

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.2

Никитин Егор Владимирович

ДРОБНЫЕ КЛАССЫ СОБОЛЕВА НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор В.И. Богачев.

Москва, 2013

Содержание

Введение	3
Глава 1. Интерполяционный подход	19
1.1. Определение и основные свойства	19
1.2. Метод следов	31
1.3. Дуальность и полугрупповое представление	34
Глава 2. Подход через полугруппу Пуассона	37
2.1. Определение, эквивалентность в L^2 и базовые свойства вложения	37
2.2. Эквивалентность в общем случае и теорема вложения	48
Глава 3. Классическое определение в бесконечномерном случае	52
Литература	56

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы. На конечномерных пространствах существуют различные способы определения пространств Соболева с дробным порядком дифференцируемости. Среди них наиболее хорошо изучены пространства Бесова^{1,2}, а также близкие к ним пространства Слободецкого³. Подобные дробные шкалы пространств широко применяются в теории дифференциальных уравнений с частными производными (см. монографии^{4,5}). Пространства типа Бесова тесно связаны с пространствами Соболева. Как правило, одни вложены в другие, а в некоторых случаях совпадают. Один из важнейших известных результатов состоит в том, что следы функций из пространства Соболева на $\mathbb{R}^n$ представляются функциями из пространства Бесова на соответствующем подпространстве $\mathbb{R}^{n-k}$.

Классы Соболева над бесконечномерными пространствами впервые были определены и исследованы Н.Н. Фроловым⁶ в начале 1970-х годов также с целью применения к дифференциальным уравнениям.

Несколько позже такие пространства стали использоваться П. Маллявэном в разработанном им «исчислении Маллявэна»⁷ и быстро стали весьма популярным объектом исследования на стыке стохастического анализа, нелинейного функционального анализа и теории меры (см.

¹О.В. Бесов. О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения. ДАН СССР. 1959. Т. 126, N 6. С. 1163–1165.

²О.В. Бесов. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. Труды МИАН им. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 42–81.

³Л.Н. Слободецкий. Обобщенные пространства С.Л.Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. Ученые записки ЛГПИ им. А.И. Герцена. 1958. Т. 197. С. 54–112.

⁴Х. Трибель. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. Мир, М., 1980.

⁵М.С. Агранович. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. МЦНМО, М., 2013.

⁶Н.Н. Фролов. Теоремы вложения для пространств функций счетного числа переменных I. Тр. Ин-та матем. Воронеж. ун-та. Изд-во Воронеж. ун-та. 1970. Вып. 1. С. 205–218.

⁷P. Malliavin. Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators. Proc. Intern. Symp. on Stoch. Diff. Eq. P. 195–263. Wiley, New York – Chichester – Brisbane, 1978.

монографию⁸). Современное состояние их теории представлено в книге⁹. Систематическое изучение пространств Бесова над бесконечномерными пространствами пока не осуществлялось. В нескольких работах для определения пространств типа Бесова применялся вещественный метод теории интерполяции, который также может использоваться и в конечномерном случае. Вещественный интерполяционный метод в разных формах предложили Ж.Л. Лионс, Ж. Петре¹⁰ и другие математики.

В работе 2003 года Э. Эро, В.И. Богачев и П. Леско¹¹ использовали вещественный интерполяционный K -метод для определения дробных классов Соболева $E^{\sigma,p}(\gamma)$, $0 < \sigma < 1$, на локально выпуклом пространстве с гауссовской мерой γ . Основным результатом этой работы является теорема о том, что сужение соболевской функции на подпространства $E + y$, параллельные конечномерному подпространству E из пространства Камерона–Мартина, лежат в классе $E^{\sigma,p}(\gamma^y)$ по условным мерам на $E + y$ при почти всех y относительно проекции меры на дополняющее E подпространство.

В упомянутой работе Э. Эро, В.И. Богачева и П. Леско используются результаты, полученные в известной работе С. Ватанабэ¹², где пространства $E^{s,p}(\gamma)$ определяются интерполяционным методом следов Ж.Л. Лионса для произвольного s , при этом для целых s пространство $E^{s,p}(\gamma)$ полагается равным пространству Соболева. Пространства $E^{s,p}(\gamma)$ оказываются удобнее пространств Соболева в первую очередь благодаря свойству инвариантности относительно композиций с липшицевыми функциями. Эквивалентность определения, которое дает Ватанабэ, определению через интерполяционный K -метод для $0 < s < 1$ можно считать очевидной, однако в общем случае для утверждения эквивалентности требуется

⁸I. Shigekawa. Stochastic analysis. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2004.

⁹В.И. Богачев. Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», М. – Ижевск, 2008.

¹⁰J.L. Lions, J. Peetre. Sur une classe d'espaces d'interpolation. Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1964. V. 19. P. 6–64.

¹¹Э. Эро, В.И. Богачев, П. Леско. Конечномерные сечения функций из дробных классов Соболева на бесконечномерных пространствах. Докл. РАН. 2003. Т. 391, N 3. С. 320–323.

¹²S. Watanabe. Fractional order Sobolev spaces on Wiener space. Probab. Theory Related Fields. 1993. V. 95. P. 175–198.

дополнительное свойство пространств Соболева, которое доказано в диссертационной работе. Заметим также, что для целых s интерполяционный K -метод дает пространства, которые для $p \neq 2$ не совпадают с пространствами Соболева. Классические пространства Бесова $B^{s,p,q}$ также имеют дополнительный индекс q , который позволяет дать более точную шкалу пространств, чем пространства Соболева. Пространства $E^{s,p}$ при этом соответствуют случаю равных q и p .

В недавней работе Е. Пинеды и В. Урбино¹³ подробно рассматриваются свойства пространств Бесова $B_{p,q}^s(\gamma_d)$, определяемых с помощью полугруппы Пуассона Q_t на конечномерном пространстве с гауссовской мерой γ_d . Этот метод может быть успешно перенесен с небольшими изменениями на бесконечномерные пространства. Доказательства большинства основных свойств при этом остаются неизменными или легко модифицируются с применением теории полугрупп.

Существует направление изучения пространств типа Бесова и пространств типа Трибеля–Лизоркина, связанных с неотрицательным самосопряженным оператором L , на метрических пространствах с мерами, обладающими свойством удвоения^{14,15}. Это сравнительно новое направление является близким к конечномерному случаю. Связь с ним в диссертации подробно не рассматривается.

В диссертационной работе вещественным интерполяционным K -методом определяются пространства типа Бесова $B^{s,p,q}$. Устанавливаются интерполяционные свойства пространств Соболева, которые позволяют получить базовые результаты типа теорем вложения для пространств $B^{s,p,q}$ и доказать их эквивалентность пространствам, вводимым Ватанабэ, для равных q и p и дробных s . Кроме того, в диссертационной работе дается альтернативное определение пространств типа Бесова, по методу работы

¹³E. Pineda, W. Urbino. Some results on Gaussian Besov–Lipschitz spaces and Gaussian Triebel–Lizorkin spaces. J. Approx. Theory. 2009. V. 161. P. 529–564.

¹⁴D. Yang, W. Yuan. New Besov-type spaces and Triebel–Lizorkin-type spaces including Q spaces. Math. Z. 2010. B. 265. S. 451–480.

¹⁵L. Liu, D. Yang, W. Yuan. Besov-type and Triebel–Lizorkin-type spaces associated with heat kernels. arXiv:1309.1366. Preprint. 2013.

Е. Пинеды, В. Урбино, через полугруппу, близкую полугруппе Пуассона на Q_t . Это определение оказывается эквивалентным интерполяционному определению. В то время как определение через полугруппу Пуассона позволяет разбирать частные случаи (например, оно используется для демонстрации большей точности шкалы пространств Бесова), интерполяционное определение кажется более эффективным в общих вопросах. Например, это определение, как представляется, может быть успешно применено для изучения следов функций Соболева на подпространствах и гиперповерхностях.

Цель работы. Исследование различных определений дробных классов Соболева, в том числе пространств типа Бесова, а также связей между этими определениями и связей пространств типа Бесова и пространств Соболева.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Введено несколько определений пространств типа Бесова на локально выпуклых пространствах с гауссовскими мерами и доказана равносильность определений, использующих интерполяционные методы, а также определения через полугруппу Пуассона.

2. Установлено свойство приближения в L^p соболевских функций с меньшим индексом дифференцируемости соболевскими функциями с большим индексом дифференцируемости и контролируемой соболевской нормой приближающей функции. Для $p = 2$ индексы могут быть произвольными действительными, для $p > 1$ индексы предполагаются целыми.

3. Доказан ряд свойств типа вложения пространств Бесова и Соболева. Доказано, что пространства типа Бесова $B^{s,2,2}$ совпадают с пространствами Соболева $H^{2,s}$. Дается пример, показывающий, что для $q > 2$

пространства $B^{s,2,q}$ не совпадают с $H^{2,s}$ и лежат во всех H^{2,s_1} с меньшим индексом s_1 . Таким образом, пространства типа Бесова дают более точную шкалу пространств, чем пространства Соболева.

Методы исследования. В работе применяются методы функционального анализа, теории меры, теории интерполяционных пространств, элементы стохастического анализа, а также некоторые оригинальные конструкции.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в области функционального анализа и теории случайных процессов.

Апробация диссертации. По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах:

- научно-исследовательском семинаре кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В.И. Богачева, Н.А. Толмачева и С.В. Шапошникова (2009–2013 гг.)
- семинаре «Исчисление Маллявэна и его приложения» под руководством А.Ю. Пилипенко и А.А. Дороговцева в Институте математики НАН Украины (Киев, 2013 г.)
- научно-исследовательском семинаре «Анализ и дифференциальные уравнения» кафедры ФН-2 «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (2014 г.)

Основные результаты диссертации докладывались также на международной конференции «Ломоносов–2013» (Москва, 2013 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора, из которых 3 — в журналах из перечня ВАК. Доказательства основных результатов опубликованы в работах [28]–[31]. Список работ приведен в конце диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, включающих 5 параграфов, и списка литературы из 31 наименования, включая работы автора. Общий объем диссертации составляет 59 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Глава 1.

В первой главе рассматривается интерполяционный подход к определению пространств типа Бесова на бесконечномерных пространствах. Доказывается вложение этих пространств в пространства Соболева и ряд других свойств.

Рассматривается локально выпуклое пространство X , на котором определена центрированная радоновская гауссовская мера γ . Пространства Соболева на X можно задать равенством

$$H^{p,r}(\gamma) := V_r(L^p(\gamma)),$$

где оператор V_r на функциях $f \in L^p(\gamma)$ задается равенствами

$$V_r f := \Gamma(r/2)^{-1} \int_0^\infty t^{r/2-1} e^{-t} T_t f dt,$$

$$T_t f(x) = \int_X f(e^{-t}x - \sqrt{1 - e^{-2t}} y) \gamma(dy).$$

Пространства типа Бесова определяются с помощью вещественного интерполяционного K -метода. Приведем определение этого метода. Пусть X_0, X_1 – нормированные пространства и

$$K(t; u) := \inf\{\|u_0\|_{X_0} + t\|u_1\|_{X_1} : u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0, u_1 \in X_1\}.$$

Если $0 \leq \theta < 1$ и $1 \leq q \leq \infty$, то $(X_0, X_1)_{\theta; q, K}$ обозначает пространство всех функций $u \in X_0 + X_1$ таких, что функция $t \mapsto t^{-\theta} K(t; u)$ входит в $L_*^q := L^q(0, \infty; dt/t)$.

Определение 1. Пусть $0 < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, m – наименьшее целое, большее s . Пространством Бесова $B^{s;p,q}(\gamma)$ назовем определенное с помощью вещественного интерполяционного K -метода интерполяционное пространство между $L^p(\gamma)$ и $H^{p,m}(\gamma)$ с индексом $\theta = s/m$, т.е.

$$B^{s;p,q}(\gamma) = (L^p(\gamma), H^{p,m}(\gamma))_{s/m, q; K}.$$

Ряд свойств пространств Бесова доказывается с помощью так называемой реитерационной теоремы, известной в рамках вещественного

интерполяционного метода. Чтобы ее применить, нужно доказать, что пространство Соболева само является в определенном смысле промежуточным между $L^p(\gamma)$ и пространствами Соболева с более высокими индексами дифференцируемости. Для доказательства этого утверждения потребуется установить два свойства пространств Соболева.

Первым является следующее неравенство, верное для всех функций $u \in H^{p,r}(\gamma)$:

$$\|u\|_{p,r} \leq C(r,s) \|u\|_p^{1-\frac{r}{s}} \|u\|_{p,s}^{\frac{r}{s}}, \quad 0 < r < s, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Второе необходимое нам свойство пространств Соболева содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $p > 1$. Пусть $k, m \in \mathbb{Z}$, $0 < k < m$. Тогда для всякой функции $u \in H^{p,k}(\gamma)$ и для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $u_\varepsilon \in H^{p,m}(\gamma)$, что

$$\|u - u_\varepsilon\|_p \leq C(p,k) \varepsilon^k \|u\|_{p,k}, \quad \|u_\varepsilon\|_{p,m} \leq C(p,k,m) \varepsilon^{k-m} \|u\|_{p,k}.$$

В случае $p = 2$ эту теорему можно усилить, распространив на пространства Соболева дробных порядков дифференцируемости. Это позволит для $p = 2$ вывести некоторые свойства вложений, не имеющие аналогов в конечномерном случае, где в теории пространств Бесова рассматриваются классы Соболева только целых индексов.

Пусть X, X_0, X_1 — нормированные пространства,

$$J(t; u) := \max \{ \|u\|_{X_0}, t \|u\|_{X_1} \}.$$

По определению, $X \in \mathcal{H}(\theta; X_0, X_1)$, где $0 \leq \theta \leq 1$, если

$$K(t; u) \leq C(\theta) t^\theta \|u\|_X \quad \forall u \in X,$$

$$\|u\|_X \leq C(\theta) t^{-\theta} J(t; u) \quad \forall u \in X_0 \cap X_1.$$

Пространство Соболева $H^{p,k}(\gamma)$ является промежуточным между $L^p(\gamma)$ и $H^{p,m}(\gamma)$ в том смысле, что оно принадлежит к классу $\mathcal{H}(k/m; L^p(\gamma), H^{p,m}(\gamma))$. Точный результат дает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $p > 1$. Для всех $k, m \in \mathbb{Z}$, $0 < k < m$ имеем

$$H^{p,k}(\gamma) \in \mathcal{H}(k/m; L^p(\gamma), H^{p,m}(\gamma)).$$

Кроме того, для всех $r, s \in \mathbb{R}$, $0 < r < s$ имеем

$$H^{2,r}(\gamma) \in \mathcal{H}(r/s; L^2(\gamma), H^{2,s}(\gamma)), \quad H^{p,r}(\gamma) \in \mathcal{J}(r/s; L^p(\gamma), H^{p,s}(\gamma)).$$

Применяя эту теорему и реитерационную теорему, мы можем установить ряд свойств пространств Бесова.

Теорема 3. Пусть $p > 1$. 1) Если в определении $B^{s;p,q}(\gamma)$ в качестве m брать любые целые, большие s , то получим одно и то же пространство.

2) Если $s_1 > s$ и $1 \leq q, q_1 \leq \infty$, то

$$B^{s;p,q}(\gamma) = (L^p(\gamma), B^{s_1;p,q_1}(\gamma))_{s/s_1;q,K},$$

в частности, $B^{s_1;p,q_1}(\gamma) \subset B^{s;p,q}(\gamma)$.

3) Если $0 \leq k < s < m$, $k, m \in \mathbb{Z}$ и $s = (1 - \theta)k + \theta m$, то

$$B^{s;p,q}(\gamma) = (H^{p,k}(\gamma), H^{p,m}(\gamma))_{\theta;q,K},$$

в частности, $H^{p,m}(\gamma) \subset B^{s;p,q}(\gamma) \subset H^{p,k}(\gamma)$.

4) Если $s_1 < s < s_2$, $s = (1 - \theta)s_1 + \theta s_2$ и $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$, то

$$B^{s;p,q}(\gamma) = (B^{s_1;p,q_1}(\gamma), B^{s_2;p,q_2}(\gamma))_{\theta;q,K}.$$

5) Если m целое, то $B^{m;p,1}(\gamma) \subset H^{p,m}(\gamma) \subset B^{m;p,\infty}(\gamma)$.

Для $p = 2$ получаем более сильные свойства.

Теорема 4. 1) Если $0 \leq r < s < t$, $r, t \in \mathbb{R}$ и $s = (1 - \theta)r + \theta t$, то

$$B^{s;p,q}(\gamma) \subset (H^{p,r}(\gamma), H^{p,t}(\gamma))_{\theta;q,K}.$$

В частности, $B^{s;p,q}(\gamma) \subset H^{p,t}(\gamma)$. Кроме того, $B^{s;p,1}(\gamma) \subset H^{p,s}(\gamma)$.

2) Если $0 \leq r < s < t$, $r, t \in \mathbb{R}$ и $s = (1 - \theta)r + \theta t$, то

$$B^{s;2,q}(\gamma) = (H^{2,r}(\gamma), H^{2,t}(\gamma))_{\theta;q,K}.$$

В частности, $H^{2,r}(\gamma) \subset B^{s;2,q}(\gamma) \subset H^{2,t}(\gamma)$.

3) $B^{s;2,1}(\gamma) \subset H^{2,s}(\gamma) \subset B^{s;2,\infty}(\gamma)$.

Таким образом, как и в конечномерном случае, определенные нами пространства Бесова $B^{s;p,q}(\gamma)$ вкладываются в пространства Соболева, индекс дифференцируемости которых равен наименьшему целому числу, меньшему s . Кроме того, для любого $p > 1$ пространство Бесова $B^{s;p,q}(\gamma)$ вложено в пространство Соболева $H^{p,t}(\gamma)$ с любым $t > s$, а для $p = 2$ верно и обратное вложение.

В качестве применения указанных свойств доказывается следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $r > 0$, $s > 0$. Оператор $V_r = (I - L)^{-r/2}$ — ограниченный оператор из $B^{s;p,q}(\gamma)$ в $B^{r+s;p,q}(\gamma)$.

Определенные нами пространств Бесова $B^{s;p,q}(\gamma)$ связаны с дробными классами Соболева $E^{s,p}(\gamma)$, которые определяются с помощью интерполяционного метода следов Ж.-Л. Лионса. Пусть B_1 и B_2 — вещественные сепарабельные банаховы пространства и $B_1 \subseteq B_2$. Для $x \in B_2 \setminus B_1$ положим $|x|_{B_1} = \infty$ по определению. Для $1 < p < \infty$ и $\nu \in \mathbb{R}$ банахово пространство $W = W(q, \nu; B_1, B_2)$ определяется как множество всех абсолютно непрерывных функций $f: (0, \infty) \rightarrow B_2$, таких что $t^\nu f \in L_q((0, \infty) \rightarrow B_1)$ и $t^\nu f' \in L_q((0, \infty) \rightarrow B_2)$, с нормой

$$\|f\|_W = \max(\|t^\nu f\|_{L_q((0,\infty) \rightarrow B_1)}, \|t^\nu f'\|_{L_q((0,\infty) \rightarrow B_2)}).$$

Если $\theta = \frac{1}{p} + \nu < 1$, то $\lim_{t \downarrow 0} f(t) = f(0)$ существует в B_2 , и мы полагаем

$$T = T^{\theta,q}(B_1, B_2) = \{f(0) | f \in W(q, \nu; B_1, B_2)\},$$

$$\|u\|_T = \inf\{\|f\|_W | f \in W(q, \nu; B_1, B_2), f(0) = u\}, \quad u \in T.$$

Определение 2. Дробные классы Соболева $E^{s,p}(\gamma)$, $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$, задаются равенством

$$E^{s,p}(\gamma) = H^{p,s}(\gamma), \text{ если } s \in \mathbb{Z},$$

и равенством

$$E^{s,p}(\gamma) = T^{1-\sigma}(E^{k+1,p}(\gamma), E^{k,p}(\gamma)), \text{ если } s = k + \sigma, k \in \mathbb{Z}, 0 < \sigma < 1.$$

Из общей теории интерполяционных пространств известно, что интерполяционный метод следов эквивалентен вещественному интерполяционному K -методу, который мы использовали для определения пространств Бесова $B^{s;p,q}(\gamma)$. Благодаря этому, а также доказанным свойствам $B^{s;p,q}(\gamma)$ мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 6. *Для $1 < p < \infty$ и дробных s пространства $E^{s,p}(\gamma)$ совпадают с пространствами $B^{s;p,p}(\gamma)$, а их нормы эквивалентны. При $p = 2$ пространства $E^{s,2}(\gamma)$ и $B^{s;2,2}(\gamma)$ совпадают для всех $s > 0$.*

Из этой теоремы, применяя результат, доказанный в работе Ватанабэ, получаем такое следствие.

Следствие 1. *Пусть $s > 0$, $\varepsilon > 0$, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$ и $1 < p < \infty$. Справедливы вложения*

$$B^{s+\varepsilon,p,q_1}(\gamma) \subset H^{p,s}(\gamma) \subset B^{s-\varepsilon,p,q_2}(\gamma).$$

Можно определить классы Бесова с отрицательным индексом дифференцируемости.

Определение 3. *Для $k \in \mathbb{N}$, $0 < \sigma < 1$ пространства Бесова $B^{-k+\sigma,p,q}(\gamma)$ определяются равенством*

$$B^{-k+\sigma,p,q}(\gamma) = (H^{p,-k}(\gamma), H^{p,-k+1}(\gamma))_{\sigma,q;K},$$

а пространства $B^{-k,p,q}(\gamma)$ — равенством

$$B^{-k,p,q}(\gamma) = (H^{p,-k+1}(\gamma), H^{p,-k}(\gamma))_{1/2,q;K}.$$

Пространства, определенные через вещественный интерполяционный метод, обладают свойством дуальности. Легко видеть, что для любых действительных s имеет место равенство

$$(B^{s,p,q}(\gamma))' = B^{-s,p',q'}(\gamma), \quad p^{-1} + p'^{-1} = 1, \quad q^{-1} + q'^{-1} = 1.$$

Для интерполяционных пространств также известна характеристика через полугруппы. Для $\alpha \geq 0$ положим

$$Q_t^{(\alpha)} = \int_0^\infty T_t^{(\alpha)} \lambda_t^{1/2}(ds), \quad \lambda_t^{(1/2)}(ds) := \frac{t}{2\sqrt{\pi}} e^{-t^2/4s} s^{-3/2} ds,$$

где $T_t^{(\alpha)} = e^{-\alpha t} T_t$. При $\alpha = 0$ полугруппа $Q_t^{(0)} = Q_t$ называется полугруппой Пуассона (полугруппой Коши).

Предложение 1. Пусть $s = k + \sigma$, $k \in \mathbb{Z}$ и $0 < \sigma < 1$. Тогда для пространств $B^{s,p,q}(\gamma) = (H^{p,k}(\gamma), H^{p,k+1}(\gamma))_{\sigma,q;K}$ справедливо представление

$$B^{s,p,q}(\gamma) = \left\{ u \mid u \in H^{p,k}(\gamma), \right. \\ \left. \|u\|_{s,p,q}^{\sim} := \|u\|_{p,k} + \left(\int_0^1 t^{-1-\sigma q} \|u - Q_t^{(1)} u\|_{p,k}^q dt \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

Пространства $E^{s,p}(\gamma)$ имеют аналогичное представление, где $q = p$, так как $E(s,p)(\gamma) = B^{s,p,p}(\gamma)$.

Для целых индексов дифференцируемости, рассмотрев $B^{k,p,q}(\gamma)$ как интерполяционное пространство между $H^{p,k}(\gamma)$ и $H^{p,k+1}(\gamma)$, получаем несколько другое представление.

Предложение 2. Пусть $k \in \mathbb{Z}$. Тогда для пространств $B^{k,p,q}(\gamma)$ справедливо представление

$$B^{k,p,q}(\gamma) = \left\{ u \mid u \in H^{p,k-1}(\gamma), \right. \\ \left. \|u\|_{k,p,q}^{\sim} := \|u\|_{p,k-1} + \left(\int_0^1 t^{-1-q} \|(I - Q_t^{(1)})^2 u\|_{p,k-1}^q dt \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Глава 2.

Во второй главе дается определение, аналогичное используемому в работе Е. Пинеды, В. Урбино, где пространства Бесова определяются на конечномерных пространствах с гауссовской мерой. Цель главы — доказать, что этот метод эквивалентен основному интерполяционному определению, и вывести свойства вложения пространств Бесова и Соболева с одинаковыми индексами дифференцируемости.

Определение 4. Пусть $s > 0$, t — наименьшее целое больше, чем s , $1 \leq p, q \leq \infty$. При $1 \leq q < \infty$ пространство Бесова–Липшица $B_{p,q}^s(\gamma)$

состоит из всех таких функций $u \in L^p(\gamma)$, что

$$|u|_{B_{p,q}^s} := \left(\int_0^\infty \left(t^{m-s} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty.$$

Норма $u \in B_{p,q}^s(\gamma)$ определяется так: $\|u\|_{B_{p,q}^s} := \|u\|_p + |u|_{B_{p,q}^s}$. Для $q = \infty$ пространство Бесова–Липшица состоит из всех функций $f \in L^p(\gamma)$, для которых существует константа A , зависящая от f и такая, что

$$\left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} f \right\|_p \leq A t^{-k+s}.$$

Норма задается формулой $\|f\|_{B_{p,\infty}^s} := \|f\|_p + A(f)$, где $A(f)$ — наименьшее возможное A , для которой верна указанная оценка.

Удобство этого определения заключается в явном выражении для нормы. Для функций из $L^2(\gamma)$ это выражение легко оценивается с помощью разложения функции в винеровский хаос. Это используется в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 7. Пусть $s > 0$. Пространство Бесова $B^{s;2,2}(\gamma)$ совпадает с пространством $B_{2,2}^s(\gamma)$, а также с пространством Соболева $H^{2,s}(\gamma)$. Кроме того, $B^{s;2,q}(\gamma)$ вложено в $B_{2,q}^s(\gamma)$ при $1 \leq q < \infty$.

Кроме того, тот же подход позволяет для случая $p = 2$ построить пример, показывающий, что шкала пространств Бесова является более точной, чем шкала пространств Соболева.

Предложение 3. Пусть $s > 0$. Существует функция u такая, что u входит во все пространства $H^{2,s-\sigma}(\gamma)$ для сколь угодно малого $\sigma > 0$, $u \in B_{2,q}^s(\gamma)$ для $q > 2$, но при этом u не входит в $H^{2,s}(\gamma)$.

В качестве примера можно рассмотреть такую функцию u , что $\|I_n(u)\|_2^2 = (1+n)^{-1-s} \ln^{-\varepsilon}(2+n)$.

Благодаря сильной непрерывности полугруппы $Q_t^{(1)}$ выражение нормы пространства $B_{p,q}^s(\gamma)$ существенно упрощается для функций из

$H^{p,m}(\gamma)$, где $m = [s] + 1$. Мы также можем доказать, снова обращаясь к теории полугрупп, что $H^{p,m}(\gamma)$ является всюду плотным подпространством в $B_{p,q}^s(\gamma)$, что позволяет в доказательстве многих свойств пространств $B_{p,q}^s(\gamma)$ ограничиваться функциями из $H^{p,m}(\gamma)$.

Важную роль играет известное неравенство Литтлвуда–Пэли–Стейна

$$C_1(p)\|f\|_p \leq \|G_f^\rightarrow\|_p \leq C_2(p)\|f\|_p,$$

где функция $G_f^\rightarrow$ определяется равенством

$$G_f^\rightarrow(x) = \left(\int_0^\infty t \left| \frac{\partial}{\partial t} Q_t^{(\alpha)} f(x) \right|^2 dt \right)^{1/2}.$$

На применении этого неравенства основано доказательство вложений пространств Бесова и Соболева с одинаковыми индексами дифференцируемости. Приведем точные формулировки.

Лемма 1. *Если $s > 0$ и целое $k > 0$, то для всякой функции $u \in B_{p,q}^s(\gamma)$ справедливо равенство*

$$\|(I - L)^{-k/2} u\|_{B_{p,q}^{s+k}} = \|u\|_{B_{p,q}^s}.$$

Теорема 8. *Если $0 < \sigma < 1$ и целое $k > 0$, то для всякой функции $u \in H^{p,k+1}(\gamma)$ справедливы неравенства*

$$\|u\|_{p,k} \leq C(k, \sigma, q) \|u\|_{B_{p,q}^{k+\sigma}} \leq C(k, \sigma, q) \|u\|_{p,k+1}.$$

Чтобы из предыдущей теоремы следовало вложение $B_{p,q}^{k+\sigma}(\gamma)$ в $H^{p,k}(\gamma)$, достаточно доказать, что $H^{p,k+1}(\gamma)$ плотно в $B_{p,q}^{k+\sigma}(\gamma)$.

Предложение 4. *Пусть $s > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ и $m > s$. Тогда пространство $H^{p,m}(\gamma)$ всюду плотно в пространстве $B_{p,q}^s(\gamma)$.*

Применение неравенства Литтлвуда–Пэли–Стейна помогает доказать следующую теорему.

Теорема 9. *Если $p \geq 2$ и $s > 0$, то имеет место вложение*

$$H^{p,s}(\gamma) \subset B_{p,p}^s(\gamma).$$

Следует обратить внимание на то, что в этой теореме выводится более сильное утверждение о вложении классов Соболева, чем было доказано

в первой главе для пространств $B^{s,p,q}(\gamma)$, определенных через вещественный интерполяционный K -метод.

Наконец, доказывается эквивалентность пространств $B^{s,p,q}(\gamma)$ и $B_{p,q}^s(\gamma)$ в общем случае и усиленное свойство вложения. Эти результаты представлены следующими двумя теоремами.

Теорема 10. Пусть $s > 0$, $p > 1$, $1 \leq q < \infty$. Тогда пространство Бесова $B^{s,p,q}(\gamma)$ совпадает с пространством $B_{p,q}^s(\gamma)$, а их нормы эквивалентны.

Теорема 11. Пусть $k \in \mathbb{Z}$ и $s \in \mathbb{R}$.

- 1) Если $2 \leq p < \infty$, то $B^{k,p,2}(\gamma) \subset H^{p,k}(\gamma)$ и $H^{p,s}(\gamma) \subset B^{s,p,p}(\gamma)$.
- 2) Если $1 < p \leq 2$, то $B^{s,p,p}(\gamma) \subset H^{p,s}(\gamma)$ и $H^{p,k}(\gamma) \subset B^{k,p,2}(\gamma)$.

Глава 3.

Здесь вводится определение пространств Бесова, аналогичное классическому определению с разностными отношениями из конечномерного случая.

Для всякой функции u на $\mathbb{R}^n$ и всякого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ положим $\Delta_h u(x) = u(x) - u(x - h)$. При $s > 0$, $p > 1$ и $q \geq 1$ класс Бесова функций на пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется как множество всех функций $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$\int_{\mathbb{R}^n} [|h|^{-s} \|(\Delta_h)^m u\|_p]^q (dh/h^n) < \infty.$$

Теперь для функции $u \in L^p(\gamma)$ положим $\Delta_h u(x) = u(x) - u(x - h)$, где $h \in H(\gamma)$. Это привносит заметное отличие в бесконечномерном случае, ибо здесь $H(\gamma)$ существенно меньше всего пространства, в частности имеет меру нуль относительно γ , из-за чего ниже привлекается дополнительная мера ν на $H(\gamma)$, относительно которой ведется интегрирование по h .

Определение 5. Пусть $0 < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, ν — некоторая борелевская вероятностная мера на $H(\gamma)$ и m — наименьшее целое число, большее s . Класс Бесова $B^{s,p,q,\nu}(\gamma)$ состоит из всех таких функций $u \in L^p(\gamma)$, что

$$\int_H |h|_H^{-sq} \|(\Delta_h)^m u\|_p^q \nu(dh) < \infty.$$

Норма в $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$ задается формулой

$$\|u\|_{s;p,q,\nu} := \|u\|_p + \left(\int_H |h|_H^{-sq} \|(\Delta_h)^m u\|_p^q \nu(dh) \right)^{1/q}.$$

Отметим, что определяемые так пространства существенно зависят не только от трех числовых параметров, как обычные классы Бесова, но и от дополнительного параметра, которым является мера на пространстве Камерона–Мартина. Пространства $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$ являются банаховыми и для них справедлива следующая теорема о вложении.

Теорема 12. Пусть вероятностная мера ν на $H(\gamma)$ такова, что функция $\exp(M|h|_H^2)$ интегрируема по ν при некотором $M > \frac{q}{2(p_1-p)}$. Тогда при $p_1 > p$ и $0 < sq \leq 1$ имеем $W^{p_1,1}(\gamma) \subset B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Богачеву Владимиру Игоревичу за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Глава 1

1.1. Определение и основные свойства

В данной главе дается определение классов Бесова на бесконечномерных пространствах с гауссовской мерой с помощью вещественного интерполяционного метода и доказывается ряд свойств полученных пространств типа теорем вложения.

Рассмотрим локально выпуклое пространство X , на котором определена центрированная радоновская гауссовская мера γ (см. [17], [16]; далее можно считать, что речь идет о счетной степени прямой $X = \mathbb{R}^\infty$ со счетной степенью стандартной гауссовской меры на прямой). Пространства Соболева на X с мерой γ (см. подробнее [17], [16], [15], [25], [19]) можно определить с помощью полугруппы Орнштейна–Уленбека $\{T_t\}$, положив

$$H^{p,r}(\gamma) := V_r(L^p(\gamma)),$$

где операторы V_r и T_t на функциях $f \in L^p(\gamma)$ задаются равенствами

$$V_r f := \Gamma(r/2)^{-1} \int_0^\infty t^{r/2-1} e^{-t} T_t f dt,$$
$$T_t f(x) = \int_X f(e^{-t}x - \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \gamma(dy).$$

Оператор V_r также можно выразить с помощью генератора L полугруппы Орнштейна–Уленбека равенством $V_r = (I - L)^{-r/2}$, где I — единичный оператор. Норму функции u из $H^{p,r}(\gamma)$ будем обозначать через $\|u\|_{p,r}$, при этом $\|u\|_{p,r} := \|(I - L)^{r/2}u\|_p$.

Класс гладких цилиндрических функций $\mathcal{FC}^\infty$ состоит из функций вида $f(x) = g(l_1(x), \dots, l_n(x))$, где $g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $l_i \in X^*$. Если $X = \mathbb{R}^\infty$, то это функции от конечного числа переменных с ограниченными производными всех порядков.

Пространства Бесова определим с помощью вещественного интерполяционного метода так, что определяемые пространства функций будут содержаться в $L^p(\gamma)$ и включать в себя пространства Соболева $H^{p,m}(\gamma)$, где m — целое число. Вещественный интерполяционный метод позволяет по заданным банаховым пространствам X_0 и X_1 (которые предполагаются лежащими в некотором общем объемлющем пространстве, например, пространстве всех функций) построить двухпараметрическую шкалу банаховых пространств X , таких что $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$, где пересечение $X_0 \cap X_1$ и алгебраическая сумма $X_0 + X_1$ являются банаховыми пространствами с нормами

$$\|u\|_{X_0 \cap X_1} = \max\{\|u\|_{X_0}, \|u\|_{X_1}\},$$

$$\|u\|_{X_0 + X_1} = \inf\{\|u_0\|_{X_0} + \|u_1\|_{X_1} : u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0, u_1 \in X_1\}.$$

Исходные определения даются в работах [21], [22]. Также подробное обсуждение метода имеется в [8], [14]. Приведем определение вещественного интерполяционного K -метода. Пусть

$$K(t; u) := \inf\{\|u_0\|_{X_0} + t\|u_1\|_{X_1} : u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0, u_1 \in X_1\}.$$

Если $0 \leq \theta < 1$ и $1 \leq q \leq \infty$, то $(X_0, X_1)_{\theta; q, K}$ обозначает пространство всех функций $u \in X_0 + X_1$ таких, что функция $t \mapsto t^{-\theta} K(t; u)$ входит в $L_*^q := L^q(0, \infty; dt/t)$. Это банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{\theta; q, K} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t; u))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < \infty} \{t^{-\theta} K(t; u)\}, & \text{если } q = \infty. \end{cases}$$

Определение 1.1.1. Пусть $0 < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, m — наименьшее целое, большее s . Пространством Бесова $B^{s; p, q}(\gamma)$ назовем определенное с помощью вещественного интерполяционного K -метода интерполяционное пространство между $L^p(\gamma)$ и $H^{p, m}(\gamma)$ с индексом $\theta = s/m$, т.е.

$$B^{s; p, q}(\gamma) = (L^p(\gamma), H^{p, m}(\gamma))_{s/m, q, K}.$$

Пространство $B^{s; p, q}(\gamma)$ автоматически становится банаховым с нормой пространства $(L^p(\gamma), H^{p, m}(\gamma))_{s/m, q, K}$. Обозначим ее через $\|\cdot\|_{s, p, q}$.

Подчеркнем, что $s/m < 1$. Кроме того, при $k < m$ имеем

$$H^{p,m}(\gamma) \cap H^{p,k}(\gamma) = H^{p,m}(\gamma) \subset B^{s;p,q}(\gamma) \subset H^{p,m}(\gamma) + H^{p,k}(\gamma) = H^{p,k}(\gamma).$$

Многие свойства вложения пространств Бесова и пространств Соболева можно вывести с помощью так называемой реитерационной теоремы, доказываемой в рамках вещественного интерполяционного метода (см. [14, с. 218]). Однако для ее применения нужно доказать, что пространство Соболева само является в некотором смысле промежуточным между $L^p(\gamma)$ и пространствами Соболева с более высокими индексами дифференцируемости. Для доказательства этого утверждения потребуются установить два свойства пространств Соболева.

Первым свойством является следующее неравенство, верное для всех функций $u \in H^{p,r}(\gamma)$:

$$\|u\|_{p,r} \leq C(r,s) \|u\|_p^{1-\frac{r}{s}} \|u\|_{p,s}^{\frac{r}{s}}, \quad 0 < r < s, \quad r, s \in \mathbb{R}, \quad (1.1.1)$$

получаемое из доказанного в [25, с. 90] неравенства

$$\|(I-L)^b f\|_p \leq C(a,b,q) \|(I-L)^a f\|_p^{\frac{q-b}{q-a}} \|(I-L)^q f\|_p^{\frac{b-a}{q-a}}, \quad f \in L^p(\gamma), \quad a < b < q.$$

В последнем неравенстве нужно взять $a = -s/2$, $b = -(s-r)/2$, $q = 0$, $f = (I-L)^{s/2}u$. Здесь и далее C с аргументами и без обозначает константы, необязательно одни и те же.

Второе необходимое нам свойство пространств Соболева содержится в следующей теореме.

Теорема 1.1.2. Пусть $p > 1$. Пусть $k, m \in \mathbb{Z}$, $0 < k < m$. Тогда для всякой функции $u \in H^{p,k}(\gamma)$ и для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $u_\varepsilon \in H^{p,m}(\gamma)$, что

$$\|u - u_\varepsilon\|_p \leq C(p,k) \varepsilon^k \|u\|_{p,k}, \quad \|u_\varepsilon\|_{p,m} \leq C(p,k,m) \varepsilon^{k-m} \|u\|_{p,k}.$$

Доказательство. Докажем эту теорему для $u \in \mathcal{FC}^\infty$. Затем выведем общий случай. (i) Зададим u_ε так, что $u - u_\varepsilon = (I - T_t)^k u$, т.е. $u_\varepsilon = (I - (I - T_t)^k)u$, где t определяется по ε , T_t — оператор Орнштейна–Уленбека. Сначала выведем неравенство

$$\|(I - T_t)u\|_p \leq C(p) \sqrt{1 - e^{-2t}} \|u\|_{p,1}. \quad (1.1.2)$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$u - T_t u = \int_0^t L T_s u ds = \int_0^t \delta D_H T_s u ds = \int_0^t \delta e^{-s} T_s D_H u ds$$

Применяя неравенства $\|\delta v\|_{L^p(\gamma)} \leq C(p)\|v\|_{W^{p,1}(\gamma,H)}$ ([17, с. 241]) и $\|D_H T_t f\|_{L^p(\gamma,E)} \leq C(p)A_t\|f\|_{L^p(\gamma,E)}$ (см. [19, с. 72]), где $A_t := e^{-t}(1 - e^{-2t})^{-1/2}$, получаем (зависимость констант от p далее не указывается):

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{-s} \delta T_s D_H u ds \right\|_p &\leq \int_0^t e^{-s} \|\delta T_s D_H u\|_p ds \leq C \int_0^t e^{-s} \|T_s D_H u\|_{p,1} ds = \\ &= C \int_0^t e^{-s} (\|T_s D_H u\|_p + \|D_H T_s D_H u\|_p) ds \leq \\ &\leq C \left(1 - e^{-t} + C \int_0^t e^{-s} A_s ds \right) \|D_H u\|_p \leq C \sqrt{1 - e^{-2t}} \|D_H u\|_p. \end{aligned}$$

Из неравенства (1.1.2) видно, что t следует определять по ε из равенства $\sqrt{1 - e^{-2t}} = \varepsilon$. Далее, по индукции выводится неравенство $\|(I - T_t)^k u\|_p \leq C(p, k)\varepsilon^k \|u\|_{p,k}$ для каждого натурального k (далее зависимость константы от p и k не указывается). Случай $k = 1$ следует из (1.1.2). Пусть указанное неравенство верно для некоторого $k = r$. Покажем, что оно верно и для $k = r + 1$. Существует $\psi \in H^{p,r}(\gamma)$, для которого $u = V_1 \psi$. Из перестановочности операторов T_s и V_q следует (так как r — целое), что

$$\|(I - T_t)^r u\|_{p,1} = \|(I - T_t)^r V_1 \psi\|_{p,1} = \|V_1 (I - T_t)^r \psi\|_{p,1} = \|(I - T_t)^r \psi\|_p.$$

Применяя это равенство, неравенство (1.1.2) и предположение индукции, получаем:

$$\begin{aligned} \|(I - T_t)^{r+1} u\|_p &\leq C\varepsilon \|(I - T_t)^r u\|_{p,1} = C\varepsilon \|(I - T_t)^r \psi\|_p \leq \\ &\leq C\varepsilon^{r+1} \|\psi\|_{p,r} = C\varepsilon^{r+1} \|u\|_{p,r+1}. \end{aligned}$$

Это доказывает первое неравенство из теоремы.

(ii) Для доказательства второго сначала установим для всех $f \in H^{p,r}(\gamma)$, целых неотрицательных r и неотрицательных t неравенство $\|D_H^r T_t f\|_p \leq C A_{t/r}^r \|f\|_p$. Его легко вывести, воспользовавшись полугрупповым свойством $\{T_t\}$ для представления T_t через $(T_{t/r})^r$. С помощью равенства $D_H T_{t/r} f = e^{-t/r} T_{t/r} D_H f$ оператор $T_{t/r}$ последовательно

переносится через степени оператора D_H , кроме последней, затем применяется неравенство $\|D_H T_s f\|_p \leq C A_s \|f\|_p$. Повторяя эту процедуру r раз, приходим к нужному неравенству. Заметим, что при $t < 1$ имеем $A_{t/r} \leq C(1 - e^{-2t})^{-1/2}$, откуда следует, что $A_{t/r}^r \leq C(1 - e^{-2t})^{-r/2}$. Из эквивалентности норм $H^{p,r}(\gamma)$ и $D^{p,r}(\gamma)$ для $f \in H^{p,r}(\gamma)$ следует оценка

$$\begin{aligned} \|T_t f\|_{p,r} &\leq C \sum_{n=0}^r \|D_H^n T_t f\|_p \leq C \sum_{n=0}^r A_{t/n}^n \|f\|_p \leq \\ &\leq (r+1)C(1 - e^{-2t})^{-r/2} \|f\|_p. \end{aligned}$$

Применяя эту оценку к функции $g \in H^{p,m-k}(\gamma)$ такой, что $u = V_k g$, и положив $(1 - e^{-2t})^{1/2} = \varepsilon$, получаем:

$$\|T_t u\|_{p,m} = \|T_t g\|_{p,m-k} \leq C(p, k, m) \varepsilon^{k-m} \|g\|_p = C(p, k, m) \varepsilon^{k-m} \|u\|_{p,k}.$$

Остается воспользоваться полученным неравенством для оценки $H^{p,m}(\gamma)$ -нормы функции u_ε , чтобы получить второе неравенство из теоремы:

$$\|u_\varepsilon\|_{p,m} = \|(I - (I - T_t)^k)u\|_{p,m} = \left\| \sum_{i=1}^k C_i^k T_{ti} u \right\|_{p,m} \leq Ck \varepsilon^{k-m} \|u\|_{p,k}.$$

(iii) Покажем теперь, что теорема верна и для $u \in H^{p,k}(\gamma)$. Имеем $u = V_k g$ для некоторой функции g из $L^p(\gamma)$. Так как $\mathcal{FC}^\infty$ плотно в $L^p(\gamma)$, то можно выбрать $h \in \mathcal{FC}^\infty$ так, что $\|g - h\|_p \leq \varepsilon^k \|g\|_p$. Пусть $v = V_k h$. По доказанному выше существует такая функция $v_\varepsilon \in H^{p,m}(\gamma)$, что $\|v - v_\varepsilon\|_p \leq C\varepsilon^k \|v\|_{p,k}$ и $\|v_\varepsilon\|_{p,m} \leq C\varepsilon^{k-m} \|v\|_{p,k}$. Учитывая, что $\|V_k\| = 1$, имеем

$$\|u - v_\varepsilon\|_p \leq \|u - v\|_p + \|v - v_\varepsilon\|_p \leq \|g - h\|_p + \|v - v_\varepsilon\|_p \leq C\varepsilon^k \|u\|_{p,k},$$

$$\|v_\varepsilon\|_{p,m} \leq C\varepsilon^{k-m} \|v\|_{p,k} = C\varepsilon^{k-m} \|h\|_p \leq 2C\varepsilon^{k-m} \|g\|_p = 2C\varepsilon^{k-m} \|u\|_{p,k}.$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема играет ключевую роль в выводе свойств вложения пространств Бесова. В случае $p = 2$ ее можно усилить, распространив на пространства Соболева дробных порядков дифференцируемости.

Это позволит для $p = 2$ вывести некоторые свойства вложений, не имеющие аналогов в конечномерном случае, где в теории пространств Бесова рассматриваются классы Соболева только целых индексов (см. [4]).

Теорема 1.1.3. *Пусть $r, s \in \mathbb{R}$, $0 < r < s$. Тогда для всякой функции $u \in H^{2,r}(\gamma)$ и для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $u_\varepsilon \in H^{2,s}(\gamma)$, что*

$$\|u - u_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon^r \|u\|_{2,r}, \quad \|u_\varepsilon\|_{2,s} \leq \varepsilon^{r-s} \|u\|_{2,r}.$$

Доказательство. Как и выше, обоснование сводится к случаю $u \in H^{2,s}(\gamma)$. Имеем $u = V_r g = V_s f$, где $g, f \in L^2(\gamma)$. Разложим f и g в винеровский хаос: $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$, $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$, $f_n = I_n(f)$, $g_n = I_n(g)$, где I_n — ортогональная проекция в $L^2(\gamma)$ на подпространство измеримых многочленов степени n . Так как $g = V_{s-r} f$, то $g_n = (1+n)^{-(s-r)/2} f_n$. Положим $f_\varepsilon := \sum_{n=0}^N f_n$, $g_\varepsilon := V_{s-r} f_\varepsilon$, $u_\varepsilon := V_r g_\varepsilon$, где N выбрано так, что $(2+N)^{-1/2} \leq \varepsilon \leq (1+N)^{-1/2}$. Тогда

$$\sum_{n=0}^N \|f_n\|_2^2 = \sum_{n=0}^N (1+n)^{s-r} \|g_n\|_2^2 \leq (1+N)^{s-r} \|g\|_2^2 \leq \varepsilon^{2(r-s)} \|g\|_2^2,$$

откуда следует, что $\|f_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon^{r-s} \|g\|_2$, или $\|u_\varepsilon\|_{2,s} \leq \varepsilon^{r-s} \|u\|_{2,r}$. Кроме того, выполняются неравенства

$$\|u - u_\varepsilon\|_2^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (1+n)^{-r} \|g_n\|_2^2 \leq (2+N)^{-r} \|g\|_2^2 \leq \varepsilon^{2r} \|u\|_{2,r}^2,$$

откуда получаем, что $\|u - u_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon^r \|u\|_{2,r}$. Теорема доказана.

Введем еще несколько понятий, используемых в вещественном интерполяционном методе. Пусть X, X_0, X_1 — нормированные пространства,

$$J(t; u) := \max \{ \|u\|_{X_0}, t \|u\|_{X_1} \},$$

$$K(t; u) := \inf \{ \|u_0\|_{X_0} + t \|u_1\|_{X_1} : u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0, u_1 \in X_1 \}.$$

Далее, по определению, $X \in \mathcal{K}(\theta; X_0, X_1)$, где $0 \leq \theta \leq 1$, если

$$K(t; u) \leq C(\theta) t^\theta \|u\|_X \quad \forall u \in X;$$

$X \in \mathcal{J}(\theta; X_0, X_1)$, если

$$\|u\|_X \leq C(\theta)t^{-\theta}J(t; u) \quad \forall u \in X_0 \cap X_1;$$

$X \in \mathcal{H}(\theta; X_0, X_1)$, если $X \in \mathcal{K}(\theta; X_0, X_1)$ и $X \in \mathcal{J}(\theta; X_0, X_1)$.

Известно, что $X_0 \in \mathcal{H}(0, X_0, X_1)$ и $X_1 \in \mathcal{H}(1, X_0, X_1)$, а также если $0 < \theta < 1$ и $1 \leq q \leq \infty$, то

$$(X_0, X_1)_{\theta, q; K} \in \mathcal{H}(\theta, X_0, X_1). \quad (1.1.3)$$

Пространство Соболева $H^{p,k}(\gamma)$ является промежуточным между $L^p(\gamma)$ и $H^{p,m}(\gamma)$ в том смысле, что оно принадлежит к классу $\mathcal{H}(k/m; L^p(\gamma), H^{p,m}(\gamma))$. Точный результат дает следующая теорема.

Теорема 1.1.4. Пусть $p > 1$. Для всех $k, m \in \mathbb{Z}$, $0 < k < m$ имеем

$$H^{p,k}(\gamma) \in \mathcal{H}(k/m; L^p(\gamma), H^{p,m}(\gamma)).$$

Кроме того, для всех $r, s \in \mathbb{R}$, $0 < r < s$ имеем

$$H^{2,r}(\gamma) \in \mathcal{H}(r/s; L^2(\gamma), H^{2,s}(\gamma)), \quad H^{p,r}(\gamma) \in \mathcal{J}(r/s; L^p(\gamma), H^{p,s}(\gamma)).$$

Доказательство. (i) Докажем принадлежность к классу $\mathcal{J}$ для пространств Соболева $H^{p,r}(\gamma)$, то есть неравенство

$$\|u\|_{p,r} \leq C(r, s)t^{-r/s}J(t; u). \quad (1.1.4)$$

Согласно (1.1.1), $\|u\|_{p,r} \leq C(r, s)\|u\|_p^{1-r/s}\|u\|_{p,s}^{r/s}$. При $t \leq \|u\|_p/\|u\|_{p,s}$ получаем

$$\|u\|_p^{1-r/s}\|u\|_{p,s}^{r/s} = (\|u\|_p/\|u\|_{p,s})^{-r/s}\|u\|_p \leq t^{-r/s}\|u\|_p \leq t^{-r/s}J(t; u).$$

Заметим, что $\|u\|_p \leq \|u\|_{p,s}$, так как $\|V_s\| = 1$. С другой стороны, для $t \geq \|u\|_p/\|u\|_{p,s}$ справедлива оценка

$$\|u\|_p^{1-r/s}\|u\|_{p,s}^{r/s} = (\|u\|_p/\|u\|_{p,s})^{1-r/s}\|u\|_{p,s} \leq t^{1-r/s}\|u\|_{p,s} \leq t^{-r/s}J(t; u),$$

что доказывает неравенство (1.1.4).

(ii) Докажем теперь, что принадлежность к классу $\mathcal{K}$, равносильна теореме 1.1.2, то есть, что теорема 1.1.2 верна тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$K(t; u) \leq C(k, m)t^{k/m}\|u\|_{p,k}. \quad (1.1.5)$$

Пусть $u \in H^{p,k}(\gamma)$. Тогда

$$K(t; u) \leq \|u\|_p + t\|0\|_{p,m} = \|u\|_p \leq \|u\|_{p,k}.$$

Получается, что $t^{-k/m}K(t; u) \leq \|u\|_{p,k}$ при $t \geq 1$, и свойство (1.1.5) выполняется. Пусть $t^{-k/m}K(t; u) \leq C\|u\|_{p,k}$ верно и для $0 < t \leq 1$. Выбрав $u_0 \in L^p(\gamma)$ и $u_1 \in H^{p,m}(\gamma)$, такие что $u = u_0 + u_1$ и $\|u_0\|_p + t\|u_1\|_{p,m} \leq 2K(t; u)$, получаем, что

$$\|u - u_1\|_p = \|u_0\|_p \leq 2Ct^{k/m}\|u\|_{p,k}, \quad \|u_1\|_{p,m} \leq 2Ct^{k/m-1}\|u\|_{p,k},$$

то есть $u_\epsilon = u_1$ является решением проблемы аппроксимации в теореме 1.1.2 для $\epsilon^m = t$.

Обратно, пусть для любого $\epsilon \leq 1$ существует $u_\epsilon \in H^{p,m}(\gamma)$, так что

$$\|u - u_\epsilon\|_p \leq C\epsilon^k\|u\|_{p,k}, \quad \|u_\epsilon\|_{p,m} \leq C\epsilon^{k-m}\|u\|_{p,k}.$$

Полагая $\epsilon = t^{1/m}$, получаем:

$$t^{-k/m}K(t; u) \leq t^{-k/m}(\|u - u_\epsilon\|_p + t\|u_\epsilon\|_{p,m}) \leq C\|u\|_{p,k},$$

откуда следует (1.1.5). Заменяя в этом доказательстве индексы p, k, m на $2, r$ и s , получаем, что принадлежность к классу $\mathcal{K}$ пространств $H^{2,r}(\gamma)$ равносильна теореме 1.1.3. Теорема доказана.

Теперь, применяя теорему 1.1.4 и реитерационную теорему (см. [14, с. 218]), мы можем установить свойства вложений для пространств Бессова.

Теорема 1.1.5. Пусть $p > 1$. 1) Если в определении $B^{s;p,q}(\gamma)$ в качестве m брать любые целые, большие s , то получим одно и то же пространство.

2) Если $s_1 > s$ и $1 \leq q, q_1 \leq \infty$, то

$$B^{s;p,q}(\gamma) = (L^p(\gamma), B^{s_1;p,q_1}(\gamma))_{s/s_1;q,K},$$

в частности, $B^{s_1;p,q_1}(\gamma) \subset B^{s;p,q}(\gamma)$.

3) Если $0 \leq k < s < m$, $k, m \in \mathbb{Z}$, и $s = (1 - \theta)k + \theta m$, то

$$B^{s;p,q}(\gamma) = (H^{p,k}(\gamma), H^{p,m}(\gamma))_{\theta;q,K},$$

в частности, $H^{p,m}(\gamma) \subset B^{s;p,q}(\gamma) \subset H^{p,k}(\gamma)$.

4) Если $s_1 < s < s_2$, $s = (1 - \theta)s_1 + \theta s_2$, и $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$, то

$$B^{s;p,q}(\gamma) = (B^{s_1;p,q_1}(\gamma), B^{s_2;p,q_2}(\gamma))_{\theta;q,K}.$$

5) Если m целое, то $B^{m;p,1}(\gamma) \subset H^{p,m}(\gamma) \subset B^{m;p,\infty}(\gamma)$.

Доказательство. Согласно реитерационной теореме, если $X_{\theta_i} \in \mathcal{H}(\theta_i; X_0, X_1)$ для $i = 0, 1$, $0 < \lambda < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ и $\theta = (1 - \lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1$, то

$$(X_{\theta_0}, X_{\theta_1})_{\lambda;q,K} = (X_0, X_1)_{\theta;q,K}.$$

Отсюда при соответствующем выборе параметров, применяя первую часть теоремы 1.1.4 и свойство (1.1.3), можно получить все утверждения теоремы 1.1.5.

Для доказательства первого пункта теоремы надо положить $X_0 = X_{\theta_0} = L^p(\gamma)$, $X_1 = H^{p,m+1}(\gamma)$, $X_{\theta_1} = H^{p,m}(\gamma)$, $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = m/(m+1)$, $\theta = s/(m+1)$. Тогда $\lambda = s/m$. Аналогично, положив $X_{\theta_0} = H^{p,k}(\gamma)$ и $X_{\theta_1} = H^{p,m}(\gamma)$, получаем третий пункт.

Далее, согласно свойству (1.1.3), $B^{s_1;p,q_1}(\gamma) \in \mathcal{H}(s_1/m; L^p(\gamma), H^{p,m}(\gamma))$. Применяя реитерационную теорему к $X_0 = X_{\theta_0} = L^p(\gamma)$, $X_1 = H^{p,m+1}(\gamma)$, $X_{\theta_1} = B^{s_1;p,q_1}(\gamma)$, $\theta_0 = 0$ и $\theta_1 = s_1/m$, получаем второй пункт теоремы. Четвертый пункт получается аналогично, если в качестве X_{θ_0} и X_{θ_1} взять $B^{s_1;p,q_1}(\gamma)$ и $B^{s_2;p,q_2}(\gamma)$, соответственно.

Пятый пункт следует из дополнительного утверждения реитерационной теоремы, согласно которому при указанных выше условиях

$$(X_0, X_1)_{\theta_1,1;J} \subset (X_{\theta_0}, X_{\theta_1})_{1,1;J} \subset X_{\theta_1} \subset (X_{\theta_0}, X_{\theta_1})_{1,\infty;K} \subset (X_0, X_1)_{\theta_1,\infty;K}.$$

Применим это утверждение к $X_{\theta_0} = L^p(\gamma)$ и $X_{\theta_1} = H^{p,m}(\gamma)$. Заметим, что $(X_0, X_1)_{\theta,q;J}$ — это интерполяционное пространство, полученное вещественным интерполяционным J -методом (см. [14, с. 211]). При $0 < \theta < 1$ такое пространство совпадает с пространством, полученным K -методом (см. [14, с. 215]). Теорема доказана.

Следует обратить внимание на то, что в свойстве 3 не могут выполняться равенства $k = s$ или $s = m$. Достижение этих равенств возможно только для граничных значений: $q = 1$ (для J -метода) и $q = \infty$ (для K -метода).

Вторая часть теоремы 1.1.4, в которой речь идет уже о пространствах Соболева с дробным индексом дифференцируемости r , позволяет применять реитерационную теорему для доказательства более сильных свойств вложений.

Теорема 1.1.6. 1) Если $0 \leq r < s < t$, $r, t \in \mathbb{R}$ и $s = (1 - \theta)r + \theta t$, то

$$B^{s;p,q}(\gamma) \subset (H^{p,r}(\gamma), H^{p,t}(\gamma))_{\theta;q,K}.$$

В частности, $B^{s;p,q}(\gamma) \subset H^{p,t}(\gamma)$. Кроме того, $B^{s;p,1}(\gamma) \subset H^{p,s}(\gamma)$.

2) Если $0 \leq r < s < t$, $r, t \in \mathbb{R}$ и $s = (1 - \theta)r + \theta t$, то

$$B^{s;2,q}(\gamma) = (H^{2,r}(\gamma), H^{2,t}(\gamma))_{\theta;q,K}.$$

В частности, $H^{2,r}(\gamma) \subset B^{s;2,q}(\gamma) \subset H^{2,t}(\gamma)$.

3) $B^{s;2,1}(\gamma) \subset H^{2,s}(\gamma) \subset B^{s;2,\infty}(\gamma)$.

Так как $H^{p,t}(\gamma) \in \mathcal{J}(t/m; L^p(\gamma), H^{p,m}(\gamma))$, где m — наименьшее целое, большее s , то по реитерационной теореме $B^{s;p,q}(\gamma) \subset (H^{p,t}(\gamma), H^{p,m}(\gamma))_{\theta;q,J}$, где $s = (1 - \theta)t + \theta m$. Если $t = s$, то $\theta = 0$, и нетривиальное пространство с помощью J -метода получается только при $q = 1$. Таким образом, доказан пункт 1.

Пункты 2 и 3 следуют из реитерационной теоремы и того, что $H^{2,t}(\gamma) \in \mathcal{J}(t/r; L^2(\gamma), H^{2,r}(\gamma))$. В данном случае r — любое целое больше t . Теорема доказана.

Согласно пункту 1 теоремы 1.1.5 в определении пространства Бесова в качестве индекса дифференцируемости вложенного пространства Соболева можно брать любые целые, большие s . Таким образом, как и в конечномерном случае, определенные нами пространства Бесова $B^{s;p,q}(\gamma)$ вкладываются в пространства Соболева, индекс дифференцируемости которых равен наименьшему целому числу, меньшему s . Пространство $B^{s;p,q}(\gamma)$ является интерполяционным в смысле вещественного интерполяционного метода пространством для объемлющего его и вложенного в него пространств Соболева.

Кроме того, пространства Соболева $H^{p,r}(\gamma)$ над бесконечномерным пространством определены и для дробных значений индекса r , что позволяет вывести, с привлечением расширенного интерполяционного свойства, теорему 1.1.6. Согласно этой теореме, для любого $p > 1$ пространство Бесова $B^{s,p,q}(\gamma)$ вложено в пространство Соболева $H^{p,t}(\gamma)$ с любым $t > s$. Для $p = 2$ верно и обратное вложение, так как пространство $B^{s,2,q}(\gamma)$ является промежуточным, в смысле вещественного интерполяционного метода, для пространств Соболева со сколь угодно близкими к s индексами дифференцируемости.

Теорема 1.1.7. Пусть $r > 0$, $s > 0$. Оператор $V_r = (I - L)^{-r/2}$ — ограниченный оператор из $B^{s,p,q}(\gamma)$ в $B^{r+s,p,q}(\gamma)$.

Доказательство. Пусть $u \in B^{s,p,q}(\gamma)$. По теореме 1.1.5 в определении классов Бесова можно брать любое целое больше s . Возьмем некоторое целое $m > r + s$. Тогда $B^{s,p,q}(\gamma) = (L^p(\gamma), H^{p,m}(\gamma))_{s/m,p,K}$ и $B^{r+s,p,q}(\gamma) = (L^p(\gamma), H^{p,m}(\gamma))_{(r+s)/m,p,K}$. По определению соответствующей этому представлению функции $K(t; \cdot)$,

$$K(t; (I - L)^{-r/2}u) = \inf \{ \|u_0\|_p + t\|u_1\|_{p,m} \mid (I - L)^{-r/2}u = u_0 + u_1 \},$$

где инфимум берется по всем представлениям $(I - L)^{-r/2}u = u_0 + u_1$, где $u_0 \in L^p(\gamma)$ и $u_1 \in H^{p,m}(\gamma)$. Очевидно, что инфимум не уменьшится, если учитывать только $u_0 \in H^{p,r}(\gamma)$ и $u_1 \in H^{p,r+s}(\gamma)$. При этом $u_0 = (I - L)^{-r/2}v_0$, $v_0 \in L^p(\gamma)$, и $u_1 = (I - L)^{-r/2}v_1$, $v_1 \in H^{p,s}(\gamma)$. В силу перестановочности операторов $(I - L)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|(I - L)^{-r/2}v_1\|_{p,m} &= \|(I - L)^{m/2}(I - L)^{-r/2}v_1\|_p = \\ &= \|(I - L)^{-r/2}(I - L)^{m/2}v_1\|_p \leq \|v_1\|_{p,m}. \end{aligned}$$

Применяя это неравенство, получаем оценку

$$\begin{aligned} K(t; (I - L)^{-r/2}u) &\leq \inf \{ \|(I - L)^{-r/2}v_0\|_p + \|(I - L)^{-r/2}v_1\|_{p,m} \} \leq \\ &\leq \inf \{ \|v_0\|_p + \|v_1\|_{p,m} \mid (I - L)^{-r/2}u = \\ &= (I - L)^{-r/2}(v_0 + v_1) \} \leq \\ &\leq \inf \{ \|v_0\|_p + \|v_1\|_{p,m} \mid u = v_0 + v_1 \}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из инъективности оператора $(I - L)^{-r/2}$, и инфинум в последней строчке берется по всем представлениям u в виде суммы $u_0 \in L^p(\gamma)$ и $u_1 \in H^{p,m}(\gamma)$. Таким образом,

$$K(t; (I - L)^{-r/2}u) \leq K(t; u).$$

Оценим теперь $B^{r+s;p,q}(\gamma)$ -норму функции $(I - L)^{-r/2}u$:

$$\begin{aligned} \|(I - L)^{-r/2}u\|_{r+s,p,q}^q &= \int_0^\infty t^{-(r+s)q/m} K(t; (I - L)^{-r/2}u)^q \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq \int_0^\infty t^{-(r+s)q/m} K(t; u)^q \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq \int_0^1 t^{-sq/m} K(t; u)^q \frac{dt}{t} + \int_1^\infty (t^{-sq/m} + t^{-(r+s)q/m} - t^{-sq/m}) K(t; u)^q \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq \int_0^\infty t^{-sq/m} K(t; u)^q \frac{dt}{t} + \int_1^\infty (t^{-(r+s)q/m} - t^{-sq/m}) \|u\|_p^q \frac{dt}{t} = \\ &= \|u\|_{s,p,q}^q + C(r, s, q) \|u\|_p^q \leq C(r, s, q) \|u\|_{s,p,q}^q. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

1.2. Метод следов

В данной главе определенные нами пространства Бесова $B^{s,p,q}(\gamma)$ сравниваются с дробными классами Соболева $E^{s,p}(\gamma)$, определенные с помощью интерполяционного метода следов. Этот метод использовался Ватанабэ в работе [26]. Ниже показано, что эти два подхода эквивалентны при $q = p$, и совпадают для всех индексов s , кроме целых. Заметим, что в работе [12] предполагается эквивалентность двух определений, но не дается доказательство.

Ватанабэ в работе [26] определяет дробные классы Соболева с помощью интерполяционного метода следов. Приведем определение интерполяционного метода следов (метода Ж.-Л. Лионса) так, как оно дано в [13] (см. также [8]).

Пусть B_1 и B_2 — вещественные сепарабельные банаховы пространства, предположим также для простоты, что $B_1 \subseteq B_2$. Для $x \in B_2 \setminus B_1$ положим $|x|_{B_1} = \infty$ по определению. Для $1 < p < \infty$ и $\nu \in \mathbb{R}$ определим банахово пространство $W = W(q, \nu; B_1, B_2)$ как множество всех абсолютно непрерывных функций $f: (0, \infty) \rightarrow B_2$, таких что $t^\nu f \in L_q((0, \infty) \rightarrow B_1)$ и $t^\nu f' \in L_q((0, \infty) \rightarrow B_2)$, с нормой

$$\|f\|_W = \max(\|t^\nu f\|_{L_q((0,\infty) \rightarrow B_1)}, \|t^\nu f'\|_{L_q((0,\infty) \rightarrow B_2)}).$$

Если $\theta = \frac{1}{p} + \nu < 1$, то $B_2 - \lim_{t \downarrow 0} f(t) = f(0)$ существует в B_2 , и мы полагаем

$$T = T^{\theta,q}(B_1, B_2) = \{f(0) | f \in W(q, \nu; B_1, B_2)\} \quad \text{и}$$

$$\|u\|_T = \inf\{\|f\|_W | f \in W(q, \nu; B_1, B_2), f(0) = u\}, \quad u \in T.$$

Теперь, воспользовавшись интерполяционным методом следов, определим дробные классы Соболева $E^{s,p}(\gamma)$.

Определение 1.2.1. Дробные классы Соболева $E^{s,p}(\gamma)$, $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$, задаются равенством

$$E^{s,p}(\gamma) = H^{p,s}(\gamma), \text{ если } s \in \mathbb{Z},$$

и равенством

$$E^{s,p}(\gamma) = T^{1-\sigma}(E^{k+1,p}(\gamma), E^{k,p}(\gamma)), \text{ если } s = k + \sigma, k \in \mathbb{Z}, 0 < \sigma < 1.$$

Из общей теории интерполяционных пространств известно, что интерполяционный метод следов эквивалентен вещественному интерполяционному K -методу, который мы использовали для определения пространств Бесова $B^{s;p,q}(\gamma)$. Благодаря этому мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 1.2.2. *Для $1 < p < \infty$ и дробных s пространства $E^{s,p}(\gamma)$ совпадают с пространствами $B^{s;p,p}(\gamma)$, а их нормы эквивалентны. При $p = 2$ пространства $E^{s,2}(\gamma)$ и $B^{s;2,2}(\gamma)$ совпадают для всех $s > 0$.*

Доказательство. По теореме об эквивалентности метода следов и вещественного интерполяционного K -метода (см. [8, с. 44])

$$E^{s,p}(\gamma) = T^{1-\sigma}(E^{k+1,p}(\gamma), E^{k,p}(\gamma)) = (E^{k+1,p}(\gamma), E^{k,p}(\gamma))_{1-\sigma,p;K},$$

где $s = k + \sigma$. По свойству K -метода (см. [8, с. 25])

$$(E^{k+1,p}(\gamma), E^{k,p}(\gamma))_{1-\sigma,p;K} = (E^{k,p}(\gamma), E^{k+1,p}(\gamma))_{\sigma,p;K}.$$

Далее, из теоремы 1.1.5 о вложениях пространств Бесова и пространств Соболева, положив $m = k + 1$ и $q = p$, получаем:

$$B^{s;p,p}(\gamma) = (H^{p,k}(\gamma), H^{p,k+1}(\gamma))_{\sigma,p;K},$$

что в точности совпадает с предыдущим выражением, поскольку, по определению, $E^{k,p}(\gamma) = H^{p,k}(\gamma)$ и $E^{k+1,p}(\gamma) = H^{p,k+1}(\gamma)$.

Кроме того, согласно теореме 2.1.2, $B^{s;2,2}(\gamma) = H^{2,s}(\gamma)$ для всех вещественных s . Теорема доказана.

Следствие 1.2.3. *Пусть $s > 0$, $\varepsilon > 0$, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$ и $1 < p < \infty$. Справедливы вложения*

$$B^{s+\varepsilon,p,q_1}(\gamma) \subset H^{p,s}(\gamma) \subset B^{s-\varepsilon,p,q_2}(\gamma).$$

Доказательство. При $s \pm \varepsilon \notin \mathbb{Z}$ и $q = p$, данное утверждение следует из теоремы 1.2.2 и аналогичного утверждения для $E^{s \pm \varepsilon,p}(\gamma)$, доказанного в [26]. В общем случае возьмем произвольное δ , такое что $0 < \delta < \varepsilon$ и $s \pm \delta \notin \mathbb{Z}$. По теореме 1.1.5, $B^{s+\varepsilon,p,q_1}(\gamma) \subset B^{s+\delta,p,p}(\gamma)$ и $B^{s-\delta,p,p}(\gamma) \subset B^{s-\varepsilon,p,q_2}(\gamma)$. Таким образом, справедлива цепочка вложений

$$B^{s+\varepsilon,p,q_1}(\gamma) \subset B^{s+\delta,p,p}(\gamma) \subset H^{p,s}(\gamma) \subset B^{s-\delta,p,p}(\gamma) \subset B^{s-\varepsilon,p,q_2}(\gamma).$$

Следствие доказано.

Заметим, что аналогичное следствие, но верное только для целых индексов s , вытекает из утверждения теоремы 1.1.5 для $p > 1$. Данное следствие дополняет этот результат. В то же время для $p = 2$ утверждение следствия следует уже из теоремы 1.1.6 и в более сильной форме — для произвольных q .

1.3. Дуальность и полугрупповое представление

В данном параграфе рассматриваются дуальность интерполяционных пространств и полугрупповая характеристика интерполяционных пространств, которая позволяет ввести удобную эквивалентную норму для пространств Бесова.

Для дальнейшего нам потребуется ввести классы Бесова с отрицательным индексом дифференцируемости. Пространства, определенный через вещественный интерполяционный метод, обладают свойством дуальности. Пусть X_0 и X_1 — банаховы пространства (как обычно, вложенные в некоторое объемлющее пространство). Если $X_0 \cap X_1$ плотно и в X_0 , и в X_1 , то для $0 < \theta < 1$ и $1 < p < \infty$ справедливо равенство (см. [8])

$$(X_0, X_1)'_{\theta, q; K} = (X'_0, X'_1)_{\theta, q'; K}, \quad q^{-1} + q'^{-1} = 1.$$

Пространства $(X_0, X_1)'_{\theta, q; K}$ и $(X'_0, X'_1)_{\theta, q'; K}$ рассматриваются как подпространства $(X_0 \cap X_1)'$.

Определение 1.3.1. Для $k \in \mathbb{N}$, $0 < \sigma < 0$ пространства Бесова $B^{-k+\sigma, p, q}(\gamma)$ определяются равенством

$$B^{-k+\sigma, p, q}(\gamma) = (H^{p, -k}(\gamma), H^{p, -k+1}(\gamma))_{\sigma, q; K},$$

а пространства $B^{-k, p, q}(\gamma)$ — равенством

$$B^{-k, p, q}(\gamma) = (H^{p, -k+1}(\gamma), H^{p, -k-1}(\gamma))_{1/2, q; K}.$$

Заметим, что в последнем равенстве порядок пространств Соболева неважен, так как коэффициент K -метода равняется $1/2$. Легко видеть, что для любых действительных s

$$(B^{s, p, q}(\gamma))' = B^{-s, p', q'}(\gamma), \quad p^{-1} + p'^{-1} = 1, \quad q^{-1} + q'^{-1} = 1. \quad (1.3.1)$$

Для интерполяционных пространств известна характеристика через полугруппы (см. [8, с. 77]). Предположим, что на банаховом пространстве X_0 существует сильно непрерывная сжимающая полугруппа G_t . Пусть целое число $m \leq 0$. Зададим банахово пространство X_1 как

$$X_1 = D(A^m) \quad \text{и} \quad \|u\|_{X_1} = \|u\|_{X_0} + \|A^m u\|_{X_0},$$

где A — генератор полугруппы G_t с областью определения $D(A)$. Тогда, для $0 < \theta < 1$ и $1 < p < \infty$ выполняется равенство

$$(X_0, X_1)_{\theta, q; K} = \left\{ u \mid u \in X_0, \|u\|_{T_0} := \|u\|_{X_0} + \left(\int_0^1 t^{-1-\theta m q} \|(I - G_t)^m u\|_{X_0}^q dt \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

При этом норма $\|u\|_{T_0}$ эквивалентна аналогичному выражению, но без слагаемого $\|u\|_{X_0}$.

Напомним, что $\{T_t\}$ обозначает полугруппу Орнштейна–Уленбека. Для $\alpha \geq 0$ положим

$$T_t^{(\alpha)} = e^{-\alpha t} T_t. \quad (1.3.2)$$

Тогда $T_t^{(\alpha)}$ — полугруппа с генератором $L - \alpha I$. Определим полугруппу $Q_t^{(\alpha)}$ следующим равенством:

$$Q_t^{(\alpha)} = \int_0^\infty T_t^{(\alpha)} \lambda_t^{1/2}(ds), \quad \lambda_t^{(1/2)}(ds) := \frac{t}{2\sqrt{\pi}} e^{-t^2/4s} s^{-3/2} ds. \quad (1.3.3)$$

При $\alpha = 0$ полугруппа $Q_t^{(0)} = Q_t$ называется полугруппой Пуассона (полугруппой Коши). Применение полугруппы $Q_t^{(\alpha)}$ к определению классов Бесова подробно изложено в следующей главе.

Заметив, что областью определения оператора $A = -(I - L)^{1/2}$ в $H^{p,k}(\gamma)$ является $H^{p,k+1}(\gamma)$, получаем следующее предложение.

Предложение 1.3.2. Пусть $s = k + \sigma$, $k \in \mathbb{Z}$ и $0 < \sigma < 1$. Тогда для пространств $B^{s,p,q}(\gamma) = (H^{p,k}(\gamma), H^{p,k+1}(\gamma))_{\sigma, q; K}$ справедливо представление

$$B^{s,p,q}(\gamma) = \left\{ u \mid u \in H^{p,k}(\gamma), \|u\|_{s,p,q}^\sim := \|u\|_{p,k} + \left(\int_0^1 t^{-1-\sigma q} \|u - Q_t^{(1)} u\|_{p,k}^q dt \right)^{1/q} < \infty \right\}, \quad (1.3.4)$$

где $Q_t^{(1)} = e^{-(I-L)^{1/2}t}$ — полугруппа с генератором $A = -(I - L)^{1/2}$.

Пространства $E^{s,p}(\gamma)$ имеют аналогичное представление, где $q = p$, так как $E(s, p)(\gamma) = B^{s,p,p}(\gamma)$.

Для целых k пространства Бесова $B^{k,p,q}(\gamma)$ можно представить аналогичным образом, воспользовавшись равенством

$$B^{k,p,q}(\gamma) = (H^{p,k-1}(\gamma), H^{p,k+1}(\gamma))_{1/2,q;K}.$$

В силу того что $H^{p,k+1}(\gamma)$ является областью определения в $H^{p,k-1}(\gamma)$ генератора $L - I$ полугруппы $T_t^{(1)}$, получаем:

$$B^{k,p,q}(\gamma) = \left\{ u \mid u \in H^{p,k-1}(\gamma), \|u\|_{k,p,q}^* := \right. \\ \left. \|u\|_{p,k-1} + \left(\int_0^1 t^{-1-q/2} \|u - T_t^{(1)}u\|_{p,k-1}^q dt \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

С другой стороны, представив оператор $L - I$ как $-(I - L)^{1/2})^2$, а $H^{p,k+1}(\gamma)$ как $-(I - L)^{1/2})^2 H^{p,k-1}(\gamma)$, можно получить следующее представление пространства Бесова $B^{k,p,q}(\gamma)$.

Предложение 1.3.3. Пусть $k \in \mathbb{Z}$. Тогда для пространств $B^{k,p,q}(\gamma)$ справедливо представление

$$B^{k,p,q}(\gamma) = \left\{ u \mid u \in H^{p,k-1}(\gamma), \|u\|_{k,p,q}^\sim := \right. \\ \left. \|u\|_{p,k-1} + \left(\int_0^1 t^{-1-q} \|(I - Q_t^{(1)})^2 u\|_{p,k-1}^q dt \right)^{1/q} < \infty \right\}. \quad (1.3.5)$$

Совпадение с пространствами $E^{k,p}(\gamma) = H^{p,k}(\gamma)$ при $q = p$ не предполагается. Более того, как показано в следующей главе, мы можем доказать только односторонние вложения в зависимости от значений p .

Глава 2

2.1. Определение, эквивалентность в L^2 и базовые свойства вложения

Даваемое в этой главе определение используется в работе [24] для определения пространств Бесова–Липшица $B_{p,q}^s(\gamma_d)$ на конечномерных пространствах с гауссовской мерой. Это определение можно без изменений перенести на бесконечномерные пространства с гауссовской мерой. Ниже показано, что получающиеся таким образом пространства при $p = q = 2$ совпадают с классами Бесова $B^{s,p,q}(\gamma)$.

В альтернативном определении классов Бесова на бесконечномерных пространствах с гауссовской мерой используется полугруппа $Q_t^{(\alpha)}$, при $\alpha = 0$ называемая полугруппой Пуассона и по определению действующая на функции из $L^p(\gamma)$ следующим образом:

$$Q_t^{(\alpha)} f(x) := \int_0^\infty T_s^{(\alpha)} f(x) \lambda_t^{(1/2)}(ds),$$

где $T_t^{(\alpha)} = e^{-\alpha t} T_t$, $\lambda_t^{(1/2)}(ds) := \frac{t}{2\sqrt{\pi}} e^{-t^2/4s} s^{-3/2} ds = g(t, s) ds$. Известно, что $Q_t^{(\alpha)}$ — сильно-непрерывная сжимающая полугруппа. Справедливо неравенство

$$\left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(\alpha)} u \right\|_p \leq C t^{-m} \|u\|_p. \quad (2.1.1)$$

Для $u \in L^p(\gamma)$ положим $T_t^* u(x) = \sup_{t>0} |T_t u(x)|$. Известно следующее неравенство:

$$\|T_t^* u\|_p \leq C(p) \|u\|_p. \quad (2.1.2)$$

Определение 2.1.1. Пусть $s > 0$, m — наименьшее целое больше, чем s , $1 \leq p, q \leq \infty$. Для $1 \leq q < \infty$ пространство Бесова–Липшица $B_{p,q}^s(\gamma)$

состоит из всех таких функций $u \in L^p(\gamma)$, что

$$|u|_{B_{p,q}^s} := \left(\int_0^\infty \left(t^{m-s} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty. \quad (2.1.3)$$

Норма $u \in B_{p,q}^s(\gamma)$ определяется так: $\|u\|_{B_{p,q}^s} := \|u\|_p + |u|_{B_{p,q}^s}$. Для $q = \infty$ пространство Бесова–Липшица состоит из всех функций $f \in L^p(\gamma)$, для которых существует константа A , зависящая от f и такая, что

$$\left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_p \leq A t^{-k+s}.$$

Норма задается формулой $\|u\|_{B_{p,\infty}^s} := \|u\|_p + A(u)$.

Теорема 2.1.2. Пусть $s > 0$. Пространство Бесова $B^{s;2,2}(\gamma)$ совпадает с пространством $B_{2,2}^s(\gamma)$, а также с пространством Соболева $H^{2,s}(\gamma)$. Кроме того, $B^{s;2,q}(\gamma)$ вложено в $B_{2,q}^s(\gamma)$ для любого $1 \leq q < \infty$.

Доказательство. (i) Сначала докажем вложение $B^{s;2,q}(\gamma) \subset B_{2,q}^s(\gamma)$.

Пусть $u \in B^{s;2,2}(\gamma)$. Для данного $t > 0$ существуют такие $v \in L^2(\gamma)$ и $w \in H^{2,m}(\gamma)$, что $u = v + w$ и $\|v\|_2 + t^m \|w\|_{2,m} \leq 2K(t^m; u)$. Согласно (2.1.1), $t^m \left\| \frac{\partial^m Q_t^{(1)} v}{\partial t^m} \right\|_p$ оценивается L^p -нормой v для любого $p > 1$. Чтобы оценить то же выражение с функцией w , представим ее в виде $w = V_m f$, $f \in L^2(\gamma)$, и разложим ее в винеровский хаос:

$$w = \sum_0^\infty (1+n)^{-m/2} I_n(f) = \sum_0^\infty (1+n)^{-m/2} f_n.$$

Так как $\frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} w_n = (-\sqrt{1+n})^m e^{-\sqrt{1+n}t} w_n$, то

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} w \right\|_2^2 &= \sum_0^\infty (1+n)^m e^{-2t\sqrt{1+n}} (1+n)^{-m} \|f_n\|_2^2 \leq \\ &\leq \sum_0^\infty e^{-2t\sqrt{1+n}} \|f_n\|_2^2 \leq \sum_0^\infty \|f_n\|_2^2. \end{aligned}$$

При этом $\sum_0^\infty \|f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 = \|w\|_{2,m}^2$. Получаем

$$t^m \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_2 \leq C(m) (\|v\|_2 + t^m \|w\|_{2,m}) \leq 2C(m) K(t^m; u).$$

Отсюда для $1 \leq q < \infty$ следует такая оценка для интеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(t^{m-s} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_2 \right)^q \frac{dt}{t} &\leq C(m, q) \int_0^\infty \left((t^m)^{-s/m} K(t^m; u) \right)^q \frac{dt}{t} = \\ &= C(m, q) \int_0^\infty \left(\tau^{-s/m} K(\tau; u) \right)^q \frac{d\tau}{\tau}, \end{aligned}$$

где сделана замена переменных $t^m = \tau$. Аналогично для $q = \infty$.

(ii) Докажем теперь обратное вложение для $q = 2$. Пусть $u \in B_{2,2}^s(\gamma)$. Разложим u в винеровский хаос:

$$u = \sum_0^\infty I_n(u) = \sum_0^\infty u_n.$$

Пользуясь этим представлением, вычислим норму u в пространстве $B_{2,2}^s(\gamma)$. Пусть $m = [s] + 1$. Так как $\|u\|_2^2 = \sum_0^\infty \|u_n\|_2^2$ и $\frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u_n = (-\sqrt{1+n})^m e^{-\sqrt{1+nt}} u_n$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(t^{m-s} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_2 \right)^2 \frac{dt}{t} &= \\ &= \int_0^{+\infty} t^{2(m-s)} \left(\sum_0^\infty e^{-2\sqrt{1+nt}} (1+n)^m \|u_n\|_2^2 \right) \frac{dt}{t} = \\ &= \sum_0^\infty \left(\int_0^{+\infty} t^{2(m-s)} e^{-2\sqrt{1+nt}} \frac{dt}{t} \right) (1+n)^m \|u_n\|_2^2 = \\ &= 2^{-2(m-s)} \Gamma(2(m-s)) \sum_0^\infty (1+n)^s \|u_n\|_2^2. \end{aligned}$$

При $0 < t < 1$ представим u в виде $u = v_t + w_t$, где $w_t = \sum_0^N u_n$, $v_t = \sum_{N+1}^\infty u_n$ и $N = N(t) = [t^{-2/m}]$. При $t \geq 1$ положим $v_t = u$ и $w_t = 0$. Тогда $v_t \in L^2(\gamma)$, а $w_t \in H^{2,m}(\gamma)$. Кроме того, $\|v_t\|_2^2 = \sum_{N+1}^\infty \|u_n\|_2^2$ и $\|w_t\|_{2,m}^2 = \sum_0^N (1+n)^m \|u_n\|_2^2$. По определению, $K(t; u) \leq \|v_t\|_2 + t \|w_t\|_{2,m}$.

Чтобы оценить норму Бесова функции u , оценим отдельно интегралы для двух слагаемых в последнем неравенстве. Положим $t_n = (1+n)^{-m/2}$.

Заметив, что $E_n = \{t: N(t) \leq n-1\} = (t_n, +\infty)$, оценим первый интеграл так:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(t^{-s/m} \|v_t\|_2 \right)^2 \frac{dt}{t} &= \int_0^{+\infty} t^{-1-2s/m} \sum_{n=0}^{\infty} (\|u_n\|_2^2 I_{E_n}(t)) dt \leq \\ &\leq \sum_0^{\infty} \|u_n\|_2^2 \int_{t_n}^{+\infty} t^{-1-2s/m} dt = \frac{m}{2s} \sum_0^{\infty} (1+n)^s \|u_n\|_2^2 \leq \\ &\leq C(m, s) \|u\|_{B_{2,2}^s(\gamma)}^2. \end{aligned}$$

Для оценки интеграла со слагаемым $t\|w_t\|_{2,m}$ возьмем $\varepsilon > 0$. При $t > \varepsilon$ число членов в сумме, задающей tw_t , конечно и не превосходит $n_\varepsilon = \varepsilon^{-2/m}$. Интегрируя эту сумму, получаем

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^{+\infty} \left(t^{-s/m} t \|w_t\|_{2,m} \right)^2 \frac{dt}{t} &= \\ &= \sum_0^{n_\varepsilon} (1+n)^m \|u_n\|_2^2 \int_\varepsilon^{+\infty} t^{1-2s/m} I_{[0;t_n]}(t) dt \leq \\ &\leq \sum_0^{n_\varepsilon} m \frac{(1+n)^{s-m}}{2m-2s} (1+n)^m \|u_n\|_2^2 = C(m, s) \sum_0^{n_\varepsilon} (1+n)^s \|u_n\|_2^2. \end{aligned}$$

Устремляя ε к нулю, получаем

$$\int_0^{+\infty} \left(t^{-s/m} t \|w_t\|_{2,m} \right)^2 \frac{dt}{t} \leq C(m, s) \sum_0^{\infty} (1+n)^s \|u_n\|_2^2.$$

Отсюда следует и такая оценка нормы u в пространстве $B^{s,2,2}(\gamma)$:

$$\int_0^{+\infty} \left(t^{-s/m} K(t; u) \right)^2 \frac{dt}{t} \leq C(m, s) \sum_0^{\infty} (1+n)^s \|u_n\|_2^2,$$

что доказывает, что пространства $B^{s,2,2}(\gamma)$ и $B_{2,2}^s(\gamma)$ совпадают. Кроме того, вычисленная норма пространства $B_{2,2}^s(\gamma)$ с точностью до константы равна норме $\|u\|_{2,s}^2 = \sum_0^{\infty} (1+n)^s \|u_n\|_2^2$ пространства Соболева $H^{2,s}(\gamma)$, поэтому эти пространства совпадают. Теорема доказана.

Мы покажем теперь для $p = 2$, что шкала пространств Бесова является более точной, чем шкала пространств Соболева.

Предложение 2.1.3. Пусть $s > 0$. Существует функция u такая, что u входит во все пространства $H^{2,s-\sigma}(\gamma)$ для сколь угодно малого $\sigma > 0$, $u \in B_{2,q}^s(\gamma)$ для $q > 2$, но при этом u не входит в $H^{2,s}(\gamma)$.

Доказательство. Разложив произвольное u из $B_{2,q}^s(\gamma)$ в винеровский хаос $u = \sum_0^\infty I_n(u) = \sum_0^\infty u_n$, получим:

$$\|u\|_{2,s}^2 = \sum_0^\infty (1+n)^s \|u_n\|_2^2, \quad \|u\|_{2,s-\sigma}^2 = \sum_0^\infty (1+n)^{s-\sigma} \|u_n\|_2^2.$$

Рассмотрим такую функцию u , что $\|u_n\|_2^2 = (1+n)^{-1-s} \ln^{-\varepsilon}(2+n)$, где $\varepsilon > 0$. Такую функцию можно получить, если, например, выбрать в каждом $\mathcal{X}_n$ по ненулевому элементу u_n , умножив его на подходящую константу, положить u_n равным этому элементу. Легко видеть, что $\|u\|_{2,s-\sigma} < \infty$ для любого ε , тогда как $\|u\|_{2,s} = \infty$, если $\varepsilon \leq 1$. Положим $\varepsilon = 1$ и оценим норму u в $B_{2,q}^s(\gamma)$. Зафиксировав $0 < \delta < 1$, в силу неравенства (2.1.1), получим

$$\int_\delta^\infty t^{-1-(m-s)q} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_2^q dt \leq \int_\delta^\infty t^{-1-(m-s)q} t^{-mq} \|u\|_2^q dt < \infty.$$

Таким образом, достаточно показать, что интеграл от 0 до δ тоже сходится. Так как функция $f(n) = (1+n)^{m-s-1} e^{-2(1+n)^{1/2}t} \ln^{-1}(2+n)$ монотонно убывает, то мы можем оценить ряд из $f(n)$ интегралом:

$$\left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_2^2 = \sum_0^\infty f(n) \leq f(0) + f(1) + \int_1^\infty f(x) dx.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^\delta t^{-1-(m-s)q} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_2^q dt &\leq C \int_0^\delta t^{-1-(m-s)q} \left(\int_1^\infty f(x) dx \right)^{q/2} dt = \\ &= C \int_0^\delta t^{-1} \left(\int_{\sqrt{2}t}^\infty y^{2(m-s)-1} \frac{e^{-2y}}{\ln(1+y^2/t^2)} dy \right)^{q/2} dt, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

где сделана замена переменной $y = (1+x)^{1/2}t$. Если $y > 1$, справедлива следующая оценка:

$$\frac{1}{\ln(1+y^2/t^2)} < \frac{1}{2(\ln y - \ln t)} \leq \frac{1}{2|\ln t|} \cdot \frac{1}{1 + \ln y/|\ln t|} \leq \frac{1}{2|\ln t|},$$

так как $\ln y > 0$. Если $\sqrt{2}t \leq y < 1$, то $|\ln t| > |\ln(y/\sqrt{2})|$ и

$$\frac{1}{\ln(1 + y^2/t^2)} < \frac{1}{2|\ln t|} \cdot \frac{1}{1 + \ln y/|\ln t|} < \frac{1}{2|\ln t|} \frac{|\ln y| + \ln \sqrt{2}}{\ln \sqrt{2}}.$$

При применении этих оценок к (2.1.4), внутренний интеграл будет сходящимся и не будет зависеть от t . В итоге получаем, что

$$\int_0^\delta t^{-1-(m-s)q} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_2^q dt \leq C(q, s) \int_0^\delta \frac{dt}{t(-\ln t)^{q/2}} < \infty.$$

Предложение доказано.

Использование свойств полугруппы $Q_t^{(1)}$ позволяет упростить представление нормы $B_{p,q}^s(\gamma)$ для функций из классов Соболева и установить связь между классами Соболева и пространствами $B_{p,q}^s(\gamma)$. Так как $Q_t^{(1)}$ является сильно непрерывной полугруппой с генератором $-(I - L)^{1/2}$, то для всех $u \in D((I - L)^{1/2})$ выполняются соотношения (см. [23])

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_t^{(1)} u = -(I - L)^{1/2} Q_t^{(1)} u = -Q_t^{(1)} (I - L)^{1/2} u. \quad (2.1.5)$$

Лемма 2.1.4. *Если $s > 0$ и целое $k > 0$, то для любой функции $u \in B_{p,q}^s(\gamma)$ справедливо равенство*

$$|(I - L)^{-k/2} u|_{B_{p,q}^{s+k}} = |u|_{B_{p,q}^s}.$$

Доказательство. Пусть $u \in B_{p,q}^s(\gamma)$ и пусть m — наименьшее целое больше, чем s . Так как $(I - L)^{-l/2} u \in D((I - L)^{1/2})$, то, применяя равенствами (2.1.5) k раз, получаем:

$$\frac{\partial^{m+k}}{\partial t^{m+k}} Q_t^{(1)} (I - L)^{-k/2} u = \frac{\partial^m}{\partial t^m} \left[Q_t^{(1)} (I - L)^{k/2} (I - L)^{-k/2} u \right] = \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u.$$

Подставляя полученное равенство в выражение для $|u|_{B_{p,q}^{s+k}}$, получаем

$$\begin{aligned} |(I - L)^{-k/2} u|_{B_{p,q}^{s+k}}^q &= \int_0^\infty t^{((m+k)-(s+k))q} \left\| \frac{\partial^{m+k}}{\partial t^{m+k}} Q_t^{(1)} (I - L)^{-k/2} u \right\|_p^q \frac{dt}{t} = \\ &= \int_0^\infty t^{(m-k)q} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_p^q \frac{dt}{t} = |u|_{B_{p,q}^s}^q. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1.5. *Если $0 < \sigma < 1$ и целое $k > 0$, то для любой $u \in H^{p,k+1}(\gamma)$ справедливы неравенства*

$$\|u\|_{p,k} \leq C(k, \sigma, q) \|u\|_{B_{p,q}^{k+\sigma}} \leq C(k, \sigma, q) \|u\|_{p,k+1}.$$

Доказательство. (i) Докажем, что $\|u\|_{B_{p,q}^{k+\sigma}} \leq C(k, \sigma, q) \|u\|_{p,k+1}$. Пусть $u \in H^{p,k+1}(\gamma)$. Из соотношений (2.1.5) следует, что

$$(I - L)^{(k+1)/2} Q_t^{(1)} u = \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} Q_t^{(1)} u.$$

Пользуясь этим равенством, неравенством (2.1.1) и сжимаемостью полу-группы $Q_t^{(1)}$, оцениваем $\|u\|_{B_{p,q}^{k+\sigma}}$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty t^{-1+(1-\sigma)q} \left\| \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} Q_t^{(1)} u \right\|_p^q dt \leq \\ & \leq \int_0^1 t^{-1+(1-\sigma)q} \left\| (I - L)^{(k+1)/2} Q_t^{(1)} u \right\|_p^q dt + \int_1^\infty t^{-1+(1-\sigma)q} t^{-(k+1)} \|u\|_p^q dt \leq \\ & \leq \int_0^1 t^{-1+(1-\sigma)q} \|Q_t^{(1)} u\|_{p,k+1}^q dt + C(k, \sigma, q) \|u\|_p^q \leq C(k, \sigma, q) \|u\|_{p,k+1}^q. \end{aligned}$$

(ii) Известно следующее равенство (см. [25, с. 81]), справедливое для всех функций $u \in L^p(\gamma)$:

$$(I - L)^{-1/2} u = \int_0^\infty Q_t^{(1)} u dt. \quad (2.1.6)$$

Представив $u \in H^{p,k+1}(\gamma)$ в виде $u = V_k v$, $v \in H^{p,1}(\gamma)$, и воспользовавшись этим равенством, получаем

$$\begin{aligned} v &= (I - L)^{1/2} (I - L)^{-1/2} v = (I - L)^{1/2} \int_0^\infty Q_t^{(1)} v dt = \\ &= (I - L)^{1/2} \int_0^\infty Q_t^{(1)} (I - L)^{k/2} u dt = \int_0^\infty \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} Q_t^{(1)} u dt. \end{aligned}$$

Поскольку $\|v\|_p = \|u\|_{p,k}$, применяя неравенство Гёльдера и неравенство (2.1.1), получаем оценку

$$\|u\|_{p,k} = \left\| \int_0^\infty \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} Q_t^{(1)} u dt \right\|_p \leq \int_0^\infty \left\| \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} Q_t^{(1)} u \right\|_p dt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 t^{-q^{-1}-r^{-1}+(1-\sigma)+\sigma} \left\| \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} Q_t^{(1)} u \right\|_p dt \\
&\quad + \int_1^\infty \left\| \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} Q_t^{(1)} u \right\|_p dt \leq \\
&\leq C(\sigma, q) \left(\int_0^1 t^{(1-\sigma)q} \left\| \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} Q_t^{(1)} u \right\|_p^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \int_1^\infty t^{-k-1} \|u\|_p dt \leq \\
&\leq C(k, \sigma, q) \|u\|_{B_{p,q}^{k+\sigma}}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Очевидно, что из теоремы следует вложение $H^{p,k+1}(\gamma) \subset B_{p,q}^{k+\sigma}(\gamma)$. Однако вложение $B_{p,q}^{k+\sigma}(\gamma) \subset H^{p,k}(\gamma)$ не следует из теоремы, так как соответствующее неравенство доказано только для функций из $H^{p,k+1}(\gamma)$. Для того чтобы это неравенство выполнялось для всех функций из $H^{p,k}(\gamma)$, достаточно, например, чтобы $H^{p,k+1}(\gamma)$ было плотно в $B_{p,q}^{k+\sigma}(\gamma)$, что будет следовать из доказанного далее.

Теорема 2.1.6. Пусть $s > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ и $m > s$. Тогда пространство $H^{p,m}(\gamma)$ всюду плотно в пространстве $B_{p,q}^s(\gamma)$.

Доказательство. Покажем, что операторы $Q_t^{(1)}$ образуют сильно непрерывную полугруппу операторов на $B_{p,q}^s(\gamma)$. Для этого нужно доказать, что $\|Q_t^{(1)}u - u\|_{B_{p,q}^s} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ для любой функции $u \in B_{p,q}^s(\gamma)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\|u\|_{B_{p,q}^s} < \infty$, то существует такое $\delta > 0$, что

$$\int_0^\delta t^{-1+(m-s)q} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_p^q dt < \varepsilon.$$

Можно считать, что $\delta < \varepsilon$, иначе выберем $\delta < \varepsilon$. Легко показать, что

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} (Q_s^{(1)} - I)u = (Q_s^{(1)} - I) \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u.$$

Кроме того, очевидно, что $\|Q_s^{(1)} - I\|_p \leq 2$. Отсюда следует неравенство

$$\int_0^\delta t^{-1+(m-s)q} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} (Q_s^{(1)} - I)u \right\|_p^q dt < 2\varepsilon.$$

Для данного u существует $s_0 > 0$, такое что $\|Q_s^{(1)}u - u\|_p < \delta^m$ для $s < s_0$. Пользуясь неравенством (2.1.1), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\delta}^{\infty} t^{-1+(m-s)q} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} (Q_s^{(1)} - I)u \right\|_p^q dt \leq \\ & \leq C \int_{\delta}^{\infty} t^{-1-sq} \|Q_s^{(1)}u - u\|_p^q dt \leq C\delta^{(m-s)q} < C\varepsilon^{(m-s)q}. \end{aligned}$$

Объединяя с предыдущей оценкой, получаем, что $|Q_t^{(1)}u - u|_{B_{p,q}^s} \rightarrow 0$.

Обозначим через A генератор $Q_t^{(1)}$, как полугруппы на $B_{p,q}^s(\gamma)$. В силу сильной непрерывности $Q_t^{(1)}$, область определения оператора A всюду плотна в $B_{p,q}^s(\gamma)$. Так как

$$t^{-1}\|Q_t^{(1)}u - u\|_p \leq t^{-1}\|Q_t^{(1)}u - u\|_{B_{p,q}^s},$$

то $D(A) \subset D((I-L)^{1/2}) = H^{p,1}(\gamma)$. Следовательно, $H^{p,1}(\gamma) \cap B_{p,q}^s(\gamma)$ плотно в $B_{p,q}^s(\gamma)$, а так как $H^{p,m}(\gamma)$ плотно в $H^{p,1}(\gamma) \cap B_{p,q}^s(\gamma)$ и непрерывно вложено в $B_{p,q}^s(\gamma)$, то $H^{p,m}(\gamma)$ плотно в $B_{p,q}^s(\gamma)$. Теорема доказана.

Легко доказывается следующая лемма.

Лемма 2.1.7. Пусть банаховы пространства A и B непрерывны вложены в $L^p(\gamma)$. Пусть банахово пространство C является всюду плотным подпространством в A и в B , и $\|u\|_A \leq C\|u\|_B$ для всех $u \in C$. Тогда $\|u\|_A \leq C\|u\|_B$ для всех $u \in B$.

Доказательство. Пусть $u \in B$ и $u_n \rightarrow u$, $u_n \in C$. Тогда последовательность u_n фундаментальна в B . Так как $\|u_n\|_A \leq C\|u_n\|_B$, u_n фундаментальна и в A , и сходится к некоторой функции $v \in A$. С другой стороны, u_n сходится в $L^p(\gamma)$ одновременно и к u , и к v , то есть $v = u$, и

$$\|u\|_A \leq \|u - u_n\|_A + C\|u_n\|_B \rightarrow C\|u\|_B.$$

Лемма доказана.

Применяя эту лемму к утверждению теоремы 2.1.5, учитывая теорему 2.1.6, немедленно получаем что $B^{k+\sigma,p,q}(\gamma) \subset H^{p,k}(\gamma)$, где k целое неотрицательное и $\sigma > 0$.

Как показано в работе [24], если $p > 1$, $s > 0$ и $f \in L^p(\gamma)$, то, подставив интегральное представление $V_s f$ в выражение для $B_{p,p}^s(\gamma)$, можно

получить следующую оценку:

$$|V_s f|_{B_{p,p}^s} \leq C(m, s) \left(\int_0^\infty \left(t^m \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} f \right\|_p \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}. \quad (2.1.7)$$

Вывод этого неравенства не использует специфики конечномерных пространств и может быть перенесен без изменений на случай локально-выпуклого пространства с гауссовской мерой. В работе [24] также показано, что при $p \geq 2$ выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty \left(t^m \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} f \right\|_p \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \leq \\ & \leq C(m, s) \left[\|T_t^* f\|_p^{p-2} \left\| \left(\int_0^\infty \left(t^m \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} f \right\|_p \right)^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_p^2 + \|f\|_p^p \right]^{1/p} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

При $m = 1$ в правой части неравенства присутствует $L^p(\gamma)$ -норма Литтлвуд-Пэли функции $G_f^\rightarrow$, определяемой равенством

$$G_f^\rightarrow(x) = \left(\int_0^\infty t \left| \frac{\partial}{\partial t} Q_t^{(1)} f(x) \right|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Справедливо неравенство Литтлвуд-Пэли-Стейна (см. [25, 58])

$$C_1(p) \|f\|_p \leq \|G_f^\rightarrow\|_p \leq C_2(p) \|f\|_p. \quad (2.1.9)$$

Теорема 2.1.8. *Если $p \geq 2$ и $s > 0$, то справедливо вложение*

$$H^{p,s}(\gamma) \subset B_{p,p}^s(\gamma).$$

Доказательство. Пусть сначала $u \in H^{p,\sigma}(\gamma)$, $0 < \sigma < 1$. Представим u как $u = V_\sigma v$, $v \in L^p(\gamma)$. Применяя неравенства (2.1.2), (2.1.7), (2.1.8) и (2.1.9), получаем оценку

$$|u|_{B_{p,p}^\sigma}^p \leq C(\sigma, p) (\|T_t^* v\|_p^{p-2} \|G_v^\rightarrow\|_p^2 + \|v\|_p^p) \leq C(\sigma, p) \|v\|_p^p = C(\sigma, p) \|u\|_{p,\sigma}^p.$$

Пусть теперь $u \in H^{p,1}(\gamma)$ и $u = V_1 v$, $v \in L^p(\gamma)$. Тогда $|u|_{B_{p,p}^1}^p$ можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(t \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_t^{(1)} u \right\|_p \right)^p \frac{dt}{t} &= \int_0^\infty \left(t \left\| \frac{\partial}{\partial t} Q_t^{(1)} (I - L)^{1/2} u \right\|_p \right)^p \frac{dt}{t} = \\ &= \int_0^\infty \left(t \left\| \frac{\partial}{\partial t} Q_t^{(1)} v \right\|_p \right)^p \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство (2.1.8), а затем (2.1.2) и (2.1.9), получаем

$$|u|_{B_{p,p}^1}^p \leq C(p) (\|T_t^* v\|_p^{p-2} \|G_v^\rightarrow\|_p^2 + \|v\|_p^p) \leq C(p) \|v\|_p^p = C(p) \|u\|_{p,1}^p.$$

Для произвольного $s > 0$ представим $u \in H^{p,s}(\gamma)$ в виде $u = V_k v$, $v \in H^{p,\sigma}(\gamma)$, $0 < \sigma \leq 1$. По доказанному выше и лемме 2.1.4

$$|u|_{B_{p,p}^s} = |v|_{B_{p,p}^\sigma} \leq C(s, p) \|v\|_{p,\sigma} = \|u\|_{p,s}.$$

Теорема доказана.

Следует обратить внимание на то, что в доказанной теореме выводится более сильное утверждение о вложении классов Соболева, чем было доказано для пространств $B^{s,p,q}(\gamma)$, определенных через вещественный интерполяционный K -метод.

2.2. Эквивалентность в общем случае и теорема вложения

Согласно следствию 1.2.3, в пространство $B^{s,p,q}(\gamma)$ вкладываются классы Соболева с индексами дифференцируемости сколь угодно близкими, но большими, чем s , но ничего не утверждается о пространствах Соболева и Бесова с равными индексами дифференцируемости. Однако, как показывает следующая теорема, пространства $B^{s,p,q}(\gamma)$ и $B_{p,q}^s(\gamma)$ совпадают, что делает доказанное свойство вложения справедливым и для $B^{s,p,q}(\gamma)$.

Теорема 2.2.1. *Пусть $s > 0$, $p > 1$, $1 \leq q < \infty$. Пространство Бесова $B^{s,p,q}(\gamma)$ совпадает с пространством $B_{p,q}^s(\gamma)$, а их нормы эквивалентны.*

Доказательство. (i) Докажем, что $B^{s,p,q}(\gamma) \subset B_{p,q}^s(\gamma)$.

Пусть $u \in B^{s,p,q}(\gamma)$ и m — наименьшее целое больше s . Для данного $t > 0$ существуют такие $v \in L^p(\gamma)$ и $w \in H^{p,m}(\gamma)$, что $u = v + w$ и $\|v\|_p + t^m \|w\|_{p,m} \leq 2K(t^m; u)$. Представим w в виде $w = V_m g$, $g \in L^p(\gamma)$. Пользуясь равенством (2.1.5), легко получить, что

$$\left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} w \right\|_p = \|(I - L)^{m/2} Q_t^{(1)} w\|_p = \|Q_t^{(1)} w\|_{p,m} \leq \|w\|_{p,m}.$$

Кроме того, согласно (2.1.1), $t^m \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} v \right\|_p$ оценивается L^p -нормой v . Получаем

$$t^m \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_p \leq C(m)(\|v\|_p + t^m \|w\|_{p,m}) \leq 2C(m)K(t^m; u).$$

Отсюда следует такая оценка для $|u|_{B_{p,q}^s}$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(t^{m-s} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} &\leq C(m, q) \int_0^\infty \left((t^m)^{-s/m} K(t^m; u) \right)^q \frac{dt}{t} = \\ &= C(m, q) \int_0^\infty \left(\tau^{-s/m} K(\tau; u) \right)^q \frac{d\tau}{\tau}, \end{aligned}$$

где сделана замена переменных $t^m = \tau$.

(ii) Докажем обратное вложение. Так как $H^{p,k+1}(\gamma)$ плотно в $B^{s,p,q}(\gamma)$ и в $B_{p,q}^s(\gamma)$, то по лемме 2.1.7 достаточно доказать, что $\|u\|_{s,p,q} \leq C\|u\|_{B_{p,q}^s}$ для всех $u \in H^{p,k+1}(\gamma)$.

В силу сильной непрерывности полугруппы $Q_t^{(1)}$, для любой функции $v \in D((I - L)^{1/2})$ выполняются равенства

$$Q_t^{(1)}v - v = - \int_0^t (I - L)^{1/2} Q_s^{(1)}v \, ds = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} Q_s^{(1)}v \, ds.$$

Пусть $s = k + \sigma$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 < \sigma < 1$, и пусть $u \in H^{p,k+1}(\gamma) \subset B_{p,q}^s(\gamma)$. Пользуясь указанным представлением для $Q_t^{(1)}u - u$, применяя неравенство Йенсена и меняя порядок интегрирования, получаем следующую оценку для $\|u\|_{s,p,q}^\sim$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{-1-\sigma q} \|u - Q_t^{(1)}u\|_{p,k}^q dt = \\ &= \int_0^1 t^{-1-\sigma q} \left\| \int_0^t (I - L)^{1/2} Q_s^{(1)}u \, ds \right\|_{p,k}^q dt \leq \\ &\leq \int_0^1 t^{-1-\sigma q} \left(\int_0^t \|(I - L)^{1/2} Q_s^{(1)}u\|_{p,k} ds \right)^q dt \leq \\ &\leq \int_0^1 \left[\int_0^s t^{-1-\sigma q} t^{q-1} dt \right] \left\| (I - L)^{(k+1)/2} Q_s^{(1)}u \right\|_p^q ds \leq \\ &\leq C(\sigma, q) \int_0^1 s^{-1+(1-\sigma)q} \left\| \frac{\partial^{k+1}}{\partial s^{k+1}} Q_s^{(1)}u \right\|_p^q ds \leq \\ &\leq C(\sigma, q) \|u\|_{B_{p,q}^{k+\sigma}}^q. \end{aligned}$$

Для $s = k$, $k \in \mathbb{Z}$, воспользуемся полугрупповым представлением (1.3.5) пространства $B^{k,p,q}(\gamma)$. Для $u \in H^{p,k+1}(\gamma)$, переносим норму на подынтегральное выражение и пользуясь полугрупповым свойством $Q_s^{(1)}$,

$$\begin{aligned} \|(I - Q_t^{(1)})^2 u\|_{p,k-1} &= \left\| \int_0^t \int_0^t (I - L)^{1/2} Q_s^{(1)}(I - L)^{1/2} Q_r^{(1)}u \, dr \, ds \right\|_{p,k-1} \leq \\ &\leq \int_0^t \int_0^t \|(I - L)^{1/2} Q_{r+s}^{(1)}u\|_{p,k} \, dr \, ds. \end{aligned}$$

Делая замену переменной $y = r + s$, меняя порядок интегрирования и производя вычисления, получаем:

$$\|(I - Q_t^{(1)})^2 u\|_{p,k-1} \leq 2 \int_0^{2t} y \|(I - L)^{1/2} Q_y^{(1)}u\|_{p,k} dy.$$

Теперь, применяя неравенство Йенсена, оцениваем $\|u\|_{k,p,q}^\sim$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 t^{-1-q} \|(I - Q_t^{(1)})^2 u\|_{p,k-1}^q dt \leq \\
& \leq C(q) \int_0^1 t^{-1-q} t^{q-1} \int_0^{2t} y^q \|(I - L)^{1/2} Q_y^{(1)} u\|_{p,k}^q dy dt \leq \\
& \leq C(q) \int_0^2 \left[\int_{y/2}^1 t^{-2} dt \right] y^q \|(I - L)^{1/2} Q_y^{(1)} u\|_{p,k}^q dy \leq \\
& \leq C(q) \int_0^\infty y^q \left\| \frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} Q_y^{(1)} u \right\|_p^q \frac{dy}{y} = C(q) |u|_{B_{p,q}^k}^q.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следующая теорема дополняет результат о вложениях пространств Соболева и Бесова при $q = p$, доказанный в теореме 2.1.8.

Теорема 2.2.2. Пусть $k \in \mathbb{Z}$ и $s \in \mathbb{R}$.

- 1) Если $2 \leq p < \infty$, то $B^{k,p,2}(\gamma) \subset H^{p,k}(\gamma)$ и $H^{p,s}(\gamma) \subset B^{s,p,p}(\gamma)$.
- 2) Если $1 < p \leq 2$, то $B^{s,p,p}(\gamma) \subset H^{p,s}(\gamma)$ и $H^{p,k}(\gamma) \subset B^{k,p,2}(\gamma)$.

Доказательство. (i) Рассмотрим случай $p \geq 2$. Вложение $H^{p,s}(\gamma) \subset B^{s,p,p}(\gamma)$ доказано в теореме 2.1.8. Докажем вложение $B^{k,p,2}(\gamma) \subset H^{p,k}(\gamma)$.

Пусть $u \in H^{p,k+1}(\gamma)$. Представим u в виде $u = V_m v$, $v \in H^{p,1}(\gamma)$. Применяя неравенство (2.1.9) и интегральное неравенство Миньковского, получаем

$$\begin{aligned}
\|u\|_{p,k} &= \|v\|_p \leq \left(\int_X \left(\int_0^\infty t^2 \left| \frac{\partial}{\partial t} Q_t^{(1)} v \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{p/2} d\gamma \right)^{1/p} \leq \\
&\leq \left(\int_0^\infty t^2 \left(\int_X \left| \frac{\partial}{\partial t} Q_t^{(1)} v \right|^p d\gamma \right)^{2/p} \frac{dt}{t} \right)^{1/2} = \\
&= \left(\int_0^\infty t^2 \left\| \frac{\partial}{\partial t} Q_t^{(1)} v \right\|_p^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} = |u|_{B_{p,2}^k} \leq \\
&\leq C(p) \|u\|_{k,p,2}.
\end{aligned}$$

Так как $H^{p,k+1}(\gamma)$ всюду плотно в $H^{p,k}(\gamma)$ и $B^{k,p,2}(\gamma)$, то по лемме 2.1.7 доказанная оценка верна для всех $u \in B^{k,p,2}(\gamma)$.

(ii) Вторую часть теоремы можно получить, воспользовавшись дуальностью пространств $B^{s,p,p}(\gamma)$.

Заметим, что доказательство теоремы 2.2.1 остается в силе, если заменить k на $-k$ и $\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}}Q_t^{(1)}u$ на $(I-L)^{-k+1}Q_t^{(1)}u$. Можно было бы определить пространства $B_{p,q}^{-k+\sigma}(\gamma)$, $0 \leq \sigma < 1$, как пополнение $H^{p,-k+1}(\gamma)$ по норме

$$\left(\int_0^\infty t^{(1-\sigma)q} \|(I-L)^{(-k+1)/2} Q_t^{(1)} u\|_p^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Можно видоизменить таким же образом доказательство теоремы 2.1.8. Например, для $u \in H^{p,-1}(\gamma)$ оценка нормы пространства Бесова выглядела бы следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(t \|(I-L)^{(-1+1)/2} Q_t^{(1)} u\|_p \right)^p \frac{dt}{t} = \\ & = \int_0^\infty \left(t \left\| \frac{\partial}{\partial t} Q_t^{(1)} (I-L)^{-1/2} u \right\|_p \right)^p \frac{dt}{t} \leq \\ & \leq C(p) (\|T_t^* v\|_p^{p-2} \|G_v^{\rightarrow}\|_p^2 + \|v\|_p^p) \leq C(p) \|v\|_p^p = C(p) \|u\|_{p,-1}^p. \end{aligned}$$

где $u = (I-L)^{1/2}v$, $v \in L^p(\gamma)$ и применяются неравенства (2.1.8) и (2.1.9).

Таким образом можно считать доказанным для всех s и $q > 2$ вложение

$$H^{q,-s}(\gamma) \subset B^{-s,q,q}(\gamma).$$

Откуда получаем, учитывая равенство (1.3.1), для всех $1 < p < 2$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$:

$$B^{s,p,p}(\gamma) = (B^{-s,q,q}(\gamma))' \subset (H^{q,-s}(\gamma))' = H^{p,s}(\gamma).$$

Вложение $H^{p,k}(\gamma) \subset B^{k,p,2}(\gamma)$ получается аналогично. Теорема доказана.

Глава 3

В этой главе вводятся пространства Бесова на бесконечномерных пространствах с гауссовской мерой аналогично прямому определению через интегральное условие, известному в конечномерном случае (см. [2], [3], [4], [14]). Основной результат — теорема вложения для введенных пространств.

Для всякой функции u на $\mathbb{R}^n$ и всякого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ положим $\Delta_h u(x) = u(x) - u(x - h)$. При $s > 0$, $p > 1$ и $q \geq 1$ класс Бесова функций на пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется как множество всех функций $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$\int_{\mathbb{R}^n} [|h|^{-s} \|(\Delta_h)^m u\|_p]^q (dh/h^n) < \infty.$$

В этой главе используется другое определение классов Соболева, а именно пространства $W^{p,r}(\gamma)$. Для $p \geq 1$ и $r \in \mathbb{N}$ они определяются как пополнение пространства гладких цилиндрических функций $\mathcal{FC}^\infty$ по соболевской норме $\|\cdot\|_{W^{p,r}}$, определяемой по формуле

$$\|f\|_{W^{p,r}} = \sum_{k=0}^r \|D_H^k f\|_{L^p(\gamma, \mathcal{H}_k)}.$$

Здесь $D_H^k f$ является отображением из X в пространство k -линейных отображений Гильберта–Шмидта из $H(\gamma)$ в $\mathbb{R}^1$; $D_H f$ для функций из $\mathcal{FC}^\infty$ определяется для $h \in H(\gamma)$ по формуле $D_H f(x)h = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(f(x+th) - f(x))$. Производные более высокого порядка $D_H^k f$ определяются индуктивно как $D_H(D_H^{k-1} f)$. Подробнее о классах Соболева в бесконечномерных пространствах см. [5] – [25].

Для центрированной радоновской гауссовской меры γ (см. [5]) пространство Камерона–Мартина $H = H(\gamma)$ состоит из всех векторов

$h \in X$, имеющих конечную норму $|h|_H := \sup\{l(h) : l \in X^*, \|l\|_{L^2(\gamma)} \leq 1\}$. Эта норма порождается скалярным произведением $\langle k, h \rangle$, которое можно задать так: для всякого $h \in H$ найдется элемент l_h из замыкания X^* в $L^2(\gamma)$, удовлетворяющий тождеству

$$l(h) = \int_X l_h l d\gamma, \quad l \in X^*.$$

Тогда $\langle k, h \rangle = (l_h, l_k)_{L^2(\gamma)}$. Для стандартной гауссовской меры на $\mathbb{R}^\infty$ получаем $H = l^2$ с обычным скалярным произведением.

Положим $\Delta_h u(x) = u(x) - u(x - h)$, где $h \in H(\gamma)$. Норму в $L^p(\gamma)$ будем обозначать через $\|\cdot\|_p$.

Определение 3.1. Пусть $0 < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, ν — борелевская вероятностная мера на $H(\gamma)$ и m — наименьшее целое, большее s . Класс Бесова $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$ состоит из всех таких функций $u \in L^p(\gamma)$, что

$$\int_H |h|_H^{-sq} \|(\Delta_h)^m u\|_p^q \nu(dh) < \infty.$$

Норма в $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$ задается формулой

$$\|u\|_{s;p,q,\nu} := \|u\|_p + \left(\int_H |h|_H^{-sq} \|(\Delta_h)^m u\|_p^q \nu(dh) \right)^{1/q}.$$

Отметим, что определяемые так пространства существенно зависят не только от трех числовых параметров, как обычные классы Бесова, но и от дополнительного параметра, которым является мера на пространстве Камерона–Мартина.

Лемма 3.1. Пространства $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$ являются банаховыми.

Доказательство. Пусть последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ из класса Бесова $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$ фундаментальна по норме $\|\cdot\|_{s;p,q,\nu}$. Тогда она фундаментальна и по норме в $L^p(\gamma)$ и, в силу полноты $L^p(\gamma)$, сходится к некоторой функции φ из $L^p(\gamma)$. Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что $\{\varphi_j\}$ сходится к φ почти всюду. Из теоремы Фату ясно, что $\varphi \in B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$. Теперь достаточно доказать, что какая-нибудь подпоследовательность в $\{\varphi_j\}$ сходится к φ по норме $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$. Для этого

выберем еще одну подпоследовательность, обозначая ее снова через $\{\varphi_j\}$, для которой

$$\|\varphi_k - \varphi_j\|_{s;p,q,\nu} \leq 2^{-j} \quad \text{при } k > j.$$

Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_k - \varphi_j) = \varphi - \varphi_j$ почти всюду. Положив

$$Q_j := |(\Delta_h)^m(\varphi - \varphi_j)|^p, \quad Q_{j,k} = |(\Delta_h)^m(\varphi_k - \varphi_j)|^p,$$

получим $Q_j = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_{j,k}$ почти всюду. Теперь оценим второе слагаемое в выражении для нормы $\|\varphi - \varphi_j\|_{s;p,q,\nu}$, дважды применяя лемму Фату:

$$\begin{aligned} \int_H |h|_H^{-sq} \left(\int_X Q_j d\gamma \right)^{\frac{q}{p}} d\nu &\leq \int_H |h|_H^{-sq} \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\int_X Q_{j,k} d\gamma \right)^{\frac{q}{p}} d\nu \leq \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_H \|h\|_H^{sq} \left(\int_X Q_{j,k} d\gamma \right)^{\frac{q}{p}} d\nu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k - \varphi_j\|_{s;p,q,\nu}^q \leq 2^{-qj}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|\varphi - \varphi_j\|_{s;p,q,\nu} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Теорема 3.1. Пусть вероятностная мера ν на $H(\gamma)$ такова, что функция $\exp(M|h|_H^2)$ интегрируема по ν при некотором $M > \frac{q}{2(p_1-p)}$. Тогда при $p_1 > p$ и $0 < sq \leq 1$ имеем $W^{p_1,1}(\gamma) \subset B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$.

Доказательство. Для всякой функции $f \in W^{p,1}$ при каждом $h \in H$ почти всюду верно равенство

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \langle D_H f(x+th), h \rangle dt.$$

Оценим L^p -норму $\Delta_h f$ (возведенную в степень p). Чтобы занести степень p внутрь интеграла, применим неравенство Йенсена:

$$\begin{aligned} \int_X |f(x+h) - f(x)|^p \gamma(dx) &\leq |h|^p \int_X \left(\int_0^1 |D_H f(x+th)|_H dt \right)^p \gamma(dx) \leq \\ &\leq |h|^p \int_0^1 \int_X |D_H f(x+th)|_H^p \gamma(dx) dt. \end{aligned}$$

В последнем интеграле сделаем замену переменных, взяв $x+th$ за новую переменную и применив формулу Камерона–Мартина, согласно которой при сдвиге гауссовской меры γ на вектор h из пространства Камерона–Мартина получается эквивалентная исходной мера с плотностью $\exp(l_h -$

$|h|_H^2/2)$. Получаем соотношения

$$\begin{aligned}
& |h|^p \int_0^1 \int_X |D_H f(x + th)|_H^p \gamma(dx) dt = \\
& = |h|^p \int_0^1 \int_X |D_H f(x)|_H^p e^{tl_h - \frac{t^2}{2}|h|^2} \gamma(dx) dt \leq \\
& \leq |h|^p \int_0^1 \left(\int_X |D_H f(x)|_H^{pr} \gamma(dx) \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\int_X e^{m(tl_h - \frac{t^2}{2}|h|^2)} \gamma(dx) \right)^{\frac{1}{m}} dt = \\
& = |h|^p \left(\int_X |D_H f(x)|_H^{pr} \gamma(dx) \right)^{\frac{1}{r}} \int_0^1 e^{\frac{(m-1)}{2}|h|^2 t^2} dt.
\end{aligned}$$

Чтобы отделить плотность, возникающую из формулы Камерона–Мартина, мы воспользовались неравенством Гельдера для некоторых чисел $r > 1$, $m > 1$, таких что $r^{-1} + m^{-1} = 1$, выбираемых далее. Эта часть явно интегрируется по X . Подставив полученную оценку в выражение для нормы Бесова, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_H |h|^{-sq} \|\Delta_h f\|_{L^p}^q \nu(dh) \leq \\
& \leq \left(\int_X |D_H f(x)|_H^{pr} \gamma(dx) \right)^{\frac{q}{pr}} \int_H |h|^{1-sq} \left(\int_0^1 e^{\frac{(m-1)}{2}|h|^2 t^2} dt \right)^{\frac{q}{p}} \nu(dh) \leq \\
& \leq \left(\int_X |D_H f(x)|_H^{p_1} \gamma(dx) \right)^{\frac{q}{p_1}} \int_H |h|^{1-sq} e^{\frac{q}{2(p_1-p)}|h|^2} \nu(dh) \leq \\
& \leq C(s, M) \int_H e^{M|h|^2} \nu(dh) \left(\int_X |D_H f(x)|_H^{p_1} \gamma(dx) \right)^{\frac{q}{p_1}}.
\end{aligned}$$

Положив $r = \frac{p_1}{p}$, получаем, что для любой функции $f \in W^{p_1, 1}$ конечна норма $\|f\|_{B^{p, q, 1, \nu}}$, а это дает нужное вложение с оценкой для норм. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] Агранович М. С. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М. МЦНМО. 2003.
- [2] Бесов О. В. О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения. ДАН СССР. 1959. Т. 126, N 6. С. 1163—1165.
- [3] Бесов О. В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. Труды МИАН им. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 42—81.
- [4] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. Наука. 1996
- [5] Богачев В. И. Гауссовские меры. М., Наука, 1997.
- [6] Слободецкий Л. Н. Обобщенные пространства С.Л.Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. Ученые записки ЛГПИ им.Герцена. 1958. Т. 197. С. 54—112.
- [7] Слободецкий Л. Н. Оценки в L^p эллиптических систем. ДАН СССР. 1958. Т. 123, N 4. С. 616—619.
- [8] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М. Мир. 1980; 664 с.
- [9] Трибель Х. Теория функциональных пространств. М. Мир. 1986; 448 с.
- [10] Фролов Н. Н. Теоремы вложения для пространств функций счетного числа переменных I . Тр. Ин-та матем. Воронеж. ун-та. Изд-во Воронеж. ун-та. Вып. 1. С. 205—218.

- [11] Фролов Н. Н. Теоремы вложения для пространств функций счетного числа переменных и их приложения к задаче Дирихле. Докл. АН СССР. 1972. Т. 203, N 1. С. 39–42.
- [12] Эро Э., Богачев В. И., Леско П. Конечномерные сечения функций из дробных классов Соболева на бесконечномерных пространствах. Докл. РАН. 2003. Т. 391, N 3. С. 320–323
- [13] Adams R. A. Sobolev spaces. New York. Academic Press. 1975
- [14] Adams R. A., Fournier J. J. F. Sobolev spaces. 2nd ed. New York. Academic Press. 2003; xiii + 305 p.
- [15] Bogachev V. I. Differentiable measures and the Malliavin calculus J. Math. Sci. 1997. V. 87, N 5, P. 3577–3731.
- [16] Bogachev V. I. Differentiable measures and the Malliavin calculus. Providence, Rhode Island. Amer. Math. Soc. 2010
- [17] Bogachev V. I. Gaussian measures. Providence, Rhode Island. Amer. Math. Soc. 1998
- [18] Bogachev V. I., Mayer Wolf E.. Absolutely continuous flows generated by Sobolev class vector fields in finite and infinite dimensions. J. Funct. Anal. 1999
- [19] Fang S. Introduction to Malliavin calculus. Beijing. 2004
- [20] Frazier M., Jawerth B., Weiss G. Littlewood-Paley Theory and The Study of Function Spaces. CBMS Regional Conference Series in Mathematics 79. American Mathematical Society. Providence, RI, 1991. viii+132 pp.
- [21] Lions J. L., Peetre J. Sur une classe d'espaces d'interpolation. Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1964. V. 19. P. 6—64.
- [22] Peetre J. A theory of interpolation of normed spaces. Notes de Matematica. N. 39. Rio de Janeiro, 1968. P. 1—88.
- [23] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York. Springer-Verlag. 1983
- [24] Pineda E., Urbino W. Some results on Gaussian Besov-Lipschitz spaces and Gaussian Triebel-Lizorkin spaces. J. Approximation Theory. 2009. V. 161. P. 529–564.

- [25] Shigekawa I. Stochastic analysis. Providence, Rhode Island Amer. Math. Soc. 2004
- [26] Wanatabe S. Fractional order Sobolev spaces on Wiener space. Probab. Theory Relat. Fields. 1993. V. 95. P. 175–198
- [27] Yang D., Yuan W. New Besov–type spaces and Triebel–Lizorkin–type spaces including Q spaces. Math. Z. 265. 2010. P. 451–480.

Работы автора по теме диссертации

- [28] Никитин Е. В. Дробные классы Соболева на бесконечномерных пространствах. Докл. РАН. 2013. Т. 452, N 2. С. 130—135
- [29] Никитин Е. В. Классы Бесова на бесконечномерных пространствах. Матем. заметки. 2013. Т. 93, N 6. С. 951—953
- [30] Никитин Е. В. Сравнение двух определений классов Бесова на бесконечномерных пространствах Матем. заметки. 2014. Т. 95, N 1.
- [31] Никитин Е. В. Дробные классы Соболева на бесконечномерных пространствах. XX Международная молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”, секция “Математика и механика”, Тезисы докладов, Москва: МАКС Пресс, 2013, 1.