ФГБОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА»
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

КОТЕНКОВА ПОЛИНА ЮРЬЕВНА

ДЕЙСТВИЯ ТОРОВ И ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор И.В. Аржанцев

Москва — 2013

Содержание

Введение

Диссертация посвящена решению ряда задач теории алгебраических групп преобразований и геометрической теории инвариантов.

Мы работаем над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики ноль. Будем обозначать через $\mathbb{K}^\times$ и $\mathbb{G}_a$ мультипликативную и аддитивную группу поля $\mathbb{K}$ соответственно.

Алгебраическим тором T называется алгебраическая группа, изоморфная группе $(\mathbb{K}^\times)^n$. Торическое многообразие — это нормальное алгебраическое многообразие, которое допускает действие алгебраического тора T с открытой орбитой. Теория торических многообразия возникла в начале 1970-х годов в связи с задачами эквивариантной компактификации алгебраических торов. Она быстро стала одним из популярнейших разделов алгебраической геометрии и нашла приложения во многих областях. Причина кроется в том, что важнейшие алгебро-геометрические свойства торических многообразий могут быть выражены на языке выпуклой геометрии и комбинаторики. Напомним, что веером называется такой конечный набор полиэдральных конусов Σ, что грань любого конуса из Σ также принадлежит Σ и пересечение любых двух конусов из Σ является гранью каждого из них. Всякому торическому многообразию ставится в соответствие некоторый веер, лежащий в векторном пространстве, ассоциированном с решёткой однопараметрических подгрупп тора T. Он определяет многообразие однозначно с точностью до T-эквивариантного изоморфизма. Понятие веера и соответствующего торического многообразия было введено М. Демазюром в [20]. Там же был описан метод для вычисления его когомологий. Однако Демазюр ограничивался рассмотрение гладкого случая. Теория торических многообразий развивалась в работах многих авторов. Перечислим некоторые из них: [4], [5], [19], [26], [29] и [38].

Теория торических многообразий допускает обобщение. Пусть X — нормальное алгебраическое многообразие, на котором эффективно действует алгебраический тор T. Такие X называются *T-многообразиями*. Напомним, что *сложность* T-действия — это коразмерность типичной T-орбиты на X. Хорошо известно, что T-многообразия можно задавать так называемыми *комбинаторными данными*, они описываются в терминах полиэдральных дивизоров на полупроективных многообразиях. Многообразия сложности ноль являются торическими. Комбинаторное описание T-многообразий сложности один получено в [29] и, более общо, в [7] и [43]. T-многообразия произвольной сложности описаны в [8] и [9].

Пусть X — аффинное нормальное алгебраическое многообразие. Хорошо известно, что регулярные $\mathbb{G}_a$-действия на X находятся во взаимно однозначном соответствии с локально нильпотентными дифференцированиями (сокр. ЛНД) алгебры $\mathbb{K}[X]$ регулярных функций на X. Теория локально нильпотентных дифференцирований в своей настоящей форме существует с 1960-х годов. Первоначально она возникла из теории алгебр и групп Ли, где исследовались связи между дифференцированиями, векторными полями и действиями групп. Однако линейные $\mathbb{G}_a$-действия изучались ещё в XIX в. Хорошо известна теорема Вайценбёкка о конечной порождённости алгебры инвариантов для линейных $\mathbb{G}_a$-действий, доказанная в 1932 году. Появление контрпримера Нагаты к Четырнадцатой проблеме Гильберта в 1958 году вызвало новую волну интереса к действиям группы $\mathbb{G}_a$ и унипотентных групп вообще. К середине 1990-х годов теория локально нильпотентных дифференцирований стала мощным иструментом для исследования коммутативных колец и групп автоморфизмов. С помощью неё были описаны группы автоморфизмов таких многообразий, как поверхности Данилевского, см. [34] и [36]. Важным объектом тут служит введённое Л. Макар-Лимановым в 1996 году понятие кольца абсолютных констант (сейчас более известного, как инвариант Макар-Лиманова), см. [35]. Необходимо отметить связь теории локально нильпотентных дифференцирований со знаменитыми гипотезой якобиана и проблемой сокращения, см. [22]. Также она находит приложения в теории дифференциальных уравнений, см., например, [17].

Пусть T — алгебраический тор и $M = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{K}^\times)$ — решётка его характеров. Если на X задано действие тора T, то алгебра $\mathbb{K}[X]$ градуирована решёткой характеров M. Локально нильпотентное дифференцирование градуированной алгебры называется *однородным*, если оно переводит однородные элементы в однородные. Геометрически это означает, что соответствующее $\mathbb{G}_a$-действие на X нормализуется тором T. Если орбиты общего положения $\mathbb{G}_a$-действия содержатся в замыканиях T-орбит, то говорят, что соответствующее однородное ЛНД имеет вертикальный тип, в противном случае — горизонтальный тип. Всякое однородное ЛНД сдвигает M-градуировку на некоторый вектор $\deg \partial \in M$, называемый степенью ∂. Степени однородных ЛНД называются T-корнями T-многообразия X, а сами ЛНД — корневыми векторами. Эти понятия были введены В.Л. Поповым по аналогии с понятиями корня и корневых векторов из теории линейных алгебраических групп, см. [39] и [6]. Их изучение играет важную роль в описании, вообще говоря, бесконечномерной группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$. Впервые $\mathbb{G}_a$-действия на нормальных $\mathbb{K}^\times$-поверхностях были классифицированы в [24]. Обобщая использованную там конструкцию и понятие корня Демазюра, А. Льендо описал все однородные ЛНД на аффинных многообразиях сложности ноль и один, см. [31], а также однородные ЛНД вертикального типа в случае T-многообразия произвольной сложности, см. [32].

Целью данной диссертации является применение развитых теорий T-многообразий и локально нильпотентных дифференцирований к ряду задач. Мы описываем классы GIT-эквивалентности для диагональных действий групп $\mathrm{SO}(V)$ и $\mathrm{SL}(V)$, доказываем сюръективность отображения ограничения корней, описываем пополнения коммутативных алгебраических групп коранга один, а также находим однородные ЛНД на неторических невырожденных аффинных квадриках с действием тора сложность один.

Перейдём к подробному изложению полученных результатов.

Глава 1 диссертации посвящена задаче о вариации фактора в геометрической теории инвариантов. Основным результатом является явное описание классов GIT-эквивалентности линеаризованных линейных расслоений для диагональных действий классических линейных групп $\mathrm{SL}(V)$ и $\mathrm{SO}(V)$ на проективных многообразиях $\mathbb{P}(V)^{m_1} \times \mathbb{P}(V^*)^{m_2}$ и $\mathbb{P}(V)^m$ соответственно.

Пусть G — комплексная редуктивная алгебраическая группа, X — проективное алгебраическое многообразие с заданным регулярным действием группы G и L — обильное G-линеаризованное линейное расслоение на многообразии X. Классическая конструкция Д. Мамфорда, см. [37], связывает с этими данными открытое подмножество полустабильных точек

$$X_L^{ss} = \{x \in X :\ F(x) \neq 0 \text{ для некоторых } m > 0 \text{ и } F \in \Gamma(X, L^{\otimes m})^G\},$$

для которого существует категорный фактор $X_L^{ss} \longrightarrow X_L^{ss}/\!/G$. Данная конструкция зависит от выбора линеаризованного расслоения L. Задача изучения этой зависимости называется задачей о вариации фактора в геометрической теории инвариантов. Два линеаризованных линейных расслоения многообразии называются *GIT-эквивалентными*, если построенные по ним множества полустабильных точек совпадают. После классических работ Д. Мамфорда и К. Шешадри изучение GIT-эквивалентности, см. [21], [40] и [42], можно считать одним из основных продвижений в геометрической теории инвариантов. Оказалось, что классы GIT-эквивалентности являются относительными внутренностями рациональных полиэдральных конусов, образующих веер, имеющий носителем конус G-линеаризованных обильных расслоений. Основным техническим средством для описания конусов этого веера служит численный критерий Мамфорда. Пример его использования можно найти в [21, Example 3.3.24], где классы GIT-эквивалентности описаны для диагонального действия группы $\mathrm{SL}(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^m$.

Для действий алгебраического тора на аффинном многообразии в работе [14] было получено элементарное описание GIT-эквивалентности в терминах так называемых орбитных конусов. С использованием обобщённой конструкции Кокса оно было перенесено в работе [11] на G-многообразия с конечно порождённым кольцом Кокса, ср. [42, Section 3]. Среди прочего, в [11, Theorem 6.2] описаны классы GIT-эквивалентности для диагонального действия симплектической группы $\mathrm{Sp}(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^m$.

Основным результатом первой главы является описание классов GIT-эквивалентности для других диагональных действий классических линейных групп.

Теорема 1.11. [45, теорема 2] Для диагонального действия группы $\mathrm{SO}(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^m$ GIT-веер получается разбиением конуса

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_i \geqslant 0\}$$

гиперплоскостями

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_j$$

где $I, J \subset \{1, \ldots, m\}$, $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$, $I \cap J = \varnothing$.

Теорема 1.15. [45, теорема 3] Для диагонального действия группы $\mathrm{SL}(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^{m_1} \times \mathbb{P}(V^*)^{m_2}$ (m_1 или $m_2 \geqslant n = \dim V$) GIT-веер получается разбиением конуса Ω, заданного неравенствами

$$x_l \geqslant 0, \;\; l = 1, \ldots, m_1,$$
$$y_p \geqslant 0, \;\; p = 1, \ldots, m_2,$$
$$(n-k)(\sum_{j=1}^{m_2} y_j - \sum_{i \in I} x_i) + k \sum_{i \notin I} x_i \geqslant 0,$$
$$(n-k)(\sum_{i=1}^{m_1} x_i - \sum_{j \in J} y_j) + k \sum_{j \notin J} y_j \geqslant 0,$$

где $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $I \subset \{1,\ldots,m_1\}$, $J \subset \{1,\ldots,m_2\}$, $|I| = |J| = k$, гиперплоскостями

$$x_1 + \ldots + x_{m_1} = y_1 + \ldots + y_{m_2},)$$

$$(n-k)\sum_{i\in I} x_i - k\sum_{i\notin I} x_i = (n-k)\sum_{j\in J} y_j - k\sum_{j\notin J} y_j,$$

где $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $I \subset \{1,\ldots,m_1\}$, $J \subset \{1,\ldots,m_2\}$, причём должно быть выполнено хотя бы одно из условий: $k \leqslant |I| \leqslant m_1 - n + k$ или $k \leqslant |J| \leqslant m_2 - n + k$.

Полученные результаты основаны на использовании техники орбитных конусов и явном описании образующих алгебры инвариантов (первая фундаментальная теорема классической теории инвариантов), см. [4, §9]. Основной идеей является редукция действия группы к действию тора.

В главе 2 изучается отображение ограничения корней аффинного многообразия с тора на подтор.

Пусть X — аффинное нормальное алгебраическое многообразие с регулярным эффективным действием алгебраического тора $\mathbb{T}$ и $T \subset \mathbb{T}$ — подтор. Тор T также действует на X. Обозначим через M_T и $M_{\mathbb{T}}$ решётки характеров T и $\mathbb{T}$ соответственно. Ясно, что всякое ЛНД, сохраняющее $M_{\mathbb{T}}$-градуировку, сохраняет и M_T-градуировку. Следовательно, ограничение всякого $\mathbb{T}$-корня на подтор T даёт T-корень. В диссертации доказано, что все T-корни многообразия X получаются таким образом.

Теорема 2.13. [46, Theorem 1] Пусть X аффинное нормальное алгебраическое многообразие с регулярным эффективным действием алгебраического тора $\mathbb{T}$ и $T \subset \mathbb{T}$ — подтор. Тогда отображение ограничения корней с $\mathbb{T}$ на T сюръективно. Более того, если T-корень e является ограничением только одного $\mathbb{T}$-корня, то всякое T-однородное ЛНД на $\mathbb{K}[X]$ степени e также $\mathbb{T}$-однородно.

Изучение отображения ограничения корней мотивировано следующими причинами. Как правило, на аффинной алгебре существует огромное число ЛНД, и описать их не представляется возможным. Часто бывает достаточно изучать только те из них, которые сохраняют некоторую градуировку. Если все однородные ЛНД известны, можно попытаться найти ЛНД, однородные относительно более грубой градуировки. Наш результат даёт априорное описание их степеней. Эта идея плодотворна для колец Кокса алгебраических многообразий, которые имеют несколько естественных градуировок, см. [8] для общего случая и [12] для случая полного многообразия с действием тора сложности один. Ограничение корней также полезно для изучения подгрупп $G \subset \mathrm{Aut}(X)$, сохраняющих некоторую структуру на многообразии X. Мы можем ограничить корни с максимального тора $\mathbb{T} \subseteq \mathrm{Aut}(X)$ на максимальных тор $T \subseteq G$ и получить первое приближение для описания корневых подгрупп в G. Это как раз случай поставленных в [39] вопросов В.Л. Попова о корнях аффинной группы Кремоны. В первом из них требовалось найти все корни и корневые векторы группы алгебраических преобразований аффинного пространства, сохраняющих объём. Ответ был дан А. Льендо в [33].

Теорема. [33, Theorem 1] Множество корней группы $\mathrm{Aut}^*_{\mathbb{K}}\,\mathbb{K}^{[n]} = \{\gamma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}\,\mathbb{K}^{[n]} \mid \det\left(\frac{\partial\gamma(x_j)}{\partial x_i}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 1\}$ по отношению к максимальному тору $T = \{\gamma \in \mathrm{Aut}^*_{\mathbb{K}}\,\mathbb{K}^{[n]} \mid \gamma(x_i) = t_i x_i,\, t_i \in \mathbb{K},\, \prod\limits_{i=1}^{n} t_i = 1\}$ имеет вид

$$\left\{\lambda\, x^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_i} \;\mid\; \lambda \in \mathbb{K}^{\times}, i \in \{1, \ldots, n\}, \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}, \alpha_i = 0\right\}.$$

Корнем, соответствующим $\lambda\, x^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_i}$, является характер $\chi_{i,\alpha} : T \to \mathbb{K}^{\times}$, заданный $\chi_{i,\alpha}(\gamma) = t_i^{-1}\prod\limits_{j=1}^{n} t_j^{\alpha_j}$.

Доказательство Льендо основано на явном вычислении комбинаторных данных для аффинного пространства с $\mathbb{A}^n$ с действием тора T и использовании общего описания однородных ЛНД горизонтального типа на многообразиях с действием тора сложности один. Идея ограничения корней позволила нам дать другое, вполне элементарное, доказательство этого факта.

При изучении ограничения корней естественно возникают следующие вопросы.

(1) Пусть e — корень аффинного T-многообразия. Сколько корневых векторов соответствуют e?

(2) Пусть X — аффинное $\mathbb{T}$-многообразие, $T \subset \mathbb{T}$ — подтор и e — некоторый T-корень X. Сколько $\mathbb{T}$-корней при ограничении на T совпадают с e?

(3) Являются ли все T-однородные ЛНД степени e также $\mathbb{T}$-однородными?

На торических многообразиях каждому корню с точностью до пропорциональности соответствует только один корневой вектор. Корневые векторы вертикального типа фиксированной степени образуют векторное простанство (возможно, бесконечномерное). Для корневых векторов горизонтального типа полный ответ на вопрос (1) неизвестен даже для действий тора сложности один. Теорема 2.13 показывает, что если T-корень e является ограничением только одного $\mathbb{T}$-корня $\widehat{e}$, то всякое T-однородное ЛНД степени e также $\mathbb{T}$-однородно и корню e соответствует столько же корневых векторов, сколько и $\widehat{e}$.

В разделе 2.4 мы исследуем случай, когда многообразие X является аффинным торическим, а подтор T в торе $\mathbb{T}$, действующем с открытой орбитой, имеет коразмерность один. Пусть N — решётка однопараметрических подгрупп в $\mathbb{T}$, торическое многообразие задаётся конусом $\sigma_X \subset N_{\mathbb{Q}}$ и подтору T соответствует гиперплоскость $\Gamma_T \subset N_{\mathbb{Q}}$. Ответы на вопросы (1)—(3) зависят от взаимного расположения σ_X и Γ_T. В разделе 2.5 мы полностью описываем отображение корней для аффинных торических поверхностей. Отметим, что аффинные поверхности с $\mathbb{C}^{\times}$-действиями и ЛНД на них ранее изучались в работах [23] и [24].

В главе 3 диссертации изучаются пополнения коммутативных групп коранга один и однородные ЛНД на невырожденных аффинных квадриках с действием тора сложности один.

В качестве аналога торической геометрии можно рассматривать теорию локально транзитивных $\mathbb{G}_a^n$-действий. В работе Б. Хассетта и Ю. Чинкеля [27] было установлено соответствие между такими действиями и локальными коммутативными конечномерными алгебрами с фиксированной системой порождающих. Естественно пытаться построить теорию локально транзитивных действий для смешанного случая, то есть для групп $T \times (\mathbb{G}_a)^r$, где T — алгебраический тор. В разделе 3.1 описываются полные вложения группы $\mathbb{G}_n = T \times \mathbb{G}_a$. Оказывается, что все они являются торическими многообразиями и имеют лишь конечное число $\mathbb{G}_n$-орбит. Локально транзитивные действия группы $\mathbb{G}_n$ на многообразии также будем называть $\mathbb{G}_n$-структурами. Следующая теорема получена в совместной работе автора с И.В. Аржанцевым.

Теорема 3.12 [44, теорема 2.11] Пусть X — полное нормальное алгебраическое многообразие. Тогда

(1) если X снабжено регулярным локально транзитивным действием группы $\mathbb{G}_n$, то оно является торическим;

(2) всякая $\mathbb{G}_n$-структура на X задаётся некоторым корнем Демазюра его веера как торического многообразия. Обратно, всякий корень Демазюра веера торического многообразия определяет $\mathbb{G}_n$-структуру;

(3) всякая $\mathbb{G}_n$-структура на X имеет конечное число орбит;

(4) если X — торическое многообразие с действующим тором $\mathbb{T}$ и заданным с помощью корня Демазюра e локально транзитивным $\mathbb{G}_n$-действием, то две $\mathbb{T}$-орбиты $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ лежат в одной $\mathbb{G}_n$-орбите тогда и только тогда, когда для соответствующих конусов σ_1 и σ_2 выполнено условие: $e \mid_{\sigma_2} \leqslant 0$ и σ_1 — гипергрань конуса σ_2, выделяемая уравнением $\langle \cdot, e \rangle = 0$.

В разделе 3.1 найдены все однородные ЛНД на классе аффинных неторических невырожденных квадрик с действием тора сложности один. Из [10, Proposition 2.4.3] следует, что любая такая квадрика X может быть задана уравнением $x_1x_2 - x_3x_4 = 1$, $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2 = 0$ или $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0$

в аффинном пространстве $\mathbb{A}^4$, $\mathbb{A}^5$ или $\mathbb{A}^6$ соответственно. Заметим, что найденные для $X = \{x_1x_2 - x_3x_4 = 1\}$ однородные ЛНД вместе с тором соответствуют элементарным автоморфизмам в смысле работы [30]. Как доказано в [1] и [30], существует автоморфизм X, который не раскладывается в композицию элементарных. Таким образом, мы получаем пример многообразия, группа автоморфизмов которого не порождается максимальным тором и корневыми векторами. Для описания однородных ЛНД использована техника, разработанная в [31]. Для каждой из квадрик вычислены комбинаторные данные, что представляет самостоятельный интерес. Отметим, что изучение однородных ЛНД градуированных факториальных алгебр мотивировано тем, что кольца Кокса полных алгебраических многообразий являются такими алгебрами. $\mathbb{G}_a$-действие может быть спущено с кольца Кокса на само многообразие, если соответствующее ЛНД однородно и имеет степень ноль относительно характеристического квазитора. Таким образом, знание однородных ЛНД позволяет описать корневые подгруппы, которые вместе с максимальным тором порождают связную компоненту единицы группы автоморфизмов полного многообразия, являющуюся линейной алгебраической группой, если кольцо Кокса конечно порождено, см. [12].

Благодарности

Я искренне благодарна своему научному руководителю, доктору физико-математических наук профессору Ивану Владимировичу Аржанцеву за постановку задач и постоянную поддержку в течение всех лет обучения. Я также хочу поблагодарить профессора Эрнеста Борисовича Винберга и доцента Дмитрия Андреевича Тимашёва за полезные и интересные лекции, семинары и обсуждения. Благодарю заведующего кафедрой высшей алгебры, доктора физико-математических наук, профессора Виктора Николаевича Латышева и всех сотрудников кафедры за творческую атмосферу, которая способствует научной работе.

Глава 1

GIT-эквивалентность и диагональные действия

1.1. Орбитные конусы и GIT-веер

Пусть $G \subseteq GL(V)$ — аффинная алгебраическая группа, диагонально действующая на пространстве $\mathbb{V} = V^{m_1} \oplus (V^*)^{m_2}$, $m_1 + m_2 = m$. Через $\mathrm{Pic}_G(X)$ будем обозначать группу классов G-линеаризованных линейных расслоений на многообразии X. Известно, что для односвязной полупростой группы G любое линейное расслоение допускает ровно одну G-линеаризацию, см. [37, утверждение 1.4], поэтому группу $\mathrm{Pic}_G(X)$ можно отождествить с решёткой $\mathbb{Z}^m$. Обозначим через $P(a_1, \ldots, a_m) \subset \mathbb{K}[\mathbb{V}]$, $a_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, подпространство многочленов, однородных степени a_i по i-ой группе координат. Элементы пространства $P(a_1, \ldots, a_m)$ являются сечениями расслоения L, соответствующего точке $a = (a_1, \ldots, a_m)$ из группы Пикара $\mathrm{Pic}_G(X) \cong \mathbb{Z}^m$. С каждой точкой $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ свяжем открытое подмножество

$$U(a) = \{v \in \mathbb{V} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ F \in P(ka_1, \ldots, ka_m)^G : F(v) \neq 0\},$$

где $P(ka_1, \ldots, ka_m)^G$ — подпространство пространства $P(ka_1, \ldots, ka_m)$, состоящее из G-инвариантных функций. Множество $U(a)$ соответствует множеству полустабильных точек X^{ss}_L: элемент $(v_1, \ldots, v_{m_1}, l_1, \ldots, l_{m_2}) \in \mathbb{V}$ лежит в $U(a)$ тогда и только тогда, когда элемент $(\langle v_1\rangle, \ldots, \langle v_{m_1}\rangle, \langle l_1\rangle, \ldots, \langle l_{m_2}\rangle) \in X$, где $\langle v\rangle$ — порождённая вектором v прямая, лежит в X^{ss}_L.

Определение 1.1. Точки $a, b \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ называются *GIT-эквивалентными*, если $U(a) = U(b)$.

Пусть алгебра инвариантов $\mathbb{K}[\mathbb{V}]^G$ конечно порождена и $F_1, \ldots, F_r$ — её порождающие. Их можно считать полиоднородными многочленами полистепеней $a(1), \ldots, a(r) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$.

Определение 1.2. Конус $\Omega \subset \mathbb{Q}^m$, порождённый векторами $a(1), \ldots, a(r)$, называется *весовым конусом.*

Лемма 1.3. *Множество $U(a)$ непусто тогда и только тогда, когда $a \in \Omega$.*

Доказательство. Пусть $U(a) \neq \varnothing$. Тогда существуют такие $k \in \mathbb{N}$ и $F \in P(ka_1, \ldots, ka_m)^G$, что $F \not\equiv 0$. Многочлен F принадлежит алгебре $\mathbb{K}[F_1, \ldots, F_r]$, следовательно,

$$F = \sum_{p_1, \ldots, p_r} c_{p_1 \ldots p_r} F_1^{p_1} \ldots F_r^{p_r}.$$

При этом для любых таких $p_1, \ldots, p_r$, что $c_{p_1 \ldots p_r} \neq 0$, справедливо равенство $ka = p_1 a(1) + \ldots + p_r a(r)$. Следовательно, $a \in \Omega$.

Обратно, пусть $a \in \Omega$. Тогда

$$a = \lambda_1 a(1) + \ldots + \lambda_r a(r),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$. Домножив это равенство на общий знаменатель чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, получим

$$ka = c_1 a(1) + \ldots + c_r a(r),$$

где $k, c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Тогда $F_1^{c_1} \ldots F_r^{c_r} \in P(ka)^G$, $F_1^{c_1} \ldots F_r^{c_r} \not\equiv 0$. Следовательно, $U(a) \neq \varnothing$. □

Определение 1.4. Пусть $v \in \mathbb{V}$. *Орбитный конус* точки v — это рациональный конус

$$\omega(v) = \operatorname{cone}(a \in \mathbb{Z}^m \mid \exists F \in P(a)^G : F(v) \neq 0).$$

Лемма 1.5. *Справедливо равенство $\omega(v) = \operatorname{cone}(a(i) \mid F_i(v) \neq 0)$.*

Доказательство. Очевидно включение $\mathrm{cone}(a(i) \mid F_i(v) \neq 0) \subseteq \omega(v)$.

Пусть точка $a \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ такова, что существует многочлен

$$F = \sum_{p_1,\ldots,p_r} c_{p_1\ldots p_r} F_1^{p_1} \ldots F_r^{p_r} \in P(a)^G,$$

для которого $F(v) \neq 0$. Тогда найдется слагаемое $c_{p_1\ldots p_r} F_1^{p_1} \ldots F_r^{p_r}$, не обращающееся в ноль на v. При этом, если $p_i \neq 0$, то $F_i(v) \neq 0$. Значит, $a = p_{i_1} a(i_1) + \ldots + p_{i_s} a(i_s)$, где $F_{i_l}(v) \neq 0$, $l = 1, \ldots, s$. Следовательно, справедливо включение $\mathrm{cone}(a(i) \mid F_i(v) \neq 0) \supseteq \omega(v)$. □

Следствие 1.6. *Набор конусов* $\{\omega(v) \mid v \in \mathbb{V}\}$ *конечен.*

Утверждение 1.7. *Точки a и b GIT-эквивалентны тогда и только тогда, когда для любого $v \in \mathbb{V}$ либо $a \in \omega(v)$ и $b \in \omega(v)$, либо $a \notin \omega(v)$ и $b \notin \omega(v)$.*

Доказательство. Пусть $U(a) = U(b)$ и $a \in \omega(v)$. Тогда по лемме 1.5

$$a = \lambda_{i_1} a(i_1) + \ldots + \lambda_{i_s} a(i_s),$$

где $F_{i_j}(v) \neq 0$, $j = 1, \ldots, s$, $\lambda_j \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$. Домножив равенство на общий знаменатель чисел $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_s}$, получим

$$ka = p_1 a(i_1) + \ldots + p_s a(i_s),$$

где $k, p_1, \ldots, p_s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Тогда $F_{i_1}^{p_1} \ldots F_{i_s}^{p_s} \in P(ka)^G$ не обращается в ноль на v, следовательно, $v \in U(a) = U(b)$. Значит, существуют такие $l \in \mathbb{N}$ и $F \in P(lb)^G$, что $F(v) \neq 0$. Следовательно, $lb \in \omega(v)$ и $b \in \omega(v)$. Аналогично, если $b \in \omega(v)$, то и $a \in \omega(v)$.

Согласно предыдущему и определению конуса $\omega(v)$, $a \in \omega(v)$ тогда и только тогда, когда $v \in U(a)$. Если для любого $v \in \mathbb{V}$ либо $a \in \omega(v)$ и $b \in \omega(v)$, либо $a \notin \omega(v)$ и $b \notin \omega(v)$, то для любого $v \in \mathbb{V}$ либо $v \in U(a)$ и $v \in U(b)$, либо $v \notin U(a)$ и $v \notin U(b)$. Следовательно, $U(a) = U(b)$. □

Определение 1.8. *GIT-конусом* точки $a \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ называется конус

$$\tau(a) = \bigcap_{a \in \omega(v)} \omega(v).$$

Напомним, что конечный набор $\{\Psi_i\}$ конусов в $\mathbb{Q}^m$ называется *веером*, если каждая грань каждого конуса из $\{\Psi_i\}$ вновь попадает в $\{\Psi_i\}$, и пересечение любых двух конусов из $\{\Psi_i\}$ является гранью каждого из них.

Теорема 1.9. *Набор конусов $\Psi = \{\tau(a) : a \in \Omega\}$ является веером.*

Доказательство этой теоремы можно найти в работе [14, Theorem 2.11].

Веер Ψ называется *GIT-веером.* Как показывает предложение 1.7, классами GIT-эквивалентности являются относительные внутренности конусов GIT-веера.

Рассмотрим действие тора $T = (\mathbb{C}^\times)^m$ на пространстве $\mathbb{V}$:

$$t \circ (v_1, \ldots, v_{m_1}, l_1, \ldots, l_{m_2}) = (t_1 v_1, \ldots, t_{m_1} v_{m_1}, s_1 l_1, \ldots, s_{m_2} l_{m_2}),$$

где $t = (t_1, \ldots, t_{m_1}, s_1, \ldots, s_{m_2}) \in T$, $(v_1, \ldots, v_{m_1}, l_1, \ldots, l_{m_2}) \in \mathbb{V}$. Такое действие коммутирует с действие группы G, поэтому оно индуцирует действие T на категорном факторе $\mathbb{V}/\!/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\mathbb{V}]^G$.

Рассмотрим точку $v \in \mathbb{V}$. Несложно заметить связь между размерностями орбитного конуса $\omega(v)$ и стабилизатора $T_{\pi(v)}$ в торе T, где $\pi(v)$ — образ точки v относительно мофизма факторизации $\pi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}/\!/G$. А именно,

$$\dim \omega(v) + \dim T_{\pi(v)} = \dim T.$$

Отметим, что наше определение орбитного конуса совпадает с определением [14, Definition 2.1] для действия T на $\mathbb{V}/\!/G$.

1.2. Построение веера для действия группы $\mathrm{SO}(V)$

Рассмотрим случай $G = \mathrm{SO}(V)$, $\dim V \geqslant 3$. Обозначим через $(.,.)$ невырожденную симметрическую билинейную форму, сохраняемую группой $\mathrm{SO}(V)$. Поскольку с помощью неё можно отождествить V и V^*, будем считать, что $m_2 = 0$, $m = m_1$ и $\mathbb{V} = V^m$. Построим GIT-веер для диагонального действия группы $\mathrm{SO}(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^m$.

Алгебра инвариантов $\mathbb{C}[V^m]^{\mathrm{SO}(V)}$ порождается функциями $u_{ij} = (v_i, v_j)$, где $(v_1, \ldots, v_m) \in V^m$, см. [4, § 9.3]. Значит, базисные веса (т. е. полистепени образующих алгебры инвариантов) имеют вид: $(0, \ldots, 0, \underbrace{2}_{i}, 0, \ldots, 0)$ и $(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \ldots, 0)$, $i, j = 1, \ldots, m$. Морфизм факторизации $\pi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}/\!/G$ отображает вектор $(v_1, \ldots, v_m)$ в симметрическую матрицу $((v_i, v_j))_{i,j=1}^m$.

Обозначим координаты в пространстве $\mathbb{Q}^m$, содержащем GIT-веер, через $x_1, \ldots, x_m$.

Ясно, что весовой конус задаётся неравенствами

$$x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m.$$

Утверждение 1.10. *Любой $(m-1)$-мерный орбитный конус, не лежащий на границе весового конуса Ω, лежит в одной из гиперплоскостей*

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_j, \tag{1.2.1}$$

где $I, J \subset \{1, \ldots, m\}$, $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$, $I \cap J = \varnothing$.

Доказательство. Пусть тор $T = (\mathbb{C}^\times)^m$ действует на $\mathbb{V}$: $t \circ (v_1, \ldots, v_m) = (t_1 v_1, \ldots, t_m v_m)$. Тогда $t \circ (v_i, v_j) = t_i t_j (v_i, v_j)$, и орбитный конус точки $\xi = (v_1, \ldots, v_m)$ имеет размерность $m-1$ в точности тогда, когда стабилизатор $T_{\pi(\xi)}$ точки $\pi(\xi)$ одномерен.

Построим граф Γ_ξ. Его вершинами будут точки $v_1, \ldots, v_m$. Ребрами соединим только такие v_i и v_j, что $(v_i, v_j) \neq 0$. Если v_i и v_j соединены ребром, то для любого $t \in T$, лежащего в стабилизаторе, выполняется условие $t_i = t_j^{-1}$.

Разобьём граф Γ_ξ на компоненты связности $\Gamma_\xi = \Gamma_1 \sqcup \ldots \sqcup \Gamma_l$. Если в Γ_k есть петля или цикл нечётной длины, то для всех таких i, что $v_i \in \Gamma_k$, условие на стабилизатор имеет вид $t_i^2 = 1$. В противном случае все вершины, принадлежащие Γ_k, разбиваются на две группы: для одних $t_i = s_k$, для других $t_i = (s_k)^{-1}$, где $s_k \in \mathbb{K}^\times$. Стабилизатор будет одномерным только тогда, когда в графе Γ_ξ есть ровно одна компонента второго типа. Обозначим через I и J множества номеров вершин в первой и второй группах этой компоненты соответственно. Вес, отвечающий инварианту u_{ij}, может лежать в орбитном конусе точки ξ только в случаях $i \in I, j \in J$ или $j \in I, i \in J$. Таким образом, весь орбитный конус лежит в гиперплоскости (1.2.1). □

Из доказательства предложения 1.10 следует, что любой орбитный конус, размерность которого строго меньше, чем $m-1$, лежит в пересечении некоторых $(m-1)$-мерных орбитных конусов. Отсюда получаем, что две точки GIT-эквивалентны тогда и только тогда, когда они лежат в одних и тех же m-мерных и $(m-1)$-мерных орбитных конусах.

Теорема 1.11. [**45**, теорема 2] *Для диагонального действия группы $SO(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^m$ GIT-веер получается разбиением конуса*

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_m) \,|\, x_i \geqslant 0\}$$

гиперплоскостями

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_j, \tag{1.2.1}$$

где $I, J \subset \{1, \dots, m\}$, $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$, $I \cap J = \varnothing$.

Доказательство. Мы уже знаем, что достаточно найти все $(m-1)$-мерные орбитные конусы. Также известны уравнения гиперплоскостей, в которых они могут лежать. Осталось показать, что пересечение любой гиперплоскости (1.2.1) с конусом Ω является орбитным конусом некоторой точки ξ.

Возьмём $v_k = (1, \imath, 0, \dots, 0)$ для $k \in I$, $v_j = (1, -\imath, 0, \dots, 0)$ для $j \in J$, $v_l = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ для $l \notin I \cup J$. (Здесь $\imath^2 = -1$). Орбитный конус точки ξ порождён весами, отвечающими инвариантам u_{kj}, $k \in I$, $j \in J$ (размерность их линейной оболочки равна $|I| + |J| - 1$) и $u_{ll}, l \notin I \cup J$ (размерность линейной оболочки равна $m - |I| - |J|$). Таким образом, орбитный конус этой точки $(m-1)$-мерен и лежит в гиперплоскости (1.2.1). Осталось заметить, что веса, которыми он порождён, лежат в точности на тех же лучах, что и рёбра пересечения гиперплоскости с конусом Ω. □

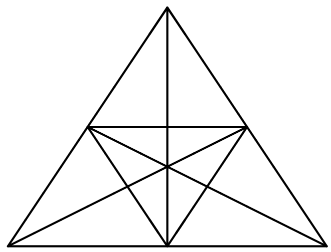
Пример 1.12. Рассмотрим действие группы SO_3 на пространстве $\mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3$.

GIT-веер лежит в 3-мерном пространстве и получается разбиением положительного октанта плоскостями

$$x_1 = x_2,\ x_1 = x_3,\ x_2 = x_3,$$

$$x_1 + x_2 = x_3,\ x_1 + x_3 = x_2,\ x_2 + x_3 = x_1.$$

Для наглядности изобразим сечение GIT-веера плоскостью $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.



Здесь имеется 43 класса GIT-эквивалентности, из них 12 трёхмерны, 21 двумерен и 10 одномерны.

1.3. Построение веера для действия группы $\mathrm{SL}(V)$

Рассмотрим случай $G = \mathrm{SL}(V)$. Построим GIT-веер для диагонального действия группы G на многообразии $\mathbb{P}(V)^{m_1} \times \mathbb{P}(V^*)^{m_2}$.

Алгебра инвариантов $\mathbb{C}[\mathbb{V}]^{\mathrm{SL}(V)}$, где $\mathbb{V} = V^{m_1} \oplus (V^*)^{m_2}$, порождается функциями $\det(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$, $\det(l_{j_1}, \ldots, l_{j_n})$, $l_j(v_i)$, где $(v_1, \ldots, v_{m_1}, l_1, \ldots, l_{m_2}) \in \mathbb{V}$, см. [4, § 9.3]. Значит, базисные веса имеют вид: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m_2})$, $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m_1}, \beta_1, \ldots, \beta_{m_2})$ и $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m_1}, \delta_1, \ldots, \delta_{m_2})$, где среди α_i и β_j по $n = \dim V$ единиц, среди ε_i и δ_j по одной единице, остальные — нули.

Сначала будем предполагать, что выполнено хотя бы одно из неравенств $m_1 \geqslant n$ или $m_2 \geqslant n$.

Обозначим координаты в пространстве $\mathbb{Q}^m$, содержащем GIT-веер, через $x_1, \ldots, x_{m_1}, y_1, \ldots, y_{m_2}$.

Утверждение 1.13. *Любой $(m-1)$-мерный орбитный конус лежит в одной из гиперплоскостей*

$$x_i = 0,\ i = 1, \dots, m_1, \tag{1.3.1}$$

$$y_j = 0,\ j = 1, \dots, m_2, \tag{1.3.2}$$

$$x_1 + \ldots + x_{m_1} = y_1 + \ldots + y_{m_2}, \tag{1.3.3}$$

$$(n-k)\sum_{i\in I} x_i - k\sum_{i\notin I} x_i = (n-k)\sum_{j\in J} y_j - k\sum_{j\notin J} y_j, \tag{1.3.4}$$

где $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $I \subset \{1, \dots, m_1\}$, $J \subset \{1, \dots, m_2\}$, *причём должно быть выполнено хотя бы одно из условий:* $k \leqslant |I| \leqslant m_1 - n + k$ *или* $k \leqslant |J| \leqslant m_2 - n + k$.

Доказательство. Если в наборе $\xi = (v_1, \dots, v_{m_1}, l_1, \dots, l_{m_2})$ есть нулевой вектор или нулевая функция, то орбитный конус лежит в гиперплоскости, задаваемой уравнением (1.3.1) или (1.3.2). Далее будем считать, что у вектора ξ нет нулевых компонент.

Пусть тор $T = (\mathbb{C}^\times)^m$, как и раньше, действует на $V^{m_1} \oplus (V^*)^{m_2}$. Тогда

$$t \circ l_j(v_i) = t_i s_j l_j(v_i),$$

$$t \circ \det(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) = t_{i_1} \dots t_{i_n} \det(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}),$$

$$t \circ \det(l_{j_1}, \dots, l_{j_n}) = s_{j_1} \dots s_{j_n} \det(l_{j_1}, \dots, l_{j_n}),$$

и орбитный конус точки $\xi = (v_1, \dots, v_{m_1}, l_1, \dots, l_{m_2})$ $(m-1)$-мерен в точности тогда, когда стабилизатор $T_{\pi(\xi)}$ точки $\pi(\xi)$ одномерен.

Построим граф Γ_ξ. Его вершинами будут точки $v_1, \dots, v_{m_1}, l_1, \dots, l_{m_2}$. Ребрами соединим только такие v_i и l_j, что $l_j(v_i) \neq 0$. Если вершины $v_{i_1}, v_{i_2}, l_{j_1}, l_{j_2}$ попали в одну компоненту связности графа Γ_ξ, то для принадлежности стабилизатору элемент тора t должен удовлетворять условиям $t_{i_1} = t_{i_2}$, $s_{j_1} = s_{j_2}$, $t_{i_1} = s_{j_1}^{-1}$.

Случай 1: $\dim\langle v_1, \dots, v_{m_1}\rangle < n$, $\dim\langle l_1, \dots, l_{m_2}\rangle < n$.

Здесь все определители равны нулю. Для одномерности стабилизатора необходимо, чтобы граф Γ_ξ был связен. В этом случае орбитный конус порождён векторами $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m_1}, \delta_1, \dots, \delta_{m_2})$, где среди ε_i и δ_j по одной единице, остальные — нули. Их линейная оболочка имеет размерность $m-1$ и все они лежат в гиперплоскости $x_1+\ldots+x_{m_1}=y_1+\ldots+y_{m_2}$, а, значит, и весь конус лежит в ней.

Случай 2: $\dim\langle v_1,\ldots,v_{m_1}\rangle = n$, $\dim\langle l_1,\ldots,l_{m_2}\rangle = n$.

Пусть $\det(v_{i_1},\ldots,v_{i_n})\neq 0$. Тогда $v_{i_1},\ldots,v_{i_n}$ — базис V и условием на стабилизатор будет равенство $t_{i_1}\ldots t_{i_n}=1$. Разложим все вектора v_i по этому базису. Если в разложении v_i присутствует v_{i_1}, то $t_i=t_{i_1}$, так как в этом случае $\det(v_i,v_{i_2},\ldots,v_{i_n})\neq 0$ и $t_it_{i_2}\ldots t_{i_n}=t_{i_1}t_{i_2}\ldots t_{i_n}=1$. Аналогично для остальных v_{i_j}, где $j=2,\ldots,n$. Таким образом V распадается в прямую сумму подпространств $V=V_{k_1}\oplus\ldots\oplus V_{k_r}$ размерностей $k_1,\ldots,k_r$, на каждом из которых тор действует умножением на $\bar t_k$ ($\bar t_k=t_{i_j}$ для некоторого j). Аналогично V^* разбивается в прямую сумму подпространств $V^*=W_{\widetilde{k}_1}\oplus\ldots\oplus W_{\widetilde{k}_q}$ размерностей $\widetilde{k}_1,\ldots,\widetilde{k}_q$, на каждое из которых стабилизатор действует умножением на $\bar s_{\widetilde{k}}$. Таким образом, для элемента t, лежащего в стабилизаторе, выполняются равенства $\bar t_1^{\,k_1}\ldots\bar t_r^{\,k_r}=1$, $\bar s_1^{\,\widetilde{k}_1}\ldots\bar s_q^{\,\widetilde{k}_q}=1$.

Построим новый граф Γ'_ξ, вершинами которого будут подпространства $V_{k_1},\ldots,V_{k_r}$, $W_{\widetilde{k}_1},\ldots,W_{\widetilde{k}_q}$. Ребрами соединим только такие V_k и $W_{\widetilde{k}}$, что существуют $v_i\in V_k$ и $l_j\in W_{\widetilde{k}}$, для которых $l_j(v_i)\neq 0$.

Обозначим через $H_1,\ldots,H_p$ компоненты связности графа Γ'_ξ. Пусть

$$V_i'=\bigoplus_{V_k\in H_i}V_k,\quad W_i'=\bigoplus_{W_{\widetilde{k}}\in H_i}W_{\widetilde{k}}.$$

Тогда стабилизатор действует на V_i' умножением на t_i', на W_i' — умножением на $(t_i')^{-1}$. Уравнения, задающие стабилизатор, имеют вид:

$$(t_1')^{\dim V_1'}\ldots(t_p')^{\dim V_p'}=1,$$

$$(t_1')^{\dim W_1'}\ldots(t_p')^{\dim W_p'}=1.$$

По построению H_i все линейные функции из W_i' обращаются в ноль на всех векторах из V_j' при $i\neq j$, следовательно, $\dim W_i'\leqslant\dim V_i'$. Но $\sum\limits_{i=1}^{p}\dim W_i'=\sum\limits_{i=1}^{p}\dim V_i'$, значит $\dim W_i'=\dim V_i'$.

Таким образом, стабилизатор задаётся уравнением

$$(t_1')^{\dim V_1'} \dots (t_p')^{\dim V_p'} = 1,$$

и имеет размерность один тогда и только тогда, когда $p = 2$.

Итак, пусть орбитный конус точки $\xi = (v_1, \dots, v_{m_1}, l_1, \dots, l_{m_2})$ имеет размерность $m-1$. Тогда $V = V_1 \oplus V_2$, $V^* = W_1 \oplus W_2$, $\dim V_1 = \dim W_1 = k$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$; любой вектор v_i лежит либо в V_1, либо в V_2, любая линейная функция l_j лежит либо в W_1, либо в W_2; любая линейная функция из W_j обращается в ноль на любом векторе из V_i при $i \neq j$.

Пусть I — множество номеров векторов v_i, лежащих в V_1, J — множество номеров линейных функций l_j, лежащих в W_1. Тогда орбитный конус точки ξ лежит в гиперплоскости, задаваемой уравнением

$$(n-k)\sum_{i\in I} x_i - k\sum_{i\notin I} x_i = (n-k)\sum_{j\in J} y_j - k\sum_{j\notin J} y_j,$$

и выполняются неравенства $k \leqslant |I| \leqslant m_1 - n + k$, $k \leqslant |J| \leqslant m_2 - n + k$.

Случай 3: $\dim\langle v_1, \dots, v_{m_1}\rangle = n$, $\dim\langle l_1, \dots, l_{m_2}\rangle < n$ или $\dim\langle v_1, \dots, v_{m_1}\rangle < n$, $\dim\langle l_1, \dots, l_{m_2}\rangle = n$.

В этом случае сразу получается одно уравнение на стабилизатор, и в графе Γ_ξ должно быть две компоненты связности. Получаем гиперплоскости, заданные уравнениями вида (1.3.4). $\square$

Утверждение 1.14. *Весовой конус Ω задаётся неравенствами*

$$x_l \geqslant 0, \quad l = 1, \dots, m_1,$$
$$y_p \geqslant 0, \quad p = 1, \dots, m_2,$$

(1.3.5)
$$(n-k)\Big(\sum_{j=1}^{m_2} y_j - \sum_{i\in I} x_i\Big) + k\sum_{i\notin I} x_i \geqslant 0,$$
$$(n-k)\Big(\sum_{i=1}^{m_1} x_i - \sum_{j\in J} y_j\Big) + k\sum_{j\notin J} y_j \geqslant 0,$$

где $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $I \subset \{1, \dots, m_1\}$, $J \subset \{1, \dots, m_2\}$, $|I| = |J| = k$.

Доказательство. Достаточно выбрать из гиперплоскостей (1.3.1)–(1.3.4) те, в которых лежат гиперграни конуса Ω. Ясно, что гиперплоскости (1.3.1) и (1.3.2) подходят. Гиперплоскость (1.3.3) пересекает внутренность конуса Ω: веса $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m_2})$, $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m_1}, \beta_1, \ldots, \beta_{m_2})$ лежат по разные стороны от неё.

Рассмотрим уравнение (1.3.4). Пусть сначала $0 < |I| < m_1$, $0 < |J| < m_2$. Возьмём $i_1 \in I, i_2 \notin I, j_1 \in J$, $j_2 \notin J$. Веса, отвечающие инвариантам $l_{j_2}(v_{i_1})$ и $l_{j_1}(v_{i_2})$, лежат по разные стороны от гиперплоскости.

Теперь возьмём $|J| = m_2$. Если $|I| > k$, то найдутся номера $i_1, \ldots, i_{k+1} \in I$, $i_{k+2}, \ldots, i_n \notin I$. Веса, отвечающие инвариантам $\det(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$ и $l_1(v_{i_n})$, лежат по разные стороны от гиперплоскости. При $|I| = k$ получаем неравенства (1.3.5).

Случаи $|I| = 0, m_1$ и $|J| = 0$ разбираются аналогично. $\square$

Из доказательства предложения 1.14 следует, что гиперплоскости (1.3.3) и (1.3.4) пересекают внутренность весового конуса, а также, что любой орбитный конус, размернось которого меньше $m - 1$, лежит в пересечении некоторых $(m-1)$-мерных орбитных конусов. Отсюда получаем, что две точки GIT-эквивалентны тогда и только тогда, когда они лежат в одних и тех же m-мерных и $(m-1)$-мерных орбитных конусах.

Теорема 1.15. [**45**, теорема 3]*Для диагонального действия группы $SL(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^{m_1} \times \mathbb{P}(V^*)^{m_2}$ (m_1 или $m_2 \geqslant n = \dim V$) GIT-веер получается разбиением конуса Ω, заданного неравенствами* (1.3.5)*, гиперплоскостями*

$$x_1 + \ldots + x_{m_1} = y_1 + \ldots + y_{m_2}, \tag{1.3.3}$$

$$(n-k)\sum_{i \in I} x_i - k \sum_{i \notin I} x_i = (n-k)\sum_{j \in J} y_j - k \sum_{j \notin J} y_j, \tag{1.3.4}$$

где $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $I \subset \{1, \ldots, m_1\}$, $J \subset \{1, \ldots, m_2\}$, причём должно быть выполнено хотя бы одно из условий: $k \leqslant |I| \leqslant m_1 - n + k$ или $k \leqslant |J| \leqslant m_2 - n + k$.

Доказательство. Мы уже знаем уравнения гиперплоскостей, в которых могут лежать $(m-1)$-мерные орбитные конусы. Осталось показать, что пересечение Π любой гиперплоскости (1.3.3) и (1.3.4) с конусом Ω является орбитным конусом некоторой точки ξ.

Для случая гиперплоскости (1.3.3) можно взять орбитный конус точки $\xi = (e_1, \ldots, e_1, e^1, \ldots, e^1)$. Он лежит в гиперплоскости и имеет размерность $m-1$. Заметим, что неравенства

$$(n-k)\Big(\sum_{j=1}^{m_2} y_j - \sum_{i\in I} x_i\Big) + k\sum_{i\notin I} x_i \geqslant 0 \ \text{ и}$$
$$(n-k)\Big(\sum_{i=1}^{m_1} x_i - \sum_{j\in J} y_j\Big) + k\sum_{j\notin J} y_j \geqslant 0,$$

для точек гиперплоскости (1.3.3) превращаются в неравенства

$$\sum_{i\notin I} x_i \geqslant 0 \ \text{ и } \ \sum_{j\notin J} y_j \geqslant 0.$$

Следовательно, конус Π на самом деле является пересечением гиперплоскости (1.3.3) с положительным ортантом. Осталось заметить, что веса, которыми порождён орбитный конус $\omega(\xi)$, лежат в точности на тех же лучах, что и рёбра конуса Π.

Разберём случай гиперплоскости (1.3.4), обозначим её Γ. Без ограничения общности можно считать, что уравнение (1.3.4) имеет вид

$$(n-k)\sum_{i=1}^{|I|} x_i - k\sum_{i=|I|+1}^{m_1} x_i = (n-k)\sum_{j=1}^{|J|} y_j - k\sum_{j=|J|+1}^{m_2} y_j,$$

где $k \leqslant |I| \leqslant m_1 - n + k$.

Орбитный конус $\omega(\xi)$ точки

$$\xi = (e_1, \ldots, e_k, \underbrace{e_k, \ldots, e_k}_{|I|-k}, e_{k+1}, \ldots, e_n, \underbrace{e_n, \ldots, e_n}_{m_1+k-|I|-n},$$
$$\underbrace{e^1 + \ldots + e^k, \ldots, e^1 + \ldots + e^k}_{|J|}, \underbrace{e^{k+1} + \ldots + e^n, \ldots, e^{k+1} + \ldots + e^n}_{m_2-|J|})$$

имеет размерность $m-1$ и лежит в гиперплоскости Γ. Ясно, что он лежит в Π. Надо проверить обратное включение.

Пусть $A = (x_1, \ldots, x_{m_1}, y_1, \ldots, y_{m_2}) \in \Pi$. Обозначим вес, отвечающий инварианту $l_j(v_i)$, через ε_{ij}, а инварианту $\det(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$ — через $\lambda_{i_1 \ldots i_n}$. Тогда

$$A = (x_1 - \sum_{j=2}^{|J|} y_j - \alpha)\varepsilon_{11} + \sum_{i=2}^{k}(x_i - \alpha)\varepsilon_{i1} + \sum_{i=k+1}^{|I|} x_i\varepsilon_{i1} +$$

$$+ (x_{|I|+1} - \sum_{j=|J|+2}^{m_2} y_j - \alpha)\varepsilon_{|I|+1\,|J|+1} + \sum_{i=|I|+2}^{|I|+n-k}(x_i - \alpha)\varepsilon_{i\,|J|+1} +$$

$$+ \sum_{i=|I|+n-k+1}^{m_1} x_i\varepsilon_{i\,|J|+1} + \sum_{j=2}^{|J|} y_j\varepsilon_{1j} + \sum_{j=|J|+2}^{m_2} y_j\varepsilon_{|I|+1\,j} + \alpha\lambda_{1\ldots k\,|I|+1\ldots|I|+n-k},$$

где $\alpha = \frac{1}{k}(\sum_{i=1}^{|I|} x_i - \sum_{j=1}^{|J|} y_j)$. Положительность коэффициентов в этом разложении гарантируется неравенствами (1.3.5). Тем самым, $A \in \omega(\xi)$ и Π лежит в $\omega(\xi)$. Значит, Π совпадает с $\omega(\xi)$. Теорема доказана. □

Теперь рассмотрим случай, когда $m_1 < n$ и $m_2 < n$. В отличие от предыдущих случаев здесь весовой конус имеет размерность $m - 1$.

Теорема 1.16. [**45**, теорема 4] *Для диагонального действия группы $SL(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^{m_1} \times \mathbb{P}(V^*)^{m_2}$ ($m_1, m_2 < n = \dim V$) GIT-веер получается разбиением конуса*

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_{m_1}, y_1, \ldots, y_{m_2}) | x_1 + \ldots + x_{m_1} = y_1 + \ldots + y_{m_2};\ x_i, y_j \geqslant 0\}$$

гиперплоскостями

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} y_j, \tag{1.3.6}$$

где $I \subset \{1, \ldots, m_1\}$, $J \subset \{1, \ldots, m_2\}$, $I \neq \varnothing, \{1, \ldots, m_1\}$, $J \neq \varnothing, \{1, \ldots, m_2\}$.

Доказательство. В данном случае весовой конус порождается весами, отвечающими инвариантам $l_j(v_i)$. Ясно, что он лежит в конусе Ω из условия теоремы. С другой стороны, рёбра конуса Ω — это в точности порождающие весового конуса.

Чтобы найти $(m-2)$-мерные орбитные конусы, как и раньше построим граф Γ_ξ для каждого вектора ξ. Теперь нам надо, чтобы стабилизатор $T_{\pi(\xi)}$ имел размерность два. Это выполняется, когда граф Γ_ξ имеет две компоненты связности. Орбитный конус $\omega(\xi)$ в этом случае лежит в пересечении весового конуса Ω и гиперплоскости (1.3.6), где I и J — множества номеров тех v_i и l_j, которые попали в какую-то из компонент связности графа Γ_ξ.

Осталось доказать, что пересечение конуса Ω с гиперплоскостью (1.3.6) является орбитным конусом некоторого вектора ξ. Для этого достаточно рассмотреть вектор $(v_1, \ldots, v_{m_1}, l_1, \ldots, l_{m_2})$, где $v_i = e_1$, $l_j = e^1$, если $i \in I, j \in J$ и $v_i = e_2, l_j = e^2$, если $i \notin I, j \notin J$. Теорема доказана. $\square$

Глава 2

Отображение ограничения корней

2.1. Однородные локально нильпотентные дифференцирования

В данном разделе мы напомним результаты работ [8] и [31], которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Напомним, что *алгебраическим тором* называется алгебраическая группа, изоморфная $\mathbb{K}^\times \times \ldots \times \mathbb{K}^\times$, где $\mathbb{K}^\times$ — мультипликативная группа поля $\mathbb{K}$. *Характером* тора называется всякий его алгебраический гомоморфизм в группу $\mathbb{K}^\times$. Характеры тора с естественной операцией образуют решётку, то есть конечно порождённую свободную абелеву группу.

Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие, $A = \mathbb{K}[X]$ — алгебра регулярных функций на нём, T — алгебраический тор, эффективно действующий на X и M — решётка характеров тора T. Как правило, мы будем рассматривать M как абстрактную решётку и обозначать её элементы строчными латинскими буквами, например m. Когда надо будет подчеркнуть, что речь идёт о функции на торе, вместо m мы будем писать χ^m. Обозначим через N дуальную к M решётку: $N = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$. Она реализуется как решётка однопараметрических подгрупп в T. Между M и N существует невырожденное спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle : N \times M \to \mathbb{Z}$, определённое по правилу $\langle n, m \rangle = n(m)$, где $n \in N = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$ и $m \in M$. Пусть $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ и $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ — ассоциированные с M и N соответственно рациональные векторные пространства. Спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$ продолжается на $N_{\mathbb{Q}} \times M_{\mathbb{Q}}$. Хорошо известно, что T-действия на X находятся во взаимно однозначном соответствии с M-градуировками на A. На самом деле алгебра A градуирована полугруппой целых точек в некотором выпуклом полиэдральном конусе $\omega \subseteq M_{\mathbb{Q}}$ (достаточно рассмотреть конус, порождённый элементами M, которым соответствуют ненулевые компоненты градуировки). Таким образом,

$$A = \bigoplus_{m \in \omega_M} A_m \chi^m,$$

где $\omega_M = \omega \cap M$. Элементы $f \in A$, лежащие в подпространстве A_m, мы будем называть *однородными степени* m и писать $\deg f = m$.

Дифференцирование ∂ алгебры A называется *локально нильпотентным* (сокр. ЛНД), если для всякого элемента $f \in A$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $\partial^n(f) = 0$. Заметим, что для ЛНД ∂ отображение $\varphi_\partial : \mathbb{G}_a \times A \to A$, $\varphi_\partial(t, \partial) = \exp(t\partial)(f)$, определяет действие аддитивной группы поля $\mathbb{G}_a$ на A. Оказывается, что любое регулярное $\mathbb{G}_a$-действие на $X = \operatorname{Spec} A$ получается таким образом, см., например, [25, §1.5]. Дифференцирование ∂ градуированной алгебры A называется *однородным*, если оно переводит однородные элементы в однородные. Если $f, h \in A \setminus \ker \partial$ — некоторые однородные элементы, то $\partial(fh) = f\partial(h) + \partial(f)h$ — снова однороден, и следовательно, разность $\deg \partial(f) - \deg f = \deg \partial(h) - \deg h$ не зависит от выбора однородного элемента, не лежащего в ядре. Она называется *степенью* однородного дифференцирования ∂ и обозначается $\deg \partial$. Нетрудно видеть, что ЛНД алгебры $A = \mathbb{K}[X]$ однородно тогда и только тогда, когда соответствующее $\mathbb{G}_a$-действие нормализуется тором T в группе автоморфизмов $\operatorname{Aut}(X)$.

Следующие понятия были введены В.Л. Поповым в [39].

Определение 2.1. Ненулевое ЛНД ∂ алгебры A называется *корневым вектором* группы $\operatorname{Aut}_{\mathbb{K}} A$ относительно T, если существует такой нетривиальный характер χ тора T, что

$$t \circ \partial \circ t^{-1} = \chi(t)\partial \quad \forall\, t \in T. \tag{2.1.1}$$

При этом характер χ называется *корнем* группы $\operatorname{Aut}_{\mathbb{K}} A$ относительно T, соответствующим ∂.

Как мы сейчас увидим, для аффинных градуированных алгебр понятия корневого вектора и корня эквивалентны соответственно понятиям однородного ЛНД и его степени. Далее мы будем пользоваться обеими терминологиями.

Лемма 2.2. *Локально нильпотентное дифференцирование ∂ является корневым вектором тогда и только тогда, когда оно однородно. При этом корнем, соответствующим ∂, является его степень.*

Доказательство. Сначала предположим, что ЛНД ∂ является корневым вектором. Пусть $a \in A$ — однородный элемент. Тогда под действием тора a умножается на некоторый характер λ. Из (2.1.1) следует, что $t \circ \partial(a) = \chi(t)\partial(t \circ a) = (\chi + \lambda)(t)\partial(a)$ для всех $t \in T$. Значит, ∂ однородно степени χ. Обратно, пусть ∂ однородно степени χ. Тогда для однородного элемента $a \in A$, умножаемого тором на характер λ, справедливо

$$t \circ \partial \circ t^{-1}(a) = (-\lambda)(t)t \circ \partial(a) = (-\lambda + \chi + \lambda)(t)\partial(a) = \chi(t)\partial(a).$$

Отсюда следует, что выполнено (2.1.1) и ∂ является корневым вектором. $\square$

Любое дифференцирование алгебры $\mathbb{K}[X]$ продолжается до дифференцирования поля отношений $\mathbb{K}(X)$ по правилу Лейбница. Будем говорить, что однородное ЛНД ∂ имеет *вертикальный тип*, если $\partial(\mathbb{K}(X)^T) = 0$, и *горизонтальный тип* в противном случае. Другими словами, ∂ имеет вертикальный тип тогда и только тогда, когда орбиты общего положения соответствующего $\mathbb{G}_a$-действия на X содержатся в замыканиях T-орбит.

Предположим на время, что X — аффинное торическое многообразие, то есть нормальное аффинное многообразие, на котором тор T действует с открытой орбитой. В этом случае

$$A = \mathbb{K}[X] = \bigoplus_{m \in \omega_M} \mathbb{K}\chi^m = \mathbb{K}[\omega_M]$$

— полугрупповая алгебра, см., например, [18] или [26]. Напомним, что для конуса $\omega \subset M_{\mathbb{Q}}$ *дуальный* к нему конус определяется следующим образом

$$\sigma = \{n \in N_{\mathbb{Q}} \mid \langle n, p \rangle \geqslant 0 \;\; \forall p \in \omega\}.$$

Обозначим через $\sigma(1)$ множество рёбер конуса σ и через n_ρ — примитивный вектор решётки на ребре ρ. Для $\rho \in \sigma(1)$ определим множество

$$S_\rho := \{e \in M \mid \langle n_\rho, e\rangle = -1 \text{ and } \langle n_{\rho'}, e\rangle \geqslant 0 \ \ \forall\, \rho' \in \sigma(1),\ \rho' \neq \rho\}.$$

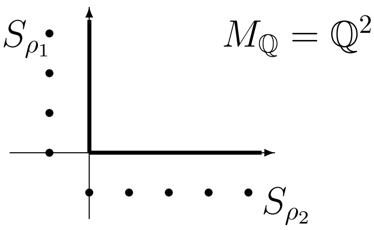
Элементы множества $\mathfrak{R} := \bigsqcup\limits_\rho S_\rho$ называются *корнями Демазюра* конуса σ. Пусть $e \in S_\rho$. Можно проверить, что равенство

$$\partial_e(\chi^m) = \langle n_\rho, m\rangle \chi^{m+e}, \quad m \in \omega_M,$$

определяет однородное ЛНД алгебры A. На самом деле всякое однородное ЛНД на A имеет вид $\alpha\partial_e$ для некоторых $\alpha \in \mathbb{K}$ и $e \in \mathfrak{R}$, см. [31, Theorem 2.7]. Ясно, что всякое однородное ЛНД на торическом многообразии имеет вертикальных тип.

Пример 2.3. Рассмотрим аффинное пространство $X = \mathbb{A}^n$ с естественным действием тора $(\mathbb{K}^\times)^n$. Это торическое многообразие с конусом $\sigma = \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$, имеющим лучи $\rho_1 = \langle(1, 0, \ldots, 0)\rangle_{\mathbb{Q}_{\geqslant 0}}, \ldots, \rho_n = \langle(0, 0, \ldots, 0, 1)\rangle_{\mathbb{Q}_{\geqslant 0}}$. Дуальный конусом ω также будет $\mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$. В данном случае

$$S_{\rho_i} = \{(e_1, \ldots, e_{i-1}, -1, e_{i+1}, \ldots, e_n) \mid e_j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}.$$



Введём обозначения $x_1 = \chi^{(1,0,\ldots,0)}, \ldots, x_n = \chi^{(0,\ldots,0,1)}$. Алгебра $\mathbb{K}[X]$ порождается функциями $x_1, \ldots, x_n$, и однородное ЛНД, соответствующее корню $e = (e_1, \ldots, e_n) \in S_{\rho_i}$, имеет вид

$$\partial_e = x_1^{e_1} \ldots x_{i-1}^{e_{i-1}} x_{i+1}^{e_{i+1}} \ldots x_n^{e_n} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Сложностью многообразия X, снабжённого действием тора T, называется коразмерность в X типичной T-орбиты. Торические многообразия имеют сложность ноль. Сейчас мы напомним описание T-многообразий сложности один из работы [8]. Пусть N и M — взаимно дуальные решётся со спариванием $\langle,\rangle$, а $\sigma \subseteq N_{\mathbb{Q}}$ и $\omega \subseteq M_{\mathbb{Q}}$ — взаимно дуальные конусы. Говорят, что полиэдр $\Delta \subseteq N_{\mathbb{Q}}$ имеет *конус рецессии* σ, если он может быть разложен в сумму Минковского ограниченного многогранника и конуса σ. Пусть C — гладкая кривая. Тогда *σ-полиэдральным дивизором* на C называется формальная сумма

$$\mathfrak{D} = \sum_{z \in C} \Delta_z \cdot z,$$

где полиэдры Δ_z имеют конус рецессии σ и только конечное число из них отлично от σ. Для каждого $m \in \omega_M$ можно рассмотреть $\mathbb{Q}$-дивизор $\mathfrak{D}(m) = \sum\limits_{z \in C} h_z(m) z$, где $h_z(m) := \min\limits_{p \in \Delta_z} \langle p, m \rangle$ — *опорная функция* многогранника Δ_z. Определим M-градуированную алгебру

$$A[C, \mathfrak{D}] = \bigoplus_{m \in \omega_M} A_m \chi^m,$$

где $A_m = H^0(C, \mathfrak{D}(m)) := \{f \in \mathbb{K}(X) \mid \operatorname{div} f + \mathfrak{D}(m) \geqslant 0\}$ и умножение определяется естественным образом.

Полиэдральный дивизор на гладкой кривой C называется *собственным*, если либо C аффинна, либо C проективна и полиэдр $\deg \mathfrak{D} := \sum\limits_{z \in C} \Delta_z$ является собственным подмножеством конуса σ.

Следующая теорема выражает основной результат работы [8] для случая действия тора сложности один.

Теорема 2.4. (1) *Пусть C — гладкая кривая и $\mathfrak{D}$ — собственный σ-полиэдральный дивизор на C. Тогда M-градуированная алгебра $A[C, \mathfrak{D}]$ — нормальная аффинная эффективно градуированная алгебра размерности Крулля* $\operatorname{rk} M + 1$. *Обратно, для каждой нормальной аффинной эффективно градуированной алгебры A найдётся такие гладкая кривая C и собственный σ-полиэдральный дивизор $\mathfrak{D}$ на ней, что A изоморфна $A[C, \mathfrak{D}]$.*

(2) *Многообразия* $\operatorname{Spec} A[C, \mathfrak{D}]$ *и* $\operatorname{Spec} A[C, \mathfrak{D}']$ *изоморфны тогда и только тогда, когда для каждой $z \in C$ существует такой элемент $v_z \in N$, что*

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' + \sum_z (v_z + \sigma) \cdot z,$$

и для всех $m \in \omega_M$ дивизор $\sum\limits_z \langle m, v_z \rangle \cdot z$ является главным.

Следствие 2.5. [**8**, Section 11] *Пусть $\mathfrak{D}$ — собственный σ-полиэдральный дивизор на гладкой кривой C. Многообразие* $\operatorname{Spec} A[C, \mathfrak{D}]$ *является торическим тогда и только тогда, когда либо $C = \mathbb{A}^1$ и носитель дивизора $\mathfrak{D}$ состоит не более чем из одной точки, либо $C = \mathbb{P}^1$ и носитель $\mathfrak{D}$ состоит не более чем из двух точек.*

Теперь опишем, следуя [13] и [31], однородные ЛНД алгебры $A = A[, \mathfrak{D}]$. Описание однородных ЛНД вертикального типа похоже на описание однородных ЛНД полугрупповых алгебр. Обозначим через $v_{1,z}, \ldots, v_{r_z,z}$ все вершины полиэдра Δ_z. Для каждого корня Демазюра e конуса σ рассмотрим $\mathbb{Q}$-дивизор D_e и пространство Φ_e, где

$$D_e = \sum_z \min_i\{\langle v_{i,z}, e\rangle\} \cdot z \quad \text{и} \quad \Phi_e = H^0(Y, D_e).$$

Можно показать, что для всякого $\varphi \in \Phi_e$ однородное локально нильпотентное $\mathbb{K}(C)$-дифференцирование $\partial_{e,\varphi} = \varphi\partial_e$ полугрупповой алгебры $\mathbb{K}(C)[\omega_M]$ сохраняет алгебру A. Более того, оказывается, что всякое однородное ЛНД алгебры A получается таким образом.

Теорема 2.6. [**31**, Theorem 2.4] *Пусть ∂ — однородное ЛНД вертикального типа алгебры $A = A[C, \mathfrak{D}]$, где $\mathfrak{D}$ — собственный σ-полиэдральный дивизор на гладкой кривой . Тогда найдутся такие корень Демазюра конуса σ и рациональная функция $\varphi \in \Phi_e$, что $\partial = \partial_{e,\varphi}|_A$.*

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.7. [**31**, Corollary 3.13] *Пусть C — гладкая кривая, σ — выпуклый полиэдральный конус, $\mathfrak{D} = \sum\limits_{z \in C} \Delta_z \cdot z$ — собственный σ-полиэдральный дивизор на C и $\rho \in \sigma(1)$ — ребро конуса σ. Тогда существует такой корень Демазюра $e \in S_\rho$, что пространство Φ_e имеет положительную размерность, в том и только в том случае, когда ребро ρ не пересекается с полиэдром $\sum\limits_{z \in C} \Delta_z$.*

Опишем однородные ЛНД алгебры $A = A[C, \mathfrak{D}]$, имеющие горизонтальный тип. Из существования однородного ЛНД на A следует, что кривая C

изоморфна либо $\mathbb{A}^1$, либо $\mathbb{P}^1$, см. [31, Lemma 3.15]. Зафиксируем гладкую кривую C, изоморфную $\mathbb{A}^1$ или $\mathbb{P}^1$, и собственный σ-полиэдральный дивизор $\mathfrak{D} = \sum\limits_{z\in C} \Delta_z \cdot z$ на ней. Выберем в каждом полиэдре Δ_z вершину v_z и точку z_0 на C. Если $C = \mathbb{P}^1$, то выберем ещё одну, отличную от z_0, точку z_∞ на C. Положим $C' = C$, если $C = \mathbb{A}^1$, и $C' = C \backslash \{z_\infty\}$, если $C = \mathbb{P}^1$.

Определение 2.8. Набор $\widetilde{\mathfrak{D}} = \{\mathfrak{D}, z_0; v_z, \forall z \in C\}$, если $C = \mathbb{A}^1$, и $\widetilde{\mathfrak{D}} = \{\mathfrak{D}, z_0, z_\infty; v_z, \forall z \in C'\}$, если $C = \mathbb{P}^1$, называется *раскрашенным σ-полиэдральным дивизором*, если

(1) точка $v_{\deg} := \sum\limits_{z\in C'} v_z$ является вершиной полиэдра $\deg \mathfrak{D}|_{C'} := \sum\limits_{z\in C'} \Delta_z$;
(2) при $z \in C' \backslash \{z_0\}$ вершина v_z лежит в решётке N.

Пусть $\widetilde{\mathfrak{D}}$ — раскрашенный σ-полиэдральный дивизор на C и $\Delta = \deg \mathfrak{D}|_{C'} - v_{\deg}$. Обозначим через $\widetilde{\sigma}$ конус в пространстве $(N \oplus \mathbb{Z})_{\mathbb{Q}}$, порождённый $(\Delta, 0)$ и $(v_{z_0}, 1)$, если $C = \mathbb{A}^1$, и $(\Delta, 0)$, $(v_{z_0}, 1)$ и $(\Delta_{z_\infty} + \Delta + v_{\deg} - v_{z_0}, -1)$, если $C = \mathbb{P}^1$. Пусть d — такое минимальное целое положительное число такое, $d \cdot v_{z_0} \in N$.

Определение 2.9. Пара $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e)$, где $e \in M$, называется *согласованной*, если

(1) существует такое $s \in \mathbb{Z}$, что $\widetilde{e} = (e, s) \in M \oplus \mathbb{Z}$ является корнем Демазюра конуса $\widetilde{\sigma}$, отвечающим ребру $\widetilde{\rho} = (d \cdot v_{z_0}, d)$;
(2) $\langle v, e\rangle \geqslant 1 + \langle v_z, e\rangle$ для каждого $z \in C' \backslash \{z_0\}$ и каждой вершины v, отличной от v_z, полиэдра Δ_z;
(3) $d \cdot \langle v, e\rangle \geqslant 1 + \langle v_{z_0}, e\rangle$ для каждой вершины v, отличной от v_{z_0}, полиэдра Δ_{z_0};
(4) если $C = \mathbb{P}^1$, то $d \cdot \langle v, e\rangle \geqslant -1 - d \cdot \sum\limits_{z\in Y'} \langle v_z, e\rangle$ для каждой вершины v полиэдра Δ_{z_∞}.

Теорема 2.10. [**13**, Theorem 1.10] *Пусть C — гладкая кривая, изоморфная $\mathbb{A}^1$ или $\mathbb{P}^1$, и $\mathfrak{D}$ — собственный σ-полиэдральный дивизор на ней. Однородные ЛНД горизонтального типа алгебры $A[C, \mathfrak{D}]$, рассматриваемые с* *точностью до умножения на константу, находятся во взаимно однозначном соответствии с согласованными парами* $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e)$.

Приведём точную формулу для однородного ЛНД горизонтального типа, соответствующего согласованной паре $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e)$. Без ограничения общности мы можем считать, что $z_0 = 0$ и $z_\infty = \infty$, если $C = \mathbb{P}^1$. Вторая часть Теоремы 2.4 позволяет нам также считать, что $v_z = \overline{0}$ для всех $z \in C'\backslash\{0\}$. Алгебра регулярных функций на C' является алгеброй многочленов от одной переменной $\mathbb{K}[t]$. Из доказательство [31, Theorem 3.28] следует, что однородное ЛНД горизонтального типа, соответствующее согласованной паре $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e)$, задаётся формулой

$$\partial(t^r\chi^m) = d(\langle v_0, m\rangle + r)t^{r+s}\chi^{m+e} \quad \forall \ (m,r) \in M \oplus \mathbb{Z}. \tag{2.1.2}$$

2.2. Ограничение корней

В этом разделе мы определим отображение ограничения корней и докажем его сюръективность. Нам понадобится следующия лемма о разложимости дифференцирования в сумму однородных.

Лемма 2.11. [**31**, Lemma 1.10] *Пусть A — аффинная M-градуированная алгебра. Любое дифференцирование ∂ алгебры A раскладывается в сумму*

$$\partial = \sum_{e\in M} \partial_e, \tag{2.2.1}$$

где ∂_e — однородное дифференцирование степени e. При этом выпуклая оболочка $\Delta(\partial) \subset M_{\mathbb{Q}}$ множества $\{e \in M \mid \partial_e \neq 0\}$ является многогранником. Если ∂ — ЛНД, то для каждой вершины e многогранника $\Delta(\partial)$ дифференцирование ∂_e является локально нильпотентным.

Доказательство. Для каждого однородного элемента $a \in A$ рассмотрим разложение его образа в сумму однородных $\partial(a) = \sum_{e\in M} a_{\deg(a)+e}$ (здесь нижний индекс означает степень элемента). Линейное отображение ∂_e на A, заданное на однородных элементах формулой $\partial_e(a) = a_{\deg(a)+e}$, является однородным дифференцированием степени e, и $\partial = \sum_{e\in M} \partial_e$. Поскольку A конечно порождена, множество $\{e \in M \mid \partial_e \neq 0\}$ конечно и его выпуклая оболочка $\Delta(\partial)$ является многогранником. Пусть e — вершина $\Delta(\partial)$, $a \in A$ — однородный элемент и $k \in \mathbb{N}$. Так как ke не может быть представлено в виде нетривиальной суммы, слагаемые которой лежат в $\Delta(\partial)$, однородная компонента степени $\deg(a) + ke$ элемента $\partial^k(a)$ равна $\partial_e^k(a)$. Отсюда следует, что ∂_e локально нильпотентно, если таковым является ∂. □

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $\mathbb{T}$ — алгебраический тор и $T \subseteq \mathbb{T}$ — подтор. Пусть $\mathbb{T}$ действует на некотором аффинном многообразии X. Рассмотрим ограничение этого действия на подтор T. Обозначим через $\mathfrak{R}_{\mathbb{T}}$ и $\mathfrak{R}_T$ множества корней группы $\operatorname{Aut}\mathbb{K}[X]$ относительно $\mathbb{T}$ и T соответственно. Ясно, что всякое $\mathbb{T}$-однородное ЛНД является T-однородным. Поэтому корректно следующее определение.

Определение 2.12. Отображение ограничения характеров $\pi : \mathfrak{R}_{\mathbb{T}} \to \mathfrak{R}_T$ называется *отображением ограничения корней.*

Оказывается, что всякий T-корень может быть получен ограничением некоторого $\mathbb{T}$-корня. Следующая теорема выражает основной результат данного раздела.

Теорема 2.13. [**46**, Theorem 1] *Пусть X — аффинное многообразие с регулярным действием тора $\mathbb{T}$ и $T \subseteq \mathbb{T}$ — подтор. Тогда отображение ограничения корней π сюръективно. Более того, если T-корень e является ограничением только одного $\mathbb{T}$-корня, то любое T-однородное ЛНД алгебры регулярных функций $\mathbb{K}[X]$ степени e также и $\mathbb{T}$-однородно.*

Доказательство. Пусть e — T-корень и ∂ — T-однородное ЛНД степени e. По лемме 2.11 ∂ раскладывается в сумму $\mathbb{T}$-однородных дифференцирований, некоторые из которых локально нильпотентны. Степень любого локально нильпотентного слагаемого является $\mathbb{T}$-корнем, ограничение которого на T равно e. Если e является ограничением ровно одного $\mathbb{T}$-корня, то в разложении ∂ может быть только одно слагаемое, а значит, ∂ само $\mathbb{T}$-однородно. □

При изучении отображения ограничения корней естественно возникают следующие вопросы.

(1) Пусть e — корень аффинного T-многообразия. Сколько корневых векторов соответствуют e?
(2) Пусть X — аффинное $\mathbb{T}$-многообразие, $T \subset \mathbb{T}$ — подтор и e — некоторый T-корень X. Сколько $\mathbb{T}$-корней при ограничении на T совпадают с e?
(3) Являются ли все T-однородные ЛНД степени e также и $\mathbb{T}$-однородными?

На торических многообразиях каждому корню с точностью до пропорциональности соответствует ровно один корневой вектор. Корневые векторы вертикального типа образуют векторное простанство (возможно, бесконечномерное). Для корневых векторов горизонтального типа полный ответ на вопрос (1) неизвестен даже для действий тора сложности один. Теорема 2.13 показывает, что если T-корень e является ограничением только одного $\mathbb{T}$-корня $\widehat{e}$, то всякое T-однородное ЛНД степени e также и $\mathbb{T}$-однородно и корню e соответствует столько же корневых векторов, сколько и $\widehat{e}$.

2.3. Действия подторов на торическом многообразии

Пусть X — аффинное торическое многообразие с действующим тором $\mathbb{T}$ и $T \subset \mathbb{T}$ — подтор коразмерности один. Исследуем вопросы (1) – (3) из раздела 2.2 в данном случае.

Пусть M и N — решётки характеров и однопараметрических подгрупп тора $\mathbb{T}$. Обозначим через $\sigma_X \subset N_{\mathbb{Q}}$ конус, определяющий торическое многообразие X, и через $\Gamma_T \subset N_{\mathbb{Q}}$ — гиперплоскость, порождённую однопараметрическими подгруппами тора $\mathbb{T}$, содержащимися в T. Мы знаем, что множество $\mathbb{T}$-корней многообразия X совпадает с множеством $\mathfrak{R}_{\mathbb{T}} = \coprod\limits_{\rho\in\sigma_X(1)} S_\rho$ корней Демазюра конуса σ_X. Пусть $\mathfrak{R}_T$ — множество T-корней и $\pi : \mathfrak{R}_{\mathbb{T}} \to \mathfrak{R}_T$ — отображение ограничения корней. Ответы на вопросы $1-3$ зависят от взаимного расположения σ_X и Γ_T.

Утверждение 2.14. *Пусть* $\sigma_X \cap \Gamma_T = \{0\}$. *Тогда отображение ограничения корней взаимно однозначно. В частности, каждому* T*-корню соответствует с точностью до пропорциональности ровно один корневой вектор, и всякое* T*-однородное ЛНД является* $\mathbb{T}$*-однородным.*

Доказательство. Пусть $\langle\cdot, m_T\rangle = 0$, где $m_T \in M$, — уравнение гиперплоскости Γ_T. Вектор m_T порождает ядро отображения ограничения характеров с $\mathbb{T}$ на T. Поскольку $\sigma_X \cap \Gamma_T = \{0\}$, можно считать, что $\langle n, m_T\rangle > 0$ для всех $n \in \sigma_X\backslash\{0\}$. Предположим, что ограничения $\mathbb{T}$-корней e_1 и e_2 на T совпадают и $e_1 - e_2 = \lambda m_T$, где $\lambda > 0$. Пусть ρ — такое ребро конуса σ_X, что $e_1 \in S_\rho$. Тогда $\langle n_\rho, e_1 - e_2\rangle = -1 - \langle n_\rho, e_2\rangle \leqslant 0$. С другой стороны, $\langle n_\rho, e_1 - e_2\rangle = \lambda\langle n_\rho, m_T\rangle > 0$. Полученное противоречие показывает, что отображение ограничения корней с $\mathbb{T}$ на T инъективно. По теореме 2.13 оно сюръективно и всякое T-однородное ЛНД алгебры $\mathbb{K}[X]$ является $\mathbb{T}$-однородным. □

Заметим, что в утверждении 2.14 подтор коразмерности один нельзя заметить на подтор произвольной коразмерности. Например, возьмём $X = \mathbb{A}^3$ с естественным действием тора $\mathbb{T} = (\mathbb{K}^\times)^3$ и $T = \{(t, t, t^{-1}) \mid t \in \mathbb{K}^\times\}$. Тогда прямая Γ_T, соответствующая подтору T, порождается вектором $(1, 1, -1)$, и $\sigma_X \cap \Gamma_T = \{0\}$, но отображение ограничения корней не биективно. Действительно, T-однородное ЛНД $\partial = x_2x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$ не является $\mathbb{T}$-однородным.

Рассмотрим другие случаи взаимного расположения конуса σ_X и гиперплоскости Γ_T. Сохраним при этом обозначения из доказательства утверждения 2.14. В частности, нормальный к гиперплоскости Γ_T вектор будем обозначать через m_T.

Утверждение 2.15. *Если гиперплоскость Γ_T пересекает внутренность конуса σ_X и не содержит его рёбер, то всякий T-корень является ограничением не более чем двух $\mathbb{T}$-корней.*

Доказательство. Предположим, что ограничения $\mathbb{T}$-корней $\widehat{e}_1 \in S_{\rho_1}$, $\widehat{e}_2 \in S_{\rho_2}$ и $\widehat{e}_3 \in S_{\rho_3}$ совпадают. Если $\rho_i = \rho_j$, то $\langle n_{\rho_i}, e_i - e_j \rangle = 0$ и луч ρ_i содержится Γ_T. Значит, $\rho_i \neq \rho_j$ при $i \neq j$. Без ограничения общности мы можем считать, что $\widehat{e}_1 - \widehat{e}_2 = \lambda m_T$ и $\widehat{e}_2 - \widehat{e}_3 = \mu m_T$, где $\lambda > 0$ и $\mu > 0$. Тогда $\lambda\langle n_{\rho_2}, m_T \rangle = 1 + \langle n_{\rho_2}, \widehat{e}_1 \rangle > 0$ и $\mu\langle n_{\rho_2}, m_T \rangle = -1 - \langle n_{\rho_2}, \widehat{e}_3 \rangle < 0$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Как мы увидим в разделе 2.5, T-корни, являющиеся ограничением двух $\mathbb{T}$-корней, действительно существуют. Перейдём к ситуации, когда гиперплоскость Γ_T содержит некоторые рёбра конуса σ_X.

Утверждение 2.16. *Предположим, что пересечение $\sigma_X \cap \Gamma_T$ является ненульмерной гранью конуса σ_X. Тогда*

a) $\pi(S_{\rho_1}) \cap \pi(S_{\rho_2}) = \varnothing$, *если* $\rho_1 \neq \rho_2$;

b) если ребро ρ не содержится в $\sigma_X \cap \Gamma_T$, то отображение $\pi|_{S_\rho} : S_\rho \to \pi(S_\rho)$ биективно;

c) если $\rho \subseteq \sigma_X \cap \Gamma_T$, то для всякого $e \in \pi(S_\rho)$ существует бесконечно много $\mathbb{T}$-корней из S_ρ, имеющих e своим ограничением, и корневые векторы, соответствующие e, образуют бесконечномерное векторное пространство.

Доказательство. $a), b)$ Если $\sigma_X \cap \Gamma_T$ является гранью конуса σ_X, то $\langle n, m_T \rangle \geqslant 0$ для всех $n \in \sigma_X$. Предположим, что $\widehat{e}_1 \in S_{\rho_1}$, $\widehat{e}_2 \in S_{\rho_2}$ и $\widehat{e}_1 - \widehat{e}_2 = \lambda m_T$, где $\lambda > 0$. Тогда $\lambda\langle n_{\rho_1}, m_T \rangle = -1 - \langle n_{\rho_1}, \widehat{e}_2 \rangle \leqslant 0$

и $\lambda\langle n_{\rho_2}, m_T\rangle = 1 + \langle n_{\rho_2}, \widehat{e}_1\rangle \geqslant 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $\rho_1 = \rho_2 \subseteq \Gamma_T \cap \sigma_X$.

c) Пусть $\widehat{e} \in S_\rho$, где $\rho \subseteq \Gamma_T \cap \sigma_X$. Вектор $\widehat{e} + \lambda m_T$ является корнем Демазюра в том и только том случае, когда он лежит в решётке и $\langle n_{\rho'}, \widehat{e}\rangle + \lambda\langle n_{\rho'}, m_T\rangle \geqslant 0$ для каждого $\rho' \neq \rho$. Значит, существует бесконечно много корней, ограничение которых равно ограничению $\widehat{e}$. Остаётся заметить, что если $\widehat{e}_1$ и $\widehat{e}_2$ принадлежат S_ρ, то соответствующие ЛНД коммутируют, и следовательно, их сумма — снова ЛНД. $\square$

Утверждение 2.17. *Пусть Γ_T пересекает внутренность конуса σ_X и содержит некоторые его рёбра. Тогда*

a) если $\rho \not\subset \sigma_X \cap \Gamma_T$, то всякий T-корень $e \in \pi(S_\rho)$ является ограничением не более чем двух $\mathbb{T}$-корней;

b) если $\rho \subset \sigma_X \cap \Gamma_T$, то всякий $e \in \pi(S_\rho)$ является ограничением некоторого конечного числа k_e $\mathbb{T}$-корней, существуют e с $k_e \geqslant 2$, и корневые векторы, соответствующие e, образуют k_e-мерное векторное пространство.

Доказательство. a) Предположим, что $e = \pi(\widehat{e}_1) = \pi(\widehat{e}_2)$, где $\widehat{e}_1 \in S_\rho$, $\widehat{e}_2 \in S_{\rho'}$, $\rho \not\subset \Gamma_T \cap \sigma_X$, и $\rho' \subset \Gamma_T \cap \sigma_X$. Тогда $\widehat{e}_1 - \widehat{e}_2 = \lambda m_T$ и, следовательно, $\langle n_{\rho'}, \widehat{e}_1\rangle = -1$. Получаем противоречие. Если $e \in \pi(S_{\rho_1}) \cap \pi(S_{\rho_2}) \cap \pi(S_{\rho_3})$, где $\rho_i \not\subset \sigma_X \cap \Gamma_T$, можно использовать те же аргументы, что в доказательстве утверждения 2.15.

b) Покажем, что всякий T-корень $e = \pi(\widehat{e})$, где $\widehat{e} \in S_\rho$ и $\rho \subset \Gamma_T \cap \sigma_X$, является ограничением конечного числа $\mathbb{T}$-корней. Как и выше, вектор $\widehat{e} + \lambda m_T$ является корнем Демазюра тогда и только тогда, когда он лежит в решётке M и $\langle n_{\rho'}, \widehat{e}\rangle + \lambda\langle n_{\rho'}, m_T\rangle \geqslant 0$ для всех $\rho' \neq \rho$. В данном случае существуют рёбра ρ' как с положительным, так и с отрицательным значением $\langle n_{\rho'}, m_T\rangle$. Следовательно, только конечное число значений λ удовлетворяет условиям. В заключение, возьмём такой корень $\widehat{e} \in S_\rho$, что $\langle n_{\rho'}, \widehat{e}\rangle \geqslant -\langle n_{\rho'}, m_T\rangle$ как только $\langle n_{\rho'}, m_T\rangle < 0$. Тогда $\widehat{e} + m_T$ является $\mathbb{T}$-корнем и $k_e \geqslant 2$ для $e = \pi(\widehat{e})$. $\square$

Проиллюстрируем предложение 2.17 на примере.

Пример 2.18. Рассмотрим $X = \mathbb{A}^3$ с естественным действием тора $\mathbb{T} = (\mathbb{K}^\times)^3$. Возьмём следующий подтор коразмерности один — $T = \{(s_1, s_1, s_2) \mid s_1, s_2 \in \mathbb{K}^\times\}$. В данном случае гиперплоскость Γ_T порождена векторами $(1,1,0)$ и $(0,0,1)$. Легко проверить, что

$$\mathfrak{R}_T = \{(a,b),(c,-1) \mid a \in \mathbb{Z}_{\geqslant -1},\, b,c \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\},$$

каждый корень (a,b) является ограничением двух $\mathbb{T}$-корней, и каждый корень $(c,-1)$ является ограничением $c+1$ $\mathbb{T}$-корня.

Итак, мы получили полное описание отображения ограничения корней в случае, когда пересечение $\sigma_X \cap \Gamma_T$ является гранью конуса σ_X. Если гиперплоскость Γ_T пересекает внутренность σ_X, ответы на вопросы (1) и (3) остаются неизвестными для T-корней $e \in \pi(S_{\rho_1}) \cap \pi(S_{\rho_2})$, где $\rho_1, \rho_2 \not\subset \Gamma_T$. Следующее утверждение даёт достаточное условие на Γ_T, при котором существует бесконечно много корневых векторов, соответствующих e. В разделе 2.5 мы показываем, что оно также является необходимым в случае, когда X — аффинная торическая поверхность.

Утверждение 2.19. *Предположим, что $e_1 \in S_{\rho_1}$, $e_2 \in S_{\rho_2}$, $\rho_1 \neq \rho_2$, $\pi(e_1) = \pi(e_2)$ и $\langle n_{\rho_1}, m_T\rangle = -1$. Тогда линейное отображение $\partial : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ заданное на порождающих χ^m, $m \in \omega_M$, следующим образом*

$$\partial\chi^m = \chi^{m+e_2}(\alpha\langle n_{\rho_1}, m\rangle\chi^{m_T} + \beta\langle n_{\rho_2}, m\rangle)(\alpha\chi^{m_T} - \beta\langle n_{\rho_2}, m_T\rangle)^{\langle n_{\rho_1}, e_2\rangle}, \tag{2.3.1}$$

является T-однородным ЛНД степени $\pi(e_1)$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Доказательство. По предположению, $e_1 - e_2 = (\langle n_{\rho_1}, e_2\rangle + 1)m_T$ и ∂ —

T-однородное дифференцирование на A. Прямое вычисление показывает, что

$$\partial^{k+1}\chi^m = \chi^{m+(k+1)e_2}(\alpha\chi^{m_T} - \beta\langle n_{\rho_2}, m_T\rangle)^{(k+1)\langle n_{\rho_1}, e_2\rangle}\sum_{j=0}^{k+1}\alpha^j\beta^{k-j+1}l_j^{(k+1)}\chi^{jm_T},$$

где $\qquad l_j^{(k+1)} = (\langle n_{\rho_1}, m\rangle - j + 1) l_{j-1}^{(k)} + (\langle n_{\rho_2}, m\rangle + j\langle n_{\rho_2}, m_T\rangle - k) l_j^{(k)}$, $l_1^{(1)} = \langle n_{\rho_1}, m\rangle$ и $l_0^{(1)} = \langle n_{\rho_2}, m\rangle$. Заметим, что $l_j^{(k)} = 0$ при $k \geqslant \langle n_{\rho_2}, m\rangle + d\langle n_{\rho_2}, m_T\rangle + 1$ и $j \leqslant d$, и $l_i^{(k)} = 0$ при $k \geqslant \langle n_{\rho_1}, m\rangle + 1$ и $i \geqslant \langle n_{\rho_1}, m\rangle + 1$. Таким образом, если $k = \langle n_{\rho_2}, m\rangle + \langle n_{\rho_2}, m_T\rangle\langle n_{\rho_1}, m\rangle$, то $\partial^{k+1}\chi^m = 0$, и следовательно, ∂ локально нильпотентно. $\square$

2.4. Корни аффинной группы Кремоны

Рассмотрим алгебру многочленов $\mathbb{K}^{[n]} = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Группа преобразований алгебры $\mathbb{K}^{[n]}$, сохраняющих объём,

$$\mathrm{Aut}^*_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}^{[n]} = \{\gamma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}^{[n]} \mid \det\left(\frac{\partial\gamma(x_j)}{\partial x_i}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 1\}$$

является замкнутой нормальной подгруппой в *аффинной группе Кремоны* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}^{[n]}$. Это бесконечномерная простая алгебраическая группа, см. [41]. Из [15] и [16] следует, что максимальная размерность алгебраического тора, содержащегося в $\mathrm{Aut}^*_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}^{[n]}$, равна $n-1$ и всякий тор размерности $n-1$ сопряжён тору

$$T = \{\gamma \in \mathrm{Aut}^*_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}^{[n]} \mid \gamma(x_i) = t_i x_i,\, t_i \in \mathbb{K},\, \prod_{i=1}^{n} t_i = 1\}.$$

Если ∂ — ЛНД алгебры $\mathbb{K}^{[n]}$, то $\exp t\partial \in \mathrm{Aut}^*_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}^{[n]}$ для всех $t \in \mathbb{K}$, и следовательно, $\partial \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}^*_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}^{[n]})$. Ненулевое ЛНД ∂ алгебры $\mathbb{K}^{[n]}$ называется *корневым вектором* группы $\mathrm{Aut}^*_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}^{[n]}$ по отношению к T, если существует такой нетривиальных характер $\chi : T \to \mathbb{K}^\times$, что

$$\gamma \circ \partial \circ \gamma^{-1} = \chi(\gamma)\partial \quad \forall\, \gamma \in T.$$

Сам характер χ называется *корнем* группы $\mathrm{Aut}^*_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}^{[n]}$ по отношению к T, соответствующим дифференцированию ∂. Первый из вопросов, поставленных В.Л. Поповым в [39], состоял в том, чтобы найти все корни и корневые векторы группы $\mathrm{Aut}^*_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}^{[n]}$ по отношению к T. Ответ был дан в [33]: корневые векторы — это в точности ЛНД вида $x^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i}$, где x^α — одночлен, не зависящий от x_i. Покажем, что данное описание сразу следует из утверждения 2.14.

Мы имеем торическое многообразие $\mathbb{A}^n$ с естественным действием алгебраического тора $\mathbb{T} = (\mathbb{K}^\times)^n$ и подтор $T \subset \mathbb{T}$ коразмерности один, заданный уравнением $\prod\limits_{i=1}^n t_i = 1$. Конус, соответствующий $\mathbb{A}^n$, — это положительный ортант $\sigma_X = \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$. Гиперплоскость Γ_T задаётся уравнением $z_1 + \ldots + z_n = 0$. Получаем $\sigma_X \cap \Gamma_T = \{0\}$. Значит, все корневые векторы однородны по отношению к $\mathbb{T}$ и, следовательно, как мы видели в примере 2.3, имеют вид $\lambda\, x^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i}$, где $\lambda \in \mathbb{K}^\times$. Таким образом, можно формулировать следующую теорему.

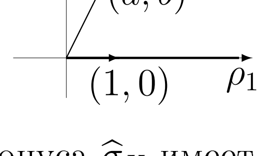
Теорема 2.20. [**33**, Theorem 1] [**46**, Theorem 2] *Множество корневых векторов группы* $\mathrm{Aut}^*_{\mathbb{K}}\,\mathbb{K}^{[n]}$ *по отношению к тору* T *имеет вид*

$$\left\{\lambda\, x^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \mid \lambda \in \mathbb{K}^\times, i \in \{1, \ldots, n\}, \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}, \alpha_i = 0\right\}.$$

Корнем, соответствующим $\lambda\, x^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i}$, *является характер* $\chi_{i,\alpha} : T \to \mathbb{K}^\times$, *заданный* $\chi_{i,\alpha}(\gamma) = t_i^{-1} \prod\limits_{j=1}^n t_j^{\alpha_j}$.

2.5. Аффинные торические поверхности

Нормальные аффинные поверхности, снабжённые $\mathbb{C}^\times$-действиями, и ЛНД на них изучались в [23] и [24]. Здесь мы рассмотрим частный случай. Пусть X — аффинная торическая поверхность с действующим тором $\mathbb{T}$ и $T \subset \mathbb{T}$ — одномерный подтор. Мы полностью ответим на вопросы (1)–(3) из раздела 2.2 для X. Обозначим через N_T и $N_{\mathbb{T}}$ решётки однопараметрических подгрупп торов T и $\mathbb{T}$ соответственно, и через $\widehat{\sigma}_X \subset (N_{\mathbb{T}})_{\mathbb{Q}}$ — конус, определяющий торическое многообразие X. С точностью до автоморфима решётки $N_{\mathbb{T}}$ можно считать, что конус $\widehat{\sigma}_X$ порождён векторами $n_{\rho_1} = (1, 0)$ и $n_{\rho_2} = (a, b)$, где $a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $a < b$ и НОД$(a, b) = 1$.



$\widehat{\sigma}_X \subset N_{\mathbb{Q}}$

Множество корней Демазюра конуса $\widehat{\sigma}_X$ имеет вид:

$$S_{\rho_1} = \{(-1, m) \mid m \in \mathbb{Z},\, m \geqslant \frac{a}{b}\},$$

$$S_{\rho_2} = \{(m_1, m_2) \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z},\, m_1 \geqslant 0,\, am_1 + bm_2 = -1\}.$$

Пусть Γ_T — прямая, соответствующая подтору T. Существует три различных варианта взаимного расположения конуса $\widehat{\sigma}_X$ и Γ_T:

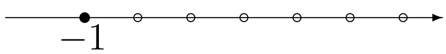
(1) $\widehat{\sigma}_X \cap \Gamma_T = \{0\}$;

(2) $\widehat{\sigma}_X \cap \Gamma_T$ — ребро $\widehat{\sigma}_X$;

(3) Γ_T пересекает внутренность $\widehat{\sigma}_X$.

Случай 1. Пусть $\widehat{\sigma}_X \cap \Gamma_T = \{0\}$. Из утверждения 2.14 следует, что для каждого T-корня e существует с точностью до пропорциональности ровно один корневой вектор, ровно один $\mathbb{T}$-корень имеет e своим ограничением и все T-однородные ЛНД $\mathbb{T}$-однородны. На следующем рисунке изображены T-корни поверхности X. Ограничения корней Демазюра из множеств S_{ρ_1} и S_{ρ_2} обозначены через " $\bullet$ " и " $\circ$ " соответственно.

Случай 2. Предположим, что прямая Γ_T пересекает конус $\widehat{\sigma}_X$ по ребру ρ_1. В этом случае ограничение множества S_{ρ_1} — это просто точка -1. Согласно утверждению 2.16, корневые векторы, соответствующие корню $e = -1$ образуют бесконечномерное векторное пространство. Для каждого корня $e \neq -1$ существует только один $\mathbb{T}$-корень, ограничение которого равно e. Множество T-корней имеет следующий вид:



Случай 3. Пусть Γ_T пересекает внутренность конуса $\widehat{\sigma}_X$. Тогда ограничение отображения π на каждое из множеств S_{ρ_i} инъективно. Выберем примитивный вектор решётки (r, q) на прямой Γ_T так, чтобы число $D = rb - qa$ было положительным. Докажем следующую лемму.

Лемма 2.21. *Пусть прямая Γ_T пересекает внутренность конуса $\widehat{\sigma}_X$. Тогда пересечение $\pi(S_{\rho_1}) \cap \pi(S_{\rho_2})$ непусто тогда и только тогда, когда число $a - 1$ делится на НОД(q, D).*

Доказательство. Ограничения множеств $\mathbb{T}$-корней S_{ρ_1} и S_{ρ_2} на T имеют вид h$\{-r+mq \mid m \in \mathbb{Z}_{\geqslant \frac{a}{b}}\}$ и $\{rm_1^0+qm_2^0+kD \mid k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$, где $(m_1^0, m_2^0) \in S_{\rho_2}$ — корень с минимальной первой координатой. Пересечение этих множеств непусто тогда и только тогда, когда существуют такие числа m_0 и k_0, что

$$r + rm_1^0 + qm_2^0 = m_0 q - k_0 D. \tag{2.5.1}$$

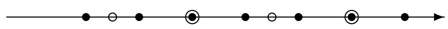
Умножая равенство на a и используя то, что $(m_1^0, m_2^0) \in S_{\rho_2}$, получим

$$r(a-1) - Dm_2^0 = m_0 qa - k_0 Da. \tag{2.5.2}$$

Значит, $a-1$ должно делиться на НОД(q, D). Обратно, предположим, что левая часть равенства (2.5.2) делится на НОД(q, D). Поскольку b делится на НОД(q, D) и НОД$(a, b) = 1$, левая часть (2.5.1) также делится на НОД(q, D). Следовательно, существуют такие m_0 и k_0, что выполняется (2.5.1). $\square$

Как и выше, изобразим множество T-корней.

$a)$ НОД$(q, rb-qa) \nmid a-1$

$b)$  НОД$(q, rb-qa) \mid a-1$

В случае $a)$ отображение ограничения корней с $\mathbb{T}$ на T биективно и всякое T-однородное ЛНД $\mathbb{T}$-однородно. В случае $b)$ обозначим серез Λ пересечение $\pi(S_{\rho_1}) \cap \pi(S_{\rho_2})$. Для корней $e \notin \Lambda$ мы можем использовать теорему 2.13. Остаётся ответить на вопросы (1) и (3) для $e \in \Lambda$.

Следуя [8, Section 11], объясним, как найти такие кривую C и полиэдральный дивизор $\mathfrak{D}$, что $X \overset{T}{\cong} \operatorname{Spec} A[C, \mathfrak{D}]$. Поскольку $T \subset \mathbb{T}$, существует точная последовательность

$$0 \longrightarrow N_T \xrightarrow{F} N_{\mathbb{T}} \xrightarrow{P} N_{\mathbb{T}}/N_T \longrightarrow 0.$$

Пусть Σ — наименьший веер в $(N_{\mathbb{T}}/N_T)_{\mathbb{Q}}$, содержащий все конусы $P(\tau)$, где τ пробегает все грани $\widehat{\sigma}_X$. Из [8, Section 6] следует, что искомая кривая C — это торическое многообразие, соответствующее Σ. Выберем проекцию $s : N_{\mathbb{T}} \to N_T$, удовлетворяющую условию $s \circ F = id$. Тогда $\mathfrak{D} = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \Delta_\rho \cdot D_\rho$, где $\Sigma(1) \subset \Sigma$ — множество рёбер, D_ρ — простой дивизор, соответствующий

ρ, $\Delta_\rho = s(\widehat{\sigma}_X \cap P^{-1}(n_\rho)) \subset (N_T)_{\mathbb{Q}}$ и n_ρ — примитивный вектор решётки на ρ, — искомый полиэдральный дивизор. Здесь все Δ_ρ имею конус рецессии $\sigma = s(\widehat{\sigma}_X \cap (F(N_T))_{\mathbb{Q}}$. В нашем случае

$$F = \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}, \ s = (u, v) \ \text{ и } \ P = (q, -r),$$

где $u, v \in \mathbb{Z}$, $ru + qv = 1$. Прямым вычислением получаем $Y = \mathbb{P}^1$, $\sigma = \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$ и

$$\mathfrak{D} = (p_1 + \sigma) \cdot [0] + (p_2 + \sigma) \cdot [\infty],$$

где $p_1 = \dfrac{u}{q}$ и $p_2 = \dfrac{au + bv}{rb - qa}$. В этом случае на $A[C, \mathfrak{D}]$ не существует однородных ЛНД вертикального типа. Однородные ЛНД горизонтального типа степени e находятся во взаимно однозначном соответствии с согласованными парами $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e)$. Если ни p_1, ни p_2 не принадлежат $\mathbb{Z}$, то в определениии раскрашенного σ-полиэдрального дивизора $\widetilde{\mathfrak{D}}$ либо $z_0 = 0$ и $z_\infty = \infty$, либо $z_0 = \infty$ и $z_\infty = 0$. Это означает, что найдётся не более двух ЛНД степени e. Тогда для корня $e \in \Lambda$ существует два корневх вектора и они $\mathbb{T}$-однородны. Очевидно, что p_1 является целым тогда и только тогда, когда $q = 1$. Выясним, когда p_2 является целым.

Лемма 2.22. *Число $p_2 = \dfrac{au + bv}{rb - qa}$ является целым тогда и только тогда, когда $rb - qa = 1$.*

Доказательство. Пусть $D = rb - qa$. Предположим, что $au + bv = kD$, где $k \in \mathbb{Z}$. Мы знаем, что $ru + qv = 1$. Используя эти равенства, получим

$$a = aru + aqv = D(rk - v), \quad b = bru + bqv = D(qk - u).$$

Значит, a и b делятся на D. Это выполняется тогда и только тогда, когда $D = 1$. $\square$

Теперь предположим, что $p_1 \notin \mathbb{Z}$ и $p_2 \in \mathbb{Z}$. Тогда для раскрашенного дивизора либо $z_0 = 0$, либо $z_\infty = 0$. Нетрудно проверить, что в первом случае пара $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e)$ согласована тогда и только тогда, когда $\frac{1}{q} + ep_1 \in \mathbb{Z}$ и $qep_2 + 1 \geqslant 0$. Эти условия не зависят от выбора z_∞. Значит, если существует одна согласованная пара $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e)$ с $z_0 = 0$, то любая пара $(\widetilde{\mathfrak{D}}', e)$ с $z_0 = 0$ и $z_\infty \in \mathbb{P}^1 \setminus \{z_0\}$

согласована. Поскольку $p_2 \in \mathbb{Z}$, мы рассматриваем все $\widetilde{\mathfrak{D}}$ с $z_\infty = 0$ как один и тот же раскрашенный σ-полиэдральный дивизор. Пусть $e \in \Lambda$. Мы уже знаем два корневых вектора степени e, которые являются $\mathbb{T}$-однородными ЛНД $\mathbb{T}$-степеней, принадлежащих различным S_{ρ_i}. Следовательно, для соответствующих согласованных пар $z_0 \neq z_0'$. Таким образом, корневые векторы степени e находятся в биективном соответствии с точками на $\mathbb{P}^1$. Все эти корневые векторы описываются утверждением 2.19. Случаи $p_1 \in \mathbb{Z}$, $p_2 \notin \mathbb{Z}$ и $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ разбираются аналогично.

Подводя итог, получаем следующую теорему.

Теорема 2.23. [**46**, Proposition 6] *Пусть X — аффинная торическая поверхность с действующим тором $\mathbb{T}$ и $T \subset \mathbb{T}$ — одномерный подтор. Предположим, что конус $\widehat{\sigma}_X$, определяющий многообразие X, порождается векторами $n_{\rho_1} = (1,0)$ и $n_{\rho_2} = (a,b)$, где $a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $a < b$ и НОД$(a,b) = 1$, а прямая Γ_T порождена (r,q), где НОД$(r,q) = 1$. Пусть π — отображение ограничения корней с $\mathbb{T}$ на T, e — T-корень, $\Lambda = \pi(S_{\rho_1}) \cap \pi(S_{\rho_2})$ и $D = rb - qa$. Тогда отображение π описывается следующей таблицей.*

	Число корневых векторов, соотв. e	Число, $\mathbb{T}$-корней, имеющих e своим ограничением	Все ли T-однородные ЛНД на X $\mathbb{T}$-однородны?
1. $\widehat{\sigma}_X \cap \Gamma_T = \{0\}$	1	1	да
2. $\widehat{\sigma}_X \cap \Gamma_T = \mathbb{Q}_{\geqslant 0} \cdot \rho_i$			
$e = -1$	∞-мерное пространство	∞	нет
$e \neq -1$	1	1	да
3. $\widehat{\sigma}_X^\circ \cap \Gamma_T \neq \varnothing$			
3.1. НОД$(q, D) \nmid a - 1$	1	1	да
3.2. $q \neq 1, D \neq 1$ и НОД$(q, D) \mid a - 1$			
$e \notin \Lambda$	1	1	да
$e \in \Lambda$	2	2	да
3.3. $q = 1$ или $D = 1$			
$e \notin \Lambda$	1	1	да
$e \in \Lambda$	параметриз. точками на $\mathbb{P}^1$	2	нет

Глава 3

Однородные локально нильпотентные дифференцирования на T-многообразиях сложности один

3.1. $\mathbb{G}_n$-вложения

3.1.1. Аффинный случай. Пусть X — аффинное нормальное алгебраическое многообразие с регулярным локально транзитивным действием группы $\mathbb{G}_n = T \times \mathbb{G}_a$, где T — алгебраический тор размерности $n-1$. Мы будем называть такие действия $\mathbb{G}_n$-*структурами*. Без ограничения общности можно считать, что T действует на X эффективно. Тогда T-действие имеет сложность ноль или один. Поскольку $\mathbb{G}_a$-действие коммутирует с T, соответствующее ЛНД однородно, имеет горизонтальный тип и нулевую степень. Но на торическом многообразии не существует таких ЛНД. Значит, T-действие на X имеет сложность один. Тогда найдутся такие кривая C ($C = \mathbb{A}^1$ или $C = \mathbb{P}^1$), конус σ и собственный σ-полиэдральный дивизор $\mathfrak{D}$ на C, что X как T-многообразие изоморфно $\operatorname{Spec} A[C, \mathfrak{D}]$.

Лемма 3.1. *Пусть на алгебре $A[C, \mathfrak{D}]$ существует однородное ЛНД горизонтального типа степени ноль. Тогда*

(1) *если $C = \mathbb{A}^1$, то дивизор $\mathfrak{D}$ можно выбрать (согласно теореме 2.4 (2)) тривиальным;*

(2) *если $C = \mathbb{P}^1$, то можно выбрать $\mathfrak{D} = \Delta_\infty \cdot [\infty]$, где $\Delta_\infty \subsetneq \sigma$ — некоторый σ-полиэдр.*

Доказательство. Пусть $(\widetilde{\mathfrak{D}}, 0)$ — согласованная пара, соответствующая данному однородному ЛНД горизонтального типа. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$ и $z_\infty = \infty$ в случае $C = \mathbb{P}^1$. По определению согласованной пары существует такое $s \in \mathbb{Z}$, что $(0, s)$ является корнем Демазюра конуса $\widetilde{\sigma}$, соответствующим ребру (dv_0, d). Тогда $s = -1$, $d = 1$ и, следовательно, $v_0 \in N$. Поскольку для всех $z \in C'$ и каждой вершины $v \neq v_z$ полиэдра Δ_z должно выполняться неравенство $\langle v, 0\rangle \geqslant 1 + \langle v_z, 0\rangle$, каждый полиэдр Δ_z, где $z \in C'$, имеет ровно одну вершину v_z. Заменив $\mathfrak{D}$ дивизором $\mathfrak{D} + \sum_{z \in C'}(-v_z + \sigma) \cdot z$, получим утверждение леммы. Условие $\Delta_\infty \subsetneq \sigma$ возникает из-за того, что дивизор $\mathfrak{D}$ собственный. $\square$

Следствие 3.2. *Всякое аффинное нормальное алгебраическое многообразие, снабжённое $\mathbb{G}_n$-структурой, является торическим.*

Доказательство. Утверждение сразу следует из леммы 3.1 и следствия 2.5. $\square$

Обозначим через $\mathbb{T}$ тор, действующий на X с открытой орбитой. Тор T является подтором в $\mathbb{T}$. Следующее предложение показывает, что $\mathbb{G}_a$-действие на X, коммутирующее с T, нормализуется большим тором $\mathbb{T}$, и следовательно, определяется некоторым корнем Демазюра конуса $\widetilde{\sigma}$ торического многообразия X.

Утверждение 3.3. *Пусть X — аффинное нормальное многообразие с заданной $\mathbb{G}_n$-структурой. Пусть также $X \overset{T}{\cong} \operatorname{Spec} A[C, \mathfrak{D}]$, где $C = \mathbb{A}^1$ или $C = \mathbb{P}^1$, $\mathfrak{D}$ — собственный σ-полиэдральный дивизор на C, выбранный как в лемме 3.1. Тогда*

(1) *если $C = \mathbb{A}^1$, то $X \overset{\mathbb{G}_n}{\cong} Y \times \mathbb{A}^1$, где Y — торическое многообразие, соответствующее конусу σ, и $\mathbb{G}_a$ действует на $\mathbb{A}^1$ сдвигами;*

(2) *если $C = \mathbb{P}^1$, то X — торическое многообразие, конус $\widetilde{\sigma} \subset N \oplus \mathbb{Z}$ которого порождён $(\sigma, 0), (\Delta_\infty, -1)$ и $(0, 1)$. При этом $\mathbb{G}_a$-действие на X задаётся корнем Демазюра $\widetilde{e} = (0, -1) \in M \oplus \mathbb{Z}$ конуса $\widetilde{\sigma}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{K}(C)=\mathbb{K}(t)$.

(1) Сначала предположим, что $C=\mathbb{A}^1$. Тогда дивизор $\mathfrak{D}$ тривиален и, следовательно, однородная компонента A_m алгебры $A[C,\mathfrak{D}]$ равна $\mathbb{K}[t]$ для каждой точки $m\in\omega_M$. Тогда

$$A[C,\mathfrak{D}]=\bigoplus_{m\in\omega_M}\mathbb{K}[t]\cdot\chi^m=\mathbb{K}[\omega_M]\otimes\mathbb{K}[t]=\mathbb{K}[Y]\otimes\mathbb{K}[t]$$

and $X\cong Y\times\mathbb{A}^1$. Согласно равенству (2.1.2), однородное ЛНД, соответствующее $\mathbb{G}_a$-действию на X, задаётся формулой

$$\partial(\chi^m\cdot t^r)=r\chi^m\cdot t^{r-1} \tag{3.1.1}$$

для всех $m\in\omega_M$ и $r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Мы видим, что $\mathbb{G}_a$ действует на $\mathbb{A}^1$ по правилу $a\circ x=x+a$, где $a\in\mathbb{G}_a$ и $x\in\mathbb{A}^1$, и тривиально на Y.

(2) Если $C=\mathbb{P}^1$, то $\mathfrak{D}=\Delta_\infty\cdot[\infty]$. По определению получаем

$$A[C,\mathfrak{D}]=\bigoplus_{m\in\omega_M}\bigoplus_{r=0}^{h_\infty(m)}\mathbb{K}t^r\cdot\chi^m=\bigoplus_{(m,r)\in\widetilde{\omega}_{\widetilde{M}}}\mathbb{K}\chi^m\cdot t^r=\mathbb{K}[\widetilde{\omega}_{\widetilde{M}}],$$

где $\widetilde{M}=M\oplus\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\omega}\subset\widetilde{M}_{\mathbb{Q}}$ — конус, дуальный конусу $\widetilde{\sigma}$. Таким образом, алгебра $A[C,\mathfrak{D}]$ является полугрупповой алгеброй, и, следовательно, X — торическим многообразием с конусом $\widetilde{\sigma}$. В данном случае равенство (2.1.2) задаёт ЛНД, соответствующее корню Демазюра $\widetilde{e}=(0,-1)$. $\square$

Следствие 3.4. *Аффинное нормальное многообразие с заданной $\mathbb{G}_n$-структурой полностью определяется конусом σ, если $C=\mathbb{A}^1$, и σ-полиэдром $\Delta_\infty\subsetneq\sigma$, если $C=\mathbb{P}^1$.*

Теперь мы покажем, что верно и обратное — каждый корень Демазюра на торическом многообразии X задаёт $\mathbb{G}_n$-структуру.

Утверждение 3.5. *Каждая пара $(\widetilde{\sigma},\widetilde{e})$, где $\widetilde{\sigma}\subset\widetilde{N}_{\mathbb{Q}}$ — острый полиэдральный конус и $\widetilde{e}\in\widetilde{M}$ — корень Демазюра $\widetilde{\sigma}$, определяет аффинное нормальное многообразие, снабжённое $\mathbb{G}_n$-структурой.*

Доказательство. Пусть X — аффинное торическое многобразие с конусом $\widetilde{\sigma}$ и действующим тором $\mathbb{T} = \operatorname{Spec}\mathbb{K}[\widetilde{M}]$. Корень Демазюра $\widetilde{e} = (\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n)$ определяет $\mathbb{G}_a$-действие на X. Рассмотрим подтор $T := \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{T} \mid t_1^{\widetilde{e}_1} \ldots t_n^{\widetilde{e}_n} = 1\}$ коразмерности один. Действия $\mathbb{G}_a$ и T перестановочны, и группа $T \times \mathbb{G}_a$ имеет на X открытую орбиту. □

Замечание 3.6. Пары $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{e})$ и $(\widetilde{\sigma}', \widetilde{e}')$ определяют эквивалентные $\mathbb{G}_n$-структуры тогда и только тогда, когда существует такой изоморфизм $\varphi : \widetilde{N}_{\mathbb{Q}} \to \widetilde{N}'_{\mathbb{Q}}$, что $\varphi(\widetilde{\sigma}) = \widetilde{\sigma}'$ и $\varphi^*(\widetilde{e}') = \widetilde{e}$.

Для описания $\mathbb{G}_n$-орбит на X нам потребуются некоторые результаты из [2].

Утверждение 3.7. [**2**, предложение 2.1] *Пусть X — торическое многообразие с действующим тором $\mathbb{T}$ и конусом σ, $e \in \mathfrak{R}$ — корень Демазюра конуса σ, $H_e \subset \operatorname{Aut}(X)$ — соответствующая однопараметрическая подгруппа и $R_e \subset \mathbb{T}$ — однопараметрическая подгруппа, соответствующая ребру ρ_e. Тогда*

(1) *для каждой точки $x \in X$, не являющейся H_e-неподвижной, орбита $H_e x$ пересекает ровно две $\mathbb{T}$-орбиты $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ на X, причём $\dim \mathcal{O}_1 = 1 + \dim \mathcal{O}_2$;*

(2) *пересечение $\mathcal{O}_2 \cap H_e x$ состоит из одной точки, а $\mathcal{O}_1 \cap H_e x = R_e y$ для всякого $y \in \mathcal{O}_1 \cap H_e \cdot x$.*

Орбиты $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ из условия утверждения 3.7 называются *H_e-связными.*

Утверждение 3.8. [**2**, лемма 2.2] *Пусть $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ — две $\mathbb{T}$-орбиты на X, соответствующие граням σ_1 и σ_2, причём $\mathcal{O}_2 \subset \overline{\mathcal{O}_1}$. Пусть $e \in \mathfrak{R}$ — корень Демазюра конуса σ. Орбиты $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ H_e-связны тогда и только тогда, когда $e\,|_{\sigma_2} \leqslant 0$ и σ_1 — гипергрань конуса σ_2, выделяемая уравнением $\langle \cdot, e\rangle = 0$.*

Как показывает следующее утверждение, всякая $\mathbb{G}_n$-орбита на X является объединением не более чем двух $\mathbb{T}$-орбит. В частности, число $\mathbb{G}_n$-орбит всегда конечно.

Утверждение 3.9. *Пусть X — аффинное нормальное многообразие, снабжённое $\mathbb{G}_n$-структурой. Пусть также $\mathbb{T}$ — тор, действующий на X с открытой орбитой, $\widetilde{\sigma}$ — конус торического многообразия X, e — его корень Демазюра, задающий $\mathbb{G}_n$-структуру, и $\rho_e \in \widetilde{\sigma}(1)$ — соответствующее ребро. Тогда*

(1) *всякая $\mathbb{G}_n$-орбита инвариантна относительно $\mathbb{T}$;*

(2) *две* T-*орбиты $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ лежат в одной $\mathbb{G}_n$-орбите тогда и только тогда, когда для соответствующих граней σ_1 и σ_2 конуса σ выполнено условие: $e\mid_{\sigma_2} \leqslant 0$ и σ_1 — гипергрань конуса σ_2, выделяемая уравнением $\langle \cdot, e\rangle = 0$. В частности, плотная $\mathbb{T}$-орбита и $\mathbb{T}$-орбита, соответствующая ребру ρ_e, всегда лежат в одной $\mathbb{G}_n$-орбите.*

Доказательство. (1) Пусть $R_e \subset \mathbb{T}$ — однопараметрическая подгруппа, соответствующая ребру ρ_e. Поскольку $T = \ker(e) \subseteq \mathbb{T}$, пересечение подгрупп R_e и T тривиально. Сравнивая размерности, получаем, что $\mathbb{T} = T \times R_e$. Обозначим через H_e образ группы $\mathbb{G}_a$ в группе $\mathrm{Aut}(X)$ при действии, отвечающем корню e. Тогда для доказательства того, что каждая орбита группы $\mathbb{G}_n \cong H_e \times T$ инвариантна относительно $\mathbb{T}$, достаточно показать, что любая H_e-орбита R_e-инвариантна. Но каждая ненульмерная H_e-орбита состоит из R_e-орбиты и точки, в стабилизаторе которой содержится группа R_e. Отсюда получается требуемое.

(2) Две T-орбиты лежат в одной орбите $\mathbb{G}_n$-структуры, соответствующей корню Демазюра e, тогда и только тогда, когда они H_e-связны. Поэтому утверждение сразу следует из описания H_e-связных T-орбит. □

Резюмируя, получаем следующую теорему.

Теорема 3.10. *Пусть X — аффинное нормальное алгебраическое многообразие без непостоянных обратимых функций. Тогда*

(1) *если X снабжено $\mathbb{G}_n$-структурой, то оно является торическим;*

(2) *всякая $\mathbb{G}_n$-структура на X задаётся некоторым корнем Демазюра конуса торического многообразия X. Обратно, всякий корень Демазюра веера торического многообразия определяет $\mathbb{G}_n$-структуру;*

(3) *всякая $\mathbb{G}_n$-структура на X имеет конечное число орбит;*

(4) *если X — торическое многообразие с действующим тором $\mathbb{T}$ и заданным с помощью корня Демазюра e локально транзитивным $\mathbb{G}_n$-действием, то две $\mathbb{T}$-орбиты $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ лежат в одной $\mathbb{G}_n$-орбите тогда и только тогда, когда для соответствующих конусов σ_1 и σ_2 выполнено условие: $e\,|_{\sigma_2}\leqslant 0$ и σ_1 — гипергрань конуса σ_2, выделяемая уравнением $\langle \cdot, e\rangle = 0$.*

Пример 3.11. Найдём все $\mathbb{G}_2$-структуры на аффинной плоскости. Конусом $\mathbb{A}^2$ как торического многообразия является положительная четверть $\mathbb{Q}^2_{\geqslant 0}$. Множество корней Демазюра конуса $\mathbb{Q}^2_{\geqslant 0}$ имеет вид

$$\mathfrak{R} = \{(-1,k) \mid k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \sqcup \{(k,-1) \mid k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}.$$

$\mathbb{G}_2$-структура на $\mathbb{A}^2$, соответствующая корню $(-1,k)$, задаётся следующим образом:

$$(t,a)\circ(x_1,x_2) = (t^k x_1 + a x_2^k, t x_2), \tag{3.1.2}$$

где $(x_1,x_2)\in\mathbb{A}^2$, $a\in\mathbb{G}_a$, и $t\in\mathbb{K}^\times$. Если $k\neq 0$, то существует прямая l, состоящая из $\mathbb{G}_a$-неподвижных точек. При этом стабилизатор любой ненулевой точки на l изоморфен $\mathbb{Z}_k$. Если $k=0$, то множество $\mathbb{G}_a$-неподвижных точек пусто. Таким образом, формула (3.1.2) задаёт неэквивалентные $\mathbb{G}_2$-действия для $k_1\neq k_2$. Осталось заметить, что $\mathbb{G}_2$-структуры, соответствующие корням $(k,-1)$ и $(-1,k)$ эквиваленты.

Найдём $\mathbb{G}_2$-орбиты на $\mathbb{A}^2$. Пусть сначала $\mathbb{G}_2$-структуру задаёт корень $e=(-1,k)$, где $k\neq 0$, и H_e — соответствующая одномерная унипотентная группа. H_e-связными являются плотная орбита и орбита, отвечающая ребру $\rho_e = \mathbb{Q}_{\geqslant 0}\cdot(1,0)$. Группа $\mathbb{G}_2$ "склеит"только их. Таким образом, имеется три $\mathbb{G}_2$-орбиты. Для корня $e=(-1,0)$ есть ещё одна пара H_e-связных орбит —

это орбиты, соответствующие конусам $\mathbb{Q}^2_{\geqslant 0}$ и $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}\cdot(0,1)$. В этом случае число $\mathbb{G}_2$-орбит равно двум.

3.1.2. Пополнения группы $\mathbb{G}_n$. Пусть X — полное нормальное алгебраическое многообразие с регулярным локально транзитивным действием группы $\mathbb{G}_n = T\times\mathbb{G}_a$. Как и раньше, мы будем называть такие действия $\mathbb{G}_n$-структурами. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.12. [**44**, теорема 2.11] *Пусть X — полное нормальное алгебраическое многообразие. Тогда*

(1) *если X снабжено регулярным локально транзитивным действием группы $\mathbb{G}_n$, то оно является торическим;*
(2) *всякая $\mathbb{G}_n$-структура на X задаётся некоторым корнем Демазюра его веера торического многообразия X. Обратно, всякий корень Демазюра веера торического многообразия определяет $\mathbb{G}_n$-структуру;*
(3) *всякая $\mathbb{G}_n$-структура на X имеет конечное число орбит;*
(4) *если X — торическое многообразие с действующим тором $\mathbb{T}$ и заданным с помощью корня Демазюра e локально транзитивным $\mathbb{G}_n$-действием, то две $\mathbb{T}$-орбиты $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ лежат в одной $\mathbb{G}_n$-орбите тогда и только тогда, когда для соответствующих конусов σ_1 и σ_2 выполнено условие: $e\,|_{\sigma_2}\leqslant 0$ и σ_1 — гипергрань конуса σ_2, выделяемая уравнением $\langle\cdot, e\rangle = 0$.*

Доказательство. (1) Без ограничения общности можно считать, что открытая $\mathbb{G}_n$-орбита на X изоморфна $\mathbb{G}_n$. Тогда X — рациональное полное многообразие с T-действием сложности один. Отсюда следует, что группа классов $\mathrm{Cl}(X)$ и кольцо Кокса $R(X)$ конечно порождены, см. [**28**, Theorem 1.3]. Рассмотрим реализацию Кокса многообразия X

$$\begin{array}{ccll} \widehat{X} & \subseteq & \overline{X} & = \operatorname{Spec} R(X) \\ {\scriptstyle /\!/H_X}\big\downarrow & & & \\ X. & & & \end{array}$$

Действие связной группы $\mathbb{G}_n$ на X может быть поднято до $(H_X \times \mathbb{G}_n)$-действия на $\overline{X}$. Пусть $H_X^\circ \subset H_X$ — связная компонента единицы. Группа $H_X^\circ \times \mathbb{G}_n$ имеет на $\overline{X}$ открытую орбиту. По следствию 3.2 многообразие $\overline{X}$ является торическим. Это означает, что найдётся одномерный тор $S \subset \operatorname{Aut}\overline{X}$, централизующий $H_X^\circ \times T$ и нормализующий $\mathbb{G}_a$. Поскольку $\widehat{X}$ является максимальным H_X-подмножеством, оно инвариантно относительно действия группы $H_X^\circ \times T \times S$. Спуская это действие на $X = \widehat{X}/\!/H_X$, получаем, что X — торическое многообразие.

(2) Пусь $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{Q}}$ — веер торического многообразия X и $\mathbb{T}$ — тор, действующий на X с открытой орбитой. Докажем, что всякая $\mathbb{G}_n$-структура на X задаётся некоторым корнем Демазюра веера Σ. Действительно, мы уже знаем, что $\mathbb{T}$-действие на X получается из $(H_X^\circ \times T \times S)$-действия на $\widehat{X}$, которое нормализует $\mathbb{G}_a$. Тогда и $\mathbb{G}_a$-действие на X нормальзуется $\mathbb{T}$-действием.

Обратно, пусть e — корень Демазюра веера Σ и $T := \ker(e) \subset \mathbb{T}$ — подтор коразмерности один. Действие группы $\mathbb{G}_a$ на X, соответствующее e, перестановочно с T-действием, и группа $T \times \mathbb{G}_a$ имеет открытую орбиту на X.

(3) – (4) Пусть ρ_e — ребро веера Σ, отвечающее корню e, задающему $\mathbb{G}_n$-структуру на X, и $V_i, i \in I$, — аффинные $\mathbb{T}$-инвариантные открытые подмногообразия в X, соответствующие конусам, содержащим ρ_e. Одномерная унипотентная группа H_e сохраняет каждое V_i и оставляет неподвижным дополнение $X \setminus \bigcup\limits_i V_i$. Так что мы можем применить предложение 3.9 к каждому V_i и получить утверждение теоремы. □

Следствие 3.13. *На полном нормальном многообразии существует лишь конечное число различных $\mathbb{G}_n$-структур.*

Доказательство. Утверждение следует из конечности числа корней Демазюра для полного веера. □

Следствие 3.14. *Замыкания $\mathbb{G}_n$-орбит нормальны.*

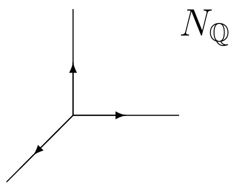
Доказательство. Любая $\mathbb{G}_n$-орбита $\mathbb{T}$-инвариантна и, следовательно, её замыкание является торическим многообразием. Отсюда следует нормальность. $\square$

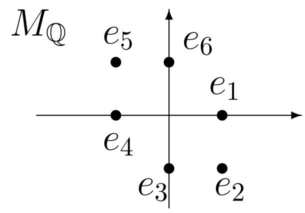
Следствие 3.15. *Всякое нормальное алгебраическое многообразие, снабжённое $\mathbb{G}_n$-структурой, является торическим.*

Доказательство. Пусть на X есть локально тразитивное $\mathbb{G}_n$-действие. Рассмотрим эквивариантное пополнение X' многообразия X. Из теоремы 3.12 следует, что X' — торическое многообразие. Обозначим действующий на нём тор через $\mathbb{T}$. Дополнение $X' \setminus X$ является объединением $\mathbb{G}_n$-орбит, а значит, $\mathbb{T}$-инвариантно. Следовательно, $\mathbb{T}$ сохраняет X и действует на нём с открытой орбитой. $\square$

Пример 3.16. Пусть $X = \mathbb{P}^2$. Его веер Σ порождён векторами $n_1 = (1,0)$, $n_2 = (0,1)$ и $n_3 = (-1,-1)$, и множество корней Демазюра имеет вид

$$\mathfrak{R} = \{e_1 = (1,0), e_2 = (1,-1), e_3 = (0,-1), e_4 = (-1,0), e_5 = (-1,1), e_6 = (0,1)\}.$$



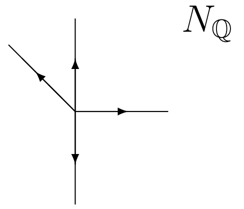


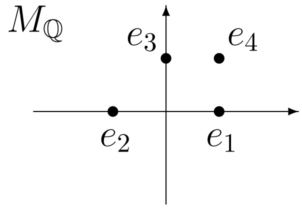
Нетрудно видеть, что для любых i и j существует изоморфизм, переводящий e_i в e_j. Таким образом, все $\mathbb{G}_2$-структуры на $\mathbb{P}^2$ эквивалентны.

Рассмотрим, например, $\mathbb{G}_2$-структуру, заданную корнем e_1. Кроме плотной и соответствующей ребру ρ_3 орбит H_{e_1}-связными ещё являются орбиты, отвечающие конусам $\mathrm{cone}(n_2, n_3)$ и $\mathrm{cone}(n_2)$. Таким образом, всякая $\mathbb{G}_2$-структура на $\mathbb{P}^2$ имеет 5 орбит.

Пример 3.17. Рассмотрим поверхность Хирцебрука $\mathbb{F}_1$. Соответствующий полный веер Σ порождается векторами $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ и $(-1,1)$, и множество корней Демазюра состоит из четырёх элементов

$$\mathfrak{R} = \{e_1 = (1,0), e_2 = (-1,0), e_3 = (0,1), e_4 = (1,1)\}.$$





При помощи изоморфизма мы можем перевести e_1 только в e_2 и e_3 только в e_4. Следовательно, существует два класса эквивалентности $\mathbb{G}_2$-структур на $\mathbb{F}_1$. $\mathbb{G}_2$-структуры, соответствующие корням e_1 и e_2 имеют 6 орбит, соответствующие e_3 и e_4 — 7 орбит.

Многообразия, снабжённые $\mathbb{G}_n$-структурами, являются многообразиями с действием тора сложности один. Но, как мы доказали, этот тор не является максимальным в группе автоморфизмов. Теперь мы перейдём к изучению многообразий, для которых максимальный тор в группе автоморфизмов имеет размерность, на единицу меньшую, чем размерность самого многообразия. Следующие разделы посвящёны описанию однородных локально нильпотентных дифференцирований на невырожденных аффинных неторических квадриках с действием тора сложности один. Из [10, Proposition 2.4.3] следует, что любая такая квадрика X изоморфна многообразию группы $\mathrm{SL}(2)$, четырёхмерной квадрике $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2 = 0$ или аффинному конусу над грассманианом $\mathrm{Gr}(2, 4)$.

3.2. Многообразие группы SL(2)

Рассмотрим гиперповерхность $X = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{A}^4 \mid xy - zw = 1\}$ со следующим действием двумерного тора T^2

$$(t_1, t_2) \circ (x, y, z, w) = (t_1x, t_1^{-1}y, t_2z, t_2^{-1}w), \qquad (t_1, t_2) \in T^2, (x, y, z, w) \in X.$$

Это действие сложности один. T^2-многообразие X изоморфно многообразию группы $\mathrm{SL}(2)$, на которой справа и слева действуют одномерные диагональные торы:

$$(s_1, s_2)\circ\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_1^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_2^{-1} \end{pmatrix},\ (s_1, s_2) \in (\mathbb{K}^\times)^2,\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2$$

Отметим, что тор T^2 является максимальным в группе $\mathrm{Aut}(X)$, так как иначе многообразие X было бы торическим. Нашей целью будет найти все T^2-однородные ЛНД на алгебре функций $\mathbb{K}[X]$. Для начала нам потребуется найти комбинаторные данные T^2-многообразия X.

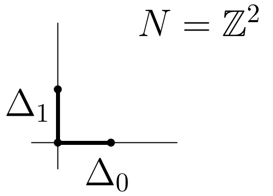
Утверждение 3.18. *Пусть $C = \mathbb{A}^1$, $\sigma = \{0\}$ — нулевой конус, $\Delta_0 = [1,0] \times \{0\} \subset \mathbb{Q}^2$ и $\Delta_1 = \{0\} \times [1,0] \subset \mathbb{Q}^2$ — полиэдры с конусом рецессии σ, и $\mathfrak{D} = \Delta_0 \cdot [0] + \Delta_1 \cdot [1]$ — σ-полиэдральный дивизор. Тогда алгебра $A[C,\mathfrak{D}]$ изоморфна алгебре $\mathbb{K}[x,y,z,w]/(xy - zw - 1)$ с $\mathbb{Z}^2$-градуировкой, заданной равенствами*

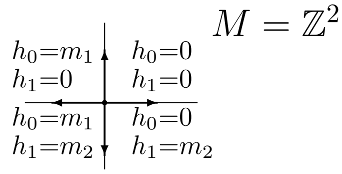
$$\deg x = (1,0), \deg y = (-1,0), \deg z = (0,1) \deg w = (0,-1). \tag{3.2.1}$$

Доказательство. Конусом ω, дуальным к конусу σ, является всё пространство $\mathbb{Q}^2$. По определению алгебра $A[C,\mathfrak{D}]$ градуирована решёткой $\mathbb{Z}^2$

$$A[C,\mathfrak{D}] = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}^2} A_m\chi^m,$$

где $A_m = H^0(C,\mathfrak{D}(m)) \subseteq \mathbb{K}(t)$, $\mathbb{K}(t)$ — поле рациональных функций на $\mathbb{A}^1$, $\mathfrak{D}(m) = h_0(m)[0] + h_1(m)[1]$ и $h_i(m) = \min\limits_{n\in\Delta_i}\langle n, m\rangle$, $i = 0, 1$. Ясно, что h_0 (соответственно h_1) равняется m_1, если $m_1 < 0$, (соответственно m_2, если $m_2 < 0$) и равняется нулю в противном случае:





Алгебра $A[C,\mathfrak{D}]$ порождается своими однородными компонентами степеней $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ и $(0,-1)$. Вычислим эти компоненты:

$$A_{(1,0)} = \{f \in \mathbb{K}(t) \mid \operatorname{div}(f) \geqslant 0\} = \mathbb{K}[t],$$
$$A_{(-1,0)} = \{f \in \mathbb{K}(t) \mid \operatorname{div}(f) - [0] \geqslant 0\} = t\mathbb{K}[t],$$
$$A_{(0,1)} = \{f \in \mathbb{K}(t) \mid \operatorname{div}(f) \geqslant 0\} = \mathbb{K}[t],$$
$$A_{(0,-1)} = \{f \in \mathbb{K}(t) \mid \operatorname{div}(f) - [1] \geqslant 0\} = (t-1)\mathbb{K}[t].$$

Введём обозначения $x = \chi^{(1,0)}$, $y = t\chi^{(-1,0)}$, $z = \chi^{(0,1)}$ и $w = (t-1)\chi^{(0,-1)}$. Тогда x, y, z и w порождают алгебру $A[C,\mathfrak{D}]$ и связаны единственным соотношением $xy - zw = 1$.

□

Теперь мы готовы описать однородные ЛНД алгебры $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x,y,z,w]/(xy - zw - 1)$.

Теорема 3.19. [**44**, теорема 3.2] *Всякое однородное ЛНД на алгебре* $A = \mathbb{K}[x,y,z,w]/(xy - zw - 1)$ *с* $\mathbb{Z}^2$*-градуировкой* (3.2.1) *имеет один из следующих видов*

$$\lambda x^k w^l \left(w\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \lambda x^k z^l \left(z\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial w} \right),$$
$$\lambda y^k w^l \left(w\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \lambda y^k z^l \left(z\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial w} \right),$$

где $k, l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ *и* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Доказательство. Поскольку конус σ, участвующий в комбинаторном описании алгебры A, нулевой, на ней нет однородных ЛНД вертикального типа. Однородные же ЛНД горизонтального типа согласно теореме 2.10 соответствуют согласованным парам $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e)$. В нашем случае $\mathfrak{D} = \Delta_0 \cdot [0] + \Delta_1 \cdot [1]$, полиэдры Δ_0 и Δ_1 имеют по две вершины, и мы можем выбрать раскраску дивизора $\mathfrak{D}$ четырьмя способами. Рассмотрим раскраску $\widetilde{\mathfrak{D}}$, при которой у полиэдров Δ_0 и Δ_1 выбраны вершины $(0,0)$. Тогда $v_{\deg} = (0,0)$, $\deg\mathfrak{D} = [0,1] \times [0,1]$ и $\widetilde{\sigma} = \mathbb{Q}^3$. Как мы видели в примере 2.3, корни Демазюра конуса $\widetilde{\sigma}$, отвечающие ребру $(0,0,1)$ дуального конуса, имеют вид $(k,l,-1)$, где $k,l \in \mathbb{N}$. Проверяя условия определения 2.9, получаем, что элемент $e = (k,l)$ дополняет раскрашенный дивизор $\widetilde{\mathfrak{D}}$ до согласованной пары тогда и только тогда, когда $k, l \geqslant 1$. Пользуясь равенством (2.1.2), вычислим значение однородного ЛНД ∂, соответствующего согласованной паре $(\widetilde{\mathfrak{D}}, (k,l))$, на порождающих алгебры A:

$$\partial(x) = \partial(\chi^{(1,0)}) = 0, \quad \partial(y) = \partial(t\chi^{(-1,0)}) = \chi^{(k-1,l)} = x^{k-1}z^l,$$

$$\partial(z) = \partial(\chi^{(0,1)}) = 0, \quad \partial(w) = \partial((t-1)\chi^{(0,-1)}) = \chi^{(k,l-1)} = x^k z^{l-1}.$$

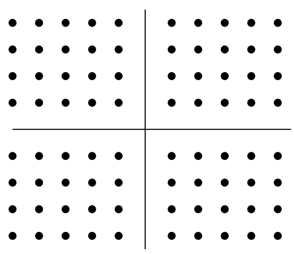
Таким образом,

$$\partial = x^{k-1}z^l\frac{\partial}{\partial y} + x^k y^{l-1}\frac{\partial}{\partial w}.$$

Рассмотрев аналогично оставшиеся три раскраски, получим, что однородные ЛНД исчерпываются указанными в теореме. $\square$

Замечание 3.20. Отметим, что все однородные ЛНД алгебры $\mathbb{K}[x,y,z,w]/(xy - zw - 1)$ являются ограничением на неё однородных ЛНД алгебры $\mathbb{K}[x,y,z,w]$.

Изобразим множество T^2-корней многообразия X.



Однопараметрические подгруппы в $\mathrm{Aut}(\mathrm{SL}(2))$, соответствующие однородным ЛНД, описанным в теореме 3.19, порождают множество *элементарных автоморфизмов*, определённое в [30]. В работах [1] и [30] доказано, что автоморфизм

$$\begin{pmatrix} x & z \\ w & y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - z(x+y) & z \\ w + (x-y)(x+y) - z(x+y)^2 & y + z(x+y) \end{pmatrix}$$

не раскладывается в композицию элементарных. Таким образом, получаем, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathrm{SL}(2))$ не порождается максимальным тором и корневыми подгруппами.

3.3. Четырёхмерная квадрика

Рассмотрим квадрику $X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{A}^5 \mid x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2 = 0\}$. На ней также есть действие тора T^3 сложности один

$$(3.3.1) \qquad (t_1, t_2, t_3) \circ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (t_1t_3x_1, t_1^{-1}t_3x_2, t_2t_3x_3, t_2^{-1}t_3x_4, t_3x_5),$$

где $(t_1, t_2, t_3) \in T^3$ и $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in X$. Тор T является максимальным в группе $\operatorname{Aut}(X)$, так как иначе X — торическое факториальное многообразие, а все такие многообразия являются гладкими. Для отыскания однородных ЛНД алгебры $A = \mathbb{K}[X]$ нам потребуется найти её комбинаторное описание. В данном случае однородные компоненты A конечномерны, поэтому кривая C проективна. Из наличия однородных ЛНД горизонтального типа (например, $x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial}{\partial x_4}$) следует, что $C = \mathbb{P}^1$. Нетрудно также найти дуальный к конусу, порождённому степенями образующих алгебры A, конус σ. Опишем остальные комбинаторные данные.

Утверждение 3.21. *Пусть* $\sigma = \operatorname{cone}((1,1,1),(-1,1,1),(1,-1,1),(-1,-1,1))$, $\sigma \subset N \cong \mathbb{Z}^3$, $C = \mathbb{P}^1$, $\Delta_0 = [0,1] \times \{0\} \times \{0\} + \sigma$, $\Delta_1 = \{0\} \times [0,1] \times \{0\} + \sigma$, $\Delta_\infty = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \sigma$ *и* $\mathfrak{D} = \triangle_0 \cdot [0] + \triangle_1 \cdot [1] + \triangle_\infty \cdot [\infty]$. *Тогда многообразие* $\operatorname{Spec} A[C, \mathfrak{D}]$ *изоморфно поверхности* X *с действием тора* (3.3.1).

Доказательство. Дуальный к конусу σ конус ω порождается векторами $(1,0,1)$, $(-1,0,1)$, $(0,1,1)$ и $(0,-1,1)$. Вычислим однородные компоненты A_m алгебры

$$A[C, \mathfrak{D}] = \bigoplus_{m \in \omega_M} A_m \chi^m.$$

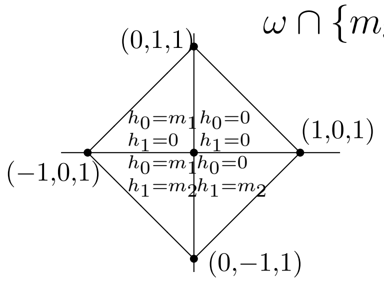
Пусть $\mathbb{K}(t)$ — поле рациональных функций на $\mathbb{P}^1$. Для $m = (m_1, m_2, m_3) \in \omega_M$ получаем

$$\mathfrak{D}(m) = \begin{cases} \frac{1}{2}(m_3 - m_1 - m_2)[\infty], & \text{если } m_1 \geqslant 0, m_2 \geqslant 0; \\ m_1[0] + \frac{1}{2}(m_3 - m_1 - m_2)[\infty], & \text{если } m_1 < 0, m_2 > 0; \\ m_2[1] + \frac{1}{2}(m_3 - m_1 - m_2)[\infty], & \text{если } m_1 > 0, m_2 < 0; \\ m_1[0] + m_2[1] + \frac{1}{2}(m_3 - m_1 - m_2)[\infty], & \text{если } m_1 \leqslant 0, m_2 \leqslant 0. \end{cases}$$

$$A_m = \begin{cases} \bigoplus\limits_{0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}(m_3-m_1-m_2)} \mathbb{K}t^r, & \text{если } m_1 \geqslant 0, m_2 \geqslant 0; \\ t^{-m_1} \bigoplus\limits_{0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}(m_3-3m_1-m_2)} \mathbb{K}t^r, & \text{если } m_1 < 0, m_2 > 0; \\ (t-1)^{-m_2} \bigoplus\limits_{0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}(m_3-m_1-3m_2)} \mathbb{K}t^r, & \text{если } m_1 > 0, m_2 < 0; \\ t^{-m_1}(t-1)^{-m_2} \bigoplus\limits_{0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}(m_3-3m_1-3m_2)} \mathbb{K}t^r, & \text{если } m_1 \leqslant 0, m_2 \leqslant 0. \end{cases}$$

Функции $x_1 = -\chi^{(1,0,1)}$, $x_2 = t\chi^{(-1,0,1)}$, $x_3 = \chi^{(0,1,1)}$, $x_4 = (t-1)\chi^{(0,-1,1)}$ и $x_5 = \chi^{(0,0,1)}$ порождают алгебру $A[C, \mathfrak{D}]$.

$\omega \cap \{m_3 = 1\} \subset M_{\mathbb{Q}}$



Они связаны единственным соотношением $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2 = 0$, и действие тора $T = \operatorname{Spec}\mathbb{K}[M]$ на $\operatorname{Spec} A[C, \mathfrak{D}]$ задаётся формулой (3.3.1). $\square$

Сейчас мы покажем, что всякое однородное ЛНД алгебры $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]/(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2)$ является ограничением некоторого однородного ЛНД алгебры многочленов $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$, сохраняющего идеал $(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2)$.

Теорема 3.22. [**44**, теорема 4.2] *Пусть на многообразии* $\{x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2 = 0\} \subset \mathbb{A}^5$ *действует тор* T^3 *по правилу* (3.3.1). *Тогда всякое однородное ЛНД на алгебре регулярных функций* $A = \mathbb{K}[X]$ *имеет вид*

$$\lambda x_i^k x_j^l x_5^p \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_{\bar{i}}} - x_i \frac{\partial}{\partial x_{\bar{j}}} \right) \quad \text{или} \tag{3.3.2}$$

$$x_i^k x_j^l (\beta x_1 x_2 - \alpha x_3 x_4)^p \left(\alpha x_j x_5 \frac{\partial}{\partial x_{\bar{i}}} + \beta x_i x_5 \frac{\partial}{\partial x_{\bar{j}}} - \frac{\alpha+\beta}{2} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_5} \right), \tag{3.3.3}$$

где $k, l, p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\{i, \bar{i}\} = \{1, 2\}$, $\{j, \bar{j}\} = \{3, 4\}$ *и* $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha + \beta \neq 0$.

Доказательство. Согласно утверждению 3.21, $A = A[C, \mathfrak{D}]$. Пересечение полиэдра $\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_\infty = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{\frac{1}{2}\} + \sigma$ со всеми рёбрами конуса σ непусто, следовательно, по лемме 2.7 на A нет однородных ЛНД вертикального типа.

Опишем однородные ЛНД горизонтального типа. Сначала выберем раскраску $\widetilde{\mathfrak{D}}$ дивизора $\mathfrak{D}$ так, что $z_\infty = [\infty]$ и у полиэдров Δ_0 и Δ_1 выбраны вершины $v_0 = (0,0,0)$ и $v_1 = (0,0,0)$ соответственно. В обозначениях определений 2.8-2.9 получаем $\Delta = \deg \mathfrak{D}|_{C'} - v_{\deg} = [0,1] \times [0,1] \times \{0\} + \sigma$. Примитивными векторами на рёбрах конуса $\widetilde{\sigma} \subset (N \oplus \mathbb{Z})_{\mathbb{Q}}$, порождённого $(\Delta, 0)$ и $(v_0, 1)$ и $(\Delta_\infty + \Delta + v_{\deg} - v_{z_0}, -1)$, являются векторы $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,0,1)$ и $2 \cdot (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$. Элемент $e = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{Z}^3$ составляет согласованную пару с раскрашенным дивизором $\widetilde{\mathfrak{D}}$ тогда и только тогда, когда

$$e_1 \geqslant 1, e_2 \geqslant 1 \ \text{ и } \ -e_1 - e_2 + e_3 + 2 \geqslant 0.$$

Однородное ЛНД, соответствующее паре $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e)$, действует на порождающих алгебры A следующим образом

$$\partial(x_1) = \partial(-\chi^{(1,0,1)}) = 0, \ \ \partial(x_3) = \partial(\chi^{(0,1,1)}) = 0, \ \ \partial(x_5) = \partial(\chi^{(0,0,1)}) = 0,$$

$$\partial(x_2) = \partial(t\chi^{(-1,0,1)}) = \chi^{(e_1-1, e_2, e_3+1)} = (-x_1)^{e_1-1} x_3^{e_2} x_5^{-e_1-e_2+e_3+2},$$

$$\partial(x_4) = \partial((t-1)\chi^{(0,-1,1)}) = \chi^{(e_1, e_2-1, e_3+1)} = (-x_1)^{e_1} x_3^{e_2-1} x_5^{-e_1-e_2+e_3+2}.$$

Рассматривая другие раскраски с $z_\infty = [\infty]$, получим все однородные ЛНД вида (3.3.2).

Пусть теперь $z_0 = [\infty]$, $z_\infty = [a]$, $a \neq 0, 1, \infty$, и на полиэдрах $\triangle_0$ и $\triangle_1$ выбраны вершины $(0,0,0)$. Полиэдр Δ_{z_0} имеет только одну вершину — $v_0 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ — она и будет отмеченной. В данном случае $\Delta = \Delta_0 + \Delta_1$ и конус $\widetilde{\sigma}$ порождается векторами $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ и $(0,0,0,-1)$. Элемент $e = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{Z}^3$ согласованной пары $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e)$ должен удовлетворять условиям

$$e_1 \geqslant 1, e_2 \geqslant 1 \ \text{ и } \ -e_1 - e_2 + e_3 + 1 \in 2\mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Для того, чтобы воспользоваться формулой (2.1.2), выберем в качестве порождающего в поле $\mathbb{K}(C)$ элемент $t' = \frac{1}{t-a}$. Тогда для дифференцирования, соответствующего паре $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e)$, имеем

$$\partial(x_1) = \partial(-\chi^{(1,0,1)}) = 0,\ \ \partial(x_3) = \partial(\chi^{(0,1,1)}) = 0,$$

$$\partial(x_5) = \partial(\chi^{(0,0,1)}) = \chi^{(e_1,e_2,e_3+1)}(t')^{\frac{e_1+e_2-e_3-1}{2}} = \\ = (-x_1)^{e_1}x_3^{e_3}((a-1)x_1x_2 + ax_3x_4)^{\frac{-e_1-e_2+e_3+1}{2}},$$

$$\partial(x_2) = \partial((a+(t')^{-1})\chi^{(-1,0,1)}) = a\chi^{(e_1-1,e_2,e_3+1)}(t')^{\frac{e_1+e_2-e_3-1}{2}} = \\ = a(-x_1)^{e_1-1}x_3^{e_2}x_5((a-1)x_1x_2 + ax_3x_4)^{\frac{-e_1-e_2+e_3+1}{2}},$$

$$\partial(x_4) = \partial((a-1+(t')^{-1})\chi^{(0,-1,1)}) = (a-1)\chi^{(e_1,e_2-1,e_3+1)}(t')^{\frac{e_1+e_2-e_3-1}{2}} = \\ = (a-1)(-x_1)^{e_1}x_3^{e_2-1}x_5((a-1)x_1x_2 + ax_3x_4)^{\frac{-e_1-e_2+e_3+1}{2}}.$$

Выбирая различные a и умножая дифференцирования на константу, получим все ЛНД вида (3.3.3). Случаям $a = 0$ и $a = 1$ соответствуют ЛНД (3.3.3) с $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

□

3.4. Конус над грассманианом

Пусть X — аффинный конус над грассманианом $\mathrm{Gr}(2,4)$. Многообразие $\mathrm{Gr}(2,4)$ является однородным пространством группы $\mathrm{SL}(4)$, и на нём действует трёхмерный максимальный тор этой группы. На конусе над ним дополнительно действует гомотетиями одномерный тор. В подходящих координатах $X = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \in \mathbb{A}^6 \mid x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0\}$ и действие четырёхмерного тора T на X задаётся следующим образом

$$(t_1,t_2,t_3,t_4) \circ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (t_1x_1, t_1^{-1}t_4x_2, t_2x_3, t_2^{-1}t_4x_4, t_3x_5, t_3^{-1}t_4x_6), \tag{3.4.1}$$

где $(t_1,t_2,t_3,t_4) \in T$ и $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \in X$. Как и в предыдущих случаях, тор T является максимальным в группе $\mathrm{Aut}(X)$. Цель данного раздела —

найти комбинаторное описание многообразия X и все однородные ЛНД на нём.

Утверждение 3.23. *Аффинный конус над* $Gr(2,4)$ *с действием* (3.4.1) *тора сложности один задаётся комбинаторными данными* $C = \mathbb{P}^1$, $\sigma = \mathrm{cone}((i,j,k,1) \mid i,j,k \in \{0,1\}) \subset N \cong \mathbb{Z}^4$ *и*

$$\mathfrak{D} = \Delta_{-1} \cdot [-1] + \Delta_0 \cdot [0] + \Delta_1 \cdot [1] + \Delta_\infty \cdot [\infty], \text{ где}$$

$$\Delta_0 = [0,1] \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} + \sigma, \quad \Delta_1 = \{0\} \times [0,1] \times \{0\} \times \{0\} + \sigma,$$

$$\Delta_{-1} = \{0\} \times \{0\} \times [0,1] \times \{0\} + \sigma \quad \text{и} \quad \Delta_\infty = (0,0,0,1) + \sigma$$

— полиэдры в пространстве $N_{\mathbb{Q}}$.

Доказательство. Утверждение проверяется аналогично предложению 3.21. В данном случае примитивными векторами на рёбрах конуса $\omega \subset M_{\mathbb{Q}}$, дуального к конусу σ, являются векторы $(1,0,0,0)$, $(-1,0,0,1)$, $(0,1,0,0)$, $(0,-1,0,1)$, $(0,0,1,0)$ и $(0,0,-1,1)$. Алгебра $A[C,\mathfrak{D}]$ порождается функциями $x_1 = \chi^{(1,0,0,0)}$, $x_2 = -2t\chi^{(-1,0,0,1)}$, $x_3 = \chi^{(0,1,0,0)}$, $x_4 = (t-1)\chi^{(0,-1,0,1)}$, $x_5 = \chi^{(0,0,1,0)}$ и $x_6 = (t+1)\chi^{(0,0,-1,1)}$, связанными единственным соотношением $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0$. □

Теорема 3.24. [**44**, теорема 5.2] *Всякое однородное ЛНД на алгебре регулярных функций многообразия* $X = \{x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0\} \subset \mathbb{A}^6$ *с действием тора* (3.4.1) *имеет вид*

(3.4.2)
$$x_{i_1}^{k_1}x_{i_2}^{k_2}x_{i_3}^{k_3}(\alpha_3x_3x_4 - \alpha_2x_5x_6)\left(\alpha_1x_{i_2}x_{i_3}\frac{\partial}{\partial x_{\bar{i}_1}} + \alpha_2x_{i_1}x_{i_3}\frac{\partial}{\partial x_{\bar{i}_2}} + \alpha_3x_{i_1}x_{i_2}\frac{\partial}{\partial x_{\bar{i}_3}}\right),$$

где $k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\{i_1,\bar{i}_1\} = \{1,2\}$, $\{i_2,\bar{i}_2\} = \{3,4\}$, $\{i_3,\bar{i}_3\} = \{5,6\}$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{K}$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0$ *и никакие два из* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ *не обращаются одновременно в ноль.*

Доказательство. Из леммы 2.7 следует, что на $A = \mathbb{K}[X] = A[C,\mathfrak{D}]$ нет однородных ЛНД вертикального типа. Действительно, полиэдр $\Delta_{-1} + \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_\infty = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times \{1\} + \sigma$ пересекается со всеми рёбрами конуса σ.

Перейдём к описанию однородных ЛНД горизонтального типа. Выберем раскраску дивизора $\widetilde{\mathfrak{D}}$ так, что $z_0 = [\infty]$, $z_\infty = [a]$, $a \neq 0, \pm 1, \infty$, и у всех полиэдров Δ_{-1}, Δ_0 и Δ_1 выбраны нулевые вершины. Получим, что $\Delta = \deg \mathfrak{D}|_{C'} - v_{\deg} = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times \{0\} + \sigma$. Конус $\widetilde{\sigma} \subset (N \oplus \mathbb{Z})_{\mathbb{Q}}$ порождается векторами $(1,0,0,0,0)$, $(0,1,0,0,0)$, $(0,0,1,0,0)$, $(0,0,0,1,1)$ и $(0,0,0,0,-1)$. Элемент $e = (e_1, e_2, e_3, e_4) \in M$ согласованной пары $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e)$ должен удовлетворять условиям

$$e_1 \geqslant 1, e_2 \geqslant 1, e_3 \geqslant 1 \ \text{ и } \ e_4 + 1 \geqslant 0.$$

Положим $t' = \frac{1}{t-a}$ и вычислим, как соответствующее однородное ЛНД действует на порождающих алгебры A:

$$\partial(x_1) = \partial(\chi^{(1,0,0,0)}) = 0, \ \ \partial(x_3) = \partial(\chi^{(0,1,0,0)}) = 0, \ \ \partial(x_5) = \partial(\chi^{(0,0,1,0)}) = 0,$$

$$\partial(x_2) = \partial(-2((t')^{-1} + a)\chi^{(-1,0,0,1)}) = -2a\chi^{(e_1-1,e_2,e_3,e_4+1)}(t')^{-1-e_4} =$$
$$= -2a x_1^{e_1-1} x_3^{e_2} x_5^{e_3} \left(\frac{(a+1)x_3x_4 - (a+1)x_5x_6}{2}\right)^{e_4+1},$$

$$\partial(x_4) = \partial(((t')^{-1} + a - 1)\chi^{(0,-1,0,1)}) = (a-1)\chi^{(e_1,e_2-1,e_3,e_4+1)}(t')^{-1-e_4} =$$
$$= (a-1) x_1^{e_1} x_3^{e_2-1} x_5^{e_3} \left(\frac{(a+1)x_3x_4 - (a+1)x_5x_6}{2}\right)^{e_4+1},$$

$$\partial(x_6) = \partial(((t')^{-1} + a + 1)\chi^{(0,0,-1,1)}) = (a+1)\chi^{(e_1,e_2,e_3-1,e_4+1)}(t')^{-1-e_4} =$$
$$= (a+1) x_1^{e_1} x_3^{e_2} x_5^{e_3-1} \left(\frac{(a+1)x_3x_4 - (a-1)x_5x_6}{2}\right)^{e_4+1}.$$

Получаем ЛНД вида (3.4.2). Оставшиеся раскраски рассматриваются аналогично.

$\square$

Литература

[1] И.В. Аржанцев, С. А. Гайфуллин, *Кольца Кокса, полугруппы и автоморфизмы аффинных многообразий*, Математический сборник, 201, 2010, вып. 1, 3–24

[2] И.В. Аржанцев, М.Г. Зайденберг, К.Г. Куюмжиян, *Многообразия флагов, торические многообразия и надстройки: три примера бесконечной транзитивности*, Математический сборник, 203, 2012, вып. 7, 3–30

[3] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов, *Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий*, Известия Академии наук СССР, серия математическая, 36, 1972, 4, 749–764

[4] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов, Теория инвариантов, Итоги науки и техн. Сер. соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — Т. 55. — ВИНИТИ, 1989, 137–309

[5] В.И. Данилов, *Геометрия торических многообразий*, Успехи математических наук, 33(200), 1978, no.2, 85–134

[6] В.Л. Попов, *Торы в группах Кремоны*, Известия РАН, серия математическая, 77, 2013, no. 7, 103–134

[7] Д.А. Тимашёв, *Классификация G-многообразий сложности 1*, Известия РАН, серия математическая, 61, 1997, 2, 127–162

[8] K. Altmann and J. Hausen, *Polyhedral divisors and algebraic torus actions*, Mathematische Annalen, 334, 2006, 557–607

[9] K. Altmann, J. Hausen, H. Süss, *Gluing affine torus actions via divisorial fans*, Transformation Groups, 13, 2008, 215–242

[10] I. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen, A. Laface, *Cox Rings*, arXiv:1003.4229, 2010, http://www.math.uni-tuebingen.de/user/hausen/CoxRings/download.php?name=coxrings.pdf

[11] I.V. Arzhantsev, J. Hausen, *Geometric Invariant Theory via Cox rings*, Journal of Pure and Applied Algebra, 213, 2009, 154–172

[12] I. Arzhantsev, J. Hausen, E. Herppich, A. Liendo, *The automorphism group of a variety with torus action of complexity one*, arXiv:1202.4568v2, 2012, to appear in Moscow Mathematical Journal

[13] I. Arzhantsev, A. Liendo, *Polyhedral divisors and SL_2-actions on affine $\mathbb{T}$-varieties*, Michigan Mathematical Journal, 61, 2012, no. 4, 731–762

[14] F. Berchtold, J. Hausen, *GIT-equivalence beyond the ample cone*, Michigan Mathematical Journal, 54, 2006, 3, 483–516

[15] A. Białynicki-Birula, *Remarks on the action of an algebraic torus on k^n, I*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math., Astr., Phys. XIV, 1967, 177–188

[16] A. Białynicki-Birula, *Remarks on the action of an algebraic torus on kn, II*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math., Astr., Phys. XV, 1967, 123–125

[17] B. Coomes, V. Zurkowski, *Linearization of polynomial flows and spectra of derivations*, J. Dynamics Differential Equations 3, 1991, 26–66

[18] D. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, Journal of Algebraic Geometry, 4, 1995, 15–50

[19] D. Cox, J. Little, H. Schenck, Toric varieties, Graduate Studies in Mathematics 124, AMS, Providence, RI, 2011

[20] M. Demazure, *Sous-groupes algebriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3, 1970, 507–588

[21] I.V. Dolgachev, Y. Hu, *Variation of Geometric Invariant Theory quontients*, (With an appendix: "An example of a thick wall" by N. Ressayre), Publications Mathématiques, Institut des Hautes Études Scientifiques, 87, 1998, 5–56

[22] A. van den Essen, Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture, Birkhauser, Boston, 2000

[23] H. Flenner, M. Zaidenderg, *Normal affine surfaces with $\mathbb{C}^*$-actions*, Osaka Journal of Mathematics, 40, 2003, 981–1009

[24] H. Flenner, M. Zaidenderg, *Locally nilpotent derivations on affine surfaces with a* $\mathbb{C}^*$*-action*, Osaka Journal of Mathematics, 42, 2005, 931–974

[25] G. Frendenburg, Algebraic theory of locally nilpotent derivations, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 136, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups 7, Berlin: Springer, 2006

[26] W. Fulton, Introduction to toric varieties, The William H. Roever Lectures in Geometry, Annals of Mathematics Studies, 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993

[27] B. Hassett, Yu. Tschinkel, *Geometry of equivariant compactifications of* $\mathbb{G}_a^n$, International Mathematics Research Notices, 20, 1999, 1211–1230

[28] J. Hausen, H. Süss, *The Cox ring of an algebraic variety with torus action*, Advances in Mathematics, 225, 2010, no. 2, 977–1012

[29] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, Toroidal Embeddings I, Lecture Notes in Mathematics, 339, 1973

[30] S. Lamy, S. Vénéreau, *The tame and the wild automorphisms of an affine quadric threefold*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 65, 2013, no. 1, 299–320

[31] A. Liendo, *Affine* $\mathbb{T}$*-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations*, Transformation Groups, 15, 2010, no. 2, 389–425

[32] A. Liendo, $\mathbb{G}_a$*-actions of fiber type on affine* $\mathbb{T}$*-varieties*, Journal of Algebra, 324, 2010, 3653–3665

[33] A. Liendo, *Roots of the affine Cremona group*, Transformation Groups, 16, 2011, no. 4, 1137–1142

[34] L. Makar-Limanov, *On the group of automorphisms of a class of surfaces*, Israel Journal of Mathematics, 69, 1990, 250–256

[35] L. Makar-Limanov, *On the hypersurface* $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$ *in* $\mathbb{C}^4$ *or a* $\mathbb{C}^3$*-like threefold which is not* $\mathbb{C}^3$, Israel Journal of Mathematics, 96, 1996, 419–429

[36] L. Makar-Limanov, *On the group of automorphisms of a surface* $x^ny = p(z)$, Israel Journal of Mathematics, 121, 2001, 113–123

[37] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, Geometric Invariant Theory, 3rd Edition, in: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, 1993

[38] T. Oda, Convex Bodies and Algebraic Geometry, Springer-Verlag, Berlin, 1988

[39] V.L. Popov, *Problems for problem session, Affine Algebraic Geometry*, Contemporary Mathematics, 369, 2005, 12–16

[40] N. Ressayre, *The GIT-equivalence for G-line bundles*, Geometriae Dedicata, 81, 2000, no. 1–3, 295–324

[41] I. Shafarevich, *On some infinite dimensional algebraic groups*, Rendiconti Scienze Matemàtiche e Applicazioni, 25, 1966, 2, 208–212

[42] M. Thaddeus, *Geometric Invariant Theory and flips*, Journal of the American Mathematical Society, 9, 1996, 691–723

[43] D. Timashev, *Torus actions of complexity one*, Toric topology, Contemporary Mathematics, 460, American Mathematical Society, Proividence, RI, 2008, 349–364

Публикации автора по теме диссертации

[44] И.В. Аржанцев, П.Ю. Котенкова, *$\mathbb{G}_a$-действия на T-многообразиях сложности один*, депонировано в ВИНИТИ РАН, 22–B2014 от 15.01.2014, 40 стр.

[45] П.Ю. Котенкова, *GIT-эквивалентность и диагональные действия*, Математические заметки, 90, 2, 2011, 269–279

[46] P. Kotenkova, *On restriction of roots on affine T-varieties*, Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry, DOI 10.1007/s13366-013-0179-x, 2013