«УТВЕРЖДАЮ»
Первый проректор — проректор по научной работе МГТУ им. Н. Э. Баумана

профессор В. Н. Зимин
__________________ 2014 года

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертации Никитина Егора Владимировича
«Дробные классы Соболева на бесконечномерных пространствах»
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Пространства (классы) Бесова являются естественным обобщением пространств функций Соболева в случае дробного порядка дифференцируемости. Эти пространства, впервые появившиеся в работе О.В. Бесова (1959), активно используются в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Классы Бесова на конечномерных пространствах хорошо изучены. Они тесно связаны с пространствами Соболева, причем во многих случаях получены соответствующие теоремы вложения. В случае бесконечномерных пространств изучение классов Соболева началось в 70-е годы XX века в работах Н.Н. Фролова. Наиболее интересные результаты в этом направлении получены на пространствах с гауссовскими мерами, они описаны в книге В.И.Богачёва «Гауссовские меры», вышедшей в 1997 году. Однако подробное изучение классов Бесова в бесконечномерном случае началось сравнительно недавно и в этом направлении получены пока лишь отдельные результаты.

Одной из важных задач, стоящих в рассматриваемом направлении, является изучение различных определений дробных классов Соболева и связи между ними. Это и составляет основное содержание рассматриваемой диссертации, что свидетельствует об актуальности выбранной автором темы.

Приведем краткое описание проведенного автором исследования и полученных результатов. В диссертации рассматривается локально выпуклое пространство с радоновской гауссовской мерой. В этом случае пространства Соболева могут быть получены не только классическим способом — как замыкания пространств гладких функций по соболевским нормам, но и путём применения к пространствам L^p интегральных операторов, связанных с полугруппой Орнштейна–Уленбека. Такой подход позволяет определить классы Соболева не только с целыми, но и с дробными порядками дифференцируемости.

Конструкция пространств Бесова — другой метод построения пространств функций с дробным порядком дифференцируемости s. Пространства Бесова с дробным значением s получаются интерполяционным -методом, применённым к пространствам L^p и соболевскому пространству с целым порядком дифференцируемости $r > s$. Автор показал, что результат не зависит от выбора такого r, а также получил эти же пространства интерполяцией между соболевскими пространствами целых порядков, ближайших к s сверху и снизу.

На пространствах с гауссовскими мерами пространства Бесова можно определить и другим способом — при помощи полугруппы Пуассона, причем для разных задач бывает более удобным либо одно, либо другое определение. В конечномерном случае это было сделано Е. Пинедой и В. Урбино (2009). Автору удалось доказать эквивалентность такого определения интерполяционному в бесконечномерном случае.

В диссертации рассматриваются также вложения пространств Бесова и Соболева в случае бесконечномерного пространства с гауссовской мерой. Доказывается, при каких значениях параметров пространство Бесова совпадает с соболевским, а при каких значениях имеют место теоремы вложения. Таким образом, пространства Бесова расширяют шкалу пространств Соболева.

Упомянутые результаты и представляют собой основные результаты диссертации.

Перейдем к рассмотрению диссертации по главам. Диссертация, общим объемом 59 страниц, состоит из введения, трех глав и списка литературы, насчитывающего 30 наименований.

Во Введении дана история вопроса, приведены основные результаты диссертации, а также освещается место данных результатов в современной теории бесконечномерного анализа.

В Главе 1 даются определения пространств Бесова, основанные на использовании вещественного интерполяционного метода и метода следов, и устанавливаются неизвестные ранее свойства классов Соболева. С их помощью выводятся интерполяционные свойства пространств Бесова, в том числе новые свойства вложения пространств Бесова и Соболева.

В Главе 2 вводится полугрупповое определение пространств Бесова, доказывается его равносильность интерполяционному определению и выводятся усиленные свойства вложения пространств Бесова и Соболева.

В Главе 3 пространства Бесова на бесконечномерных пространствах с гауссовской мерой вводятся аналогично прямому определению таких пространств в конечномерном случае через соответствующее интегральное условие. Основной результат главы — теорема вложения для введенных пространств.

На наш взгляд, основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Дано несколько определений пространств типа Бесова $B^{s,p,q}$ на локально-выпуклых пространствах с гауссовской мерой и доказана эквивалентность определений, использующих интерполяционные методы, и определения через полугруппу Пуассона.

2. Доказано теорема о приближении по норме L^p соболевских функций с меньшим индексом дифференцируемости соболевскими функциями с большим индексом дифференцируемости, и контролируемой соболевской нормой приближающей функции. В случае $p = 2$ индексы дифференцируемости могут быть произвольными действительными, а в случае $p > 1$ эти индексы целые.

3. Получен ряд новых теорем вложения пространств Бесова и Соболева. Доказано, что пространства типа Бесова $B^{s,2,2}$ совпадают с пространствами Соболева $H^{2,s}$. Пространства Бесова $B^{s,p,q}$ вложены в пространства Соболева $H^{p,k}$, для $k < s$. Пространства $H^{p,s}$ вложены в пространства $B^{s,p,p}$, если $2 \leq p < \infty$, и пространства $B^{s,p,p}$ вложены в пространства $H^{p,s}$, если $1 < p \leq 2$.

Подытоживая вышесказанное, отметим, что все результаты диссертации строго доказаны. При доказательстве используются как классические методы бесконечномерного анализа, так и новые методы, специально разработанные автором для решения изучаемых в диссертации задач. Большинство полученных результатов носит окончательный характер. К содержанию и оформлению диссертации серьезных замечаний нет. Имеющиеся немногочисленные опечатки и описки, неизбежные в работе значительного объема, не влияют на восприятие содержания диссертации. Все основные результаты диссертации являются новыми и актуальными для функционального анализа. Результаты приведены с полными доказательствами и опубликованы в математических журналах. По теме диссертации соискателем опубликовано 3 статьи в журналах, входящих в «Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук». Работ, написанных в соавторстве нет. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Основные положения и выводы диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, Московском государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана. Совокупность результатов, изложенных в диссертации может быть квалифицирована как решение задачи, имеющей важное значение для теории функций и функционального анализа.

На основе изложенного считаем, что рассматриваемая диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям п. 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Никитин Егор Владимирович, безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв заслушан и одобрен 3 февраля 2014 года на заседании семинара «Анализ и дифференциальные уравнения» кафедры ФН-2 «Прикладная математика» МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Профессор кафедры ФН-2 «Прикладная математика» МГТУ им. Н. Э. Баумана
д.ф.-м.н. — О. В. Пугачёв

Руководители семинара
д.ф.-м.н., доц. — К. Ю. Федоровский

к.ф.-м.н., доц. — Г. В. Гришина