Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.2

Никитин Егор Владимирович

ДРОБНЫЕ КЛАССЫ СОБОЛЕВА НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2014

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор Богачев Владимир Игоревич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
Кириллов Андрей Игоревич,
РФФИ, начальник управления конкурсных проектов
по математике, механике и информатике

кандидат физико-математических наук
Кругова Елена Павловна, ВИНИТИ РАН,
старший научный сотрудник ОНИ ПФМНиИТ

Ведущая организация: Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Защита диссертации состоится 25 апреля 2014 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, 27).

Автореферат разослан 25 марта 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор В.Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. На конечномерных пространствах существуют различные способы определения пространств Соболева с дробным порядком дифференцируемости. Среди них наиболее хорошо изучены пространства Бесова[1,2], а также близкие к ним пространства Слободецкого[3]. Подобные дробные шкалы пространств широко применяются в теории дифференциальных уравнений с частными производными (см. монографии[4,5]). Пространства типа Бесова тесно связаны с пространствами Соболева. Как правило, одни вложены в другие, а в некоторых случаях совпадают. Один из важнейших известных результатов состоит в том, что следы функций из пространства Соболева на $\mathbb{R}^n$ представляются функциями из пространства Бесова на соответствующем подпространстве $\mathbb{R}^{n-k}$.

Классы Соболева над бесконечномерными пространствами впервые были определены и исследованы Н.Н. Фроловым[6] в начале 1970-х годов также с целью применения к дифференциальным уравнениям.

Несколько позже такие пространства стали использоваться П. Маллявэном в разработанном им «исчислении Маллявэна»[7] и быстро стали весьма популярным объектом исследования на стыке стохастического анализа, нелинейного функционального анализа и теории меры (см.

[1] О.В. Бесов. О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения. ДАН СССР. 1959. Т. 126, N 6. С. 1163–1165.

[2] О.В. Бесов. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. Труды МИАН им. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 42–81.

[3] Л.Н. Слободецкий. Обобщенные пространства С.Л.Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. Ученые записки ЛГПИ им. А.И. Герцена. 1958. Т. 197. С. 54–112.

[4] Х. Трибель. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. Мир, М., 1980.

[5] М.С. Агранович. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. МЦНМО, М., 2013.

[6] Н.Н. Фролов. Теоремы вложения для пространств функций счетного числа переменных I. Тр. Ин-та матем. Воронеж. ун-та. Изд-во Воронеж. ун-та. 1970. Вып. 1. С. 205–218.

[7] P. Malliavin. Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators. Proc. Intern. Symp. on Stoch. Diff. Eq. P. 195–263. Wiley, New York – Chichester – Brisbane, 1978.

монографию[8]). Современное состояние их теории представлено в книге[9]. Систематическое изучение пространств Бесова над бесконечномерными пространствами пока не осуществлялось. В нескольких работах для определения пространств типа Бесова применялся вещественный метод теории интерполяции, который также может использоваться и в конечномерном случае. Вещественный интерполяционный метод в разных формах предложили Ж.Л. Лионс, Ж. Петре[10] и другие математики.

В работе 2003 года Э. Эро, В.И. Богачев и П. Леско[11] использовали вещественный интерполяционный K-метод для определения дробных классов Соболева $E^{\sigma,p}(\gamma)$, $0 < \sigma < 1$, на локально выпуклом пространстве с гауссовской мерой γ. Основным результатом этой работы является теорема о том, что сужение соболевской функции на подпространства $E + y$, параллельные конечномерному подпространству E из пространства Камерона–Мартина, лежат в классе $E^{\sigma,p}(\gamma^y)$ по условным мерам на $E + y$ при почти всех y относительно проекции меры на дополняющее E подпространство.

В упомянутой работе Э. Эро, В.И. Богачева и П. Леско используются результаты, полученные в известной работе С. Ватанабэ[12], где пространства $E^{s,p}(\gamma)$ определяются интерполяционным методом следов Ж.Л. Лионса для произвольного s, при этом для целых s пространство $E^{s,p}(\gamma)$ полагается равным пространству Соболева. Пространства $E^{s,p}(\gamma)$ оказываются удобнее пространств Соболева в первую очередь благодаря свойству инвариантности относительно композиций с липшицевыми функциями. Эквивалентность определения, которое дает Ватанабэ, определению через интерполяционный K-метод для $0 < s < 1$ можно считать очевидной, однако в общем случае для утверждения эквивалентности требуется

---

[8]I. Shigekawa. Stochastic analysis. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2004.

[9]В.И. Богачев. Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», М. – Ижевск, 2008.

[10]J.L. Lions, J. Peetre. Sur une classe d'espaces d'interpolation. Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1964. V. 19. P. 6–64.

[11]Э. Эро, В.И. Богачев, П. Леско. Конечномерные сечения функций из дробных классов Соболева на бесконечномерных пространствах. Докл. РАН. 2003. Т. 391, N 3. С. 320–323.

[12]S. Wanatabe. Fractional order Sobolev spaces on Wiener space. Probab. Theory Related Fields. 1993. V. 95. P. 175–198.

дополнительное свойство пространств Соболева, которое доказано в диссертационной работе. Заметим также, что для целых s интерполяционный K-метод дает пространства, которые для $p \neq 2$ не совпадают с пространствами Соболева. Классические пространства Бесова $B^{s,p,q}$ также имеют дополнительный индекс q, который позволяет дать более точную шкалу пространств, чем пространства Соболева. Пространства $E^{s,p}$ при этом соответствуют случаю равных q и p.

В недавней работе Е. Пинеды и В. Урбино[13] подробно рассматриваются свойства пространств Бесова $B^s_{p,q}(\gamma_d)$, определяемых с помощью полугруппы Пуассона Q_t на конечномерном пространстве с гауссовской мерой γ_d. Этот метод может быть успешно перенесен с небольшими изменениями на бесконечномерные пространства. Доказательства большинства основных свойств при этом остаются неизменными или легко модифицируются с применением теории полугрупп.

Существует направление изучения пространств типа Бесова и пространств типа Трибеля–Лизоркина, связанных с неотрицательным самосопряженным оператором L, на метрических пространствах с мерами, обладающими свойством удвоения[14,15]. Это сравнительно новое направление является близким к конечномерному случаю. Связь с ним в диссертации подробно не рассматривается.

В диссертационной работе вещественным интерполяционным K-методом определяются пространства типа Бесова $B^{s,p,q}$. Устанавливаются интерполяционные свойства пространств Соболева, которые позволяют получить базовые результаты типа теорем вложения для пространств $B^{s,p,q}$ и доказать их эквивалентность пространствам, вводимым Ватанабэ, для равных q и p и дробных s. Кроме того, в диссертационной работе дается альтернативное определение пространств типа Бесова, по методу работы

[13] E. Pineda, W. Urbino. Some results on Gaussian Besov–Lipschitz spaces and Gaussian Triebel–Lizorkin spaces. J. Approx. Theory. 2009. V. 161. P. 529–564.

[14] D. Yang, W. Yuan. New Besov–type spaces and Triebel–Lizorkin-type spaces including Q spaces. Math. Z. 2010. B. 265. S. 451–480.

[15] L. Liu, D. Yang, W. Yuan. Besov-type and Triebel–Lizorkin-type spaces associated with heat kernels. arXiv:1309.1366. Preprint. 2013.

Е. Пинеды, В. Урбино, через полугруппу, близкую полугруппе Пуассона Q_t. Это определение оказывается эквивалентным интерполяционному определению. В то время как определение через полугруппу Пуассона позволяет разбирать частные случаи (например, оно используется для демонстрации большей точности шкалы пространств Бесова), интерполяционное определение кажется более эффективным в общих вопросах. Например, это определение, как представляется, может быть успешно применено для изучения следов функций Соболева на подпространствах и гиперповерхностях.

Цель работы. Исследование различных определений дробных классов Соболева, в том числе пространств типа Бесова, а также связей между этими определениями и связей пространств типа Бесова и пространств Соболева.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Введено несколько определений пространств типа Бесова на локально выпуклых пространствах с гауссовскими мерами и доказана равносильность определений, использующих интерполяционные методы, а также определения через полугруппу Пуассона.

2. Установлено свойство приближения в L^p соболевских функций с меньшим индексом дифференцируемости соболевскими функциями с большим индексом дифференцируемости и контролируемой соболевской нормой приближающей функции. Для $p = 2$ индексы могут быть произвольными действительными, для $p > 1$ индексы предполагаются целыми.

3. Доказан ряд свойств типа вложения пространств Бесова и Соболева. Доказано, что пространства типа Бесова $B^{s,2,2}$ совпадают с пространствами Соболева $H^{2,s}$. Дается пример, показывающий, что для $q > 2$

пространства $B^{s,2,q}$ не совпадают с $H^{2,s}$ и лежат во всех H^{2,s_1} с меньшим индексом s_1. Таким образом, пространства типа Бесова дают более точную шкалу пространств, чем пространства Соболева.

Методы исследования. В работе применяются методы функционального анализа, теории меры, теории интерполяционных пространств, элементы стохастического анализа, а также некоторые оригинальные конструкции.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в области функционального анализа и теории случайных процессов.

Апробация диссертации. По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах:

– научно-исследовательском семинаре кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В.И. Богачева, Н.А. Толмачева и С.В. Шапошникова (2009–2013 гг.)
– семинаре «Исчисление Маллявэна и его приложения» под руководством А.Ю. Пилипенко и А.А. Дороговцева в Институте математики НАН Украины (Киев, 2013 г.)
– научно-исследовательском семинаре «Анализ и дифференциальные уравнения» кафедры ФН-2 «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (2014 г.)

Основные результаты диссертации докладывались также на международной конференции «Ломоносов–2013» (Москва, 2013 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора, из которых 3 — в журналах из перечня ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, включающих 5 параграфов, и списка литературы из 31 наименования, включая работы автора. Общий объем диссертации составляет 59 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Глава 1.

В первой главе рассматривается интерполяционный подход к определению пространств типа Бесова на бесконечномерных пространствах. Доказывается вложение этих пространств в пространства Соболева и ряд других свойств.

Рассматривается локально выпуклое пространство X, на котором определена центрированная радоновская гауссовская мера γ. Пространства Соболева на X можно задать равенством

$$H^{p,r}(\gamma) := V_r(L^p(\gamma)),$$

где оператор V_r на функциях $f \in L^p(\gamma)$ задается равенствами

$$V_r f := \Gamma(r/2)^{-1} \int_0^\infty t^{r/2-1} e^{-t} T_t f dt,$$
$$T_t f(x) = \int_X f(e^{-t}x - \sqrt{1-e^{-2t}}\, y)\gamma(dy).$$

Пространства типа Бесова определяются с помощью вещественного интерполяционного K-метода. Приведем определение этого метода. Пусть X_0, X_1 – нормированные пространства и

$$K(t;u) := \inf\{\|u_0\|_{X_0} + t\|u_1\|_{X_1} \colon u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0, u_1 \in X_1\}.$$

Если $0 \le \theta < 1$ и $1 \le q \le \infty$, то $(X_0, X_1)_{\theta;q,K}$ обозначает пространство всех функций $u \in X_0 + X_1$ таких, что функция $t \mapsto t^{-\theta} K(t;u)$ входит в $L^q_* := L^q(0,\infty; dt/t)$.

Определение 1. *Пусть* $0 < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, m *— наименьшее целое, большее* s. *Пространством Бесова* $B^{s;p,q}(\gamma)$ *назовем определенное с помощью вещественного интерполяционного* K*-метода* *интерполяционное пространство между* $L^p(\gamma)$ *и* $H^{p,m}(\gamma)$ *с индексом* $\theta = s/m$, *т.е.*

$$B^{s;p,q}(\gamma) = \big(L^p(\gamma),\ H^{p,m}(\gamma)\big)_{s/m,q;K}.$$

Ряд свойств пространств Бесова доказывается с помощью так называемой реитерационной теоремы, известной в рамках вещественного интерполяционного метода. Чтобы ее применить, нужно доказать, что пространство Соболева само является в определенном смысле промежуточным между $L^p(\gamma)$ и пространствами Соболева с более высокими индексами дифференцируемости. Для доказательства этого утверждения потребуется установить два свойства пространств Соболева.

Первым является следующее неравенство, верное для всех функций $u \in H^{p,r}(\gamma)$:

$$\|u\|_{p,r} \le C(r,s)\|u\|_p^{1-\frac{r}{s}}\|u\|_{p,s}^{\frac{r}{s}}, \quad 0 < r < s,\ r,s \in \mathbb{R}.$$

Второе необходимое нам свойство пространств Соболева содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $p > 1$. *Пусть* $k, m \in \mathbb{Z}$, $0 < k < m$. *Тогда для всякой функции* $u \in H^{p,k}(\gamma)$ *и для всякого достаточно малого* $\varepsilon > 0$ *найдется такая функция* $u_\varepsilon \in H^{p,m}(\gamma)$, *что*

$$\|u - u_\varepsilon\|_p \le C(p,k)\varepsilon^k\|u\|_{p,k}, \quad \|u_\varepsilon\|_{p,m} \le C(p,k,m)\varepsilon^{k-m}\|u\|_{p,k}.$$

В случае $p = 2$ эту теорему можно усилить, распространив на пространства Соболева дробных порядков дифференцируемости. Это позволит для $p = 2$ вывести некоторые свойства вложений, не имеющие аналогов в конечномерном случае, где в теории пространств Бесова рассматриваются классы Соболева только целых индексов.

Пусть X, X_0, X_1 — нормированные пространства,

$$J(t;u) := \max\,\{\|u\|_{X_0},\ t\|u\|_{X_1}\}.$$

По определению, $X \in \mathcal{H}(\theta; X_0, X_1)$, где $0 \le \theta \le 1$, если

$$K(t;u) \le C(\theta)t^\theta\|u\|_X \ \ \forall u \in X,$$

$$\|u\|_X \le C(\theta)t^{-\theta}J(t;u) \ \ \forall u \in X_0 \cap X_1.$$

Пространство Соболева $H^{p,k}(\gamma)$ является промежуточным между $L^p(\gamma)$ и $H^{p,m}(\gamma)$ в том смысле, что оно принадлежит к классу $\mathcal{H}\big(k/m; L^p(\gamma), H^{p,m}(\gamma)\big)$. Точный результат дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $p > 1$. Для всех $k,\ m \in \mathbb{Z}$, $0 < k < m$ имеем*

$$H^{p,k}(\gamma) \in \mathcal{H}\big(k/m; L^p(\gamma), H^{p,m}(\gamma)\big).$$

Кроме того, для всех $r, s \in \mathbb{R}$, $0 < r < s$ имеем

$$H^{2,r}(\gamma) \in \mathcal{H}\big(r/s; L^2(\gamma), H^{2,s}(\gamma)\big), \quad H^{p,r}(\gamma) \in \mathcal{J}\big(r/s; L^p(\gamma), H^{p,s}(\gamma)\big).$$

Применяя эту теорему и реитерационную теорему, мы можем установить ряд свойств пространств Бесова.

Теорема 3. *Пусть $p > 1$.* 1) *Если в определении $B^{s;p,q}(\gamma)$ в качестве m брать любые целые, большие s, то получим одно и то же пространство.*

2) *Если $s_1 > s$ и $1 \le q, q_1 \le \infty$, то*

$$B^{s;p,q}(\gamma) = \big(L^p(\gamma), B^{s_1;p,q_1}(\gamma)\big)_{s/s_1;q,K},$$

в частности, $B^{s_1;p,q_1}(\gamma) \subset B^{s;p,q}(\gamma)$.

3) *Если $0 \le k < s < m$, $k, m \in \mathbb{Z}$ и $s = (1-\theta)k + \theta m$, то*

$$B^{s;p,q}(\gamma) = \big(H^{p,k}(\gamma), H^{p,m}(\gamma)\big)_{\theta;q,K},$$

в частности, $H^{p,m}(\gamma) \subset B^{s;p,q}(\gamma) \subset H^{p,k}(\gamma)$.

4) *Если $s_1 < s < s_2$, $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$ и $1 \le q_1, q_2 \le \infty$, то*

$$B^{s;p,q}(\gamma) = \big(B^{s_1;p,q_1}(\gamma), B^{s_2;p,q_2}(\gamma)\big)_{\theta;q,K}.$$

5) *Если m целое, то $B^{m;p,1}(\gamma) \subset H^{p,m}(\gamma) \subset B^{m;p,\infty}(\gamma)$.*

Для $p = 2$ получаем более сильные свойства.

Теорема 4. 1) *Если $0 \le r < s < t$, $r, t \in \mathbb{R}$ и $s = (1-\theta)r + \theta t$, то*

$$B^{s;p,q}(\gamma) \subset \big(H^{p,r}(\gamma), H^{p,t}(\gamma)\big)_{\theta;q,K}.$$

В частности, $B^{s;p,q}(\gamma) \subset H^{p,t}(\gamma)$. Кроме того, $B^{s;p,1}(\gamma) \subset H^{p,s}(\gamma)$.

2) *Если* $0 \le r < s < t$, $r, t \in \mathbb{R}$ *и* $s = (1-\theta)r + \theta t$, *то*

$$B^{s;2,q}(\gamma) = \big(H^{2,r}(\gamma), H^{2,t}(\gamma)\big)_{\theta;q,K}.$$

В частности, $H^{2,r}(\gamma) \subset B^{s;2,q}(\gamma) \subset H^{2,t}(\gamma)$.

3) $B^{s;2,1}(\gamma) \subset H^{2,s}(\gamma) \subset B^{s;2,\infty}(\gamma)$.

Таким образом, как и в конечномерном случае, определенные нами пространства Бесова $B^{s;p,q}(\gamma)$ вкладываются в пространства Соболева, индекс дифференцируемости которых равен наименьшему целому числу, меньшему s. Кроме того, для любого $p > 1$ пространство Бесова $B^{s;p,q}(\gamma)$ вложено в пространство Соболева $H^{p,t}(\gamma)$ с любым $t > s$, а для $p = 2$ верно и обратное вложение.

В качестве применения указанных свойств доказывается следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $r > 0$, $s > 0$. *Оператор* $V_r = (I - L)^{-r/2}$ *— ограниченный оператор из* $B^{s;p,q}(\gamma)$ *в* $B^{r+s;p,q}(\gamma)$.

Определенные нами пространств Бесова $B^{s,p,q}(\gamma)$ связаны с дробными классами Соболева $E^{s,p}(\gamma)$, которые определяются с помощью интерполяционного метода следов Ж.-Л. Лионса. Пусть B_1 и B_2 — вещественные сепарабельные банаховы пространства и $B_1 \subseteq B_2$. Для $x \in B_2 \backslash B_1$ положим $|x|_{B_1} = \infty$ по определению. Для $1 < p < \infty$ и $\nu \in \mathbb{R}$ банахово пространство $W = W(q, \nu; B_1, B_2)$ определяется как множество всех абсолютно непрерывных функций $f\colon (0,\infty) \to B_2$, таких что $t^\nu f \in L_q((0,\infty) \to B_1)$ и $t^\nu f' \in L_q((0,\infty) \to B_2)$, с нормой

$$\|f\|_W = \max(\|t^\nu f\|_{L_q((0,\infty)\to B_1)}, \|t^\nu f'\|_{L_q((0,\infty)\to B_2)}).$$

Если $\theta = \frac{1}{p} + \nu < 1$, то $\lim_{t\downarrow 0} f(t) = f(0)$ существует в B_2, и мы полагаем

$$T = T^{\theta,q}(B_1, B_2) = \{f(0) | f \in W(q, \nu; B_1, B_2)\},$$

$$\|u\|_T = \inf\{\|f\|_W | f \in W(q, \nu; B_1, B_2), f(0) = u\}, \quad u \in T.$$

Определение 2. *Дробные классы Соболева* $E^{s,p}(\gamma)$, $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$, *задаются равенством*

$$E^{s,p}(\gamma) = H^{p,s}(\gamma), \text{ если } s \in \mathbb{Z},$$

и равенством

$$E^{s,p}(\gamma) = T^{1-\sigma}(E^{k+1,p}(\gamma), E^{k,p}(\gamma)), \text{ если } \ s = k+\sigma, k \in \mathbb{Z}, 0 < \sigma < 1.$$

Из общей теории интерполяционных пространств известно, что интерполяционный метод следов эквивалентен вещественному интерполяционному K-методу, который мы использовали для определения пространств Бесова $B^{s;p,q}(\gamma)$. Благодаря этому, а также доказанным свойствам $B^{s;p,q}(\gamma)$ мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 6. *Для $1 < p < \infty$ и дробных s пространства $E^{s,p}(\gamma)$ совпадают с пространствами $B^{s;p,p}(\gamma)$, а их нормы эквивалентны. При $p = 2$ пространства $E^{s,2}(\gamma)$ и $B^{s;2,2}(\gamma)$ совпадают для всех $s > 0$.*

Из этой теоремы, применяя результат, доказанный в работе Ватанабэ, получаем такое следствие.

Следствие 1. *Пусть $s > 0$, $\varepsilon > 0$, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$ и $1 < p < \infty$. Справедливы вложения*

$$B^{s+\varepsilon,p,q_1}(\gamma) \subset H^{p,s}(\gamma) \subset B^{s-\varepsilon,p,q_2}(\gamma).$$

Можно определить классы Бесова с отрицательным индексом дифференцируемости.

Определение 3. *Для $k \in \mathbb{N}$, $0 < \sigma < 0$ пространства Бесова $B^{-k+\sigma,p,q}(\gamma)$ определяются равенством*

$$B^{-k+\sigma,p,q}(\gamma) = \big(H^{p,-k}(\gamma), H^{p,-k+1}(\gamma)\big)_{\sigma,q;K},$$

а пространства $B^{-k,p,q}(\gamma)$ — равенством

$$B^{-k,p,q}(\gamma) = \big(H^{p,-k+1}(\gamma), H^{p,-k-1}(\gamma)\big)_{1/2,q;K}.$$

Пространства, определенные через вещественный интерполяционный метод, обладают свойством дуальности. Легко видеть, что для любых действительных s имеет место равенство

$$\big(B^{s,p,q}(\gamma)\big)' = B^{-s,p',q'}(\gamma), \ p^{-1} + p'^{-1} = 1, \ q^{-1} + q'^{-1} = 1.$$

Для интерполяционных пространств также известна характеризация через полугруппы. Для $\alpha \geq 0$ положим

$$Q_t^{(\alpha)} = \int_0^\infty T_t^{(\alpha)} \lambda_t^{1/2}(ds), \ \lambda_t^{(1/2)}(ds) := \frac{t}{2\sqrt{\pi}} e^{-t^2/4s} s^{-3/2} ds,$$

где $T_t^{(\alpha)} = e^{-\alpha t} T_t$. При $\alpha = 0$ полугруппа $Q_t^{(0)} = Q_t$ называется полугруппой Пуассона (полугруппой Коши).

Предложение 1. *Пусть* $s = k + \sigma$, $k \in \mathbb{Z}$ *и* $0 < \sigma < 1$. *Тогда для пространств* $B^{s,p,q}(\gamma) = \big(H^{p,k}(\gamma), H^{p,k+1}(\gamma)\big)_{\sigma,q;K}$ *справедливо представление*

$$B^{s,p,q}(\gamma) = \Big\{ u \ \Big| \ u \in H^{p,k}(\gamma),$$
$$\|u\|_{s,p,q}^{\sim} := \|u\|_{p,k} + \left(\int_0^1 t^{-1-\sigma q} \|u - Q_t^{(1)} u\|_{p,k}^q dt \right)^{1/q} < \infty \Big\},$$

Пространства $E^{s,p}(\gamma)$ *имеют аналогичное представление, где* $q = p$, *так как* $E(s,p)(\gamma) = B^{s,p,p}(\gamma)$.

Для целых индексов дифференцируемости, рассмотрев $B^{k,p,q}(\gamma)$ как интерполяционное пространство между $H^{p,k}(\gamma)$ и $H^{p,k+1}(\gamma)$, получаем несколько другое представление.

Предложение 2. *Пусть* $k \in \mathbb{Z}$. *Тогда для пространств* $B^{k,p,q}(\gamma)$ *справедливо представление*

$$B^{k,p,q}(\gamma) = \Big\{ u \ \Big| \ u \in H^{p,k-1}(\gamma),$$
$$\|u\|_{k,p,q}^{\sim} := \|u\|_{p,k-1} + \left(\int_0^1 t^{-1-q} \|(I - Q_t^{(1)})^2 u\|_{p,k-1}^q dt \right)^{1/q} < \infty \Big\}.$$

Глава 2.

Во второй главе дается определение, аналогичное используемому в работе Е. Пинеды, В. Урбино, где пространства Бесова определяются на конечномерных пространствах с гауссовской мерой. Цель главы — доказать, что этот метод эквивалентен основному интерполяционному определению, и вывести свойства вложения пространств Бесова и Соболева с одинаковыми индексами дифференцируемости.

Определение 4. *Пусть $s > 0$, m — наименьшее целое больше, чем s, $1 \le p, q \le \infty$. При $1 \le q < \infty$ пространство Бесова–Липшица $B^s_{p,q}(\gamma)$ состоит из всех таких функций $u \in L^p(\gamma)$, что*

$$|u|_{B^s_{p,q}} := \left(\int_0^\infty \left(t^{m-s} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty.$$

Норма $u \in B^s_{p,q}(\gamma)$ определяется так: $\|u\|_{B^s_{p,q}} := \|u\|_p + |u|_{B^s_{p,q}}$. Для $q = \infty$ пространство Бесова–Липшица состоит из всех функций $f \in L^p(\gamma)$, для которых существует константа A, зависящая от f и такая, что

$$\left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} f \right\|_p \le A t^{-k+s}.$$

Норма задается формулой $\|f\|_{B^s_{p,\infty}} := \|f\|_p + A(f)$, где $A(f)$ — наименьшее возможное A, для которая верна указанная оценка.

Удобство этого определения заключается в явном выражении для нормы. Для функций из $L^2(\gamma)$ это выражение легко оценивается с помощью разложения функции в винеровский хаос. Это используется в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 7. *Пусть $s > 0$. Пространство Бесова $B^{s;2,2}(\gamma)$ совпадает с пространством $B^s_{2,2}(\gamma)$, а также с пространством Соболева $H^{2,s}(\gamma)$. Кроме того, $B^{s;2,q}(\gamma)$ вложено в $B^s_{2,q}(\gamma)$ при $1 \le q < \infty$.*

Кроме того, тот же подход позволяет для случая $p = 2$ построить пример, показывающий, что шкала пространств Бесова является более точной, чем шкала пространств Соболева.

Предложение 3. *Пусть $s > 0$. Существует функция u такая, что u входит во все пространства $H^{2,s-\sigma}(\gamma)$ для сколь угодно малого $\sigma > 0$, $u \in B^s_{2,q}(\gamma)$ для $q > 2$, но при этом u не входит в $H^{2,s}(\gamma)$.*

В качестве примера можно рассмотреть такую функцию u, что $\|I_n(u)\|_2^2 = (1+n)^{-1-s}\ln^{-\varepsilon}(2+n)$.

Благодаря сильной непрерывности полугруппы $Q_t^{(1)}$ выражение нормы пространства $B_{p,q}^s(\gamma)$ существенно упрощается для функций из $H^{p,m}(\gamma)$, где $m = [s]+1$. Мы также можем доказать, снова обращаясь к теории полугрупп, что $H^{p,m}(\gamma)$ является всюду плотным подпространством в $B_{p,q}^s(\gamma)$, что позволяет в доказательстве многих свойств пространств $B_{p,q}^s(\gamma)$ ограничиваться функциями из $H^{p,m}(\gamma)$.

Важную роль играет известное неравенство Литтлвуда–Пэли–Стейна

$$C_1(p)\|f\|_p \le \|G_f^{\rightarrow}\|_p \le C_2(p)\|f\|_p,$$

где функция $G_f^{\rightarrow}$ определяется равенством

$$G_f^{\rightarrow}(x) = \left(\int_0^\infty t\,\left|\,\frac{\partial}{\partial t}Q_t^{(\alpha)}f(x)\right|^2 dt\right)^{1/2}.$$

На применении этого неравенства основано доказательство вложений пространств Бесова и Соболева с одинаковыми индексами дифференцируемости. Приведем точные формулировки.

Лемма 1. *Если $s > 0$ и целое $k > 0$, то для всякой функции $u \in B_{p,q}^s(\gamma)$ справедливо равенство*

$$\|(I-L)^{-k/2}u\|_{B_{p,q}^{s+k}} = \|u\|_{B_{p,q}^s}.$$

Теорема 8. *Если $0 < \sigma < 1$ и целое $k > 0$, то для всякой функции $u \in H^{p,k+1}(\gamma)$ справедливы неравенства*

$$\|u\|_{p,k} \le C(k,\sigma,q)\|u\|_{B_{p,q}^{k+\sigma}} \le C(k,\sigma,q)\|u\|_{p,k+1}.$$

Чтобы из предыдущей теоремы следовало вложение $B_{p,q}^{k+\sigma}(\gamma)$ в $H^{p,k}(\gamma)$, достаточно доказать, что $H^{p,k+1}(\gamma)$ плотно в $B_{p,q}^{k+\sigma}(\gamma)$.

Предложение 4. *Пусть $s > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ и $m > s$. Тогда пространство $H^{p,m}(\gamma)$ всюду плотно в пространстве $B_{p,q}^s(\gamma)$.*

Применение неравенства Литтлвуда–Пэли–Стейна помогает доказать следующую теорему.

Теорема 9. *Если $p \geq 2$ и $s > 0$, то имеет место вложение*
$$H^{p,s}(\gamma) \subset B^s_{p,p}(\gamma).$$

Следует обратить внимание на то, что в этой теореме выводится более сильное утверждение о вложении классов Соболева, чем было доказано в первой главе для пространств $B^{s,p,q}(\gamma)$, определенных через вещественный интерполяционный K-метод.

Наконец, доказывается эквивалентность пространств $B^{s,p,q}(\gamma)$ и $B^s_{p,q}(\gamma)$ в общем случае и усиленное свойство вложения. Эти результаты представлены следующими двумя теоремами.

Теорема 10. *Пусть $s > 0$, $p > 1$, $1 \leq q < \infty$. Тогда пространство Бесова $B^{s,p,q}(\gamma)$ совпадает с пространством $B^s_{p,q}(\gamma)$, а их нормы эквивалентны.*

Теорема 11. *Пусть $k \in \mathbb{Z}$ и $s \in \mathbb{R}$.*

1) *Если $2 \leq p < \infty$, то $B^{k,p,2}(\gamma) \subset H^{p,k}(\gamma)$ и $H^{p,s}(\gamma) \subset B^{s,p,p}(\gamma)$.*
2) *Если $1 < p \leq 2$, то $B^{s,p,p}(\gamma) \subset H^{p,s}(\gamma)$ и $H^{p,k}(\gamma) \subset B^{k,p,2}(\gamma)$.*

Глава 3.

Здесь вводится определение пространств Бесова, аналогичное классическому определению с разностными отношениями из конечномерного случая.

Для всякой функции u на $\mathbb{R}^n$ и всякого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ положим $\Delta_h u(x) = u(x) - u(x-h)$. При $s > 0$, $p > 1$ и $q \geq 1$ класс Бесова функций на пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется как множество всех функций $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, для которых
$$\int_{\mathbb{R}^n} \big[|h|^{-s} \|(\Delta_h)^m u\|_p\big]^q (dh/h^n) < \infty.$$

Теперь для функции $u \in L^p(\gamma)$ положим $\Delta_h u(x) = u(x) - u(x-h)$, где $h \in H(\gamma)$. Это привносит заметное отличие в бесконечномерном случае, ибо здесь $H(\gamma)$ существенно меньше всего пространства, в частности имеет меру нуль относительно γ, из-за чего ниже привлекается дополнительная мера ν на $H(\gamma)$, относительно которой ведется интегрирование по h.

Определение 5. *Пусть* $0 < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, ν *— некоторая борелевская вероятностная мера на* $H(\gamma)$ *и* m *— наименьшее целое число, большее* s. *Класс Бесова* $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$ *состоит из всех таких функций* $u \in L^p(\gamma)$, *что*

$$\int_H |h|_H^{-sq} \|(\Delta_h)^m u\|_p^q \, \nu(dh) < \infty.$$

Норма в $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$ *задается формулой*

$$\|u\|_{s;p,q,\nu} := \|u\|_p + \left(\int_H |h|_H^{-sq} \|(\Delta_h)^m u\|_p^q \, \nu(dh) \right)^{1/q}.$$

Отметим, что определяемые так пространства существенно зависят не только от трех числовых параметров, как обычные классы Бесова, но и от дополнительного параметра, которым является мера на пространстве Камерона–Мартина. Пространства $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$ являются банаховыми и для них справедлива следующая теорема о вложении.

Теорема 12. *Пусть вероятностная мера* ν *на* $H(\gamma)$ *такова, что функция* $\exp(M|h|_H^2)$ *интегрируема по* ν *при некотором* $M > \frac{q}{2(p_1-p)}$. *Тогда при* $p_1 > p$ *и* $0 < sq \le 1$ *имеем* $W^{p_1,1}(\gamma) \subset B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Богачеву Владимиру Игоревичу за постановку задач и постоянное внимание к работе.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Никитин Е.В. Дробные классы Соболева на бесконечномерных пространствах. *Докл. РАН.* 2013. Т. 452, N 2. С. 130—135.

[2] Никитин Е.В. Классы Бесова на бесконечномерных пространствах. *Матем. заметки.* 2013. Т. 93, N 6. С. 951–953.

[3] Никитин Е.В. Сравнение двух определений классов Бесова на бесконечномерных пространствах *Матем. заметки.* 2014. Т. 95, N 1. С. 150–153.

[4] Никитин Е. В. Дробные классы Соболева на бесконечномерных пространствах. *XX Международная молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов", секция "Математика и механика"*, Тезисы докладов, Москва: МАКС Пресс, 2013, 1.