ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

На правах рукописи

Котенкова Полина Юрьевна

Действия торов и локально нильпотентные дифференцирования

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель:	**Аржанцев Иван Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Панов Александр Николаевич** доктор физико-математических наук, профессор (ФБГОУ ВПО «Самарский государственный университет»)
	Жгун Владимир Сергеевич кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник (Научно-исследовательский институт системных исследований РАН)
Ведущая организация:	**ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук»**

Защита диссертации состоится 11 апреля 2014 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В. Ломоносова, по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.
С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В. Ломоносова, по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8 этаж.

Автореферат разослан 11 марта 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84, созданного на базе
МГУ имени М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор **Иванов Александр Олегович**

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена решению нескольких задач из геометрической теории инвариантов, алгебраической теории локально нильпотентных дифференцирований и теории автоморфизмов алгебраических многообразий.

Алгебраическим тором T называется алгебраическая группа, изоморфная группе $(\mathbb{K}^\times)^n$. Торическое многообразие — это нормальное алгебраическое многообразие, которое допускает действие алгебраического тора T с открытой орбитой. Теория торических многообразия возникла в начале 1970-х годов в контексте описания эквивариантных компактификаций алгебраических торов. Она быстро завоевала популярность благодаря тому, что многие алгебро-геометрические свойства торических многообразий могут быть выражены на языке выпуклой геометрии и комбинаторики. Напомним, что веером называется такой конечный набор полиэдральных конусов Σ, что грань любого конуса из Σ также принадлежит Σ и пересечение любых двух конусов из Σ является гранью каждого из них. Всякому торическому многообразию ставится в соответствие некоторый веер, лежащий в векторном пространстве, ассоциированном с решёткой однопараметрических подгрупп тора T. Он определяет многообразие однозначно с точностью до T-эквивариантного изоморфизма. Понятие веера и соответствующего торического многообразия было введено Демазюром[1]. В первой работе по теории торических многообразий Демазюр описал группу автоморфизмов гладкого полного торического многообразия. Результаты этой работы открыли новое направление исследований. Позже Кокс интерпретировал их в терминах однородного координатного кольца, что послужило мотивировкой для определения колец Кокса.

Теория торических многообразий допускает обобщение. Пусть X — нормальное алгебраическое многообразие, на котором эффективно действует алгебраический тор T. Такие X называются *T-многообразиями*. Напомним, что *сложность* T-действия — это коразмерность типичной T-орбиты на X. Хорошо известно, что T-многообразия можно задавать так называемыми *комбинаторными данными*, они описываются в терминах полиэдральных дивизоров на полупроективных многообразиях. Многообразия сложности ноль являются торическими. T-многообразия произвольной

[1] M. Demazure, *Sous-groupes algebriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3, 1970, 507–588

сложности описаны в работе Альтманна и Хаузена[2].

Пусть X — аффинное нормальное алгебраическое многообразие. Хорошо известно, что регулярные действия аддитивной группы $\mathbb{G}_a$ основного поля на X находятся во взаимно однозначном соответствии с локально нильпотентными дифференцированиями (сокр. ЛНД) алгебры $\mathbb{K}[X]$ регулярных функций на X. Пусть T — алгебраический тор и $M = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{K}^\times)$ — решётка его характеров. Если на X задано действие тора T, то алгебра $\mathbb{K}[X]$ градуирована решёткой характеров M. Локально нильпотентное дифференцирование градуированной алгебры называется *однородным*, если оно переводит однородные элементы в однородные. Геометрически это означает, что соответствующее $\mathbb{G}_a$-действие на X нормализуется тором T. Если орбиты общего положения $\mathbb{G}_a$-действия содержатся в замыканиях T-орбит, то говорят, что соответствующее однородное ЛНД имеет вертикальный тип, в противном случае — горизонтальный тип. Всякое однородное ЛНД сдвигает M-градуировку на некоторый вектор $\deg \partial \in M$, называемый степенью ∂. Степени однородных ЛНД называются T-корнями T-многообразия X, а сами ЛНД — корневыми векторами. Эти понятия были введены Поповым[3] по аналогии с понятиями корня и корневых векторов из теории линейных алгебраических групп. Их изучение играет важную роль в описании, вообще говоря, бесконечномерной группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$. Результаты работ Попова об однородных локально нильпотентных дифференцированиях и сформулированные в них вопросы во многом определили развитие этой области.

Впервые $\mathbb{G}_a$-действия на нормальных $\mathbb{K}^\times$-поверхностях были классифицированы в работе Зайденберга и Фленера[4]. Обобщая использованную там конструкцию и понятие корня Демазюра, Льендо описал все однородные ЛНД на аффинных многообразиях сложности ноль и один [5], а также однородные ЛНД вертикального типа в случае T-многообразия произвольной сложности [6].

[2]K. Altmann and J. Hausen, *Polyhedral divisors and algebraic torus actions*, Mathematische Annalen, 334, 2006, 557–607

[3]V.L. Popov, Problems for problem session, Affine Algebraic Geometry, Contemporary Math., 2005, 369, 12–16

[4]H. Flenner, M. Zaidenderg, *Locally nilpotent derivations on affine surfaces with a $\mathbb{C}^*$-action*, Osaka Journal of Mathematics, 42, 2005, 931–974

[5]A. Liendo, *Affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations*, Transformation Groups, 15, 2010, no. 2, 389–425

[6]A. Liendo, *$\mathbb{G}_a$-actions of fiber type on affine $\mathbb{T}$-varieties*, Journal of Algebra, 324, 2010, 3653–3665

Цель работы

Целью работы является применение теории T-многообразий и алгебраической теории локально нильпотентных дифференцирований к решению следующих задач:

- задача о вариации фактора в геометрической теории инвариантов;
- описание корней T-многообразий;
- классификация эквивариантных пополнений коммутативных групп.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- Описаны классы GIT-эквивалентности линеаризованных линейных расслоений для диагональных действий групп $\mathrm{SO}(V)$ и $\mathrm{SL}(V)$ на многообразиях $\mathbb{P}(V)^m$ и $\mathbb{P}(V)^{m_1} \times \mathbb{P}(V^*)^{m_2}$ соответственно.
- Доказано, что отображение ограничения корней аффинного алгебраического T-многообразия с тора T на произвольный подтор сюръективно.
- Доказано, что всякое многообразие с локально транзитивным действием группы $T \times \mathbb{G}_a$, где T — алгебраический тор, а $\mathbb{G}_a$ — аддитивная группа основного поля, является торическим, и найдено комбинаторное описание орбит на таких многообразиях.

Основные методы исследования

В работе используются методы теории инвариантов, теории представлений и комбинаторные методы алгебраической геометрии.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны специалистам в теории инвариантов, алгебраической геометрии и дифференциальной алгебре.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ:

(1) Научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры (2013);

(2) Семинар «Группы Ли и теория инвариантов» (2010-2013, неоднократно);

(3) Семинар «Локально нильпотентные дифференцирования» (2012-2013, неоднократно);

а также на всероссийских и международных конференциях

(1) Летняя школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Самара, 8–15 июня 2009;

(2) Вторая школа конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, 31 января – 5 февраля 2011;

(3) Международная конференция «Алгебра и геометрия», приуроченная к 65-летию Аскольда Хованского, Москва, 4–9 июня 2012;

(4) Третья школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Тольятти, 24 июня – 1 июля 2012.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в трёх работах, список которых приводится в конце автореферата [1 - 3].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Библиография включает 46 наименований. Общий объём диссертации составляет 72 страницы.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации кратко изложена история вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты. Также описаны структура и краткое содержание диссертации.

Первая глава диссертации посвящена задаче о вариации фактора в геометрической теории инвариантов. Основным результатом является явное описание классов GIT-эквивалентности линеаризованных линейных расслоений для диагональных действий классических линейных групп $\mathrm{SL}(V)$ и $\mathrm{SO}(V)$ на проективных многообразиях $\mathbb{P}(V)^{m_1} \times \mathbb{P}(V^*)^{m_2}$ и $\mathbb{P}(V)^m$ соответственно.

Пусть G — комплексная редуктивная алгебраическая группа, X — проективное алгебраическое многообразие с заданным регулярным действием группы G и L — обильное G-линеаризованное линейное расслоение на многообразии X. Классическая конструкция Мамфорда[7] связывает с этими данными открытое подмножество полустабильных точек

$$X_L^{ss} = \{x \in X : F(x) \neq 0 \text{ для некоторых } m > 0 \text{ и } F \in \Gamma(X, L^{\otimes m})^G\},$$

для которого существует категорный фактор $X_L^{ss} \longrightarrow X_L^{ss}//G$. Данная конструкция зависит от выбора линеаризованного расслоения L. Задача изучения этой зависимости называется задачей о вариации фактора в геометрической теории инвариантов. Два линеаризованных линейных расслоения на многообразии называются *GIT-эквивалентными*, если построенные по ним множества полустабильных точек совпадают. Классы GIT-эквивалентности являются относительными внутренностями рациональных полиэдральных конусов, образующих веер, имеющий носителем конус G-линеаризованных обильных расслоений. Основным техническим средством для описания конусов этого веера служит численный критерий Мамфорда. Пример его использования можно найти в работе Долгачёва и Ху [8], где классы GIT-эквивалентности описаны для диагонального действия группы $\mathrm{SL}(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^m$.

Для действий алгебраического тора на аффинном многообразии было получено[9] элементарное описание GIT-эквивалентности в терминах

[7] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, Geometric Invariant Theory, 3rd Edition, in: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, 1993

[8] I.V. Dolgachev, Y. Hu, *Variation of Geometric Invariant Theory quontients*, (With an appendix: "An example of a thick wall" by N. Ressayre), Publications Mathématiques, Institut des Hautes Études Scientifiques, 87, 1998, 5–56, Example 3.3.24

[9] F. Berchtold, J. Hausen, *GIT-equivalence beyond the ample cone*, Michigan Mathematical Journal, 54, 2006, 3, 483–516

так называемых орбитных конусов. С использованием обобщённой конструкции Кокса оно было перенесено [10] на G-многообразия с конечно порождённым кольцом Кокса, с помощью чего были описаны классы GIT-эквивалентности для диагонального действия симплектической группы $\mathrm{Sp}(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^m$.

Основным результатом первой главы является описание классов GIT-эквивалентности для других диагональных действий классических линейных групп.

Теорема 1.11. Для диагонального действия группы $\mathrm{SO}(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^m$ GIT-веер получается разбиением конуса

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_m) \,|\, x_i \geqslant 0\}$$

гиперплоскостями

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_j$$

где $I, J \subset \{1, \ldots, m\}$, $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$, $I \cap J = \varnothing$.

Теорема 1.15. Для диагонального действия группы $\mathrm{SL}(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^{m_1} \times \mathbb{P}(V^*)^{m_2}$ (m_1 или $m_2 \geqslant n = \dim V$) GIT-веер получается разбиением конуса Ω, заданного неравенствами

$$\begin{gathered} x_l \geqslant 0, \;\; l = 1, \ldots, m_1, \\ y_p \geqslant 0, \;\; p = 1, \ldots, m_2, \\ (n-k)(\sum_{j=1}^{m_2} y_j - \sum_{i \in I} x_i) + k \sum_{i \notin I} x_i \geqslant 0, \\ (n-k)(\sum_{i=1}^{m_1} x_i - \sum_{j \in J} y_j) + k \sum_{j \notin J} y_j \geqslant 0, \end{gathered}$$

где $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $I \subset \{1, \ldots, m_1\}$, $J \subset \{1, \ldots, m_2\}$, $|I| = |J| = k$, гиперплоскостями

$$\begin{gathered} x_1 + \ldots + x_{m_1} = y_1 + \ldots + y_{m_2},) \\ (n-k) \sum_{i \in I} x_i - k \sum_{i \notin I} x_i = (n-k) \sum_{j \in J} y_j - k \sum_{j \notin J} y_j, \end{gathered}$$

где $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $I \subset \{1, \ldots, m_1\}$, $J \subset \{1, \ldots, m_2\}$, причём должно быть выполнено хотя бы одно из условий: $k \leqslant |I| \leqslant m_1 - n + k$ или $k \leqslant |J| \leqslant m_2 - n + k$.

[10] I.V. Arzhantsev, J. Hausen, *Geometric Invariant Theory via Cox rings*, Journal of Pure and Applied Algebra, 213, 2009, 154–172

Полученные результаты основаны на использовании техники орбитных конусов и явном описании образующих алгебры инвариантов (первая фундаментальная теорема классической теории инвариантов[11]). Основной идеей является редукция действия классической группы к действию тора.

Во **второй главе** изучается отображение ограничения корней аффинного многообразия с тора на подтор.

Пусть X — нормальное аффинное алгебраическое многообразие с регулярным эффективным действием алгебраического тора $\mathbb{T}$ и $T \subset \mathbb{T}$ — подтор. Тор T также действует на X. Обозначим через M_T и $M_{\mathbb{T}}$ решётки характеров T и $\mathbb{T}$ соответственно. Ясно, что всякое ЛНД, сохраняющее $M_{\mathbb{T}}$-градуировку, сохраняет и M_T-градуировку. Следовательно, ограничение всякого $\mathbb{T}$-корня на подтор T даёт T-корень. В диссертации доказано, что все T-корни многообразия X получаются таким образом.

Теорема 2.13. Пусть X — нормальное аффинное алгебраическое многообразие с регулярным эффективным действием алгебраического тора $\mathbb{T}$ и $T \subset \mathbb{T}$ — подтор. Тогда отображение ограничения корней с $\mathbb{T}$ на T сюръективно. Более того, если T-корень e является ограничением только одного $\mathbb{T}$-корня, то всякое T-однородное ЛНД на $\mathbb{K}[X]$ степени e также $\mathbb{T}$-однородно.

Отметим, что изучение однородных ЛНД градуированных факториальных алгебр мотивировано тем, что кольца Кокса полных алгебраических многообразий являются такими алгебрами. $\mathbb{G}_a$-действие может быть спущено с кольца Кокса на само многообразие, если соответствующее ЛНД однородно и имеет степень ноль относительно характеристического квазитора. Таким образом, знание однородных ЛНД позволяет описать корневые подгруппы, которые вместе с максимальным тором порождают связную компоненту единицы группы автоморфизмов полного многообразия, являющуюся линейной алгебраической группой, если кольцо Кокса конечно порождено[12]. Изучение же отображения ограничения корней мотивировано следующими причинами. Как правило, на аффинной алгебре существует огромное число ЛНД, и описать их не представляется возможным. Часто бывает достаточно изучать только те из них, которые сохраняют некоторую градуировку. Если все однородные ЛНД известны, можно попытаться найти ЛНД, однородные относительно более грубой градуировки. Наш результат даёт априорное описание их степеней. Эта идея применима для колец Кокса алгебраических многообразий, которые имеют несколько есте-

[11]Э.Б. Винберг, В.Л. Попов, Теория инвариантов, Итоги науки и техн. Сер. соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — Т. 55. — ВИНИТИ, 1989, 137–309, §9

[12]I. Arzhantsev, J. Hausen, E. Herppich, A. Liendo, *The automorphism group of a variety with torus action of complexity one*, arXiv:1202.4568v2, 2012, to appear in Moscow Mathematical Journal

ственных градуировок. Ограничение корней также полезно для изучения подгрупп $G \subset \operatorname{Aut}(X)$, сохраняющих некоторую структуру на многообразии X. Мы можем ограничить корни с максимального тора $\mathbb{T} \subseteq \operatorname{Aut}(X)$ на максимальных тор $T \subseteq G$ и получить первое приближение к описанию корневых подгрупп в G. Это соображение может, например, применено для разрешения вопросов Попова[3] о корнях аффинной группы Кремоны. В первом из них требовалось найти все корни и корневые векторы группы алгебраических преобразований аффинного пространства, сохраняющих объём. Ответ был дан Льендо[13].

Теорема. Множество корней группы

$$\operatorname{Aut}^*_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{[n]} = \{\gamma \in \operatorname{Aut}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{[n]} \mid \det \left(\frac{\partial \gamma(x_j)}{\partial x_i}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 1\}$$

по отношению к максимальному тору

$$T = \{\gamma \in \operatorname{Aut}^*_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{[n]} \,|\, \gamma(x_i) = t_i x_i,\, t_i \in \mathbb{K},\, \prod_{i=1}^{n} t_i = 1\}$$

имеет вид

$$\left\{\lambda\, x^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i} \ \mid\ \lambda \in \mathbb{K}^{\times}, i \in \{1, \ldots, n\}, \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}, \alpha_i = 0\right\}.$$

Корнем, соответствующим $\lambda\, x^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i}$, является характер $\chi_{i,\alpha} : T \to \mathbb{K}^{\times}$, заданный $\chi_{i,\alpha}(\gamma) = t_i^{-1} \prod\limits_{j=1}^{n} t_j^{\alpha_j}$.

Доказательство Льендо основано на явном вычислении комбинаторных данных для аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ с действием тора T и использовании общего описания однородных ЛНД горизонтального типа на многообразиях с действием тора сложности один. Идея ограничения корней позволила автору диссертации дать другое, вполне элементарное, доказательство этого факта.

При изучении ограничения корней естественно возникают следующие вопросы.

(1) Пусть e — корень аффинного T-многообразия. Сколько корневых векторов соответствуют e?

(2) Пусть X — аффинное $\mathbb{T}$-многообразие, $T \subset \mathbb{T}$ — подтор и e — некоторый T-корень X. Сколько $\mathbb{T}$-корней при ограничении на T совпадают с e?

[13] A. Liendo, *Roots of the affine Cremona group*, Transformation Groups, 16, 2011, no. 4, 1137–1142

(3) Являются ли все T-однородные ЛНД степени e также $\mathbb{T}$-однородными?

На торических многообразиях каждому корню с точностью до пропорциональности соответствует только один корневой вектор. Корневые векторы вертикального типа фиксированной степени образуют векторное простанство (возможно, бесконечномерное). Для корневых векторов горизонтального типа полный ответ на вопрос (1) неизвестен даже для действий тора сложности один. Теорема 2.13 показывает, что если T-корень e является ограничением только одного $\mathbb{T}$-корня $\widehat{e}$, то всякое T-однородное ЛНД степени e также $\mathbb{T}$-однородно и корню e соответствует столько же корневых векторов, сколько и $\widehat{e}$.

В разделе 2.4 исследуется случай, когда многообразие X является аффинным торическим, а подтор T в торе $\mathbb{T}$, действующем с открытой орбитой, имеет коразмерность один. Пусть N — решётка однопараметрических подгрупп в $\mathbb{T}$, торическое многообразие задаётся конусом $\sigma_X \subset N_{\mathbb{Q}}$ и подтору T соответствует гиперплоскость $\Gamma_T \subset N_{\mathbb{Q}}$. Ответы на вопросы (1)—(3) зависят от взаимного расположения σ_X и Γ_T. В разделе 2.5 полностью описано отображение ограничения корней для аффинных торических поверхностей.

В **третьей главе** диссертации изучаются пополнения коммутативных групп коранга один и однородные ЛНД на невырожденных аффинных квадриках с действием тора сложности один.

В качестве аналога торической геометрии можно рассматривать теорию локально транзитивных $\mathbb{G}_a^n$-действий. В работе Хассетта и Чинкеля[14] было установлено соответствие между такими действиями и локальными коммутативными ассоциативными конечномерными алгебрами с фиксированной системой порождающих. Естественно пытаться построить теорию локально транзитивных действий для смешанного случая, то есть для групп $T \times (\mathbb{G}_a)^r$, где T — алгебраический тор. В разделе 3.1 описываются полные вложения группы $\mathbb{G}_n = T \times \mathbb{G}_a$. Оказывается, что все они являются торическими многообразиями и имеют лишь конечное число $\mathbb{G}_n$-орбит. Локально транзитивные действия группы $\mathbb{G}_n$ на многообразии также будем называть $\mathbb{G}_n$-структурами. Следующая теорема получена в совместной работе автора с И.В. Аржанцевым.

Теорема 3.12. Пусть X — полное нормальное алгебраическое многообразие. Тогда

[14] B. Hassett, Yu. Tschinkel, *Geometry of equivariant compactifications of* $\mathbb{G}_a^n$, International Mathematics Research Notices, 20, 1999, 1211–1230

(1) если X снабжено регулярным локально транзитивным действием группы $\mathbb{G}_n$, то оно является торическим;

(2) всякая $\mathbb{G}_n$-структура на X задаётся некоторым корнем Демазюра его веера как торического многообразия. Обратно, всякий корень Демазюра веера торического многообразия определяет $\mathbb{G}_n$-структуру;

(3) всякая $\mathbb{G}_n$-структура на X имеет конечное число орбит;

(4) если X — торическое многообразие с действующим тором $\mathbb{T}$ и заданным с помощью корня Демазюра e локально транзитивным $\mathbb{G}_n$-действием, то две $\mathbb{T}$-орбиты $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ лежат в одной $\mathbb{G}_n$-орбите тогда и только тогда, когда для соответствующих конусов σ_1 и σ_2 выполнено условие: $e\mid_{\sigma_2}\leqslant 0$ и σ_1 — гипергрань конуса σ_2, выделяемая уравнением $\langle\cdot, e\rangle = 0$.

В разделе 3.1 найдены все однородные ЛНД на аффинных неторических невырожденных квадриках с действием тора сложности один. Любая такая квадрика X может быть задана уравнением $x_1x_2 - x_3x_4 = 1$, $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2 = 0$ или $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0$ в аффинном пространстве $\mathbb{A}^4$, $\mathbb{A}^5$ или $\mathbb{A}^6$ соответственно[12]. Следующие теоремы содержат описание однородных ЛНД в каждом из случаев.

Теорема 3.19. Всякое однородное ЛНД на алгебре $A = \mathbb{K}[x, y, z, w]/(xy - zw - 1)$ с $\mathbb{Z}^2$-градуировкой, заданной равенствами

$$\deg x = (1, 0), \deg y = (-1, 0), \deg z = (0, 1) \deg w = (0, -1),$$

имеет один из следующих видов

$$\lambda x^k w^l \left(w\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \lambda x^k z^l \left(z\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial w} \right),$$

$$\lambda y^k w^l \left(w\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \lambda y^k z^l \left(z\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial w} \right),$$

где $k, l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $\lambda \in \mathbb{K}$.

Теорема 3.22. Пусть на многообразии $X = \{x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2 = 0\} \subset \mathbb{A}^5$ действует тор T^3 по правилу

$$(t_1, t_2, t_3) \circ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (t_1t_3x_1, t_1^{-1}t_3x_2, t_2t_3x_3, t_2^{-1}t_3x_4, t_3x_5),$$

где $(t_1, t_2, t_3) \in T^3$ и $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in X.$. Тогда всякое однородное ЛНД на алгебре регулярных функций $A = \mathbb{K}[X]$ имеет вид

$$\lambda x_i^k x_j^l x_5^p \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_{\bar{i}}} - x_i \frac{\partial}{\partial x_{\bar{j}}} \right) \quad \text{или}$$

$$x_i^k x_j^l (\beta x_1 x_2 - \alpha x_3 x_4)^p \left(\alpha x_j x_5 \frac{\partial}{\partial x_{\bar{i}}} + \beta x_i x_5 \frac{\partial}{\partial x_{\bar{j}}} - \frac{\alpha+\beta}{2} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_5} \right),$$

где $k, l, p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\{i, \bar{i}\} = \{1, 2\}$, $\{j, \bar{j}\} = \{3, 4\}$ и $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha + \beta \neq 0$.

Теорема 3.24. Всякое однородное ЛНД на алгебре регулярных функций многообразия $X = \{x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0\} \subset \mathbb{A}^6$ с действием тора

$$(t_1, t_2, t_3, t_4) \circ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (t_1 x_1, t_1^{-1} t_4 x_2, t_2 x_3, t_2^{-1} t_4 x_4, t_3 x_5, t_3^{-1} t_4 x_6),$$

где $(t_1, t_2, t_3, t_4) \in T$ и $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in X$, имеет вид

$$x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} x_{i_3}^{k_3} (\alpha_3 x_3 x_4 - \alpha_2 x_5 x_6) \left(\alpha_1 x_{i_2} x_{i_3} \frac{\partial}{\partial x_{\bar{i}_1}} + \alpha_2 x_{i_1} x_{i_3} \frac{\partial}{\partial x_{\bar{i}_2}} + \alpha_3 x_{i_1} x_{i_2} \frac{\partial}{\partial x_{\bar{i}_3}} \right),$$

где $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\{i_1, \bar{i}_1\} = \{1, 2\}$, $\{i_2, \bar{i}_2\} = \{3, 4\}$, $\{i_3, \bar{i}_3\} = \{5, 6\}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ и никакие два из $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ не обращаются одновременно в ноль.

Заметим, что найденные для $X = \{x_1x_2 - x_3x_4 = 1\}$ однородные ЛНД вместе с тором соответствуют элементарным автоморфизмам[15]. Как известно[16], существует автоморфизм X, который не раскладывается в композицию элементарных. Таким образом, мы получаем пример многообразия, группа автоморфизмов которого не порождается максимальным тором и корневыми векторами. Для описания однородных ЛНД использована техника, разработанная Льендо[5]. Для каждой из квадрик вычислены комбинаторные данные, что представляет самостоятельный интерес.

Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Ивану Владимировичу Аржанцеву за постановку задач и постоянную поддержку в течение всех лет обучения,

[15]S. Lamy, S. Vénéreau, *The tame and the wild automorphisms of an affine quadric threefold*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 65, 2013, no. 1, 299–320

[16]И.В. Аржанцев, С. А. Гайфуллин, *Кольца Кокса, полугруппы и автоморфизмы аффинных многообразий*, Математический сборник, 201, 2010, вып. 1, 3–24

профессору Эрнесту Борисовичу Винбергу и доценту Дмитрию Андреевичу Тимашёву за полезные и интересные лекции, семинары и обсуждения, а также заведующему кафедрой высшей алгебры профессору Виктору Николаевичу Латышеву и всем сотрудникам кафедры за творческую атмосферу, которая способствует научной работе.

Публикации автора по теме диссертации

[1] П.Ю. Котенкова, *GIT-эквивалентность и диагональные действия*, Математические заметки, 90, 2, 2011, 269–279

[2] P. Kotenkova, *On restriction of roots on affine T-varieties*, Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry, DOI 10.1007/s13366-013-0179-x, 2013

[3] И.В. Аржанцев, П.Ю. Котенкова, $\mathbb{G}_a$*-действия на T-многообразиях сложности один*, депонировано в ВИНИТИ РАН, 22–В2014 от 15.01.2014, 40 стр.

(Диссертанту принадлежат доказательства всех результатов работы, И.В. Аржанцеву принадлежит постановка задачи и рекомендации к выбору методов её решения.)