МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Есина Анна Ивановна

Асимптотические решения уравнения индукции

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва, 2014

Работа выполнена в лаборатории механики природных катастроф Федерального Государственного Бюджетного Учреждения Науки Института Проблем Механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии Наук

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Шафаревич Андрей Игоревич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Бабич Михаил Васильевич Санкт-Петербургское Отделение Математического Института им. В.А. Стеклова РАН, ведущий научный сотрудник
	доктор физико-математических наук, профессор Лебедев Андрей Владимирович, Белорусский Государственный Университет, механико-математический факультет, зав. кафедрой
Ведущая организация:	Московский Институт Электроники и Математики Национального Исследовательского Университета "Высшая Школа Экономики"

Защита диссертации состоится 30 мая 2014 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, д.1, МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Уравнения индукции.

Диссертация посвящена исследованию свойств решений системы уравнений индукции в пределе малого сопротивления. Эти уравнения представляют собой часть уравнений Максвелла, описывающую эволюцию магнитного поля в проводящей жидкости с высокой проводимостью. В данной работе рассматривается линейная система, в которой поле скоростей жидкости предполагается заданным, т.е. не учитывается обратное влияние магнитного поля на поле скоростей.

Основные приложения уравнения индукции относятся к астрофизике: звезды, планеты и галактики обладают магнитными полями, которые могут сильно меняться во времени и в пространстве. Описание происхождения и пространственной структуры магнитных полей относится, в частности, к т.н. теории динамо; различным физическим и математическим аспектам этой теории посвящено огромное количество работ (см., например, книги [1], [2], [3], [4]). Отметим несколько центральных вопросов в этой области.

- Поведение решения задачи Коши со временем; в частности, возможность роста решения. Рост поля из малого начального возмущения считается одним из основных механизмов образования магнитных полей в астрофизике.
- Исследование пространственной структуры решения задачи Коши; согласно наблюдениям и численным экспериментам, эти функции, как правило, распределены очень неравномерно — они сильно возрастают вблизи множеств положительной коразмерности.
- Изучение структуры спектра и поведения собственных функций стационарного оператора.

Уравнения индукции содержат естественный малый параметр (в диссертации для удобства изложения он обозначен через ε^2) — сопротивление проводящей жидкости или коэффициент магнитной вязкости (обратная величина называется магнитным числом Рейнольдса). Математическая фор-

[1] В.И. Арнольд, Б.А. Хесин. Топологические методы в гидродинамике. // М.: МЦНМО, 2007.

[2] Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А. Проблемы динамо в астрофизике// Итоги науки. Астрономия. Т. 21.- М.: ВИНИТИ, 1982.

[3] Moffatt H. K. Magnetic fie1d generation in e1ectrically conducting fluid.- Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

[4] Zeldovich Уa.B., Ruzmaikin A. and Sokolov D. Magnetic fie1ds in astrophysics. - Gordon Breach, 1983.

мулировка перечисленных выше вопросов связана с асимптотическим поведением решений при стремлении к нулю этого параметра. В большей части диссертации коэффициенты системы и начальные условия предполагаются гладкими, вследствие чего таковыми являются и все решения (стационарная задача для уравнения индукции эллиптическая, а нестационарная — параболическая). Разрешимость соответствующих задач также очевидна — она мгновенно следует из общих свойств эллиптических и параболических систем. В то же время асимптотические свойства решений оказываются совершенно не тривиальными и их описание требует детального исследования аналитических свойств вспомогательных обыкновенных дифференциальных уравнений, а также изучения обобщенных решений предельных задач для уравнений в частных производных. Остановимся подробнее на математической природе задач, решаемых в диссертации применительно к уравнениям индукции.

Асимптотика спектральных серий.

Интерес к описанию квазиклассической асимптотики серий собственных значений дифференциальных операторов возник сразу после появления квантовой механики; к настоящему времени имеется множество работ, посвященных такой асимптотике. В середине 60-х годов в работах В.П. Маслова была создана общая теория, позволяющая получать эффективные результаты в данном направлении. Основными условиями применимости этой теории являются самосопряженность дифференциального оператора и интегрируемость соответствующей классической системы. Общая задача состоит в следующем. Пусть $H(x,p) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ — гладкая функция и пусть $\hat{H} = H(x, -i\varepsilon\partial/\partial x)$ — соответствующий вейлевский псевдодифференциальный оператор. Будем считать, что функция H такова, что оператор $\hat{H}$ имеет плотную в $L^2(\mathbb{R}^n)$ область определения, не зависящую от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$ (в настоящей работе оператор $\hat{H}$ вполне конкретный и нужные свойства обеспечиваются поведением его коэффициентов). Пусть, кроме того, спектр оператора $\hat{H}$ чисто дискретный; задача состоит в вычислении асимптотики серий собственных значений $\hat{H}$ при $\varepsilon \to 0$. Чтобы проиллюстрировать ситуацию, приведем сперва самый простой (и давно известный) результат в этом направлении. Пусть $n = 1$ и $H = p^2 + V(x)$, причем $V(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция и $V(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$. Оператор $\hat{H}$, заданный дифференциальным выражением

$$\hat{H} = -\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x),$$

самосопряжен в $L^2(\mathbb{R})$ при $\varepsilon > 0$. Пусть при $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ уравнение $V(x) = \lambda$ имеет два решения $x_\pm(\lambda)$, причем $V'(x_\pm) \neq 0$.

Утверждение 1. *Для каждого* λ*, удовлетворяющего уравнению*

$$\frac{1}{\pi\varepsilon}\int_{x_-}^{x_+}\sqrt{\lambda - V(x)}dx = m + \frac{1}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad m = O(\frac{1}{\varepsilon}), \tag{1}$$

существует собственное значение λ_0 *оператора* $\hat{H}$*, такое, что* $|\lambda - \lambda_0| = O(\varepsilon^2)$.

Замечание 1. *Уравнения (1), определяющие асимптотические серии собственных значений, можно записать в следующем инвариантном виде*

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\gamma} pdx = m + \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Здесь γ *— замкнутая кривая на плоскости* (x, p)*, заданная уравнением* $H(x, p) = \lambda$ *(кривая постоянной энергии). Формула (2) называется правилом квантования Бора — Зоммерфельда.*

В общем случае задача описания асимптотики собственных значений разделяется на две.

1. Описание формальной асимптотики, т.е. пар $\psi \in L^2(R^n), \lambda \in \mathbb{C}$, $||\psi|| = 1$, удовлетворяющих для некоторого $N > 1$ спектральному уравнению

$$\hat{H}\psi = \lambda\psi + O(\varepsilon^N) \tag{3}$$

2. Выделение среди найденных λ чисел, близких к точному спектру оператора $\hat{H}$, т.е. таких, для которых существует собственное значение λ_0 со свойством

$$|\lambda - \lambda_0| = O(\varepsilon^N). \tag{4}$$

Для самосопряженных операторов оценка (4) мгновенно следует из (3); в то же время, проблема описания формальной асимптотики, вообще говоря, очень сложна и тесно связана с геометрическими объектами, порождаемыми функцией H. Приведем центральный результат в этом направлении (см., например, [5]). Пусть H — вещественнозначная функция, причем выполнены следующие условия.

1. Гамильтонова система, задаваемая в $\mathbb{R}^{2n}$ гамильтонианом H, интегрируема по Лиувиллю. Напомним, что интегрируемость означает существование n гладких функций $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$, функционально независимых и имеющих нулевые попарные скобки Пуассона (функциональная независимость означает, что дифференциалы функций F_j линейно независимы почти всюду).

[5]В.П. Маслов, М.В. Федорюк. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. Москва: Наука, 1976.

2. Для некоторого открытого множества Ω значений параметров $c = c_1, \ldots, c_n$ связная компонента Λ_c совместного множества уровня $F_1 = c_1, \ldots F_n = c_n$ неособа и компактна. В этом случае, по теореме Лиувилля, Λ_c диффеоморфна n-мерному тору; более того, в прообразе области Ω относительно отображения момента $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $F(x,p) = (F_1(x,p), \ldots F_n(x,p))$ существуют координаты действие — угол $I = (I_1, \ldots, I_n), \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Здесь переменные I нумеруют торы Λ_c (и выражаются через параметры c), переменные φ — угловые координаты на Λ_c. Функция H в этих координатах зависит только от I; сами координаты определяются фиксацией гладко зависящего от c базиса циклов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ на торах Λ_c.

3. Семейство вейлевских псевдодифференциальных операторов $\hat{H}$ имеет плотную не зависящую от ε область определения в $L^2(\mathbb{R}^n)$, дискретный спектр и самосопряжено в L^2.

Следующая теорема принадлежит В.П. Маслову.

Теорема 1. *Обозначим через $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ вектор индексов Маслова циклов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Для каждого целочисленного вектора $m = (m_1, \ldots, m_n)$, для которого значения координат действия $I_m = \varepsilon(m + \mu/4)$ попадают в указанную выше область пространства, существует собственное значение λ_0 оператора $\hat{H}$, для которого $|\lambda_0 - H(I_m)| = O(\varepsilon^2)$.*

Замечание 2. *Приведенная теорема представляет собой далекое обобщение формулы Бора — Зоммерфельда. Асимптотические собственные значения вычисляются из равенств*

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\gamma_j} (p, dx) = m_j + \frac{1}{4}\mu_j, \tag{5}$$

где $(p, dx) = \sum_{j=1}^{n} p_j dx_j$. Эти равенства должны выполняться для всех циклов на торах Λ_c; в действительности, эти уравнения не зависят от выбора базиса циклов и представляют собой условия целочисленности вещественного класса когомологий Λ_c, имеющего вид

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon}[(p, dx)] - \frac{1}{4}[\mu],$$

где $[(p, dx)]$ — класс когомологий соответствующей формы, $[\mu]$ — класс Маслова. Равенства (5) называются условиями квантования Бора — Зоммерфельда — Маслова.

Несамосопряженный случай исследован гораздо менее полно. В работах [6], [7],[8],[9],[10],[11], [12],[13] , [14],[15],[16],[17] описана асимптотика спектра оператора $\hat{H} = -\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x)$ на отрезке $[0, 1]$ или $[-1, 1]$ для действительных линейных, квадратичных и близких к линейным функций $V(x)$, а также на окружности для $V = \cos x$ и отрезке с регулярными особыми точками для $V = \frac{x}{1-x^2}$. Кроме того, спектр несамосопряженных задач изучался в ситуации, когда оператор близок к самосопряженному (см., например, [18]); наконец, в ряде работ он исследовался численно (см., например, [19], [20]). В диссертации найдена асимптотика спектра оператора индукции в ситуациях, допускающих разделение переменных (оператор задан на двумерной поверхности вращения, а поле скоростей направлено вдоль параллели). Получены как общие утверждения о локализации спектра в окрестности графа на комплексной плоскости, так и его детальное описание в конкретных примерах.

Асимптотические свойства решения задачи Коши.

Задача Коши для уравнения индукции изучалась во многих работах; в математической литературе особенный интерес к ней стали проявлять после появления статей [21], [22], [23]. Как правило, изучалась задача Коши в $\mathbb{R}^3$ или в $\mathbb{R}^2$ с гладкими коэффициентами и гладкими начальными условиями; разрешимость такой задачи очевидна, а равномерное по гладкости разложение разрешающего оператора оператора по малому параметру (магнитной вязкости) получено в работе [24]. В большинстве работ обсуждался следующий вопрос: существует ли гладкое поле скоростей, для которого решение задачи Коши растет со временем экспоненциально, причем предел (при магнитной вязкости стремящейся к нулю) инкремента роста строго положителен? Окончательного ответа на этот вопрос к настоящему времени не получено;

[6] С.А. Степин, УМН, 50(6), 1995

[7] А.А.Шкаликов. Мат. заметки, 1997,62

[8] С.А. Степин. Фундамент. и прикл. матем., 3:4 (1997).

[9] А.А. Аржанов, С.А.Степин, ДАН, 378(1), 2001.

[10] С.Н. Туманов, А.А. Шкаликов. Известия РАН, серия математическая , 66(4),2002.

[11] А.В. Дьяченко, А.А. Шкаликов. Функциональный анализ и его приложения, 36(3), 2002.

[12] А.А. Шкаликов. Современная математика. Фундаментальные направления. Том 3 (2003).

[13] С. А. Степин, В.А. Титов, Доклады РАН, 413(1), 2007.

[14] С.В. Гальцев, А.И. Шафаревич. Математические заметки, 80(3), 2006.

[15] С.В. Гальцев, А.И. Шафаревич. Теоретическая и математическая физика, 48(2), 2006.

[16] H.Roohian, A.I. Shafarevich, Russ. J. Math. Phys., 16 (2), 2009.

[17] H. Roohian, A. I. Shafarevich, Russ. J. Math. Phys. 17(3), 2010.

[18] M.Hitrik, J. Sjoestrand, S.Vu Ngoc, Amer. J. Math. 129, 2007.

[19] Reddy S. G., Schmidt P. J., Henningson D. S., SIAM J. Appl. Math., 53(1), 1993.

[20] Tobias Gulden, Michael Janas, Peter Koroteev, Alex Kamenev, JETP, 144(9), 2013.

[21] Арнольд В.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Успехи матем. наук, 35(2), 1981.

[22] Арнольд В.И. Вестник МГУ. Сер. 1, 5, 1982.

[23] Арнольд В.И. Успехи матем. наук.- 1983,38, (2),1983.

[24] M.M. Vishik, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 48, 1989.

известен ряд утверждений (т.н. антидинамо-теоремы), представляющих собой достаточные условия отсутствия роста. В работе [25] численно установлен экспоненциальный рост для т.н. ABC-потока:

$$V_x = A\sin z + C\cos y$$

$$V_y = B\sin x + A\cos z$$

$$V_z = C\sin y + B\cos x.$$

В [26] построен пример экспоненциально растущего решения для уравнений индукции, заданных на римановом многообразии со специально подобранной метрикой, обеспечивающий разбегание геодезических. Основная идея большинства перечисленных работ состоит в том, что рост решения должен обеспечиваться "хаотическим" поведением траекторий поля скоростей; точнее, экспоненциальной неустойчивостью этих траекторий. Если магнитная вязкость тождественно равна нулю, такая неустойчивость действительно приводит к росту поля; вопрос состоит в том, сохраняется ли этот эффект при наличии малого сопротивления.

С другой стороны, нерегулярное поведение траекторий поля скоростей может приводить к гораздо более быстрому росту магнитного поля. Именно: в работе [27] доказано, что, если поле скоростей специальным нерегулярным способом зависит от малого параметра ε (периодический эйлеров поток), то решение задачи Коши за сколь угодно малое (не зависящее от ε) время вырастает с величины $O(1)$ до $O(\varepsilon^{-1})$. В диссертации аналогичный эффект изучается для поля скоростей, быстро меняющегося вблизи гладкой компактной поверхности в $\mathbb{R}^3$; слабый предел поля при $\varepsilon \to 0$ имеет разрыв на этой поверхности. Полностью описана асимптотика решения задачи Коши с гладкими начальными условиями; исследован слабый предел решения. В частности, доказано, что слабый предел зависит только от слабого предела поля скоростей тогда и только тогда, когда, при переходе через поверхность скачком меняется либо только направление, либо только длина поля скоростей; для каждого из этих случаев найдена обобщенная предельная задача, которой удовлетворяет слабый предел решения. Отметим, что близкий эффект "асимптотической неустойчивости" обсуждался ранее в нелинейных задачах (см., например, [28]).

[25] Арнольд В.И., Коркина Е.И., Вестник МГУ. Сер. 1, матем., механ., 3, 1983.
[26] Арнольд В.И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д.Д., ЖЭТФ, 81(2), 1981.
[27] А.И. Шафаревич. ДАН, 360(1), 1998.
[28] V.P. Maslov, G.A. Omel'yanov. Geometric Asymptotics for Nonlinear PDE//AMS,v.201, 2001.

Целью работы является описание асимптотики спектра оператора индукции на двумерной компактной поверхности вращения с полем скоростей, направленным вдоль параллелей, а также построение асимптотики решения задачи Коши для нестационарного уравнения индукции в трехмерном пространстве с быстроменяющимся полем скоростей и исследование слабого предела решения.

Научная новизна работы. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Найдена квазиклассическая асимптотика собственных значений оператора Штурма — Лиувилля на окружности с чисто мнимым потенциалом, представляющим собой тригонометрический полином. Доказано, что в квазиклассическом пределе собственные значения концентрируются вблизи набора аналитических кривых на комплексной плоскости (спектральный граф).

2. Описан спектральный граф в частном случае потенциала $V(x) = i(\cos x + \cos 2x)$. Доказан ряд утверждений о расположении графа на плоскости; в частности, ребра и вершины графа определяются семью различными топологическими типами графа Стокса исходного уравнения (из 27 возможных).

3. Построена асимптотика при стремлении к нулю магнитной вязкости собственных значений оператора индукции на двумерной компактной поверхности вращения в случае поля скоростей, направленного вдоль параллелей. Задача редуцирована к задаче Штурма — Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с комплексным периодическим потенциалом (в случае тора) или с комплексным потенциалом с регулярными особыми точками (в случае сферы). Доказано, что собственные значения концентрируются вблизи набора аналитических кривых на комплексной плоскости (спектральный граф).

4. Спектральный граф явно исследован в нескольких простейших частных случаях; найдена его топологическая структура и изучено расположение на комплексной плоскости.

5. Найдена асимптотика решения задачи Коши для нестационарного уравнения индукции в трехмерном пространстве с полем скоростей, быстро меняющимся вблизи двумерной поверхности. Доказано, что слабый предел решения содержит дельта-функцию на этой поверхности. Получены оценки матрицы Грина задачи Коши, явно учитывающие зависимость этой матрицы от малого параметра.

6. Исследована зависимость слабого предела решения задачи Коши от профиля быстроменяющегося поля скоростей. Доказано, что, в тех случаях, когда слабый предел решения зависит только от слабого предела поля скоростей (но не от профиля), предел решения удовлетворяет некоторой обобщенной задаче Коши, представляющей собой регуляризацию задачи с разрывными коэффициентами. Указанные обобщенные задачи Коши выписаны явно.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы специалистами по асимптотической и аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, спектральной теории дифференциальных операторов, асимптотической теории уравнений в частных производных, теории квазиклассического квантования, математической физике.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на семинарах:

— семинаре “Асимптотические методы математической физики” Института Проблем Механики РАН под руководством С.Ю. Доброхотова (2011, 2014);

— семинаре “Асимптотические методы в математической физике” кафедры дифференциальных уравнений МГУ под руководством В.В. Жикова, Е.В. Радкевича, А.С. Шамаева, Т.А. Шапошниковой (2014);

— семинаре “Дифференциальная геометрия и приложения” механико-математического факультета МГУ под руководством А.Т. Фоменко (2010);

— семинаре “Теория рассеяния” механико-математического факультета МГУ под руководством Р.А. Минлоса (2011);

— семинаре механико-математического факультета МГУ под руководством М.И. Вишика (2010);

— семинаре “Комплексные задачи математической физики” МИ РАН под руководством А.Г. Сергеева (2013);

— семинаре кафедры дифференциальных уравнений и математической физики РУДН под руководством А.Л. Скубачевского (2013).

Основные результаты работы докладывались на конференциях:

— международной конференции “Дни дифракции”, Санкт-Петербург, Россия, 2009, 2011, 2012;

— международной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященная памяти И.Г. Петровского, Москва, Россия, 2011;

— международной конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения”, Белгород, Россия, 2013;

— международной конференции “Математическая теория управления и механика”, Суздаль, Россия, 2013;

— международной конференции “Geometric Methods in Physics”, Беловежье, Польша, 2011;

— международной конференции “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования”, посвящённой 90-летию Л.Д. Кудрявцева, Москва, Россия, 2013;

— международной конференции “Geometry and Quantization”, Вена, Австрия, 2013;

— международной конференции “Pseudo-Hermitian Hamiltonians in Quantum Physics”, Стамбул, Турция, 2013;

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов РФФИ 12-01-33097, 08-01-00726-а, 11-01-00973-а.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в восьми работах [1–8]. Статьи [1-2] опубликованы в российских журналах, рекомендованных ВАК, статьи [3, 4] — в международных журналах, работы [5-8] — тезисы докладов на международных конференциях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав и содержит 99 страниц печатного текста. Список литературы содержит **91** наименование.

Краткое содержание диссертации.

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, ставятся задачи работы, кратко описываются результаты.

В **первой главе** приведены общие хорошо известные факты об уравнениях индукции, а также необходимые для дальнейшего сведения об асимптотических решениях обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на комплексной плоскости (техника, основанная на конструкциях линий Стокса, канонических областей и матриц перехода между ними).

Вторая глава посвящена исследованию асимптотики спектра одномерного оператора Шредингера на окружности с периодическим потенциалом. Результаты этой главы используются далее для описания спектра оператора индукции. Одномерный оператор Шредингера имеет вид

$$\hat{H} = -\varepsilon^2 \frac{d^2}{dz^2} + iV(z), \tag{6}$$

где $z \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $V(z)$ — тригонометрический многочлен. Это неограниченный оператор в $L^2(S^1)$ с областью определения $W_2^2(S^1)$; в то же время, поскольку спектральное уравнение $Lw = \lambda w$ — обыкновенное дифференциальное уравнение с аналитическими коэффициентами, все его решения — целые аналитические функции на комплексной плоскости переменной z; спектральная задача состоит в нахождении чисел λ, при которых существуют 2π-периодические решения. Ясно, что спектр оператора L чисто дискретный; задача состоит в описании асимптотики собственных значений при $\varepsilon \to 0$. Для простейшего случая $V = \cos z$ эта задача была решена в [29],[30]. Центральный результат главы — следующая теорема

Теорема 2. *1. Спектр оператора $\hat{H}$ сосредоточен в $O(\varepsilon^2)$ - окрестности конечного или счетного числа аналитических кривых на комплексной плоскости спектрального параметра λ. Совокупность этих кривых называется* ***спектральным графом***.

2. Точки спектра находятся в $O(\varepsilon^2)$ - окрестностях решений уравнений:

$$\int_{z_j}^{z_i} \sqrt{iV(x) - \lambda}\,dx = i\pi\varepsilon(n_{ij} + \gamma/2), \tag{7}$$

где $n_{ij} = O(1/\varepsilon)$ — целые числа, $\gamma \in \{0, 1\}$, z_i и z_j — некоторые из нулей подынтегрального выражения.

3. Ребра спектрального графа определяются уравнениями:

$$Re \int_{z_j}^{z_i} \sqrt{iV(x) - \lambda}\,dx = 0. \tag{8}$$

Доказательство основано на вычислении асимптотики матрицы монодромии уравнения $\hat{H}w = \lambda w$ (точнее говоря, ее следа). В свою очередь, эта матрица находится при помощи техники, описанной в главе 1: изучается асимптотика фундаментальной системы решений в комплексной плоскости переменной z. В различных областях асимптотика разная; склеивая решения в пересечениях областей при помощи матриц перехода, в конце концов получаем нужные сведения о матрице монодромии.

Таким образом, точки спектра концентрируются вблизи графа на комплексной плоскости. Граф определяется многочленом $V(z)$; его свойства описаны для простейших случаев $V = \cos z$ и $V = \cos z + \cos 2z$. Отметим, что, даже в этих случаях, изучение спектрального графа — нетривиальная и трудоемкая задача: в частности, при $V = \cos z + \cos 2z$ существует 27 различных

[29] С.В. Гальцев, А.И. Шафаревич. Математические заметки, 80(3), 2006.
[30] С.В. Гальцев, А.И. Шафаревич. Теоретическая и математическая физика, 48(2), 2006.

топологических случаев расположений линий Стокса; оказывается, ровно 7 из них участвуют в описании спектрального графа.

Замечание 3. *Сформулированная выше теорема допускает следующую инвариантную переформулировку. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})$ риманову поверхность Λ, заданную уравнением*

$$p^2 + iV(z) = \lambda, \quad p \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Точки спектра находятся в $O(\varepsilon^2)$-окрестностях решений уравнений

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_\gamma p dz = n + \frac{\mu}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Здесь γ — один из некоторого фиксированного набора циклов на Λ (каждый цикл определяет свое ребро спектрального графа), μ — индекс пересечения γ с прообразом окружности $Imz = 0$ при естественной проекции $\pi : \Lambda \to \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$, $\pi(p, z) = z$.

Третья глава посвящена исследованию спектра оператора индукции на поверхности вращения. Этот оператор действует на векторное поле B следующим образом

$$LB = -\varepsilon^2 \Delta B + \{V, B\}. \tag{9}$$

Здесь переменные x меняются на гладкой компактной двумерной поверхности вращения M, V — заданное гладкое бездивергентное поле на M, $\{V, B\}$ — коммутатор полей V и B, Δ — оператор Лапласа — Бельтрами. Векторное поле B (собственная функция) также предполагается бездивергентным. Оператор L — неограниченный оператор в $L^2(M)$ с областью определения $W_2^2(M)$, суженный на подпространство бездивергентных полей; в то же время, поскольку все решения эллиптического уравнения $LB = \lambda B$ бесконечно дифференцируемы, а спектр L чисто дискретный, фактически изучаются собственные значения и собственные функции L в пространстве гладких бездивергентных векторных полей на M.

Компактная поверхность вращения гомеоморфна тору или сфере; эти две ситуации рассматриваются в диссертации по отдельности. Тор получается вращением замкнутой плоской кривой вокруг оси, не пересекающей эту кривую; метрика на нем имеет вид $ds^2 = dz^2 + u^2(z)d\varphi^2$, где z — натуральный параметр на вращающейся кривой, $u(z) > 0$ — расстояние до оси вращения, φ — угол вращения. Мы предполагаем, что поле скоростей направлено вдоль параллелей: $V = a(z)\frac{\partial}{\partial\varphi}$, причем $u(z)$ и $a(z)$ — тригонометрические многочлены.

Сфера получается вращением плоской кривой — графика функции $f(z)$ — вокруг оси, пересекающей ее в двух точках z_1, z_2, $z_1 < z_2$. Относительно функции $f(z)$ мы предполагаем, что $f(z) = \sqrt{(z-z_1)(z_2-z)}w(z)$, где $w(z)$ — многочлен, причем $f(z) > 0$ при $z \in (z_1, z_2)$; поле скоростей, как и в случае тора, выбирается в виде $V = a(z)\frac{\partial}{\partial\varphi}$, где $a(z)$ — многочлен (теперь алгебраический).

Основные результаты третьей главы — следующие теоремы.

Теорема 3. *Точки спектра оператора индукции в случае сферы при $\varepsilon \to 0$ находятся в $O(\varepsilon^2)$ окрестностях решений уравнений:*

$$\int_{z_i}^{z_j} \sqrt{(ina(z)-\lambda)((\frac{\partial f}{\partial z})^2+1)}dz = i\varepsilon\pi(n_{ij}+\gamma/2), \tag{10}$$

где $n_{ij} = O(1/\varepsilon), n = O(1)$ — целые числа, $\gamma \in \{0,1\}$, z_i, z_j — некоторые из нулей и полюсов подкоренной функции.

Теорема 4. *Точки спектра оператора индукции в случае тора при $\varepsilon \to 0$ находятся в $O(\varepsilon^2)$ окрестностях решений уравнений:*

$$\int_{z_i}^{z_j} \sqrt{ina(z)-\lambda}dz = i\varepsilon\pi(n_{ij}+\gamma/2). \tag{11}$$

где $n_{ij} = O(1/\varepsilon), n = O(1)$ - целые числа, $\gamma \in \{0,1\}$, z_i, z_j — некоторые нули подынтегральной функции.

Замечание 4. *Спектр оператора L сосредоточен в $O(\varepsilon^2)$-окрестностях счетного числа аналитических кривых на комплексной плоскости λ (спектральный граф) — эти кривые зависят от целочисленного параметра n. Вид спектрального графа определяется функцией $a(z)$. В главе 3 приведены примеры спектральных графов для разных $a(z)$.*

Замечание 5. *Уравнения, из которых вычисляется асимптотика собственных чисел, так же, как и для одномерного оператора Шредингера, допускают инвариантную запись. Именно: эти уравнения имеют вид*

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_\gamma p dz = m + \frac{\mu}{4}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

где γ — один из фиксированного набора циклов на римановой поверхности. Сама поверхность в случае тора задана в $\mathbb{C} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})$ уравнением $p^2 + ina(z) = \lambda$, а в случае сферы — в $\mathbb{C}^2$ уравнением $(f_z^2+1)p^2 + ina(z) = \lambda$. Числа μ — аналоги индекса Маслова — определяются так же, как и в гл. 2.

Далее в третьей главе описана пространственная структура собственных функций. Именно: оказывается, что эти функции (векторные поля B) при $\varepsilon \to 0$ локализованы вблизи параллелей поверхности вращения. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть B — собственная функция оператора L. В сформулированных относительно M и V предположениях поле B обладает следующими свойствами.*

1. Существует конечный набор параллелей δ поверхности вращения, обладающий следующим свойством. Для любого $\rho > 0$, не зависящего от ε, и для всех x, находящихся от δ на расстоянии, большем, чем ρ, $|B(x)| = o(\varepsilon^N) \quad \forall N$ (поле локализовано вблизи параллелей).

2. Если $||B|| = 1$, то $||B_z|| = O(\varepsilon)$, причем $|B_\varphi| = O(\varepsilon^{-1/2m})$, $|B_z| = O(\varepsilon^{1-1/2m})$ для некоторого четного натурального m. Здесь B_z, B_φ — проекции поля B на направления меридиана и параллели соответственно, $||\cdot||$ — норма в $L^2(M)$.

Замечание 6. *В ситуации общего положения (относительно полей V) каждой собственной функции соответствует ровно одна параллель, причем в п.2 предыдущей теоремы $m = 2$.*

Четвертая глава диссертации посвящена асимптотике решения задачи Коши для нестационарного уравнения индукции в трехмерном пространстве. Эта задача имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial t} + \{V, B\} = \varepsilon^2 \mu \Delta B, \\ B|_{t=0} = B^0(x) \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^3$, $V(x)$ — гладкое бездивергентное векторное поле в $\mathbb{R}^3$, причем $V \to const.$ при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $|x|$, B_0 — гладкое бездивергентное финитное векторное поле. Дополнительный параметр $\mu \in [0, 1]$ введен для удобства: мы изучаем асимптотику решения при $\varepsilon \to 0$, а в асимптотических формулах будем, в частности, рассматривать предельную ситуацию $\mu = 0$. Если поле V не зависит от ε, асимптотика решения такой задачи на конечных временах выписывается совсем просто (см., например [31]); возможность роста асимптотики со временем обсуждалась, в частности, в [31], [32], [33]. В диссертации рассматривается поле скоростей, нерегулярно зависящее от ε, причем слабый предел этого поля при $\varepsilon \to 0$ представляет собой

[31] M.M. Vishik. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 48, 1989.

[32] S. Yu. Dobrokhotov, A. A. Ruzmaikin, V.M. Olive, A.I. Shafarevich. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 82 (3-4), 1996.

[33] Dombre T., Frisch U., Greene J.M., Henon M., Mehr A., Soward A. M. J. Fluid Mech., 167, 1986.

сглаженный тангенциальный разрыв. Точнее, пусть M — гладкая компактная двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$; будем считать, что она задана уравнением $\Phi(x) = 0$, где Φ — гладкая функция, равномерно ограниченная вместе со всеми производными, причем $\nabla\Phi|_M \neq 0$. Можно считать, что в некоторой окрестности M функция Φ равна расстоянию до M по нормали, причем $|\nabla\Phi| \geq c > 0$ всюду в $\mathbb{R}^3$. Рассматривается поле скоростей следующего вида $V = V(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}, x)$, причем $V(y, x) \to V^{\pm}(x)$ при $y \to \pm\infty$ быстрее любой степени y. Здесь $y = \Phi/\varepsilon$ — "быстрая" переменная, $V^{\pm}(x)$ — гладкие бездивергентные поля в $\mathbb{R}^3$, стремящиеся на бесконечности к константам, причем оба поля $V^{\pm}$ касаются поверхности M. Слабый предел векторного поля V — разрывная функция, равная $V^{\pm}$ по разные стороны от поверхности M. Асимптотика решения задачи (12) описывается следующей теоремой.

Теорема 6. *Для любого не зависящего от ε промежутка времени $t \in [0, T]$ векторное поле $B(x, t, \varepsilon)$ разлагается в асимптотический ряд*

$$B = \frac{1}{\varepsilon} B_{-1}(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon} x, t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}, x, t). \tag{13}$$

Точнее, пусть $B^N = \sum_{k=-1}^{N} B_k$ — частичная сумма этого ряда; тогда $|B(x, t, \varepsilon) - B^N| = O(\varepsilon^{N+1})$ равномерно по $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]$. При этом $B_{-1}(y, x, t) \to 0$ при $|y| \to \infty$, а при $k \geq 0$ $B_k(y, x, t) \to B_k^{\pm}$ при $y \to \pm\infty$, где $B_k^{\pm}$ — гладкие векторные поля, не зависящие от ε.

Замечание 7. *Слабый предел поля B имеет дельта-образную особенность на поверхности M — она определяется первым слагаемым асимптотического ряда.*

Замечание 8. *Слагаемые асимптотического ряда эффективно описаны — получена рекуррентная цепочка уравнений, из которой они последовательно находятся.*

Замечание 9. *Доказательство теоремы состоит из двух этапов. Сперва строится формальный ряд, удовлетворяющий уравнению индукции и начальному условию. На этом этапе используется вариант теории пограничного слоя и комплексного ростка Маслова. На втором этапе получена оценка остатка. Для этого сперва доказываются оценки функции Грина уравнения индукции, в которых зависимость от ε контролируется явно — это достигается при помощи специальной схемы теории возмущений, основанной на методе Леви и "жордановой" структуре оператора индукции.*

В остальной части главы 4 исследуется следующий вопрос: зависит ли слабый предел решения задачи Коши только от предельных полей $V^{\pm}$ или от всего поля V (т.е. от способа, которым сглажено разрывное поле). Ответ на этот вопрос получен для идеально проводящей жидкости (т.е. при $\mu = 0$) и для эйлеровых полей V (т.е. полей, удовлетворяющих стационарным уравнениям Эйлера гидродинамики несжимаемой жидкости). Доказано, что в этом случае слабый предел решения инвариантен относительно способа сглаживания тогда и только тогда, когда при переходе через поверхность M скачком меняется только длина или только направление поля V, но не обе эти величины вместе (точные формулировки теорем приведены в гл. 4). Более того, в этом случае найдены обобщенные задачи с разрывными коэффициентами (поле скоростей заменено на его слабый предел и уравнения правильным образом регуляризованы), которым удовлетворяет слабый предел решения. Особенно просто такая обобщенная задача выглядит в случае, когда скачком меняется только величина V; в этом случае слабый предел этого поля имеет вид $V(x) = V_0(x)\lambda(x)$, где $V_0(x)$ — гладкое поле единичных векторов, а λ — функция, терпящая разрыв на поверхности M. Регуляризованные уравнения индукции имеют вид

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \mathrm{rot}(V \times B^{\perp}) = 0,$$

где $B^{\perp}$ — проекция B на нормальную плоскость к V_0.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — доктору физико–математических наук, профессору Андрею Игоревичу Шафаревичу — за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор благодарна всем сотрудникам лаборатории Механики природных катастроф ИПМех РАН, а также кафедры "Математики и математических методов физики"факультета нано-, био-, информационных и когнитивных наук МФТИ за множество полезных советов и замечаний.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Есина А.И., Шафаревич А.И.* Условия квантования на римановых поверхностях и квазиклассический спектр оператора Шредингера с комплексным потенциалом. // Математические заметки, 2010. — Том 88 (2). — С. 61–79.

   А.И. Есиной принадлежат теоремы 1, 2 и 3, А.И. Шафаревичу - постановка задачи и план доказательства.

2. *Есина А.И., Шафаревич А.И.* Асимптотика спектра и собственные функции оператора магнитной индукции на двумерной компактной поверхности вращения. // Математические заметки, 2014. — Том 95 (3). — С. 420–436.

   А.И. Есиной принадлежат теоремы 1, 2, 3, 4, А.И. Шафаревичу - постановка задачи и план доказательства.

3. *Есина А.И., Шафаревич А.И.* Analogs of Bohr–Sommerfeld–Maslov Quantization Conditions on Riemann Surfaces and Spectral Series of Nonselfadjoint Operators. // Russian Journal of Mathematical Physics, 2013. — Том 20 (2). — С. 172–181.

   А.И. Есиной принадлежат теоремы 2 и 3, А.И. Шафаревичу - замечания 5, 6 и 7.

4. *Есина А.И., Шафаревич А.И.* Delta-type Solutions for the system of induction equations with discontinuous velocity field. // Methods of Functional Analysis and Topology, v.20, №1, 2014.

   А.И. Есиной принадлежат теоремы 1 - 8, А.И. Шафаревичу - постановка задачи и план доказательства.

5. *Есина А.И.* “Спектр и собственные функции оператора магнитной индукции на двумерной поверхности вращения”. // Тезисы докладов конференции “Дни дифракции” — Санкт-Петербург: СПбГУ, 2011. — С.35 .

6. *Есина А.И.* “Спектр и собственные функции оператора магнитной индукции на двумерной поверхности вращения”. // Тезисы докладов конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященная памяти И.Г. Петровского — Москва: МГУ, 2011. — С. 108-109.

7. *Есина А.И.* “Пространственная структура магнитного поля проводящей жидкости на sol-многообразии и в трехмерном пространстве с разрывным полем скоростей”. // Тезисы докладов конференции “Математическая теория управления и механика”, — Суздаль: , 2013. — С. 94.

8. *Есина А.И.* “Спектр и собственные функции оператора магнитной индукции в трехмерном пространстве на sol-многообразии и с разрывным полем скоростей”. // Тезисы докладов конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения”, — Белгород: , 2013. — С. 53.