} \lambda E$ не выполнено. Полученное противоречие показывает, что все собственные числа матрицы C' совпадают и $C' = \lambda' E$.

Тем самым, отображение $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, удовлетворяющее условиям $\sigma(0) = 0$ и $T(\lambda E) = \sigma(\lambda)E$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$, определено корректно. Так как отображение T является инъективным, то отображение σ также является инъективным. Более того, для T^{-1} отображение $\sigma'\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, удовлетворяющее условию $\sigma'(0) = 0$, $T^{-1}(\lambda E) = \sigma'(\lambda)E$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$, корректно определено и является сюръективным. Таким образом, отображение σ биективно.

Пусть T_σ и $T_{\sigma^{-1}}$ являются монотонными отображениями, построенными при помощи σ и σ^{-1} аналогично лемме 3.2.9. Тогда $k_A(\lambda, r) = k_{T_\sigma(A)}(\sigma(\lambda), r)$ для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $r \in \mathbb{N}$. В дополнение к этому отображение $\widetilde{T} = T_{\sigma^{-1}} \circ T$ (композиция отображений T и $T_{\sigma^{-1}}$) является биективным и строго-монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. По своему определению отображение $\widetilde{T}$ обладает свойством $\widetilde{T}(\lambda E) = \lambda E$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Согласно следствию 3.2.15 отображение $\widetilde{T}$ сохраняет жорданову нормальную форму на множестве $\mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$, откуда получаем равенство $k_A(\lambda, r) = k_{\widetilde{T}(A)}(\lambda, r)$ для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $r \in \mathbb{N}$. Таким образом $k_A(\lambda, r) = k_{\widetilde{T}(A)}(\lambda, r) = k_{T_\sigma(\widetilde{T}(A))}(\sigma(\lambda), r) = k_{T(A)}(\sigma(\lambda), r)$ для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $r \in \mathbb{N}$ так как $T = T_\sigma \circ \widetilde{T}$. $\square$

Биективные монотонные отображения и 0-аддитивность

Лемма 3.2.17. *Пусть* $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ *и отображение* $T\colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ *является монотонным относительно* $\overset{\sharp}{\leqslant}$*-порядка. Предположим, что существует биекция* $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$*, удовлетворяющая условию* $\sigma(0) = 0$*, причем для всех* $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$ *справедливо* $\operatorname{Spec} T(A) = \sigma(\operatorname{Spec} A)$ *и* $\operatorname{rk} T(A) = \operatorname{rk} A$*. Тогда отображение* T *является 0-аддитивным.*

Доказательство. Пусть для матриц $A, B \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ справедливо условие $A \perp B$. Покажем, что $T(A) \perp T(B)$ и $T(A+B) = T(A) + T(B)$. Если $A = 0$ или $B = 0$, то результат справедлив. Предположим, что $A \neq 0$, $B \neq 0$, тогда $A, B \notin M_0$.

Обозначим $D = S_A^2(0)$. Так как $S_A^1(0) = 0$, то $A = \sum\limits_{\lambda \neq 0} S_A^1(\lambda)$ и по пункту 3 теоремы 3.1.17 имеем $A \perp D$. Более того по пункту 2.a) теоремы 3.1.20 получаем, что $S_A^2(\lambda) \perp B$ для всех $\lambda \neq 0$. Таким образом $E - D = \sum\limits_{\lambda \neq 0} S_A^2(\lambda) \perp B$. В силу бесконечности поля $\mathbb{F}$ существуют различные ненулевые скаляры $\alpha, \beta \in \mathbb{F} \setminus (\operatorname{Spec} A \cup \operatorname{Spec} B)$. Пусть $A_1 = A$, $B_1 = B$, $A_2 = \alpha(E - D)$, $B_2 = \beta D$. Тогда $A_i, B_j \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$, $A_i \perp B_j$ при $i, j = 1, 2$. Обозначим $C_{ij} = A_i + B_j$, $A_i' = T(A_i)$, $B_i' = T(B_i)$, $C_{ij}' = T(C_{ij})$ при $i, j = 1, 2$.

Зафиксируем $i, j = 1, 2$ такие, что $(i, j) \neq (1, 1)$. Получаем, что $A_i \overset{\sharp}{\leqslant} C_{ij}$, следовательно, $A_i' \overset{\sharp}{\leqslant} C_{ij}'$. Аналогично $B_i' \overset{\sharp}{\leqslant} C_{ij}'$. Более того

$$\operatorname{Spec} A_i' \cap \operatorname{Spec} B_j' = \sigma(\operatorname{Spec} A_i) \cap \sigma(\operatorname{Spec} B_j) =$$

$$= \sigma(\operatorname{Spec} A_i \cap \operatorname{Spec} B_j) \subseteq \{0\}.$$

Получаем $A'_i \perp B'_j$ по следствию 3.1.21.

Таким образом, доказано, что $A'_i \perp B'_j$ для всех $i, j = 1, 2$, $(i, j) \neq (1, 1)$. Более того $\operatorname{rk} A'_2 + \operatorname{rk} B'_2 = \operatorname{rk} A_2 + \operatorname{rk} B_2 = n$. Обозначим $k = \operatorname{rk} A'_2$. В силу условия 3.1.3 существует матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$ такая, что $A'_2 = P \begin{pmatrix} A_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, $B'_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{2,1} \end{pmatrix} P^{-1}$ для некоторых $A_{2,1} \in GL_k(\mathbb{F})$ и $B_{2,1} \in M_{n-k}(\mathbb{F})$. Однако $\operatorname{rk} B_{2,1} = \operatorname{rk} B'_2 = n - k$, таким образом $B_{2,1} \in GL_{n-k}(\mathbb{F})$. По предложению 3.1.1 существует матрица $A_{1,1} \in M_k(\mathbb{F})$ такая, что $A'_1 = P \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. Аналогично $B'_1 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{1,1} \end{pmatrix} P^{-1}$ для некоторой $B_{1,1} \in M_{n-k}(\mathbb{F})$. Таким образом $A'_1 \perp B'_1$, следовательно $T(A) \perp T(B)$.

Так как $T(A) \overset{\sharp}{\leqslant} T(A + B)$ и $T(B) \overset{\sharp}{\leqslant} T(A + B)$, то по лемме 3.1.22 получаем $T(A) + T(B) \overset{\sharp}{\leqslant} T(A + B)$. Однако $\operatorname{rk}(T(A) + T(B)) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B = \operatorname{rk} T(A + B)$. Следовательно $T(A + B) = T(A) + T(B)$. □

Теорема 3.2.18. *Пусть $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ и отображение $T \colon \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \to \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F})$ является биекцией. Тогда отображение T строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка в том и только том случае, когда отображения T и T^{-1} одновременно являются 0-аддитивными.*

Доказательство. **Необходимость.** По следствию 3.2.16 существует биекция $\sigma \colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, удовлетворяющая условию $\sigma(0) = 0$, и такая, что $k_A(\lambda, r) = k_{T(A)}(\sigma(\lambda), r)$ для всех $A \in \mathrm{I}_n^1(\mathbb{F}) \setminus M_0$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $r \in \mathbb{N}$. Таким образом, отображение T является 0-аддитивным в силу леммы 3.2.17. Аналогично отображение T^{-1} также 0-аддитивно.

Достаточность. Так как T является 0-аддитивным отображением, то T также является монотонным относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка в силу леммы 3.2.8. Так как отображение T 0-аддитивно, то оно является биекцией и монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Аналогично отображение T^{-1} также монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Таким образом, отображение T является строго-монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. $\square$

Следующий пример демонстрирует существенность условий теоремы 3.2.18.

Пример 3.2.19. Пусть отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ определяется по следующему правилу: если $\mathrm{rk}(A) = k$, то $T(A) = \sum\limits_{i=1}^{k} E_{ii}$. Отображение T не является биекцией, оно монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, однако не является строго монотонным и T не 0-аддитивно.

3.3 Инъективные отображения диагонализуемых матриц

Напомним, что матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ называется диагонализуемой, если существует $P \in GL_n(\mathbb{F})$ такая, что $P^{-1}AP$ — диагональная, $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ — диагонализуемые матрицы из $M_n(\mathbb{F})$.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, $n \geqslant 3$, инъективное отображение $T\colon \mathcal{D}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка. Тогда существуют матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$, ненулевой эндоморфизм $f\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ и $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — инъективное отображение с условием $\sigma(0) = 0$ такие, что*

$$T(A) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}} \sigma(\lambda) P^{-1} (S_A^2(\lambda))^f P \text{ для всех } A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F}),$$

или

$$T(A) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}} \sigma(\lambda) P^{-1} [(S_A^2(\lambda))^f]^t P \text{ для всех } A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F}).$$

Доказательство. Проведем доказательство в несколько шагов.

Шаг 1. Покажем, что T сохраняет ранг.

Пусть $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ и $\operatorname{rk} A = k$. Тогда существуют матрицы такие $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$, что $A_0 \overset{\sharp}{<} A_1 \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} A_n$ и $A_k = A$. В самом деле, так как A диагонализуема, то существует $Q \in GL_n(\mathbb{F})$ такая, что $A = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0) Q^{-1}$. Пусть $\lambda_s = 1$ при $k < s \leqslant n$. Положим $A_0 = 0$, $A_s = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s, 0, \dots, 0) Q^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$ для каждого s, $1 \leqslant s \leqslant n$. Тем самым, $A_0 \overset{\sharp}{<} A_1 \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} A_n$ и $A_k = A$.

Итак, для любой $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ с $\operatorname{rk} A = k$ имеем

$$A_0 \overset{\sharp}{<} A_1 \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} A_n, \quad A_k = A.$$

Так как отображение T инъективно и монотонно, то

$$T(A_0) \overset{\sharp}{<} T(A_1) \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} T(A_n).$$

Заметим, что если A и B таковы, что $A \overset{\sharp}{<} B$, то $A \overline{<} B$, откуда $0 < \operatorname{rk}(B - A) = \operatorname{rk} B - \operatorname{rk} A$, и $1 \leqslant \operatorname{rk} B - \operatorname{rk} A$.

Обозначим $d_i = \operatorname{rk} T(A_i)$ для $i = 0, \dots, n$. Тогда

$$1 \leqslant d_1 - d_0, \ \dots, \ 1 \leqslant d_k - d_{k-1}, \quad 1 \leqslant d_{k+1} - d_k, \ \dots, \ 1 \leqslant d_n - d_{n-1}.$$

Складывая k первых неравенств, получаем $k \leqslant d_k - d_0$. Следовательно, $k \leqslant k + d_0 \leqslant d_k$. Аналогично, складывая $n-k$ последних неравенств, имеем $n - k \leqslant d_n - d_k$. Тем самым, $d_k \leqslant k - n + d_n \leqslant k$. Таким образом, $d_k = k$, и T сохраняет ранг.

Шаг 2. Докажем, что для любого $\lambda \in \mathbb{F}$ существует $\mu \in \mathbb{F}$, удовлетворяющее равенству $T(\lambda E) = \mu E$.

1. Если $\lambda = 0$, то $\mu = 0$ из условия сохранения ранга.

2. Пусть $\lambda \neq 0$. Предположим, что $T(\lambda E)$ не скалярная матрица. Рассмотрим

$$\Gamma = \{X \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F}) \mid X \overset{\sharp}{\leqslant} \lambda E \text{ и не существует } \nu \in \mathbb{F}, \text{ что } T(X) \overset{\sharp}{\leqslant} \nu E\}.$$

Так как T сохраняет ранг и матрица $T(\lambda E)$ не скалярная, имеем $\lambda E \in \Gamma$.

3. Обозначим $m = \min\limits_{X \in \Gamma} \operatorname{rk} X$ и покажем, что $m > 1$. Так как T сохраняет ранг, то $T(0) = 0 \overset{\sharp}{\leqslant} E$, и $0 \notin \Gamma$, $m > 0$. Более того, для произвольной матрицы $X \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ ранга 1 имеем $T(X) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ и $\operatorname{rk} T(X) = 1$, то есть существуют $\alpha \in \mathbb{F}$ и $Q_1 \in GL_n(\mathbb{F})$ такие, что $T(X) = \alpha Q_1^{-1} E_{11} Q_1 \overset{\sharp}{\leqslant} \alpha E$. Следовательно, $X \notin \Gamma$ и $m > 1$.

4. Покажем, что $m \geqslant 3$. Предположим обратное, тогда $m = 2$. Рассмотрим такую матрицу $X \in \Gamma$, что $\operatorname{rk} X = 2$. Имеем $X \overset{\sharp}{\leqslant} \lambda E$, и существует матрица $Q_2 \in GL_n(\mathbb{F})$ такая, что

$$X = Q_2^{-1}(\lambda E_{11} + \lambda E_{22}) Q_2.$$

Тогда существуют по меньшей мере 3 различные матрицы Y_1, Y_2, $Y_3 \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$, которые имеют ранг 1 и удовлетворяют условию $Y_j \overset{\sharp}{\leqslant} X$ для $j = 1, 2, 3$. Действительно, пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — различные элементы $\mathbb{F}$. Определим $Y_j = Q_2^{-1}(\lambda E_{11} + \alpha_j E_{12}) Q_2$, $j = 1, 2, 3$.

Тогда $T(Y_j) \overset{\sharp}{\leqslant} T(X)$ при $j = 1, 2, 3$. Более того, так как T инъективно, матрицы $T(Y_1)$, $T(Y_2)$ и $T(Y_3)$ различны. Если $T(X)$ имеет различные ненулевые собственные числа, то по лемме 3.1.11 существует не более двух матриц Y ранга 1 таких, что $Y \overset{\sharp}{\leqslant} T(X)$. Таким образом, собственные значения $T(X)$ должны быть равны. Следовательно, существует $\nu \in \mathbb{F}$ такое, что $T(X) \overset{\sharp}{\leqslant} \nu E$. Отсюда, $X \notin \Gamma$.

5. Пусть $A \in \Gamma$ и $\operatorname{rk} A = m$. Так как A диагонализуема, существует матрица $B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ такая, что $B \overset{\sharp}{\leqslant} A$ и $\operatorname{rk} B = m - 1$. По определению

m имеем $B \notin \Gamma$. Тогда существует $\beta \neq 0$ такое, что $T(B) \overset{\sharp}{\leqslant} \beta E$. Так как $T(B) \overset{\sharp}{\leqslant} T(A)$ и $\operatorname{rk} T(B) = \operatorname{rk} B = m-1$, то β — собственное число $T(A)$ кратности минимум $m-1$. Более того, так как $\operatorname{rk} T(A) = \operatorname{rk} A = m$ и нет ν такого, что $T(A) \overset{\sharp}{\leqslant} \nu E$, то кратность β равна $m-1$. Следовательно, $\operatorname{rk} S^1_{T(A)}(\beta) = m-1$, и кратность другого собственного числа равна 1.

6. Для произвольной матрицы $X \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$, удовлетворяющей условиям $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$ и $\operatorname{rk} X = m-1$, имеем $X \notin \Gamma$. Следовательно, $T(X) \overset{\sharp}{\leqslant} \gamma E$ для некоторого элемента $\gamma \in \mathbb{F}$. Отсюда следует, что $T(X) = S^1_{T(X)}(\gamma)$ и $\operatorname{rk} S^1_{T(X)}(\gamma) = m-1 \geqslant 2$, поскольку $m \geqslant 3$.

Далее, $T(X) \overset{\sharp}{\leqslant} T(A)$, и по пункту 3 теоремы 3.1.20 отсюда следует, что $S^1_{T(X)}(\gamma) \overset{\sharp}{\leqslant} S^1_{T(A)}(\gamma)$. Поэтому γ не может быть собственным числом $T(A)$ кратности 1. Значит, $\gamma = \beta$.

7. Из пунктов 5 и 6 следует, что $T(X) = S^1_{T(X)}(\beta) \overset{\sharp}{\leqslant} S^1_{T(A)}(\beta)$ и также $\operatorname{rk} T(X) = m-1 = \operatorname{rk} S^1_{T(A)}(\beta)$. Тогда $T(X) = S^1_{T(A)}(\beta)$ для любой диагонализуемой X ранга $m-1$, такой, что $X \overset{\sharp}{\leqslant} A$. Это противоречит инъективности T, так как существуют две или более диагонализуемые матрицы X_1 и X_2 такие, что $X_j \overset{\sharp}{\leqslant} A$ и $\operatorname{rk} X_j = m-1$, $j = 1, 2$. В частности, можно взять $X_1 = Q_3(\alpha_1 E_{11} + \ldots + \alpha_{m-1} E_{m-1m-1}) Q_3^{-1}$, $X_2 = Q_3(\alpha_2 E_{22} + \ldots + \alpha_m E_{mm}) Q_3^{-1}$, где Q_3 такая, что $Q_3 A Q_3^{-1}$ диагональная с $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ на диагонали.

Полученное противоречие показывает, что для всякого $\lambda \in \mathbb{F}$ существует $\mu = \mu(\lambda) \in \mathbb{F}$ такое, что выполнено равенство $T(\lambda E) = \mu(\lambda) E$.

Шаг 3. Покажем, что отображение T является 0-аддитивным.

1. Определим отображение $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ такое, что $T(\lambda E) = \sigma(\lambda) E$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Из шага 2 следует, что такое σ существует, оно инъективно

и $\sigma(0) = 0$.

2. Предположим, что $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$. Докажем, что

$$T(S_A^1(\lambda_1)) \perp T(S_A^1(\lambda_2))$$

для $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $T(A) = \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{F}} T(S_A^1(\lambda))$. Действительно, $S_A^1(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} A$ для всех $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ по определению $S_A^1(\lambda)$. Так как A диагонализуема, $S_A^1(0) = 0$. Тогда $S_A^1(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} A$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$.

3. В силу монотонности отображения T имеем $T(S_A^1(\lambda)) \overset{\sharp}{\leqslant} T(A)$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Более того,

$$S_A^1(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} \lambda E, \quad T(S_A^1(\lambda)) \overset{\sharp}{\leqslant} T(\lambda E) = \sigma(\lambda) E.$$

Тогда

$$T(S_A^1(\lambda)) = S^1_{T(S_A^1(\lambda))}(\sigma(\lambda)) \overset{\sharp}{\leqslant} S^1_{T(A)}(\sigma(\lambda))$$

для всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Так как функция σ инъективна, по пункту 3 теоремы 3.1.17 имеем $S^1_{T(A)}(\sigma(\lambda_1)) \perp S^1_{T(A)}(\sigma(\lambda_2))$, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тогда $T(S_A^1(\lambda_1)) \perp T(S_A^1(\lambda_2))$ если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ по лемме 3.1.5. Более того, по лемме 3.1.22 имеем $\sum\limits_{\lambda \in \mathbb{F}} T(S_A^1(\lambda)) \overset{\sharp}{\leqslant} T(A)$ и $T(A) = \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{F}} T(S_A^1(\lambda))$, так как ранги равны.

4. Пусть $X, Y \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$, $X \perp Y$ и $X = S_X^1(\lambda)$, $Y = S_Y^1(\lambda)$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, следовательно, оно бесконечно, тогда существуют $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ такие, что $0, \alpha, \beta, \lambda$ попарно различные элементы $\mathbb{F}$. Определим $X' = \alpha S_X^2(\lambda)$, $Y' = \beta S_X^2(0)$. Тогда $X \perp Y'$, $X' \perp Y$, $X' \perp Y'$ и $\operatorname{rk} X' + \operatorname{rk} Y' = n$. Из сказанного выше следует, что $T(X) \perp T(Y')$, $T(X') \perp T(Y)$, $T(X') \perp T(Y')$ и $\operatorname{rk} T(X') + \operatorname{rk} T(Y') = n$. Аналогично доказательству леммы 3.2.17 имеем $T(X) \perp T(Y)$, $T(X) + T(Y) = T(X + Y)$.

5. Пусть $A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$, $A \perp B$ фиксированные произвольные матрицы. Тогда

$$T(A) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}} T(S^1_A(\lambda)) \perp \sum_{\lambda \in \mathbb{F}} T(S^1_B(\lambda)) = T(B)$$

по вышеизложенному, и значит, $S^1_A(\lambda_1) \perp S^1_B(\lambda_2)$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$. Более того,

$$T(A+B) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}} T(S^1_{A+B}(\lambda)) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}} T(S^1_A(\lambda) + S^1_B(\lambda)) =$$

$$= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}} T(S^1_A(\lambda)) + \sum_{\lambda \in \mathbb{F}} T(S^1_B(\lambda)) = T(A) + T(B),$$

и отображение T является 0-аддитивным.

Шаг 4. Конечный вид отображения T.

1. Рассмотрим отображение $T_1 \colon \mathcal{D}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$, определенное как $T_1(A) = (\sigma(1))^{-1} T(A)$. Легко проверить, что отображение T_1 монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка, T_1 является 0-аддитивным, и T_1 удовлетворяет равенству $T_1(\lambda E) = \sigma_1(\lambda) E$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$, где

$$\sigma_1(\lambda) = (\sigma(1))^{-1} \sigma(\lambda)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Более того, $\sigma_1(0) = 0$ и $\sigma_1(1) = 1$.

2. Предположим, что $A \in M_n(\mathbb{F})$ — идемпотент ранга 1. Тогда $A \overset{\sharp}{\leqslant} E$ и $T_1(A) \overset{\sharp}{\leqslant} T_1(E) = E$, $\operatorname{rk} T_1(A) = 1$. Поэтому $T_1(A)$ — также идемпотент ранга 1. Следовательно, по теореме 2.3 из [56] существуют матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$ и ненулевой эндоморфизм f поля $\mathbb{F}$ такой, что или $T_1(A) = P^{-1} A^f P$ для любого идемпотента ранга 1 A, или $T_1(A) = P^{-1} (A^f)^t P$ для любого идемпотента ранга 1 A. Отметим, что в [56] результат получен только для $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Однако аналогичное доказательство применимо к произвольному алгебраически замкнутому

полю. Действительно, несюрьективный аналог основной теоремы проективной геометрии, который является ключевым инструментом в вышеописанной характеризации, доказан в [24] даже для произвольного тела.

3. Таким образом, или $T_1(A) = P^{-1}A^fP$, или $T_1(A) = P^{-1}(A^f)^tP$ на множестве идемпотентов ранга 1. Применяя, если необходимо, сопряжение и транспонирование к отображению T_1, получаем 0-аддитивное отображение $T_2\colon \mathcal{D}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$, удовлетворяющее условиям $T_2(A) = A^f$ для всех идемпотентов ранга 1 и $T_2(\lambda E) = \sigma_1(\lambda)E$.

4. Из 0-аддитивности T_2 следует, что $T_2(A) = A^f$ для всех идемпотентов, так как любой идемпотент есть сумма попарно ортогональных идемпотентов ранга 1.

5. Для любой $B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$, такой, что $\operatorname{rk} B = 1$, верно, что $B = S_B^1(\lambda)$ для некоторого $\lambda \neq 0$. Тогда $B \perp S_B^2(0)$ и

$$T_2(B) \perp T_2(S_B^2(0)) = (S_B^2(0))^f.$$

Более того, $\operatorname{rk} T_2(B) + \operatorname{rk}(S_B^2(0))^f = n$. Однако

$$\frac{1}{\sigma_1(\lambda)}T_2(B) + (S_B^2(0))^f = E = (S_B^2(0) + S_B^2(\lambda))^f,$$

так что $T_2(B) = \sigma_1(\lambda)(S_B^2(\lambda))^f$.

6. Следовательно, $T_2(A) = \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{F}} \sigma_1(\lambda)(S_A^2(\lambda))^f$ для всех $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$. Однако $\sigma(\lambda) = \sigma(1)\sigma_1(\lambda)$, значит,

$$T(A) = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}} \sigma(\lambda)P^{-1}(S_A^2(\lambda))^fP$$

для всех $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ или

$$T(A) = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}} \sigma(\lambda)P^{-1}((S_A^2(\lambda))^f)^tP$$

для всех $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$, что и требовалось доказать. □

Теорема 3.3.2. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, $n \geqslant 3$, отображение $T\colon \mathcal{D}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Тогда T инъективно, и существуют такие обратимая матрица $P \in GL_n(\mathbb{F})$, ненулевой эндоморфизм f поля $\mathbb{F}$, $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — инъективное отображение с условием $\sigma(0) = 0$, что*

$$T(A) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}} \sigma(\lambda) P^{-1} (S_A^2(\lambda))^f P \text{ для всех } A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F}),$$

или

$$T(A) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}} \sigma(\lambda) P^{-1} [(S_A^2(\lambda))^f]^t P \text{ для всех } A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F}).$$

Доказательство. Аналогично пункту 1 теоремы 3.3.1 покажем, что отображение T сохраняет ранг.

Пусть матрицы $X, Y \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ таковы, что $T(X) = T(Y)$. Тогда $\operatorname{rk} X = \operatorname{rk} Y = r$. Возможны два случая:

1) $r > 1$. Пусть ненулевые матрицы X_1, X_2 таковы, что $X_1 \perp X_2$, $X = X_1 + X_2$. Тогда $X_i \overset{\sharp}{<} X$, $T(X_i) \overset{\sharp}{<} T(X) = T(Y)$, $X_i \overset{\sharp}{<} Y$ для $i = 1, 2$. Поэтому $X = X_1 + X_2 \overset{\sharp}{\leqslant} Y$ по лемме 3.1.22, и $X = Y$.

2) $r = 1$. Обозначим через λ ненулевое собственное значение матрицы X. $X \overset{\sharp}{<} \lambda E$, поэтому $Y \overset{\sharp}{<} \lambda E$, $\lambda \in \operatorname{Spec}(Y)$. Пусть $\mu \in \mathbb{F} \setminus \{0, \lambda\}$, $A = X + \mu S_X^2(0)$. Тогда $X \overset{\sharp}{<} A$ и $Y \overset{\sharp}{<} A$,

$$Y = S_Y^1(\lambda) \overset{\sharp}{\leqslant} S_A^1(\lambda) = X, \quad X = Y.$$

Таким образом, отображение T инъективно и имеет указанный вид по теореме 3.3.1. □

Следующее предложение обеспечивает условия единственности вышеупомянутой формы T.

Утверждение 3.3.3. Пусть $T_j(A) = \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{F}} \sigma_j(\lambda) P_j^{-1}[(S_A^2(\lambda))^{f_j}]^{t_j} P_j$ при $j = 1, 2$, где каждый t_j есть либо тождественное отображение, либо транспозиция, $P_j \in GL_n(\mathbb{F})$, f_1, f_2 — эндоморфизмы поля $\mathbb{F}$, оба ненулевые, $\sigma_j\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — некоторые отображения. Предположим, что $T_1(A) = T_2(A)$ для всех $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$. Тогда $\sigma_1 \equiv \sigma_2$. Предположим также, что $\sigma_1 \neq \mathrm{const}$, тогда $f_1 \equiv f_2$, $t_1 = t_2$, и существует $\alpha \neq 0$ такой, что $P_2 = \alpha P_1$.

Доказательство. Для всех $\lambda \in \mathbb{F}$ имеем

$$T_1(\lambda E) = \sigma_1(\lambda) E = \sigma_2(\lambda) E = T_2(\lambda E),$$

тогда $\sigma_1 \equiv \sigma_2$. Определим

$$\sigma(\lambda) = \sigma_1(\lambda) - \sigma_1(0), T(A) = T_1(A) - \sigma_1(0) E.$$

Таким образом, $T(A) = \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{F}} \sigma(\lambda) P_j^{-1}[(S_A^2(\lambda))^{f_j}]^{t_j} P_j$ для $j = 1, 2$. Если $\sigma_1 \neq \mathrm{const}$, то $\sigma \neq \mathrm{const}$, и существует такое значение $\mu \in \mathbb{F}$, что $\sigma(\mu) \neq \sigma(0) = 0$. Для любой идемпотентной матрицы A имеем

$$T(\mu A) = \sigma(\mu) P_1^{-1}(A^{f_1})^{t_1} P_1 = \sigma(\mu) P_2^{-1}(A^{f_2})^{t_2} P_2.$$

Обозначая $Q = P_2 P_1^{-1}$, получаем $(A^{f_1})^{t_1} = Q^{-1}(A^{f_2})^{t_2} Q$.

Подставляя $A = E_{ii}$, имеем $E_{ii} = Q^{-1} E_{ii} Q$. Таким образом, верно равенство $Q = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Пусть $A = E_{11} + \lambda E_{i1}$, $i > 1$. Так как $(A^{f_1})^{t_1} = Q^{-1}(A^{f_2})^{t_2} Q$ и $E_{11} = Q^{-1} E_{11} Q$, то $f_1(\lambda)(E_{i1})^{t_1} = f_2(\lambda) Q^{-1}(E_{i1})^{t_2} Q$. Тогда $t_1 = t_2$. Если t_1 — тождественное отображение, то $f_1(\lambda) E_{i1} = f_2(\lambda) \alpha_i^{-1} \alpha_1 E_{i1}$. Если t_1 — транспозиция, то $f_1(\lambda) E_{1i} = f_2(\lambda) \alpha_1^{-1} \alpha_i E_{1i}$. В обоих случаях определим $\lambda = 1$ получим $\alpha_i = \alpha_1$ для всех $i > 1$, следовательно, $f_1 \equiv f_2$. Таким образом, Q — скалярная матрица, и существует $\alpha \neq 0$ такой, что $P_2 = \alpha P_1$. $\square$

Примеры

Ниже приведем несколько примеров, которые покажут, что условия теорем 3.3.1 и 3.3.2 являются обязательными.

Первые два примера показывают, что хотя монотонные отображения на $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ имеют некоторую стандартную форму, но на всем пространстве матриц $M_n(\mathbb{F})$ они неконтролируемы.

Пример 3.3.4. Пусть $T_1\colon M_n(\overline{\mathbb{F}}) \to M_n(\mathbb{F})$ определено по следующему правилу: $T_1(A) = 0$, если $\operatorname{Ind}(A) > 1$, и $T_1(A) = A$, если $\operatorname{Ind}(A) = 1$. Тогда T_1 монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка. Однако T_1 не имеет форму, описанную в теореме 3.3.1. Действительно, все отображения, описанные в теореме 3.3.1, инъективны, но T_1 таковым не является.

Даже при условии, что T биективно и сторого монотонно на всем $M_n(\mathbb{F})$, оно может иметь форму, отличную от описанных в теореме 3.3.1, как показывает следующий пример.

Пример 3.3.5. Пусть $T_2\colon M_n(\overline{\mathbb{F}}) \to M_n(\mathbb{F})$ определен как

$$T_2(A) = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}} (\lambda S_A^2(\lambda) - S_A^3(\lambda)).$$

Здесь в спектральном ортогональном разложении A через $S_A^2(\lambda)$ и $S_A^3(\lambda)$ плюс был заменен на минус. Тогда

(1) T_2 биективно,

(2) T_2 строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка,

однако отображение T_2 не имеет форму, описанную в теореме 3.3.1.

Заметим, что на $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ отображение T_2 тождественно. Проверим условия (1) и (2). Действительно, $T_2(T_2(A)) = A$ для всех $A \in M_n(\mathbb{F})$. Это влечет биективность. T строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка, так как $S^2_{T_2(A)}(\lambda) = S^2_A(\lambda)$ и $S^3_{T_2(A)}(\lambda) = -S^3_A(\lambda)$ для всех $A \in M_n(\mathbb{F})$. Поскольку $T_2(E_{12}) = -E_{12}$, T_2 не тождественно на $M_n(\mathbb{F})$.

Следующий пример показывает, что если рассмотреть отображение на множестве диагонализуемых матриц, которое не инъективно и не строго монотонно, то оно также может быть произвольного вида.

Пример 3.3.6. Пусть $T_3\colon \mathcal{D}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ таково, что для любой матрицы $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ с условием $\operatorname{rk} A = k$ имеем $T_3(A) = E_{11} + \ldots + E_{kk}$. Тогда T_3 монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, T_3 не инъективно, T_3 не строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, и T_3 не имеет формы, описанной в теореме 3.3.1.

3.4 Непрерывные отображения комплексных матриц

Далее предполагаем, что $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Теорема 3.4.1. *Пусть $n \geqslant 3$, отображение $T\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ инъективно и непрерывно. Пусть также выполнено хотя бы одно из условий:*

а) T монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка;

б) T монотонно относительно $\overset{cn}{\leqslant}$-порядка;

в) T является 0-аддитивным.

Тогда существуют $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такие, что

$$\begin{aligned} T(X) &= \alpha P^{-1} X P \quad && \textit{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}), \textit{ или} \\ T(X) &= \alpha P^{-1} X^t P \quad && \textit{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}), \textit{ или} \\ T(X) &= \alpha P^{-1} \overline{X} P \quad && \textit{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}), \textit{ или} \\ T(X) &= \alpha P^{-1} \overline{X}^t P \quad && \textit{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}), \end{aligned}$$

здесь $\overline{X}$ *— матрица, полученная из* X *поэлементным комплексным сопряжением.*

Доказательство. а) 1. Пусть $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ — произвольная диагонализуемая матрица, $\operatorname{rk} A = r$. Легко проверить, что существуют диагонализуемые матрицы $A_1, \ldots, A_n$ такие, что $A_r = A$ и

$$0 \overset{\sharp}{<} A_1 \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} A_n.$$

Тогда

$$0 \overset{\sharp}{<} T(A_1) \overset{\sharp}{<} \cdots \overset{\sharp}{<} T(A_n).$$

Поэтому по 2.1.5 также диагонализуемы. В этом случае $T(A) = T(A_r)$ диагонализуема, и $T(\mathcal{D}_n(\mathbb{C})) \subseteq \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

2. По теореме 3.3.1, существуют $P \in GL_n(\mathbb{C})$, ненулевой эндоморфизм $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и инъективное отображение $\sigma_0\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\sigma_0(0) = 0$ такие, что

$$T(A) = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \sigma_0(\lambda) P^{-1} (S_A^2(\lambda))^f P \text{ для всех } A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$$

или

$$T(A) = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \sigma_0(\lambda) P^{-1} [(S_A^2(\lambda))^f]^t P \text{ для всех } A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}).$$

Применяя, если необходимо, сопряжение матрицей P и транспонирование к отображению T, получим инъективное непрерывное отображение $T_1\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющее условию

$$T_1(A) = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \sigma_0(\lambda) (S_A^2(\lambda))^f \text{ для всех } A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}).$$

Теперь определим отображение $d\colon \mathbb{C} \to M_n(\mathbb{C})$ следующим образом:

$$d(\lambda) = T_1(E_{11} + \lambda E_{12}) = \sigma_0(1)(E_{11} + f(\lambda) E_{12}).$$

Так как $\sigma_0(1) \neq \sigma_0(0) = 0$ и отображение d непрерывно, эндоморфизм $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ также непрерывен. Вспомним, что существует только два ненулевых непрерывных эндоморфизма поля $\mathbb{C}$: тождественное отображение и комплексное сопряжение. Таким образом, $f(\lambda) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, или $f(\lambda) = \overline{\lambda}$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

Определим $T_2(A) = (T_1(A))^f$. Под применением к матрице $X = (x_{ij})$ эндоморфизма f понимается поэлементное применение f, то есть $X^f = (f(x_{ij}))$. Так, отображение $T_2\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ инъективно и непрерывно, и

$$T_2(A) = \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma(\lambda) S^2_A(\lambda) \text{ для всех } A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}),$$

где $\sigma(\lambda) := f(\sigma_0(\lambda))$.

3. Докажем, что функция $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ линейна. Сначала отметим, что функция $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ непрерывна и инъективна. Действительно,

$$T_2(\mu E_{11}) = \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma(\lambda) S^2_{\mu E_{11}}(\lambda) =$$

$$= \sigma(0) S^2_{\mu E_{11}}(0) + \sigma(\mu) S^2_{\mu E_{11}}(\mu) = \sigma(\mu) E_{11},$$

и отображение T_2 инъективно и непрерывно.

Пусть $\mu, \nu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mu \neq \nu$. Обозначим

$$A_{\mu,\nu} = \mu E_{11} + E_{12} + \nu E_{22},$$

$$X_{\mu,\nu} = \mu E_{11} - \frac{\mu}{\nu - \mu} E_{12},$$

$$Y_{\mu,\nu} = \nu E_{22} + \frac{\nu}{\nu - \mu} E_{12}.$$

Тогда $A_{\mu,\nu} = X_{\mu,\nu} + Y_{\mu,\nu}$, $X^2_{\mu,\nu} = \mu X_{\mu,\nu}$, $Y^2_{\mu,\nu} = \nu Y_{\mu,\nu}$, $X_{\mu,\nu} \perp Y_{\mu,\nu}$.

Из неравенства $\mu \neq \nu$ следует

$$S^1_{A_{\mu,\nu}}(\mu) = X_{\mu,\nu}, \quad S^1_{A_{\mu,\nu}}(\nu) = Y_{\mu,\nu}.$$

Посчитаем $T_2(A_{\mu,\nu})$:

$$T_2(A_{\mu,\nu}) = \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma(\lambda) S^2_{A_{\mu,\nu}}(\lambda) = \sigma(\mu) S^2_{A_{\mu,\nu}}(\mu) + \sigma(\nu) S^2_{A_{\mu,\nu}}(\nu) =$$

$$= \frac{\sigma(\mu)}{\mu} S^1_{A_{\mu,\nu}}(\mu) + \frac{\sigma(\nu)}{\nu} S^1_{A_{\mu,\nu}}(\nu) = \frac{\sigma(\mu)}{\mu} X_{\mu,\nu} + \frac{\sigma(\nu)}{\nu} Y_{\mu,\nu} =$$

$$= \sigma(\mu) E_{11} + \sigma(\nu) E_{22} + \frac{\sigma(\nu) - \sigma(\mu)}{\nu - \mu} E_{12}.$$

Теперь применим методы комплексного анализа.

Все определения и результаты, которые использованы ниже, можно найти в [7]. Вследствие непрерывности T_2 для всех $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ существует $\lim\limits_{\nu\to\mu} \frac{\sigma(\nu)-\sigma(\mu)}{\nu-\mu}$. По [7, p. 34] функция σ аналитична в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Более того, из непрерывности $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ следует, что существует $\lim\limits_{\mu\to 0} \sigma(\mu)$, и единственная устранимая особая точка $0 \in \mathbb{C}$. Отсюда σ — целая функция, следовательно, она аналитична на всей комплексной плоскости.

По [7, p. 187] любая аналитическая функция σ удовлетворяет следующему утверждению(теорема об открытом отображении): если σ не константа, то для любой области $\Omega \subseteq C$ множество $\sigma(\Omega)$ также является областью.

Так как σ инъективна, она не являетя константой. Обозначим $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, тогда $\Omega_1 = \sigma(\Omega_0)$ — область, и $\sigma(0) = 0 \in \Omega_1$. Тогда множество Ω_1 открыто, и существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\Omega^{(\varepsilon)} = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z| < \varepsilon \right\} \subseteq \Omega_1.$$

Таким образом, все значения из области $\Omega^{(\varepsilon)}$ достигаются функцией σ в области Ω_0. Однако функция σ инъективна, и $\sigma(z) \notin \Omega^{(\varepsilon)}$ для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega_0 = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z| \geqslant 1 \right\}$.

Точка ∞ — единственная особая точка функции σ. Предположим, что это устранимая особая точка. Тогда σ — константа, что неверно. Покажем, что ∞ – не существенно особая точка функции σ.

Предположим противное. Тогда по теореме Сохоцкого (см. [7], стр. 123) найдется последовательность точек z_m, $m = 1, 2, \dots$ такая, что $z_m \to \infty$ при $m \to \infty$, и $\lim_{m\to\infty} \sigma(z_m) = 0$. Поэтому найдется N_1 такое, что для $m > N_1$ имеем $\sigma(z_m) \in \Omega^{(\varepsilon)}$. С другой стороны, так как $z_m \to \infty$ при $m \to \infty$, существует N_2 такое, что $|z_m| > 1$ для всех $m > N_2$. Обозначим $N = \max\{N_1, N_2\} + 1$ и покажем, что $z_N \notin \Omega_0$, $\sigma(z_N) \in \Omega^{(\varepsilon)}$. Это приведет к противоречию. ∞ не является существенно особой точкой σ.

В таком случае, точка ∞ является полюсом, а σ — многочленом.

Обозначим $\sigma(z) = \alpha \prod_{s=1}^{k} (z - z_s)$, где $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, k — степень этого многочлена, а $z_s \in \mathbb{C}$, $s = 1, \dots, k$ — корни многочлена $\sigma(z)$. Так как $\sigma(z_s) = 0 = \sigma(0)$ при всех s, то

$$z_1 = z_2 = \dots = z_k = 0$$

из инъективности σ. Следовательно, $\sigma(z) = \alpha z^k$. В таком случае, $\sigma(1) = \sigma(e^{\frac{2\pi i}{k}})$. Так как σ инъективна, то $k = 1$, и $\sigma(z) = \alpha z$.

4. Так как $\sigma(z) = \alpha z$ для всех $z \in \mathbb{C}$, имеем

$$T_2(A) = \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma(\lambda) S_A^2(\lambda) = \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} (\alpha\lambda) S_A^2(\lambda) = \alpha \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \lambda S_A^2(\lambda) = \alpha A$$

для всех $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Пусть $X \in M_n(\mathbb{C})$ – произвольня матрица. Тогда существует набор $\{A_q\} \subseteq \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ диагонализуемых матриц такой, что $\lim_{q\to\infty} A_q = X$. По предположению непрерывности T_2 имеем

$$T_2(X) = \lim_{q\to\infty} T(A_q) = \lim_{q\to\infty} \alpha A_q = \alpha X,$$

то есть $T_2(X) = \alpha X$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{C})$. Следовательно, по определениям T_2 и T_1 отображение T имеет требуемую форму.

б) Пусть $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ — некоторая диагонализуемая матрица, $\operatorname{rk} A = r$. Легко проверить, что существуют диагонализуемые матрицы $A_1, \ldots, A_n$ такие, что $A_r = A$ и

$$0 \overset{\text{cn}}{<} A_1 \overset{\text{cn}}{<} \cdots \overset{\text{cn}}{<} A_n.$$

Тогда

$$0 \overset{\text{cn}}{<} T(A_1) \overset{\text{cn}}{<} \cdots \overset{\text{cn}}{<} T(A_n).$$

Следовательно, по 2.1.5 также диагонализуемы. В этом случае $T(A) = T(A_r)$ диагонализуема, и $T(\mathcal{D}_n(\mathbb{C})) \subseteq \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Так как $\overset{\sharp}{\leqslant}$- и $\overset{\text{cn}}{\leqslant}$-порядки совпадают на множестве $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, оставшееся доказательство совпадает с доказательством в случае а).

в) Так как $T(0) = T(0) + T(0)$, то $T(0) = 0$. В силу инъективности отображения T, имеем $T(X) \neq 0$ при $X \neq 0$.

Пусть $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, $k = \operatorname{rk} A$. Тогда найдутся такие матрицы $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, что $A = A_1 + \ldots + A_k$, и $\operatorname{rk} A_i = 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$, и $A_i \perp A_j$ для всех $i \neq j$. Действительно, поскольку матрица A диагонализуема, существует $P_A \in GL_n(\mathbb{C})$ такая, что матрица $\widetilde{A} = P_A^{-1} A P_A$ диагональна и имеет вид

$$\widetilde{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{(A)}, \ldots, \lambda_k^{(A)}, 0, \ldots, 0).$$

Обозначив $\lambda_s^{(A)} = 1$ для $k < s \leqslant n$ и

$$\widetilde{A}_s = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, \lambda_s^{(A)}, 0, \ldots, 0),$$

где $\lambda_s^{(A)}$ на позиции s для $1 \leqslant s \leqslant n$, имеем $\widetilde{A}_i \perp \widetilde{A}_j$, если $i \neq j$. Более того, если $A_s = P_A \widetilde{A}_s P_A^{-1}$ для $1 \leqslant s \leqslant n$, то $A_i \perp A_j$ для $i \neq j$, и $A = A_1 + \ldots + A_k$.

Из 0-аддитивности T следует $T(A_i) \perp T(A_j)$ для $i \neq j$, и $T(A) = T(A_1) + \ldots + T(A_k)$. Также $T(A_i) \neq 0$, если $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, $\operatorname{rk} T(A_i) = 1$ и $T(A_i) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ для всех i. В таком случае $T(A) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, и $T(\mathcal{D}_n(\mathbb{C})) \subseteq \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

По лемме 3.2.8 отображение $T|_{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})}$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка. Таким образом, утверждение теоремы следует из пункта а). $\square$

Следствия и примеры

Следующие результаты могут быть получены в качестве непосредственных следствий теоремы 3.4.1.

Следствие 3.4.2. *В условиях теоремы 3.4.1 отображение T сюръективно и $\mathbb{R}$-линейно.*

Следствие 3.4.3. *В условиях теоремы 3.4.1 предположения а) и б) эквивалентны.*

Следующий пример показывает, что в неинъективном случае возможны нестандартные непрерывные отображения:

Пример 3.4.4. Пусть $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $M_n(\mathbb{C})$, и $\varepsilon > 0$ таково, что ε-окрестность матрицы E по норме $\|\cdot\|$ не содержит вырожденных матриц. Определим T следующим образом:

$$T(X) = \max\{1 - \varepsilon^{-1}\|X - E\|, 0\}E.$$

Тогда $T\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ — неинъективное непрерывное отображение, монотонное относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка. Кроме того, T не 0-

аддитивно и не $\mathbb{R}$-линейно. Иными словами, T не соответствует характеризации в теореме 3.4.1.

Доказательство. Пусть $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$, $X \overset{\sharp}{\leqslant} Y$. Покажем, что $T(X) \overset{\sharp}{\leqslant} T(Y)$. Если X не принадлежит ε-окрестности матрицы E, то $T(X) = 0 \overset{\sharp}{\leqslant} T(Y)$. В противном случае, $\operatorname{rk} X = n$. Следовательно, $X = Y$ и $T(X) = T(Y)$.

Заметим, что T не 0-аддитивно. Действительно,

$$T(E_{11}) + T(E - E_{11}) = 0 \neq E = T(E).$$

□

Глава 4

Расширение группового порядка на линейные операторы в банаховом пространстве

В работе [57] отношение $\overline{\leqslant}$-порядка было перенесено на случай ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве. В этой главе аналогичный перенос будет произведен для $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка.

В первом параграфе будет дано определение $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка на линейных ограниченных операторах в банаховом пространстве, а также будет доказана корректность определения частичного порядка и его совпадение с матричным определением для конечномерных пространств. Отметим, что $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядок может быть корректно определен в более общем случае банаховых пространств, тогда как $\overline{\leqslant}$-порядок в работе [57] рассмотрен только для гильбертовых пространств.

Во втором параграфе решена задача о характеризации аддитивных биективных строго монотонных отображений на множестве линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Результат базируется на теореме Овчинникова, в которой описаны биективные отображения идемпотентных операторов, строго монотонные относительно стандартного порядка на идемпотентах. Кроме того, приведены примеры, что при отсутствии условий биективности или аддитивности отображение не обязательно удовлетворяет характеризации.

В качестве другого следствия теоремы Овчинникова в третьем параграфе доказана характеризация монотонных отображений на специальном множестве операторов. Более точно, рассматриваются множество конечных линейных комбинаций ортогональных идемпотентов и биективные строго монотонные отображения на этом множестве. Полученный результат аналогичен матричному результату о характеризации инъективных монотонных отображений диагонализуемых матриц.

4.1 Определение группового порядка на линейных непрерывных операторах в банаховом пространстве

Пусть $\mathbb{F}$ — поле вещественных или комплексных чисел, X — банахово пространство над полем $\mathbb{F}$, $B(X)$ — совокупность линейных ограниченных операторов на пространстве X.

Оператор $P \in B(X)$ будем называть идемпотентом, если $P^2 = P$, $\mathrm{I}_1(X) = \{P \in B(X) \mid P^2 = P\}$ — множество всех идемпотентов. Через $I \in \mathrm{I}_1(X)$ обозначим тождественный оператор.

Определение 4.1.1. [57] Пусть $A, B \in B(X)$, X гильбертово. Положим $A \leqslant\!\!\!\!\geqslant B$, если найдутся такие идемпотенты P, Q, что $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$,

$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} Q$, $PA = PB$, $AQ = BQ$.

Введем операторный аналог матричного $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка.

Определение 4.1.2. Пусть $A, B \in B(X)$. Положим $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, если $A = B$, или найдется такой идемпотент $P \in B(X)$, что $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$, $PA = PB$, $AP = BP$.

Лемма 4.1.3. *Пусть $A, P \in B(X)$, оператор P — идемпотент, $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$. Тогда $AP = PA = A$.*

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} P = \operatorname{Ker}(I - P)$, откуда $(I - P)A = 0$, $PA = A$. Аналогично, $\operatorname{Im}(I - P) = \operatorname{Ker} P \subseteq \operatorname{Ker} A$, $A(I - P) = 0$, и $AP = A$. □

Утверждение 4.1.4. Если пространство X конечномерно, то определения 1.1.5 и 4.1.2 эквивалентны.

Доказательство. Пусть $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$ в смысле определения 1.1.5, $A \neq B$. Тогда существует $A^\sharp$, $AA^\sharp = BA^\sharp = A^\sharp B$. Положим $P = AA^\sharp$. Тогда $P^2 = P$, $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$, $PA = PB$, $AP = BP$, и $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$ по определению 4.1.2.

Пусть, напротив, существует идемпотент P такой, что $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$, $PA = PB$, $AP = BP$. Тогда $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^2$, и существует $A^\sharp$. Имеем $\operatorname{Im} A^\sharp = \operatorname{Im} A$, $\operatorname{Ker} A^\sharp = \operatorname{Ker} A$. Тогда по лемме 4.1.3 примененной к $A^\sharp$ и P имеем $BA^\sharp = BPA^\sharp = APA^\sharp = AA^\sharp$. Аналогично, $A^\sharp B = A^\sharp A$ и $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$ по определению 1.1.5. □

Лемма 4.1.5. *Пусть $A, B \in B(X)$, $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, X гильбертово. Тогда $A \overline{\leqslant} B$.*

Доказательство. Непосредственно следует из сравнения определений порядков, если положить $Q = P$. □

Обозначим через $\mathrm{I}_s(X)$ множество таких $A \in B(X)$, что существует идемпотент P с условием $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P, \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$. Так как идемпотент полностью определяется своими образом и ядром, то для любого $A \in \mathrm{I}_s(X)$ идемпотент P определен единственным образом, будем обозначать этот идемпотент P через $\pi(A)$. Кроме того, обозначим

$$\bar{\mathrm{I}}_s(X) = \{A \in \mathrm{I}_s(X) \mid \operatorname{Ker} A \neq 0\},$$

$$\bar{\mathrm{I}}_1(X) = \{P \in \mathrm{I}_1(X) \mid \operatorname{Ker} P \neq 0\} = \mathrm{I}_1(X) \setminus \{I\}.$$

Лемма 4.1.6. *Пусть $A \in B(X)$. Тогда $A \in \mathrm{I}_s(X)$, если и только если выполнено $\overline{\operatorname{Im} A} \oplus \operatorname{Ker} A = X$.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $A \in \mathrm{I}_s(X)$. Тогда существует идемпотент P такой, что $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P, \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$. Но $X = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$, так как P — идемпотент. Тем самым, $\overline{\operatorname{Im} A} \oplus \operatorname{Ker} A = X$.

Достаточность. Пусть $\overline{\operatorname{Im} A} \oplus \operatorname{Ker} A = X$. Зададим P по правилу $P(x+y) = x$ при всех $x \in \overline{\operatorname{Im} A}, y \in \operatorname{Ker} A$. Тогда $P^2 = P$, $\operatorname{Im} P = \overline{\operatorname{Im} A}$, $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} A$, оператор P непрерывен по теореме о замкнутом графике, и $A \in \mathrm{I}_s(X)$. □

Определение 4.1.7. Операторы $A, B \in B(X)$ ортогональны ($A \perp B$), если $AB = BA = 0$.

Теорема 4.1.8. *Пусть $A, B \in B(X)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$;

2) $A = B$ или существует такое прямое разложение пространства X в сумму замкнутых подпространств $X = X_1 \oplus X_2$, что *линейные операторы* $A, B\colon X_1 \oplus X_2 \to X_1 \oplus X_2$ *имеют следующие матричные представления:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

где $A_1\colon X_1 \to X_1$ *и* $B_1\colon X_2 \to X_2$ *— ограниченные линейные операторы,* A_1 *инъективен,* $\overline{\operatorname{Im} A} = X_1$*;*

3) $A = B$ *или* $A \in \mathrm{I}_s(X)$*,* $A \perp (B - A)$*.*

Доказательство. Если $A = B$, то эквивалентность очевидна. Будем считать, что $A \neq B$.

1 $\to$ 2. Пусть $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$. Тогда существует идемпотент P такой, что $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$, $PA = PB$, $AP = BP$. Заметим, что $A \in \mathrm{I}_s(X)$. Обозначим $X_1 = \operatorname{Im} P$, $X_2 = \operatorname{Ker} P$. Тогда $X_1 \oplus X_2 = X$, и оператор $A\colon X_1 \oplus X_2 \to X_1 \oplus X_2$ имеет матричное представление $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $A_1\colon X_1 \to X_1$, A_1 инъективен, $\overline{\operatorname{Im} A_1} = X_1$. Кроме того, $P \perp (B - A)$. Обозначим $C = B - A$, имеем $\operatorname{Im} C \subseteq \operatorname{Ker} P = X_2$, $X_1 = \operatorname{Im} P \subseteq \operatorname{Ker} C$. Следовательно, $C\colon X_1 \oplus X_2 \to X_1 \oplus X_2$ имеет матричное представление $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$, откуда $B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$.

2 $\to$ 3. Заметим, что $\overline{\operatorname{Im} A} = \overline{\operatorname{Im} A_1} = X_1$, $\operatorname{Ker} A = X_2$. Тем самым, $A \in \mathrm{I}_s(X)$ по лемме 4.1.6. Условие $A \perp (B - A)$ проверяется непосредственно.

3 $\to$ 1. Так как $A \in \mathrm{I}_s(X)$, то существует такой идемпотент P, что $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$. Условие $A \perp (B - A)$ можно переписать в виде $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Ker}(B - A)$, $\operatorname{Im}(B - A) \subseteq \operatorname{Ker} A$. Кроме того, $\operatorname{Ker}(B - A)$ —

замкнутое подпространство, откуда $\overline{\operatorname{Im} A} \subseteq \operatorname{Ker}(B - A)$. Следовательно, $\operatorname{Im} P \subseteq \operatorname{Ker}(B - A)$, $\operatorname{Im}(B - A) \subseteq \operatorname{Ker} P$, и $P \perp (B - A)$. Иными словами, $PA = PB$, $AP = BP$, и $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$ по определению 4.1.2. $\square$

Лемма 4.1.9. *Пусть $A, B, C \in B(X)$, $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, $B \perp C$. Тогда $A \perp C$.*

Доказательство. Если $A = B$, то $A \perp C$. Пусть $A \neq B$. Тогда найдется такой идемпотент P, что $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$, $PA = PB$, $AP = BP$. По лемме 4.1.3 имеем $AP = PA = A$, и $AC = PAC = PBC = 0$. Аналогично, $CA = 0$. Тем самым, $A \perp C$. $\square$

Теорема 4.1.10. *Отношение $\overset{\sharp}{\leqslant}$ является частичным порядком.*

Доказательство. 1) По определению, $A \overset{\sharp}{\leqslant} A$ для всех $A \in B(X)$.

2) Пусть $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, $B \overset{\sharp}{\leqslant} A$. Покажем, что $A = B$. Из условия $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$ по пункту 2 теоремы 4.1.8 получаем $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B$, $\operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker} A$. Аналогично, $\operatorname{Im} B \subseteq \operatorname{Im} A$, $\operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} B$. Тем самым $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$. По определению 4.1.2 найдется такой идемпотент $P \in B(X)$, что $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$, $PA = PB$, $AP = BP$. По лемме 4.1.3 имеем $A = PA = PB = B$.

3) Пусть $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, $B \overset{\sharp}{\leqslant} C$. Если $A = B$ или $B = C$, то $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$. Пусть $A \neq B$, $B \neq C$. Тогда $A \in \mathrm{I}_s(X)$, $A \perp (B - A)$, $B \perp (C - B)$ по пункту 3 теоремы 4.1.8. Кроме того, так как $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$ и $B \perp (C - B)$, то $A \perp (C - B)$ лемме 4.1.9. Тем самым, $A \perp (C - A) = (B - A) + (C - B)$, и $A \overset{\sharp}{\leqslant} C$. $\square$

Докажем вспомогательное утверждение о множествах операторов, ортогональных данному. Для оператора $A \in B(X)$ обозначим

$$O(X, A) = \{C \in B(X) \mid C \perp A\},$$

$$O_s(X,A) = O(X,A) \cap \mathrm{I}_s(X), \quad \overline{O}_s(X,A) = O(X,A) \cap \bar{\mathrm{I}}_s(X),$$

$$O_1(X,A) = O(X,A) \cap \mathrm{I}_1(X), \quad \overline{O}_1(X,A) = O(X,A) \cap \bar{\mathrm{I}}_1(X).$$

Лемма 4.1.11. *Пусть* $A, B \in \mathrm{I}_s(X)$, $\dim X > 1$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\pi(A) = \pi(B)$;

2) $\overline{\operatorname{Im} A} = \overline{\operatorname{Im} B}$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$;

3) $O(X,A) = O(X,B)$;

4) $O_s(X,A) = O_s(X,B)$;

5) $\overline{O}_s(X,A) = \overline{O}_s(X,B)$;

6) $\overline{O}_1(X,A) = \overline{O}_1(X,B)$;

7) $O_1(X,A) = O_1(X,B)$.

Доказательство. **1 → 2.** Так как $\operatorname{Im} \pi(A) = \overline{\operatorname{Im} A}$, $\operatorname{Ker} \pi(A) = \operatorname{Ker} A$ по определению оператора $\pi(A)$, и $\operatorname{Im} \pi(B) = \overline{\operatorname{Im} B}$, $\operatorname{Ker} \pi(B) = \operatorname{Ker} B$, то $\overline{\operatorname{Im} A} = \overline{\operatorname{Im} B}$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$.

2 → 3.

$$O(X,A) = \{C \in B(X) \mid C \perp A\} =$$

$$= \{C \in B(X) \mid \operatorname{Im} C \subseteq \operatorname{Ker} A, \operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Ker} C\} =$$

$$= \{C \in B(X) \mid \operatorname{Im} C \subseteq \operatorname{Ker} A, \overline{\operatorname{Im} A} \subseteq \operatorname{Ker} C\} =$$

$$= \{C \in B(X) \mid \operatorname{Im} C \subseteq \operatorname{Ker} B, \overline{\operatorname{Im} B} \subseteq \operatorname{Ker} C\} =$$

$$= \{C \in B(X) \mid C \perp B\} = O(X,B).$$

3 → 4.

$$O_s(X,A) = O(X,A) \cap \mathrm{I}_s(X) = O(X,B) \cap \mathrm{I}_s(X) = O_s(X,B).$$

4 → 5.

$$\overline{O}_s(X,A) = O_s(X,A) \cap \bar{\mathrm{I}}_s(X) = O_s(X,B) \cap \bar{\mathrm{I}}_s(X) = \overline{O}_s(X,B).$$

5 → 6.

$$\overline{O}_1(X,A)=\overline{O}_s(X,A)\cap \mathrm{I}_1(X)=\overline{O}_s(X,B)\cap \mathrm{I}_1(X)=\overline{O}_1(X,B).$$

6 → 7. Пусть $\overline{O}_1(X,A)=\overline{O}_1(X,B)$. Отметим, что для любого оператора C верно соотношение $O_1(X,C)\subseteq \overline{O}_1(X,C)\cup\{I\}$.

Предположим, что $O_1(X,A)\neq O_1(X,B)$. Без ограничения общности считаем, что $O_1(X,A)=\overline{O}_1(X,A)\cup\{I\}$, $O_1(X,B)=\overline{O}_1(X,B)$. Тогда $A\perp I$, $A=0$, $\overline{O}_1(X,B)=\overline{O}_1(X,A)=\bar{\mathrm{I}}_1(X)$.

Так как $\dim X>1$, то $\bar{\mathrm{I}}_1(X)\neq\{0\}$, найдется $P\in\bar{\mathrm{I}}_1(X)\backslash\{0\}$. Имеем $P,(I-P)\in\bar{\mathrm{I}}_1(X)=\overline{O}_1(X,B)$. Иными словами, $B\perp P$, $B\perp(I-P)$, откуда $B\perp I$ и $O_1(X,B)=\overline{O}_1(X,B)\cup\{I\}$. Полученное противоречие доказывает, что $O_1(X,A)=O_1(X,B)$.

7 → 1. Заметим, что для любого оператора $A\in\mathrm{I}_s(X)$ выполнено равенство $\pi(A)=\pi(\pi(A))$. Применяя уже доказанную импликацию 1 → 7, получаем, что $O_1(X,A)=O_1(X,\pi(A))$. Аналогично, $O_1(X,B)=O_1(X,\pi(B))$. Обозначим $P=\pi(A)$, $Q=\pi(B)$. Тогда

$$O_1(X,P)=O_1(X,A)=O_1(X,B)=O_1(X,Q).$$

Так как $P\perp(I-P)$, $Q\perp(I-Q)$, то $P\perp(I-Q)$, $Q\perp(I-P)$. Таким образом, $P=PQ=Q$, то есть $\pi(A)=P=Q=\pi(B)$. □

Напомним, что на множестве идемпотентных операторов можно определить частичный порядок следующим образом:

Определение 4.1.12. Пусть $P,Q\in\mathrm{I}_1(X)$. Положим $P\leqslant Q$, если $P=PQ=QP$.

В следующей лемме изучается взаимосвязь $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка со стандартным порядком на идемпотентах.

Лемма 4.1.13. *Пусть $A, B \in B(X)$, $B \in \mathrm{I}_s(X)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$;

2) существует такой идемпотент P, что $PB = BP$, $A = PB$;

3) существует такой идемпотент Q, что $Q \leqslant \pi(B)$, $A = BQ = QB$.

Доказательство. **1 → 2.** Если $A = B$, то положим $P = I$. Иначе существует такой идемпотент P, что $AP = BP$, $PA = PB$, $P = \pi(A)$. Тогда $A = AP = PA = BP = PB$.

2 → 3. Обозначим $X_1 = \overline{\operatorname{Im} B}$, $X_2 = \operatorname{Ker} B$. Пусть $x \in \overline{\operatorname{Im} B}$, $x_n = B(y_n) \to x$. Тогда $Px_n = B(Py_n) \to Px$, то есть $Px \in \overline{\operatorname{Im} B}$. Если же $z \in \operatorname{Ker} B$, то $B(Pz) = PBz = 0$, откуда $Pz \in \operatorname{Ker} B$. Иными словами, $P(X_1) \subseteq X_1$, $P(X_2) \subseteq X_2$, и $P\colon X_1 \oplus X_2 \to X_1 \oplus X_2$ имеет матричное представление $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$. Заметим, что $\pi(B) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Обозначим $Q = \pi(B)P$. Тогда $Q = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q^2 = Q$, $\pi(B)Q = Q\pi(B) = Q$, то есть $Q \leqslant \pi(B)$. Имеем

$$A = BP = B\pi(B)P = BQ = PB = P\pi(B)B = QB.$$

3 → 1. Заметим, что $B - A = B(I - Q) \perp BQ = A$. Покажем, что $A \in \mathrm{I}_s(X)$. Так как $Q \leqslant \pi(B)$, то $\operatorname{Im} Q \subseteq \operatorname{Im} \pi(B) = \overline{\operatorname{Im} B}$, $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} \pi(B) \subseteq \operatorname{Ker} Q$. Обозначим $X_1 = \operatorname{Im} Q$, $X_2 = \operatorname{Ker} Q \cap \overline{\operatorname{Im} B}$, $X_3 = \operatorname{Ker} B$. Тогда $X_1 \oplus X_2 = \overline{\operatorname{Im} B}$, $X_2 \oplus X_3 = \operatorname{Ker} Q$, и $X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 = X$.

Хотим показать, что $\overline{\operatorname{Im} BQ} = \operatorname{Im} Q = X_1$, $\operatorname{Ker} BQ = \operatorname{Ker} Q = X_2 \oplus X_3$. Пусть $x = x_1 + x_2 + x_3$, $x_i \in X_i$. Тогда $Qx_1 = x_1$, $Qx_2 = 0$, $Qx_3 = 0$. Следовательно, $BQx = Bx_1$. Заметим, что $x_1 \in X_1 \subseteq \overline{\operatorname{Im} B}$. Таким образом, $x \in \operatorname{Ker} BQ$, $BQx = 0$, $Bx_1 = 0$, $x_1 \in \operatorname{Ker} B = X_3$,

$x_1 = 0$, $x \in X_2 \oplus X_3 = \operatorname{Ker} Q$. Кроме того,

$$\overline{\operatorname{Im} BQ} = \overline{BQ(X)} = \overline{QB(X)} = \overline{Q(\overline{B(X)})} =$$

$$= \overline{Q(X_1 \oplus X_2)} = \overline{X_1} = X_1 = \operatorname{Im} Q.$$

Поясним равенство $\overline{QB(X)} = \overline{Q(\overline{B(X)})}$. В самом деле, пусть X_0 — некоторое подпространство X. Покажем, что $\overline{Q(X_0)} = \overline{Q(\overline{X_0})}$. Пусть $x \in Q(\overline{X_0})$. Тогда существует $y \in \overline{X_0}$, $x = Qy$. Так как $y \in \overline{X_0}$, то найдутся $y_n \in X_0$, $y_n \to y$. Тогда $Qy_n \to Qy = x$, и $x \in \overline{Q(X_0)}$. Тем самым, $Q(\overline{X_0}) \subseteq \overline{Q(X_0)}$. В силу замкнутости подпространства $\overline{Q(X_0)}$, $\overline{Q(\overline{X_0})} \subseteq \overline{Q(X_0)}$. С другой стороны, $X_0 \subseteq \overline{X_0}$, $Q(X_0) \subseteq Q(\overline{X_0})$, и $\overline{Q(X_0)} \subseteq \overline{Q(\overline{X_0})}$.

В результате, $\overline{\operatorname{Im} BQ} = \operatorname{Im} Q$, $\operatorname{Ker} BQ = \operatorname{Ker} Q$, и $A = BQ \in \mathrm{I}_s(X)$.

$\square$

Следствием доказанной леммы является следующий факт: если $P \in \mathrm{I}_1(X)$ и $A \overset{\sharp}{\leqslant} P$, то найдется оператор $Q \in \mathrm{I}_1(X)$ такой, что

$$Q \leqslant \pi(P) = P, \quad A = PQ = QP.$$

Более того, из анализа доказательства леммы следует, что $Q = \pi(A)$. Иными словами, $A^2 = A$, $A \in \mathrm{I}_1(X)$, и $A = \pi(A) = Q$. Таким образом, $A \leqslant P$, то есть $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядок совпадает со стандартным порядком на идемпотентах, если больший оператор является идемпотентом.

4.2 Аддитивные монотонные отображения операторов в гильбертовом пространстве

В этом и следующем параграфе будут рассматриваться только гильбертовы пространства. Итак, пусть $\mathbb{F}$ — поле вещественных или комплексных чисел, H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{F}$, $\dim H > 1$.

Определение 4.2.1. Пусть $M \subseteq H$. Отображение $T\colon M \to M$ назовем *0-аддитивным*, если для любых операторов $A, B \in M$ таких, что $A \perp B$, $A \in \mathrm{I}_s(H)$, имеем:

а) $T(A) \perp T(B)$; б) $T(A+B) = T(A) + T(B)$.

Далее будем изучать монотонные отображения на $B(H)$.

Лемма 4.2.2. *Пусть $T\colon B(H) \to B(H)$ — аддитивное биективное отображение, строго монотонное относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Тогда $T(\bar{\mathrm{I}}_s(H)) = \bar{\mathrm{I}}_s(H)$, и ограничения $T|_{\bar{\mathrm{I}}_s(H)}$, $T^{-1}|_{\bar{\mathrm{I}}_s(H)}$ являются 0-аддитивными отображениями.*

Доказательство. Пусть $A \in \bar{\mathrm{I}}_s(H)$. Тогда $\overline{\mathrm{Im}\, A} \oplus \mathrm{Ker}\, A = H$, $\mathrm{Ker}\, A \neq 0$. Положим $P = \pi(A)$, $Q = I - P$. Имеем $P \perp Q$, откуда $A \perp Q$. Кроме того, так как $\mathrm{Ker}\, A \neq 0$, то $P \neq I$ и $Q \neq 0$.

Следовательно, $A \overset{\sharp}{<} A + Q$, и $T(A) \overset{\sharp}{<} T(A) + T(Q)$. Таким образом, $T(A) \in \mathrm{I}_s(H)$, $T(A) \perp T(Q)$. Так как $Q \neq 0$, то $T(Q) \neq 0$, и $\mathrm{Ker}\, T(A) \neq 0$, $T(A) \in \bar{\mathrm{I}}_s(H)$. Тем самым, $T(\bar{\mathrm{I}}_s(H)) \subseteq \bar{\mathrm{I}}_s(H)$.

Далее, пусть

$$A, B \in \bar{\mathrm{I}}_s(H), \quad A \perp B, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0.$$

Тогда

$$A \overset{\sharp}{<} A+B, \quad T(A) \overset{\sharp}{<} T(A)+T(B), \quad T(A) \perp T(B).$$

Если же $A=0$ или $B=0$, то снова $T(A) \perp T(B)$. Кроме того, $T(A+B)=T(A)+T(B)$ в силу аддитивности отображения T. Таким образом, ограничение $T|_{\bar{\mathrm{I}}_s(H)}$ отображения T на множество $\bar{\mathrm{I}}_s(H)$ является 0-аддитивным.

Так как отображение T биективно и строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, то к обратному отображению T^{-1} можно применить аналогичные рассуждения. Получаем, что $T^{-1}(\bar{\mathrm{I}}_s(H)) \subseteq \bar{\mathrm{I}}_s(H)$, и $T^{-1}|_{\bar{\mathrm{I}}_s(H)}$ является 0-аддитивным отображением. Следовательно, $T(\bar{\mathrm{I}}_s(H)) = \bar{\mathrm{I}}_s(H)$, и лемма доказана. $\square$

Лемма 4.2.3. *Пусть отображение $T\colon \bar{\mathrm{I}}_s(H) \to \bar{\mathrm{I}}_s(H)$ биективно, T, T^{-1} являются 0-аддитивными. Тогда условие $\pi(A)=\pi(B)$ выполнено для некоторых операторов $A, B \in \bar{\mathrm{I}}_s(H)$, если и только если $\pi(T(A)) = \pi(T(B))$.*

Доказательство. Пусть $\pi(A) = \pi(B)$. Покажем, что $\pi(T(A)) = \pi(T(B))$. По лемме 4.1.11 имеем $\overline{O}_s(H,A) = \overline{O}_s(H,B)$. Следовательно,

$$T(\overline{O}_s(H,A)) = T(\overline{O}_s(H,B))$$

в силу биективности отображения T. Кроме того, так как отображения T и T^{-1} являются 0-аддитивными, то T строго сохраняет ортогональность операторов. Иными словами,

$$T(\overline{O}_s(H,A)) = O(H,T(A)) \cap \bar{\mathrm{I}}_s(H) = \overline{O}_s(H,T(A)).$$

Аналогично, $T(\overline{O}_s(H,B)) = \overline{O}_s(H,T(B))$, откуда

$$\overline{O}_s(H,T(A)) = \overline{O}_s(H,T(B)).$$

Применяя лемму 4.1.11, получаем, что $\pi(T(A)) = \pi(T(B))$.

Обратно, пусть $\pi(T(A)) = \pi(T(B))$. Нетрудно видеть, что отображение T^{-1} удовлетворяет условиям леммы. Таким образом,

$$\pi(T^{-1}(T(A))) = \pi(T^{-1}(T(B))),$$

то есть $\pi(A) = \pi(B)$. $\square$

Лемма 4.2.4. *Пусть отображение $T\colon \bar{\mathrm{I}}_s(H) \to \bar{\mathrm{I}}_s(H)$ биективно, T, T^{-1} являются 0-аддитивными. Зададим $\varphi\colon \mathrm{I}_1(H) \to \mathrm{I}_1(H)$ следующими соотношениями: $\varphi(P) = \pi(T(P))$ для всех $P \in \bar{\mathrm{I}}_1(H)$, $\varphi(I) = I$. Тогда φ биективно, отображения φ и φ^{-1} являются 0-аддитивными.*

Доказательство. Для начала покажем, что отображение φ инъективно. В самом деле, пусть $P, Q \in \mathrm{I}_1(H)$, $\varphi(P) = \varphi(Q)$. Если $\varphi(P) = I$, то $P = I = Q$, так как $\varphi(\bar{\mathrm{I}}_1(H)) \subseteq \bar{\mathrm{I}}_1(H)$. Если же $\varphi(P) \in \bar{\mathrm{I}}_1(H)$, то

$$\pi(T(P)) = \varphi(P) = \varphi(Q) = \pi(T(Q)).$$

Применяя лемму 4.2.3, получаем, что $\pi(P) = \pi(Q)$. Кроме того, так как $P, Q \in \mathrm{I}_1(H)$, то $P = \pi(P) = \pi(Q) = Q$, и инъективность отображения φ доказана.

Далее, докажем сюръективность отображения φ. Так как

$$\varphi(\mathrm{I}_1(H)) = \varphi(\bar{\mathrm{I}}_1(H) \cup \{I\}) = \pi(T(\bar{\mathrm{I}}_1(H))) \cup \{I\},$$

то достаточно проверить равенство $\pi(T(\bar{\mathrm{I}}_1(H))) = \bar{\mathrm{I}}_1(H)$. Заметим, что $\bar{\mathrm{I}}_1(H) = \pi(\bar{\mathrm{I}}_s(H))$. Более того, $\pi(A) = \pi(\pi(A))$ для любого оператора $A \in \mathrm{I}_s(H)$, откуда используя лемму 4.2.3 получаем, что

$$\pi(T(A)) = \pi(T(\pi(A))).$$

Таким образом,

$$\pi(T(\bar{\mathrm{I}}_1(H))) = \pi(T(\pi(\bar{\mathrm{I}}_s(H)))) = \pi(T(\bar{\mathrm{I}}_s(H))) = \pi(\bar{\mathrm{I}}_s(H)) = \bar{\mathrm{I}}_1(H).$$

Тем самым доказано, что $\varphi(\mathrm{I}_1(H)) = \mathrm{I}_1(H)$, отображение φ сюръективно. Следовательно, отображение φ биективно.

Докажем 0-аддитивность отображения φ. Пусть $P, Q \in \mathrm{I}_1(H)$, $P \perp Q$. Если $P = I$, то $Q = 0$,

$$\varphi(P) = I, \quad \varphi(Q) = 0, \quad \varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q), \quad \varphi(P) \perp \varphi(Q).$$

Аналогичные соотношения получим, если $Q = I$.

Пусть $P \neq I$, $Q \neq I$. Тогда $P, Q \in \bar{\mathrm{I}}_1(H)$,

$$T(P+Q) = T(P) + T(Q), \quad T(P) \perp T(Q).$$

Следовательно, $\pi(T(P)) \perp \pi(T(Q))$,

$$\varphi(P+Q) = \pi(T(P) + T(Q)) = \pi(T(P)) + \pi(T(Q)) = \varphi(P) + \varphi(Q),$$

то есть φ является 0-аддитивным отображением.

Так как φ биективно, то определено обратное отображение φ^{-1}. Пусть $P \in \bar{\mathrm{I}}_1(H)$. Тогда $\varphi(\varphi^{-1}(P)) = P$. С другой стороны,

$$\varphi(\pi(T^{-1}(P))) = \pi(T(\pi(T^{-1}(P)))) = \pi(T(T^{-1}(P))) = \pi(P) = P,$$

то есть $\varphi^{-1}(P) = \pi(T^{-1}(P))$ для любой $P \in \bar{\mathrm{I}}_1(H)$, $\varphi^{-1}(I) = I$. Применяя утверждение леммы к отображению T^{-1}, получаем, что φ^{-1} является 0-аддитивным. $\square$

Теорема 4.2.5. *Пусть $T\colon B(H) \to B(H)$ — аддитивное отображение, обладающее следующим свойством: для любых $A \in B(H)$ и $Q \in \mathrm{I}_1(H)$ с условием $A \perp Q$ имеем $T(A) \perp Q$. Тогда существует такое $\alpha \in \mathbb{F}$, что $T(A) = \alpha A$ для всех $A \in B(H)$.*

Доказательство. 1. Пусть $P_1 \in \mathrm{I}_1(H)$, $\dim(\operatorname{Im} P_1) = 1$, $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Покажем, что $T(\lambda P_1) = \mu P_1$ для некоторого $\mu \in \mathbb{F}$.

Так как $\lambda P_1 \perp (I - P_1)$, то $T(\lambda P_1) \perp (I - P_1)$ по условию теоремы. Следовательно,

$$\operatorname{Im}(T(\lambda P_1)) \subseteq \operatorname{Ker}(I - P_1) = \operatorname{Im} P_1,$$

$$\operatorname{Ker} P_1 = \operatorname{Im}(I - P_1) \subseteq \operatorname{Ker}(T(\lambda P_1)).$$

Возможны два варианта: либо

$$\operatorname{Im} T(\lambda P_1) = \{0\},$$

либо

$$\operatorname{Im} T(\lambda P_1) = \operatorname{Im} P_1, \quad \operatorname{Ker}(T(\lambda P_1)) = \operatorname{Ker} P_1.$$

В первом случае $T(\lambda P_1) = 0 = 0 \times P_1$. Во втором случае найдется $\mu \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ такое, что $T(\lambda P_1) = \mu P_1$.

Итак, для любого идемпотента P_1 с условием $\dim(\operatorname{Im} P_1) = 1$ и $\lambda \in \mathbb{F}$ существует такое $\mu \in \mathbb{F}$, что $T(\lambda P_1) = \mu P_1$. Обозначим через $\sigma_1(\lambda, P_1)$ указанное значение параметра μ.

2. Докажем, что значение $\sigma_1(\lambda, P_1)$ для $P_1 \in \mathrm{I}_1(H)$ с условием $\dim(\operatorname{Im} P_1) = 1$ и $\lambda \in \mathbb{F}$ зависит только от вектора, порождающего $\operatorname{Im} P_1$.

Пусть $x \in H$, $P_x \in \mathrm{I}_1(H)$ — некоторый идемпотент с условием $\operatorname{Im} P_x =< x >$. Тогда $\lambda(I - P_x) \perp P_x$, и $T(\lambda(I - Px)) \perp P_x$. Следовательно,

$$T(\lambda(I - P_x))x = T(\lambda(I - P_x))P_x x = 0.$$

Рассмотрим выражение $T(\lambda I)x$:

$$T(\lambda I)x = T(\lambda P_x + \lambda(I - P_x))x =$$

$$= T(\lambda P_x)x + T(\lambda(I - P_x))x = \sigma_1(\lambda, P_x)P_x x = \sigma_1(\lambda, P_x)x.$$

Из полученного соотношения следует, что значение $\sigma_1(\lambda, P_x)$ не зависит от конкретного идемпотента P_x, а зависит только от x. Определим функцию $\sigma_2(\lambda, x)$ таким образом, чтобы для всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in H$ выполнялось равенство $T(\lambda I)x = \sigma_2(\lambda, x)x$.

3. Покажем, что значение функции $\sigma_2(\lambda, x)$ не зависит от $x \in H$.

Предположим, что для некоторых значений $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x, y \in H$ имеет место неравенство $\sigma_2(\lambda, x) \neq \sigma_2(\lambda, y)$. Тогда

$$\sigma_2(\lambda, x + y)(x + y) = T(\lambda I)(x + y) = \sigma_2(\lambda, x)x + \sigma_2(\lambda, y)y.$$

Так как, $\sigma_2(\lambda, x) \neq \sigma_2(\lambda, y)$, то имеется нетривиальная линейная комбинация векторов x и y, равная нулю. Следовательно, x и y линейно зависимы. Без ограничения общности, $y = \gamma x$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{F}$. С другой стороны,

$$T(\lambda I)y = \gamma T(\lambda I)x = \gamma\sigma_2(\lambda, x)x = \sigma_2(\lambda, x)y,$$

и $\sigma_2(\lambda, x) = \sigma_2(\lambda, y)$. Имеем противоречие. Тем самым, $\sigma_2(\lambda, x) = \sigma_2(\lambda, y)$ для любых $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x, y \in H$. Через $\sigma(\lambda)$ обозначим такую функцию, что $\sigma(\lambda) = \sigma_2(\lambda, x)$ для любых $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in H$.

4. Докажем, что $\sigma(\lambda) = \alpha\lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и некоторого $\alpha \in \mathbb{F}$.

Пусть $P \in \mathrm{I}_1(H)$ — некоторый идемпотент, $\dim(\operatorname{Im} P) = 1$, N — такой оператор, что $P + N$ также является идемпотентом, $N \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Рассмотрим $T(\lambda P + N)$:

$$T(\lambda P + N) = T(\lambda(P + \frac{1}{\lambda}N)) = \sigma(\lambda)(P + \frac{1}{\lambda}N) = \sigma(\lambda)P + \frac{\sigma(\lambda)}{\lambda}N,$$

$$T(\lambda P + N) = T(\lambda P) + T(N) = \sigma(\lambda)P + T(N),$$

откуда $T(N) = \dfrac{\sigma(\lambda)}{\lambda}N$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Следовательно, выражение $\dfrac{\sigma(\lambda)}{\lambda}$ не зависит от λ, и найдется $\alpha \in \mathbb{F}$ такое, что $\dfrac{\sigma(\lambda)}{\lambda} = \alpha$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$.

5. Пусть $A \in B(H)$, $\dim(\operatorname{Im} A) < \infty$. Проверим, что $T(A) = \alpha A$.

Представим оператор A в виде линейной комбинации

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i,$$

где P_i — идемпотенты, $\dim(\operatorname{Im} P_i) = 1$. Из предыдущих пунктов следует, что для любого $\lambda \in \mathbb{F}$ и любого идемпотента $P \in \mathrm{I}_1(H)$ с условием $\dim(\operatorname{Im} P) = 1$ верно равенство $T(\lambda P) = \alpha(\lambda P)$. В силу аддитивности отображения T имеем

$$T(A) = \sum_{i=1}^{k} T(\lambda_i P_i) = \alpha \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i = \alpha A.$$

6. Пусть $A \in B(H)$ — произвольный ограниченный линейный оператор. Докажем, что $T(A) = \alpha A$.

Пусть $x \in H$, $P_x \in \mathrm{I}_1(H)$ — некоторый идемпотент с условием $\operatorname{Im} P_x =< x >$. Обозначим $B = (I - P_x)A(I - P_x)$. Так как $B \perp P_x$, то $T(B) \perp P_x$, откуда $T(B)x = T(B)P_x x = 0$. Более того,

$$A = AP_x + P_x A(I - P_x) + B.$$

Так как $\dim(\operatorname{Im} P_x) = 1 < \infty$, то

$$\dim(\operatorname{Im} AP_x) < \infty, \quad \dim(\operatorname{Im} P_x A(I - P_x)) < \infty,$$

откуда по пункту 5 получаем

$$T(AP_x) = \alpha AP_x, \quad T(P_x A(I - P_x)) = \alpha P_x A(I - P_x).$$

Рассмотрим выражение $T(A)x$:

$$T(A)x = T(AP_x)x + T(P_x A(I - P_x))x + T(B)x =$$

$$= \alpha AP_x x + \alpha P_x A(I - P_x)x + 0 = \alpha Ax.$$

Следовательно, $T(A) = \alpha A$ для всех $A \in B(H)$, и теорема доказана. $\square$

Приведем формулировку известной теоремы Овчинникова о монотонных отображениях множества идемпотентов в себя.

Теорема 4.2.6. *[48] Пусть $\varphi\colon \mathrm{I}_1(H) \to \mathrm{I}_1(H)$ — биективное отображение, строго монотонное относительно стандартного порядка на идемпотентах. Тогда существует $S\colon H \to H$ — линейный или полулинейный обратимый ограниченный оператор такой, что $\varphi(P) = SPS^{-1}$ для всех $P \in \mathrm{I}_1(H)$ или $\varphi(P) = SP^*S^{-1}$ для всех $P \in \mathrm{I}_1(H)$.*

Полученный характеризационный результат состоит в следующем:

Теорема 4.2.7. *Пусть $T\colon B(H) \to B(H)$ — аддитивное биективное отображение, строго монотонное относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Тогда существуют такие $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ и $S\colon H \to H$ — линейный или полулинейный обратимый ограниченный оператор, что $T(A) = \alpha SAS^{-1}$ для всех $A \in B(H)$ или $T(A) = \alpha SA^*S^{-1}$ для всех $A \in B(H)$.*

Доказательство. 1. Применяя к отображению T лемму 4.2.2 получаем, что $T(\bar{\mathrm{I}}_s(H)) = \bar{\mathrm{I}}_s(H)$, отображение $T\colon \bar{\mathrm{I}}_s(H) \to \bar{\mathrm{I}}_s(H)$ биективно, и ограничения $T|_{\bar{\mathrm{I}}_s(H)}$, $T^{-1}|_{\bar{\mathrm{I}}_s(H)}$ являются 0-аддитивными отображениями.

2. Зададим отображение $\varphi\colon \mathrm{I}_1(H) \to \mathrm{I}_1(H)$ следующими соотношениями: $\varphi(P) = \pi(T(P))$ для всех $P \in \bar{\mathrm{I}}_1(H)$, $\varphi(I) = I$. Тогда по лемме 4.2.4 имеем, что φ биективно, отображения φ и φ^{-1} являются 0-аддитивными.

3. Из пункта 2 следует, что отображение φ является биективным и строго монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. По теореме Овчинникова (теорема 4.2.6) существует $S\colon H \to H$ — линейный или полулинейный обратимый ограниченный оператор такой, что $\varphi(P) = SPS^{-1}$ для всех $P \in \mathrm{I}_1(H)$ или $\varphi(P) = SP^*S^{-1}$ для всех $P \in \mathrm{I}_1(H)$.

Применяя к T отображение $P \mapsto S^{-1}PS$ и сопряжение, если необходимо, получим биективное отображение T_1, строго монотонное относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, и удовлетворяющее соотношению $\pi(T_1(P)) = P$ для любого $P \in \mathrm{I}_1(H)$.

4. Для любого оператора $A \in B(H)$ и идемпотента $Q \in \mathrm{I}_1(H)$, $A \perp Q$, имеем $Q \overset{\sharp}{\leqslant} Q + A$, откуда

$$T_1(Q) \overset{\sharp}{\leqslant} T_1(Q) + T_1(A), \quad T_1(A) \perp T_1(Q).$$

Следовательно, $T_1(A) \perp \pi(T_1(Q)) = Q$, и к отображению T_1 можно применить теорему 4.2.5. Тем самым, найдется $\alpha \in \mathbb{F}$ такое, что $T_1(A) = \alpha A$ для любого оператора $A \in B(H)$.

5. В силу биективности отображения T_1, $\alpha \neq 0$. Кроме того, так как отображение T_1 было получено из T комбинацией с отображением $P \mapsto S^{-1}PS$ и сопряжением, то отображение T имеет требуемый вид. □

В приведенной теореме условия биективности и аддитивности являются существенными, что демонстрируют приведенные ниже примеры.

Предположим, что пространство H сепарабельно, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq H$ — базис в H. Через R и L обозначим соответственно линейные операторы правого и левого сдвига в этом базисе. Непосредственно проверяется, что $LR = I$.

Пример 4.2.8. Зададим отображение $T\colon B(H) \to B(H)$ следующим соотношением: $T(A) = RAL$ для всех $A \in B(H)$. Тогда T — линейное инъективное отображение, строго монотонное относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка.

Доказательство. 1. Линейность отображения T очевидна.

2. Пусть $\hat{T}(A) = LAR$ при $A \in B(H)$. Так как $LR = I$, то

$$\hat{T}(T(A)) = L(RAL)R = A$$

для всех $A \in B(H)$. Кроме того,

$$T(A) \times T(B) = (RAL) \times (RBL) = R(AB)L = T(AB)$$

для любых $A, B \in B(H)$.

3. Докажем инъективность отображения T. В самом деле, пусть $T(A) = T(B)$ для некоторых $A, B \in B(H)$. Тогда

$$A = \hat{T}(T(A)) = \hat{T}(T(B)) = B,$$

и T инъективно.

4. Покажем, что T строго сохраняет ортогональность операторов. Пусть $A \perp B$, тогда $AB = BA = 0$, и

$$T(A) \times T(B) = T(B) \times T(A) = 0,$$

то есть $T(A) \perp T(B)$. Если же $T(A) \perp T(B)$, то $T(AB) = T(BA) = 0$ и $AB = BA = 0$ из инъективности T, то есть $A \perp B$.

5. Докажем равенство $T(\mathrm{I}_s(H)) = \mathrm{I}_s(H)$.

Заметим, что $LH = H$, $\operatorname{Ker} L \oplus \operatorname{Im} R = H$. Далее, для любого оператора $A \in B(H)$ имеем

$$\overline{\operatorname{Im} T(A)} = \overline{(RAL)H} = \overline{RAH} = R(\overline{\operatorname{Im} A}),$$

$$\operatorname{Ker} T(A) = \operatorname{Ker} L \oplus R(\operatorname{Ker} A).$$

Пусть $A \in \mathrm{I}_s(H)$, тогда $\overline{\operatorname{Im} A} \oplus \operatorname{Ker} A = H$, откуда

$$\overline{\operatorname{Im} T(A)} \oplus \operatorname{Ker} T(A) = \operatorname{Ker} L \oplus R(\overline{\operatorname{Im} A} \oplus \operatorname{Ker} A) =$$

$$= \operatorname{Ker} L \oplus \operatorname{Im} R = H,$$

и $T(A) \in \mathrm{I}_s(H)$.

Кроме того, если $A \notin \mathrm{I}_s(H)$, то либо $\overline{\operatorname{Im} A} \oplus \operatorname{Ker} A \neq H$, либо сумма $\overline{\operatorname{Im} A} + \operatorname{Ker} A$ не прямая. В обоих случаях оказывается, что $T(A) \notin \mathrm{I}_s(H)$.

Тем самым, $T(\mathrm{I}_s(H)) \subseteq \mathrm{I}_s(H)$, $T^{-1}(\mathrm{I}_s(H)) = \mathrm{I}_s(H)$, где под $T^{-1}(V)$ понимается полный прообраз множества V. Следовательно, $T(\mathrm{I}_s(H)) = \mathrm{I}_s(H)$.

6. Покажем, что T строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка.

В самом деле, пусть $A, B \in B(H)$, $A \overset{\sharp}{<} B$. Тогда

$$A \in \mathrm{I}_s(H), \quad A \perp (B - A).$$

Следовательно,

$$T(A) \in \mathrm{I}_s(H), T(A) \perp (T(B) - T(A)).$$

Более того, $T(B - A) \neq 0$, и $T(A) \overset{\sharp}{<} T(B)$. Аналогичным образом получаем, что, если $T(A) \overset{\sharp}{<} T(B)$, то $A \overset{\sharp}{<} B$. □

Пример 4.2.9. Зададим отображение $T\colon B(H) \to B(H)$ следующими соотношениями: $T(A) = A$ для всех $A \in B(H) \setminus \{I+L, I+R\}$, $T(I+L) = I + R$, $T(I + R) = I + L$. Тогда T — биективное отображение, строго монотонное относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка.

Доказательство. 1. Пусть $A \overset{\sharp}{<} I + R$. Покажем, что $A = 0$.

Так как $A \overset{\sharp}{<} I + R$, то $A \in \mathrm{I}_s(H)$, $A + B = I + R$ для некоторого оператора $B \in B(H)$, $A \perp B$. Обозначим $P = \pi(A)$. Тогда

$$A = AP = P + RP = P + PR = PA,$$

откуда $RP = PR$. Пусть $v \in \operatorname{Im} P$. Имеем

$$Pv = v, \quad P(Rv) = RPv = Rv,$$

то есть $Rv \in \operatorname{Im} P$.

1. а) Предположим, что $\operatorname{Im} P \neq \{0\}$, $\operatorname{Im} P \neq H$, и обозначим через s минимальное натуральное число такое, что в $\operatorname{Im} P$ есть векторы с ненулевым значением на s-й позиции в базисе $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq H$. Кроме того, через $v_s \in \operatorname{Im} P$ обозначим вектор, на котором достигается минимум.

Докажем, что $s = 1$.

В самом деле, пусть $s > 1$, тогда $RLv_s = v_s$. Из соотношений $LR = I$ и $RP = PR$ следует, что $P = LPR$. Рассмотрим $P(Lv_s)$:

$$P(Lv_s) = (LPR)(Lv_s) = LPv_s = Lv_s,$$

откуда $Lv_s \in \operatorname{Im} P$, что противоречит опеределению числа s.

Тем самым, $s = 1$, $v_1 \in \operatorname{Im} P$. Более того, для любого натурального n имеем $R^n v_1 \in \operatorname{Im} P$. Так как $\operatorname{Im} P$ — замкнутое линейное подпространство, то $x_1 \in \operatorname{Im} P$. Следовательно, $x_n = R^{n-1} x_1 \in \operatorname{Im} P$ для любого натурального n, и $\operatorname{Im} P = H$. Но $\operatorname{Im} P \neq H$ по предположению, и имеем противоречие.

1. б) Так как случай 1. а) невозможен, то либо $\operatorname{Im} P = \{0\}$, либо $\operatorname{Im} P = H$. Если $\operatorname{Im} P = H$, то $P = I$, $A = I + R$, что неверно. Таким образом, $\operatorname{Im} P = \{0\}$, $P = 0$, $A = 0$, что и требовалось доказать.

2. Пусть $A \overset{\sharp}{<} I + L$. Тогда

$$A^* \overset{\sharp}{<} I + L^* = I + R,$$

и $A^* = 0$ по пункту 1. Следовательно, $A = 0$.

3. Докажем, что отображение T является монотонным относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. В самом деле, пусть $A, B \in B(H)$, $A \overset{\sharp}{<} B$.

Если $A \in \{I + L, I + R\}$, то $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, и неравенство $A \overset{\sharp}{<} B$ невозможно. Если же $B \in \{I + L, I + R\}$, то $A = 0$ по доказанному. Следовательно, $T(A) = 0 \overset{\sharp}{<} T(B)$ в этом случае.

Более того, если $A \notin \{I+L, I+R\}$, $B \notin \{I+L, I+R\}$, то

$$T(A) = A \overset{\sharp}{<} B = T(B).$$

4. Так как $T^{-1} = T$, то T строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. □

4.3 Монотонные отображения на ортогональных идемпотентах и их линейных комбинациях

Обозначим через $\mathrm{I}_l(H)$ множество всех конечных линейных комбинаций ортогональных идемпотентов. Иными словами,

$$\mathrm{I}_l(H) = \{A \in B(H) \mid A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i, P_i \in \mathrm{I}_1(H), P_i \perp P_j \text{ при } i \neq j\}.$$

Лемма 4.3.1. *Пусть $A, B \in \mathrm{I}_l(H)$, $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$. Пусть, кроме того, $A = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$, $B = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i P_i'$, и при всех $i \neq j$ имеем $P_i \perp P_j$, $P_i' \perp P_j'$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. Тогда $P_j \overset{\sharp}{\leqslant} P_j'$ при всех $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Фиксируем некоторое $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда

$$\lambda_j P_j \overset{\sharp}{\leqslant} A \overset{\sharp}{\leqslant} B.$$

Так как $B \in \mathrm{I}_l(H) \subseteq \mathrm{I}_s(H)$, то к операторам $\lambda_j P_j$ и B можно применить лемму 4.1.13. Следовательно, найдется такой идемпотент $P \in \mathrm{I}_1(H)$, что

$$\lambda_j P_j = BP = PB.$$

Пусть, далее $f \in \mathbb{F}[t]$ — некоторый многочлен с условием $f(0) = 0$. Тогда

$$f(\lambda_j P_j) = f(BP) = f(B)P = Pf(B),$$

и $f(\lambda_j P_j) \overset{\sharp}{\leqslant} f(B)$ по лемме 4.1.13.

Подберем такой многочлен f, чтобы $f(0) = 0$, $f(\lambda_i) = 0$ при $i \neq j$, $f(\lambda_j) \neq 0$. Получим

$$f(\lambda_j)P_j = f(\lambda_j P_j) \overset{\sharp}{\leqslant} f(B) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P'_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)P'_i = f(\lambda_j)P'_j,$$

откуда $P_j \overset{\sharp}{\leqslant} P'_j$, что и требовалось доказать. □

Теорема 4.3.2. *Пусть биективное отображение $T\colon \mathrm{I}_l(H) \to \mathrm{I}_l(H)$ строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Тогда существуют такие $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — биекция, $\sigma(0) = 0$, и $S\colon H \to H$ — линейный или полулинейный обратимый ограниченный оператор, что*

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) = S\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma(\lambda_i) P_i\right) S^{-1}$$

для всех P_i, $P_i \perp P_j$ при $i \neq j$, или

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) = S\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma(\lambda_i) P_i^*\right) S^{-1}$$

для всех P_i, $P_i \perp P_j$ при $i \neq j$.

Доказательство. 1. Для начала, для каждого оператора $A \in \mathrm{I}_l(H)$ можно определить максимальную длину L_A левой (R_A — правой) цепочки относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, которая может быть как конечной, так и бесконечной. При этом, так как отображение T строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, то для любого оператора $A \in \mathrm{I}_l(H)$ имеем $L_A = L_{T(A)}$, $R_A = R_{T(A)}$.

В частности, $T(0) = 0$, так как максимальная длина левой цепочки для оператора A равна 0, если и только $A = 0$. Кроме того, для любого $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ и любого идемпотента $P \in \mathrm{I}_1(H)$ с условием $\dim(\operatorname{Im} P) = 1$ имеем $L_{\lambda P} = 1$, откуда $L_{T(\lambda P)} = 1$, и найдутся такие значения $\mu \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $P' \in \mathrm{I}_1(H)$, что $T(\lambda P) = \mu P'$.

2. Заметим, что для $A \in \mathrm{I}_l(H)$ равенство $L_A = 2$ выполнено, если и только если найдутся такие $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ и $P_1, P_2 \in \mathrm{I}_1(H)$ с условием

$$\dim(\operatorname{Im} P_1) = \dim(\operatorname{Im} P_2) = 1, \quad P_1 \perp P_2,$$

что $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$. При этом, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то конечно число операторов $C \in \mathrm{I}_l(H)$ таких, что $C \overset{\sharp}{<} A$. Если же $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то число таких операторов C бесконечно.

Следовательно, $T(A) = \lambda_1' P_1' + \lambda_2' P_2'$ для некоторых $\lambda_1', \lambda_2' \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ и $P_1', P_2' \in \mathrm{I}_1(H)$ с условием

$$\dim(\operatorname{Im} P_1') = \dim(\operatorname{Im} P_2') = 1, \quad P_1' \perp P_2'.$$

Сверх того, $\lambda_1' = \lambda_2'$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2$.

3. Пусть $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Рассмотрим оператор λI. Так как $R_{\lambda I} = 0$, то $R_{T(\lambda I)} = 0$. Более того, любой оператор $C \in \mathrm{I}_l(H)$, удовлетворяющий условиям $C \overset{\sharp}{<} \lambda I$ и $L_C = 2$, имеет равные собственные числа. По пункту 2 получаем, что и у любого оператора $C' \in \mathrm{I}_l(H)$, удовлетворяющего условиям $C' \overset{\sharp}{<} T(\lambda I)$ и $L_{C'} = 2$, собственные числа совпадают. Делаем вывод: для любого $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ найдется такое $\mu \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, что $T(\lambda I) = \mu I$.

Определим отображение $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ по следующему правилу: $\sigma(0) = 0$, а при $\lambda \neq 0$ значение $\sigma(\lambda)$ таково, что $T(\lambda I) = \sigma(\lambda) I$. Так как к T^{-1} можно применить утверждение теоремы, то σ обратимо, и биективность отображения σ доказана.

4. Обозначим $T_1(A) = \dfrac{1}{\sigma(1)}T(A)$, $\sigma_1(\lambda) = \dfrac{\sigma(\lambda)}{\sigma(1)}$. Тогда $\sigma_1(1) = 1$, $T_1(I) = I$. Для любого $P \in \mathrm{I}_1(H)$ имеем $P \overset{\sharp}{<} I$. Следовательно, $T(P) \overset{\sharp}{<} I$, $T(P) \in \mathrm{I}_1(H)$, и к ограничению $T_1|_{\mathrm{I}_1(H)}$ можно применить утверждение теоремы Овчинникова (теорема 4.2.6).

Таким образом, существует $S\colon H \to H$ — линейный или полулинейный обратимый ограниченный оператор такой, что $T_1(P) = SPS^{-1}$ для всех $P \in \mathrm{I}_1(H)$ или $T_1(P) = SP^*S^{-1}$ для всех $P \in \mathrm{I}_1(H)$. Применяя к T_1 отображение $P \mapsto S^{-1}PS$ и сопряжение, если необходимо, получим биективное отображение T_2, строго монотонное относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка, и удовлетворяющее соотношению $T_2(P) = P$ для любого $P \in \mathrm{I}_1(H)$.

5. Пусть $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$, $P \in \mathrm{I}_1(H)$. Тогда $T_2(\lambda)P = \sigma_1(\lambda)P'$ для некоторого идемпотента $P' \in \mathrm{I}_1(H)$. Кроме того, $\lambda P \perp (I - P)$, и

$$\sigma_1(\lambda)P' = T_2(\lambda P) \overset{\sharp}{\leqslant} T_2(\lambda P + (I - P)),$$

$$I - P = T_2(I - P) \overset{\sharp}{\leqslant} T_2(\lambda P + (I - P)).$$

В силу биективности отображения σ_1, $\sigma_1(\lambda) \neq 1$. Применим лемму 4.3.1, получим, что $\sigma_1(\lambda)P' \perp (I - P)$.

Таким образом, $T_2(\lambda P) \perp (I - P)$, и $T_2(\lambda P) \overset{\sharp}{\leqslant} \sigma_1(\lambda)P$. Более того, если $\lambda \in \{0, 1\}$, то вновь $T_2(\lambda P) \overset{\sharp}{\leqslant} \sigma_1(\lambda)P$. Тем самым, $T_2(\lambda P) \overset{\sharp}{\leqslant} \sigma_1(\lambda)P$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$, $P \in \mathrm{I}_1(H)$.

6. К отображению T_2^{-1} можем применить утверждение теоремы, получим $T_2^{-1}(\lambda P) \overset{\sharp}{\leqslant} \sigma_1^{-1}(\lambda)P$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$, $P \in \mathrm{I}_1(H)$. Пусть $\lambda = \sigma_1(\mu)$, тогда $T_2^{-1}(\sigma_1(\mu)P) \overset{\sharp}{\leqslant} \mu P$.

В силу монотонности отображения T имеем $\sigma_1(\mu)P \overset{\sharp}{\leqslant} T_2(\mu P)$ при всех $\mu \in \mathbb{F}$, $P \in \mathrm{I}_1(H)$. Следовательно, $T_2(\lambda P) = \sigma_1(\lambda)P$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$, $P \in \mathrm{I}_1(H)$.

7. Пусть $\lambda_i \in \mathbb{F}$, $P_i \in \mathrm{I}_1(H)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда

$$\sigma_1(\lambda_j)P_j = T_2(\lambda_j P_j) \overset{\sharp}{\leqslant} T_2\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right)$$

при всех $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, откуда

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_1(\lambda_i)P_i \overset{\sharp}{\leqslant} T_2\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right).$$

Кроме того,

$$T_2\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) \perp \left(I - \sum_{i=1}^{n} P_i\right),$$

и

$$T_2\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_1(\lambda_i)P_i.$$

Так как отображение T_2 было получено из T комбинацией с отображением $P \mapsto S^{-1}PS$, сопряжением, и умножением на число, то отображение T имеет требуемый вид. $\square$

Сравним утверждение теоремы 4.3.2 с ее матричным аналогом (теорема 3.3.1). В теореме 3.3.1 рассматривались инъективные монотонные отображения на множестве $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ диагонализуемых матриц, а в теореме 4.3.2 — биективные строго монотонные отображения на множестве $\mathrm{I}_l(H)$.

Заметим, что если $H = \mathbb{F}^n$, то $\mathrm{I}_l(H)$ — линейные операторы, матрицы которых в некотором фиксированном базисе суть $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$. В конечномерном случае характеризационные результаты обеих теорем совпадают, за исключением того, что, с одной стороны, в теореме 4.3.2 больше ограничений на отображение, и, с другой стороны, произвольный ненулевой эндоморфизм f поля $\mathbb{F}$ в теореме 3.3.1 заменяется на тождественный или комплексное сопряжение.

Литература

[1] *Алиева А. А.* Обратимость линейных отображений, сохраняющих f-порядки // Фундамент. и прикл. матем. — 2003. — **9**, №3, С. 3—11.

[2] *Богданов И. И., Гутерман А. Э.* Монотонные отображения матриц, заданные групповой обратной, и одновременная диагонализуемость // Математический сборник. 2007. Т. 198. №1. С. 3—20.

[3] *Фробениус Г.* Теория характеров и представлений групп. Харьков: Гос. науч. техн. изд. Украины, 1937. — С. 106—127.

[4] *Гутерман А. Э.* Монотонные аддитивные отображения матриц // Математические заметки. — 2007. — **81**, №5, 681—692.

[5] *Гутерман А. Э., Михалёв А. В.* Общая алгебра и линейные отображения, сохраняющие матричные инварианты // Фундамент. и прикл. матем. — 2003. — **9**, №1, С. 83—101.

[6] *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. 1986. М: Мир. 543 с.

[7] *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: «Наука», 1969 г.

[8] *Alieva A., Guterman A.* Monotone Linear Transformations on Matrices are Invertible // Comm. in Algebra. — 2005. — Vol. 33. — P. 3335—3352.

[9] *Baksalary J. K., Hauke J.* A further algebraic version of Cochran's theorem and matrix partial orderings // Linear Algebra Appl. — 1990. — Vol. 127. — P. 157—169.

[10] *Baksalary J. K., Mitra S. K.* Left-star and right-star partial orderings// Linear Algebra Appl. — 1991. — Vol. 149. — P. 73—89.

[11] *Baksalary J. K., Pukelsheim F., Styan G. P. H.* Some properties of matrix partial orderings // Linear Algebra Appl. — 1989. — Vol. 119. — P. 57—85.

[12] *Ben-Israel A., Greville T.* Generalized Inverses: Theory and Applications. New York: Hohn Wiley and Sons. — 1974.

[13] *Chooi W.-L., Lim M.-H.* Additive preservers of rank-additivity on matrix spaces // Linear Algebra Appl. **402** (2005) 291—302.

[14] *Dedekind R.* Gesammelte Mathematische Werke. Vol. II. New York: Chelsea, 1969.

[15] *De Pillis J.* Linear Transformations which Preserve Hermitian and Positive Semidefinite Operators // Pacific J. of Math. 1967. Vol. 23. P. 129—137.

[16] *Dieudonne J.* Les déterminants sur un corps non commutatif // Bull. Soc. Math. Fr. — 1943. — Vol. 71. — P. 27—-45.

[17] *Dieudonne J.* Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables // Arch. Math. — 1949. — Vol. 1. — P. 282—287.

[18] *Dixon J. D.* Rigid embedding of simple groups in the general linear group // Canad. J. Math. — 1977. — Vol. 29. — P. 384—391.

[19] *Dolinar G., Guterman A., Marovt J.* Automorphisms of K(H) with respect to the star partial order // Operators and Matrices, **7**, 1 (2013), 225—239.

[20] *Dolinar G., Marovt J.* Star partial order on $B(H)$ // Linear Algebra Appl. **434** (2011), 319—326.

[21] *Drazin M. P.* Natural structures on semigroups with involution // Bull. Amer. Soc. — 1978. — Vol. 84. №1. — P. 139—141.

[22] *Englefield M. H.* The commuting inverses of a square matrix // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1966. — Vol. 62. — P. 667—671.

[23] *Erdelyi I.* On the matrix equation $Ax = \lambda Bx$ // Journal of Math. Anal. and Appl., **17** (1967), 117—132.

[24] *Faure C.-A.* An elementary proof of the fundamental theorem of projective geometry // Geom. Dedicata., **90** (2002) 145—151.

[25] *Fredholm I.* Sur une classe d'équations fonctionnelles // Acta Math. — 1903. — Vol. 27. — P. 365—390.

[26] *Grove L.C.* Algebra. AP, New-York, 1980.

[27] *Guterman A.* Linear Preservers for Drazin star partial order // Comm. in Algebra. — 2001. — Vol. 29, no. 9. — P. 3905—3917.

[28] *Guterman A.* Linear Preservers for Matrix Inequalities and Partial Orderings // Linear Algebra Appl. — 2001. — Vol. 331, no. 1-3. — P. 75—87.

[29] *Guterman A.* Monotone matrix maps preserve non-maximal rank // Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, 2003, 311—328.

[30] *Hartley B., Hawkes T.O.* Rings, Modules, and Linear Algebra // Chapman and Hall Ltd., London, 1970.

[31] *Hartwig R. E.* How to partially order regular elements // Math. Japonica. — 1980. — Vol. 25, no. 1. — P. 1—13.

[32] *Hartwig R. E., Mitra S. K.* Partial orders based on outer inverses // Linear Algebra Appl. — 1982. — Vol. 176. — P. 3—20.

[33] *Hilbert D.* Grundzüge einer algemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Teubner. Leipzig. 1912.

[34] *Howard R.* Linear maps that preserve matrices annihilated by a polynomial // Linear Algebra Appl. — 1980. — Vol. 30. — P. 167—176.

[35] *Hurwitz W. A.* On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral solutions to a system of linear equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1912. — Vol. 13. — P. 405—418.

[36] *Legiša P.* Automorphisms of M_n, partially ordered by rank subtractivity ordering // Linear Algebra Appl. — 2004. — Vol. 389. — P. 147—158.

[37] *Legiša P.* Automorphisms of M_n, partially ordered by the star order // Linear and Mult. Algebra. — 2006. — Vol. 54, no. 3. — P. 157—188.

[38] *Li C.-K., Tsing N. K.* Linear preserver problems: A brief introduction and some special techniques // Linear Algebra Appl. — 1992. — Vol. 162—164. — P. 217—235.

[39] *Mikhalev A.V.* Isomorphisms and anti-isomorphisms of endomorphism rings of modules // First International Tainan-Moscow

Algebra Workshop. Berlin, New York: Walter de Gruyter & Co. 1995. — P. 69—122.

[40] *Mitra S. K.* A new class of g-inverse of square matrices // Sankhyā. Ser. A. — 1963. — Vol. 30. — P. 323—330.

[41] *Mitra S. K.* On group inverses and the sharp order // Linear Algebra Appl. — 1987. — Vol. 92. — P. 17—37.

[42] *Mitra S. K.* Matrix partial orders through generalized inverses: Unified theory // Linear Algebra Appl. — 1991. — Vol. 148. — P. 237—263.

[43] *Mitra S. K., Bhimasankaram P., Malik S. B.* Matrix partial orders, Shorted Operators and Applications. Series in Algebra, Vol. 10, World Scientific, 2009.

[44] *Molnár L.* Selected Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1895. 2007, XII, 232 p.

[45] *Moore E. H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix // Bull. Amer. Math. Soc. — 1920. — Vol. 26. — P. 394—395.

[46] *Nambooripad K. S. S.* The natural partial order on a regular semigroup // Proceedings of the Edinburgh Math. Soc. — 1980. — Vol. 23. — P. 249—260.

[47] *Omladič M., Šemrl P.* Preserving Diagonalisability // Linear Algebra Appl. — 1998. — Vol. 285. — P. 165—179.

[48] *Ovchinnikov P. G.* Automorphisms of the poset of skew projections // J. of Functional Analysis. — 1993. — Vol. 115. — P. 184—189.

[49] *Penrose R.* A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1966. — Vol. 62. — P. 673—677.

[50] *Petek T.* Order-preserving maps on the poset of idempotent matrices // Publ. Math. Debrecen. — 2000. — Vol. 56(1-2). — P. 53—61.

[51] *Pierce S. and others.* A Survey of Linear Preserver Problems // Linear and Multilinear Algebra. — 1992. — Vol. 33. — P. 1—119.

[52] *Piziak R., Odell P. L.* Matrix Theory: From Generalized Inverses to Jordan Form. Chapman & Hall/CRC, 2007. P. 548.

[53] *Rao C. R., Mitra S. K.* Generalized Inverse of Matrices and its Applications. New York: Wiley. 1971.

[54] *Robert P.* On the group-inverse of a linear transformation // Journal of Math. Anal. and Appl. — 1968. — Vol. 22. — P. 658—669.

[55] *Šemrl P.* Order-preserving maps on the poset of idempotent matrices // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2003. — Vol. 69. — P. 481—490.

[56] *Šemrl P.* Non-linear commutativity preserving maps // Acta Sci. Math. (Szeged). **71** (2005) 781—819.

[57] *Šemrl P.* Automorphisms of B(H) with respect to minus partial order // J. Math. Anal. Appl. **369** (2010), 205—213.

[58] *Sengupta D., Jammalamadaka S.R.* Linear Models: An Integrated Approach. Series in Multivariate Analysis, Vol. 6, World Scientific, 2003.

[59] *Wedderburn J.H.M.* Lectures on Matrices. AMS Colloquium Publications, 17, Providence, Rhode Island.

[60] *Zhao L., Hou J.* Jordan zero-product preserving additive maps on operator algebras // J. Math. Anal. Appl. **314** (2006), 689—700.

Публикации автора по теме диссертации

[61] *Ефимов М. А.* Монотонные отображения матриц и теорема Нетер-Сколема // Вестник Московского университета. Математика. Механика. 2012. Т. 67. №5. С. 46—66. Translated by Moscow University Mathematics Bulletin. 2012, Vol. 67(5-6). 221–223.

[62] *Ефимов М. А.* О $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядке на множестве линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве // Матем. заметки. 2013. Т. 93. №5. С. 794–797. Translated by Mathematical Notes. 2013. Vol. 93(5). 784–788.

[63] *Гутерман А. Э., Ефимов М. А.* Монотонные отображения матриц индекса 1 // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2012. Т. 405. С. 67–96. Translated by Journal of Mathematical Sciences (New-York). 2013. Vol 191(1). 36–51. *М.А. Ефимову принадлежат главы 2, 5, 6. А.Э. Гутерману принадлежат главы 1, 3, 4.*

[64] *Ефимов М. А.* Линейные отображения матриц, монотонные относительно $\overset{\sharp}{\leq}$, $\overset{cn}{\leq}$ - порядков // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13. №4. С. 53—66. Translated by Journal of Mathematical Sciences (New-York). 2008. Vol. 155(6). 830–838.

[65] *Ефимов М. А.* Аддитивные отображения матриц, монотонные относительно порядков, заданных групповой обратной матрицей // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. №6.

С. 23–40. Translated by Journal of Mathematical Sciences (New-York). 2013. Vol. 193(5). 659–670.

[66] *Guterman A. E., Efimov M. A.* Monotone maps on diagonalizable matrices // Mathematical Inequalities and Applications, accepted, 2013, MIA-3536. *М.А. Ефимову принадлежат главы 1, 2, 3. А.Э. Гутерману принадлежит глава 4.*

[67] *Ефимов М. А.* Монотонные отображения матриц, заданные групповой обратной // XVII Международная научная конференция «Ломоносов-2010», Тезисы докладов, 1, МАКС Пресс, Москва, 2010.

[68] *Ефимов М. А.* Частичные порядки на алгебре матриц и их аналоги для гильбертовых пространств // XVIII Международная научная конференция «Ломоносов-2011», Тезисы докладов, 1-2, МАКС Пресс, Москва, 2011.

[69] *Ефимов М. А.* О частичном порядке, задаваемом связанными идемпотентами в гильбертовом пространстве // XIX Международная научная конференция «Ломоносов-2012», Тезисы докладов, 1-2, МАКС Пресс, Москва, 2012.