ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

О ДИССЕРТАЦИИ Е.В. НИКИТИНА

«ДРОБНЫЕ КЛАССЫ СОБОЛЕВА
НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ»

представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Рассматриваемая диссертационная работа Е.В. Никитина посвящена построению теории шкал пространств Бесова и Соболева над бесконечномерными пространствами, а именно, различным обобщениям этих понятий на бесконечномерный случай, установлению связи между разными получающимися определениями, сравнению их преимуществ и недостатков, в том числе с точки зрения удобства применения к различным конкретным задачам из нелинейного анализа, теории дифференциальных уравнений и математической физики. В некоторых случаях (там, где это возможно сделать) доказана равносильность различных определений.

Диссертация состоит из введения, трех глав (глава 1 поделена на 3 параграфа, глава 2 — на два, а глава 3 на параграфы не поделена) и списка литературы. Во введении представлен краткий, но достаточно полный обзор по теме работы и сформулированы основные результаты.

Глава 1 посвящена построению шкалы пространств типа Бесова и Соболева на бесконечномерном пространстве с помощью вещественного интерполяционного K-метода, использовавшегося ранее Э. Эро, В.И. Богачевым и П. Леско. Приведено подробное описание вещественного интерполяционного K-метода, интерполяционного J-метода и интерполяционного метода следов, а также связей между ними. С их помощью построены пространства Бесова $B^{s;p,q}(\gamma)$ и пространства Соболева $H^{p,r}(\gamma)$ на локально выпуклом топологическом векторном пространстве X с центрированной гауссовской мерой γ и доказаны разнообразные вложения таких пространств Соболева и Бесова, свойства двойственности, а также установлено, что пространства Бесова дают более тонкую шкалу, чем пространства Соболева.

Во второй главе рассматривается другой подход к определению пространств Бесова, основанный на явном выражении для нормы.

• (Определение 2.1.1) *Пусть $s > 0$, m — наименьшее целое число, бо́льшее, чем s, $1 \le p, q \le \infty$. Для $1 \le q < \infty$ пространство Бесова–Липшица $B^s_{p,q}(\gamma)$ состоит из всех таких функций $u \in L^p(\gamma)$, что*

$$|u|_{B^s_{p,q}} := \left(\int_0^\infty \left(t^{m-s}\left\|\frac{\partial^m}{\partial t^m}Q_t^{(1)}u\right\|_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty. \qquad (2.1.3)$$

Норма $u \in B^s_{p,q}(\gamma)$ *определяется как* $\|u\|_{B^s_{p,q}} := \|u\|_p + |u|_{B^s_{p,q}}$. *Для* $q = \infty$ *пространство Бесова–Липшица состоит из всех функций* $f \in L^p(\gamma)$, *для которых существует константа* A, *зависящая от* f *и такая, что*

$$\left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} Q_t^{(1)} u \right\|_p \leq A t^{-k+s}.$$

Норма задается формулой $\|u\|_{B^s_{p,\infty}} := \|u\|_p + A(u)$.

Цель главы — доказать, что этот подход эквивалентен интерполяционному определению, и вывести свойства вложения пространств Бесова и Соболева с одинаковыми индексами дифференцируемости. Основные результаты об эквивалентности и вложениях пространств содержатся в следующих теоремах.

- (Теорема 2.1.8) *Если* $p \geq 2$ *и* $s > 0$, *то справедливо вложение*

$$H^{p,s}(\gamma) \subset B^s_{p,p}(\gamma).$$

- (Теорема 2.2.1) *Пусть* $s > 0$, $p > 1$, $1 \leq q < \infty$. *Тогда пространство Бесова* $B^{s,p,q}(\gamma)$ *совпадает с пространством* $B^s_{p,q}(\gamma)$, *а их нормы эквивалентны.*

- (Теорема 2.2.2) *Пусть* $k \in \mathbb{Z}$ *и* $s \in \mathbb{R}$.
1) *Если* $2 \leq p < \infty$, *то* $B^{k,p,2}(\gamma) \subset H^{p,k}(\gamma)$ *и* $H^{p,s}(\gamma) \subset B^{s,p,p}(\gamma)$.
2) *Если* $1 < p \leq 2$, *то* $B^{s,p,p}(\gamma) \subset H^{p,s}(\gamma)$ *и* $H^{p,k}(\gamma) \subset B^{k,p,2}(\gamma)$.

Они получаются с помощью оценок для норм, также доказанных в этой главе.

В главе 3 вводится определение пространств Бесова, аналогичное классическому определению с разностными соотношениями из конечномерного случая.

- (Определение 3.1) *Пусть* $0 < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, ν — *борелевская вероятностная мера на ядре Камерона–Мартина* $H(\gamma)$ *и* m — *наименьшее целое число, бо́льшее* s. *Класс Бесова* $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$ *состоит из всех таких функций* $u \in L^p(\gamma)$, *что*

$$\int_H |h|_H^{-sq} \|(\Delta_h)^m u\|_p^q \nu(dh) < \infty.$$

Норма в $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$ *задается формулой*

$$\|u\|_{s;p,q,\nu} := \|u\|_p + \left(\int_H |h|_H^{-sq} \|(\Delta_h)^m u\|_p^q \nu(dh) \right)^{1/q}.$$

Специфика этого определения в бесконечномерном случае состоит в том, что определяемые таким образом пространства зависят не только от числовых параметров, но также существенно зависят от меры на пространстве Камерона–Мартина. Цель главы — доказать теорему вложения для таких банаховых пространств.

Все вынесенные на защиту результаты получены автором самостоятельно, своевременно опубликованы и снабжены детальными доказательствами. Автореферат правильно отражает содержание диссертации, а список литературы учитывает основные имеющиеся публикации в данной области.

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы при исследовании различных проблем нелинейного анализа, теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории меры и математической физики. Конкретные результаты диссертации и ее общие методы могут найти применения в исследованиях, ведущихся в целом ряде отечественных университетов и математических институтов, в том числе в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Математическом институте РАН им. В.А. Стеклова, С.-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете, Техническом университете им. Н.Э. Баумана.

На основании сказанного следует заключить, что в диссертации Е.В. Никитина решены актуальные проблемы нелинейного функционального анализа. Эта работа удовлетворяет всем требованиям о порядке присуждения ученых степеней ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор Е.В. Никитин заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

8.04.2014 Круг к.ф.-м.н. Е.П. Кругова

подпись ст.н.с. ОНИ ФПМ ОНИ ПФМНиИТ Круговой Е.П. заверяю
Ученый секретарь ВИНИТИ РАН к.г.н. Ю.Н. Щуко