

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

**Есина Анна Ивановна**

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ИНДУКЦИИ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ  
на соискание ученой степени  
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор **А.И. Шафаревич**

Москва, 2014

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
Уравнения индукции . . . . .	4
Асимптотика спектральных серий . . . . .	5
Асимптотические свойства решения задачи Коши . . . . .	8
Краткое содержание диссертации . . . . .	9
<b>1 Предварительные сведения</b>	<b>16</b>
1.1 Общие свойства уравнения индукции . . . . .	16
1.1.1 Происхождение . . . . .	16
1.1.2 Спектральная задача . . . . .	16
1.1.3 Задача Коши . . . . .	17
1.2 Асимптотические решения уравнения второго порядка на комплексной плоскости . . . . .	19
1.2.1 Линии Стокса и матрицы перехода . . . . .	19
1.2.2 Уравнение с регулярными особыми точками . . . . .	22
<b>2 Уравнение Шредингера с мнимым периодическим потенциалом</b>	<b>24</b>
2.1 Формулировка результатов . . . . .	24
2.1.1 Псевдоспектр . . . . .	24
2.1.2 Асимптотика спектра . . . . .	25
2.1.3 Доказательство теоремы . . . . .	25
2.2 Пример поля скоростей вида $V(z) = \cos z$ . . . . .	33
2.3 Пример поля скоростей вида $V(z) = \cos z + \cos 2z$ . . . . .	34
2.4 Матрицы монодромии и уравнения на точки спектра . . . . .	35
2.5 Точки поворота . . . . .	35
2.6 Линии Стокса . . . . .	35
2.7 Описание топологических случаев . . . . .	36
2.8 Матрицы монодромии . . . . .	37
2.9 Спектральный граф и описание его ребер . . . . .	42
2.10 Условие квантования на римановой поверхности . . . . .	44

<b>3</b>	<b>Спектральные серии оператора индукции на поверхности вращения</b>	<b>46</b>
3.1	Постановка задачи . . . . .	46
3.2	Формулировка результатов . . . . .	47
3.3	Схемы доказательств теорем . . . . .	49
3.4	Сфера . . . . .	50
3.4.1	Спектр и взаимное расположение линий Стокса . . . . .	50
3.4.2	Доказательство теоремы 3.1 . . . . .	53
3.4.3	Случай поля скоростей вида $V(z) = (0, z)$ . . . . .	55
3.4.4	Пространственная структура магнитного поля проводящей жидкости на сфере . . . . .	61
3.4.5	Риманова поверхность и условия квантования на ней . . . . .	65
3.5	Тор . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Асимптотика решения задачи Коши с быстроменяющимся полем скоростей</b>	<b>68</b>
4.1	Постановка задачи . . . . .	68
4.2	Зависимость магнитного поля от функции сглаживания поля скоростей в случае идеально проводящей жидкости . . . . .	69
4.3	Жидкость с высокой проводимостью: асимптотика решения задачи Коши . . . . .	80
4.3.1	Формальная асимптотика . . . . .	81
4.3.2	Оценка для функции Грина уравнения (4.1) . . . . .	85
4.3.3	Обоснование формальной асимптотики . . . . .	90
4.3.4	Асимптотика решения задачи Коши . . . . .	91

# Введение

## Уравнения индукции

Диссертация посвящена исследованию свойств решений системы уравнений индукции в пределе малого сопротивления. Эти уравнения представляют собой часть уравнений Максвелла, описывающую эволюцию магнитного поля в проводящей жидкости с высокой проводимостью. В данной работе рассматривается линейная система, в которой поле скоростей жидкости предполагается заданным, т.е. не учитывается обратного влияния магнитного поля на поле скоростей.

Основные приложения уравнения индукции относятся к астрофизике: звезды, планеты и галактики обладают магнитными полями, которые могут сильно меняться во времени и в пространстве. Описание происхождения и пространственной структуры магнитных полей относится, в частности, к т.н. теории динамо; различные физические и математические аспекты этой теории обсуждаются, например, в [5], [6], [7], [8], [2], [9], [11], [14], [48], [49], [50], [54], [55], [56], [77], [79], [83], [87], [88], [90]. Выделим несколько центральных вопросов в этой области; изучению их различными вариантами посвящено огромное количество работ (см., например, цитированные выше статьи и книги).

- Поведение решения задачи Коши со временем; в частности, возможность роста решения. Рост поля из малого начального возмущения считается одним из основных механизмов образования магнитных полей в астрофизике.
- Исследование пространственной структуры решения задачи Коши; согласно наблюдениям и численным экспериментам, эти функции, как правило, распределены сильно неравномерно – они сильно возрастают близи множеств положительной координаты.
- Изучение структуры спектра и поведения собственных функций стационарного оператора.

Уравнения индукции содержат естественный малый параметр (в диссертации для удобства изложения он обозначен через  $\varepsilon^2$ ) – сопротивление

проводящей жидкости или коэффициент магнитной вязкости (обратная величина называется магнитным числом Рейнольдса). Математическая формулировка перечисленных выше вопросов связана с асимптотическим поведением решений при стремлении к нулю этого параметра. В большей части диссертации коэффициенты системы и начальные условия предполагаются гладкими, вследствие чего таковыми являются и все решения (стационарная задача для уравнения индукции эллиптическая, а нестационарная – параболическая). Разрешимость соответствующих задач также очевидна – она мгновенно следует из общих свойств эллиптических и параболических систем. В то же время асимптотические свойства решений оказываются совершенно не тривиальными и их описание требует детального исследования аналитических свойств вспомогательных обыкновенных дифференциальных уравнений, а также изучения обобщенных решений предельных задач для уравнений в частных производных. Остановимся подробнее на математической природе задач, решаемых в диссертации применительно к уравнениям индукции.

## Асимптотика спектральных серий

Интерес к описанию квазиклассической асимптотики серий собственных значений дифференциальных операторов возник сразу после появления квантовой механики; к настоящему времени имеется множество работ, посвященных такой асимптотике. В середине 60-х годов в работах В.П. Маслова была создана теория, позволяющая получать эффективные результаты в данном направлении. Основными условиями применимости этой теории являются интегрируемость самосопряженность дифференциального оператора и интегрируемость соответствующей классической системы. Общая задача состоит в следующем. Пусть  $H(x, p) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$  – гладкая функция и пусть  $\hat{H} = H(x, -i\varepsilon\partial/\partial x)$  – соответствующий вейлевский псевдодифференциальный оператор. Будем считать, что функция  $H$  такова, что оператор  $\hat{H}$  имеет плотную в  $L^2(\mathbb{R}^n)$  область определения, не зависящую от  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  при некотором  $\varepsilon_0 > 0$  (в настоящей работе оператор  $\hat{H}$  вполне конкретный и нужные свойства обеспечиваются поведением его коэффициентов). Пусть, кроме того, спектр оператора  $\hat{H}$  чисто дискретный; задача состоит в вычислении асимптотики серий собственных значений  $\hat{H}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Чтобы проиллюстрировать ситуацию, приведем сперва самый простой (и давно известный) результат в этом направлении. Пусть  $n = 1$  и  $H = p^2 + V(x)$ , причем  $V(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – гладкая функция и  $V(x) \rightarrow +\infty$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Оператор  $\hat{H}$ , заданный

дифференциальным выражением

$$\hat{H} = -\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x),$$

самосопряжен в  $L^2(\mathbb{R})$  при  $\varepsilon > 0$ . Пусть при  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$  уравнение  $V(x) = \lambda$  имеет два решения  $x_{\pm}(\lambda)$ , причем  $V'(x_{\pm}) \neq 0$ .

**Утверждение 1.** (см., например, [30], [32]) Для каждого  $\lambda$ , удовлетворяющего уравнению

$$\frac{1}{\pi\varepsilon} \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{\lambda - V(x)} dx = m + \frac{1}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad m = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (1)$$

существует собственное значение  $\lambda_0$  оператора  $\hat{H}$ , такое, что  $|\lambda - \lambda_0| = O(\varepsilon^2)$ .

**Замечание 1.** Уравнения (1), определяющие асимптотические серии собственных значений, можно записать в следующем инвариантном виде

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\gamma} p dx = m + \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Здесь  $\gamma$  – замкнутая кривая на плоскости  $(x, p)$ , заданная уравнением  $H(x, p) = \lambda$  (кривая постоянной энергии). Формула (2) называется правилом квантования Бора – Зоммерфельда.

В общем случае задача описания асимптотики собственных значений разделяется на две.

1. Описание формальной асимптотики, т.е. пар  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\|\psi\| = 1$ , удовлетворяющих для некоторого  $N > 1$  спектральному уравнению

$$\hat{H}\psi = \lambda\psi + O(\varepsilon^N) \quad (3)$$

2. Выделение среди найденных  $\lambda$  чисел, близких к точному спектру оператора  $\hat{H}$ , т.е. таких, для которых существует собственное значение  $\lambda_0$  со свойством

$$|\lambda - \lambda_0| = O(\varepsilon^N). \quad (4)$$

Для самосопряженных операторов оценка (4) мгновенно следует из (3); в то же время, проблема описания формальной асимптотики, вообще говоря, очень сложна и тесно связана с геометрическими объектами, порождаемыми функцией  $H$ . Приведем центральный результат в этом направлении ([29], [30]). Пусть  $H$  – вещественнозначная функция, причем выполнены следующие условия.

1. Гамильтонова система, задаваемая в  $\mathbb{R}^{2n}$  гамильтонианом  $H$ , интегрируема по Лиувиллю. Напомним, что интегрируемость означает существование  $n$  гладких функций  $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$ , функционально независимых и имеющих нулевые попарные скобки Пуассона (функциональная независимость означает, что дифференциалы функций  $F_j$  линейно независимы почти всюду).

2. Для некоторого открытого множества  $\Omega$  значений параметров  $c_1, \dots, c_n$  связная компонента  $\Lambda_c$  совместного множества уровня  $F_1 = c_1, \dots, F_n = c_n$  неособа и компактна. В этом случае, по теореме Лиувилля,  $\Lambda_c$  диффеоморфна  $n$ -мерному тору; более того, в прообразе области  $\Omega$  относительно отображения моментов  $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n, F(x, p) = (F_1(x, p), \dots, F_n(x, p))$  существуют координаты действие – угол  $I = (I_1, \dots, I_n), \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ . Здесь переменные  $I$  нумеруют торы  $\Lambda_c$  (и выражаются через параметры  $c$ ), переменные  $\varphi$  – угловые координаты на  $\Lambda_c$ . Функция  $H$  в этих координатах зависит только от  $I$ ; сами координаты определяются фиксацией гладко зависящего от  $c$  базиса циклов  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  на торах  $\Lambda_c$ .

3. Семейство вейлевских псевдодифференциальных операторов  $\hat{H}$  имеет плотную не зависящую от  $\varepsilon$  область определения в  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , дискретный спектр и самосопряжено в  $L^2$ .

Следующая теорема принадлежит В.П. Маслову.

**Теорема 1.** (см. [29] [30]). Обозначим через  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  вектор индексов Маслова циклов  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ . Для каждого целочисленного вектора  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , для которого значения координат действия  $I_m = \varepsilon(m + \mu/4)$  попадает в указанную выше область пространства, существует собственное значение  $\lambda_0$  оператора  $\hat{H}$ , для которого  $|\lambda_0 - H(I_m)| = O(\varepsilon^2)$ .

**Замечание 2.** Приведенная теорема представляет собой далекое обобщение формулы Бора – Зоммерфельда. Асимптотические собственные значения вычисляются из равенств

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\gamma_j} (p, dx) = m_j + \frac{1}{4}\mu_j, \quad (5)$$

где  $(p, dx) = \sum_{j=1}^n p_j dx_j$ . Эти равенства должны выполняться для всех циклов на торах  $\Lambda_c$ ; в действительности, эти уравнения не зависят от выбора базиса циклов и представляют собой условия целочисленности вещественного класса когомологий  $\Lambda_c$ , имеющего вид

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon} [(p, dx)] - \frac{1}{4}[\mu],$$

где  $[(p, dx)]$  – класс когомологий соответствующей формы,  $[\mu]$  – класс Маслова. Равенства (5) называются условиями квантования Бора – Зоммерфельда – Маслова.

Несамосопряженный случай исследован гораздо менее полно. В работах [1], [15], [16], [19], [21], [22], [27], [31], [34], [36], [37], [44], [45], [64], [65], [66], [85], [86] описана асимптотика спектра оператора  $\hat{H} = -\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x)$  на отрезке  $[0, 1]$  или  $[-1, 1]$  для действительных линейных, квадратичных и близких к линейным функций  $V(x)$ , а также на окружности для  $V = \cos x$  и отрезке с регулярными особыми точками для  $V = \frac{x}{1-x^2}$ . Кроме того, спектр несамосопряженных задач изучался в ситуации, когда оператор близок к самосопряженному (см., например, [73]); наконец, в ряде работ он исследовался численно (см., например, [81] [74]). В диссертации найдена асимптотика спектра оператора индукции в ситуациях, допускающих разделение переменных (оператор задан на двумерной поверхности вращения, а поле скоростей направлено вдоль параллели). Получены как общие утверждения о локализации спектра в окрестности графа на комплексной плоскости, так и его детальное описание в конкретных примерах.

### Асимптотические свойства решения задачи Коши

Задача Коши для уравнения индукции изучалась во многих работах; в математической литературе особенный интерес к ней стали проявлять после появления статей [11], [12]. Как правило, изучалась задача Коши в  $\mathbb{R}^3$  или в  $\mathbb{R}^2$  с гладкими коэффициентами и гладкими начальными условиями; разрешимость такой задачи очевидна, а равномерное по гладкости разложение разрешающего оператора оператора по малому параметру (магнитной вязкости) получено в работе [90]. В большинстве работ обсуждался следующий вопрос: существует ли гладкое поле скоростей, для которого решение задачи Коши растет со временем экспоненциально, причем предел (при магнитной вязкости стремящейся к нулю) инкремента роста строго положителен? Окончательного ответа на этот вопрос к настоящему времени не получено; известен ряд утверждений (т.н. антидинамо-теоремы, см., например, [2], [5], [6], [14], [23]), представляющих собой достаточные условия отсутствия роста. В работе [9] численно установлен экспоненциальный рост для т.н. ABC-потока:

$$\begin{aligned} V_x &= A \sin z + C \cos y \\ V_y &= B \sin x + A \cos z \\ V_z &= C \sin y + B \cos x. \end{aligned}$$

В [10] построен пример экспоненциально растущего решения для уравнений индукции, заданных на римановом многообразии со специально подобранной метрикой, обеспечивающий разбегание геодезических. Основная идея большинства перечисленных работ состоит в том, что рост решения должен обеспечиваться “хаотическим” поведением траекторий поля скоростей; точнее,



экспоненциальной неустойчивостью этих траекторий. Если магнитная вязкость тождественно равна нулю, такая неустойчивость действительно приводит к росту поля (см. явные формулы главы 2); вопрос состоит в том, сохраняется ли этот эффект при наличии малого сопротивления.

С другой стороны, нерегулярное поведение траекторий поля скоростей может приводить к гораздо более быстрому росту магнитного поля. Именно: в работе [43] доказано, что, если поле скоростей специальным нерегулярным способом зависит от малого параметра  $\varepsilon$  (периодический эйлеров поток), то решение задачи Коши за сколь угодно малое (не зависящее от  $\varepsilon$ ) время вырастает с величины  $O(1)$  до  $O(\varepsilon^{-1})$ . В диссертации аналогичный эффект изучается для поля скоростей, быстро меняющегося вблизи гладкой компактной поверхности в  $\mathbb{R}^3$ ; слабый предел поля при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет разрыв на этой поверхности. Полностью описана асимптотика решения задачи Коши с гладкими начальными условиями; исследован слабый предел решения. В частности, доказано, что слабый предел зависит только от слабого предела поля скоростей тогда и только тогда, когда, при переходе через поверхность скачком меняется либо только направление, либо только длина поля скоростей; для каждого из этих случаев найдена обобщенная предельная задача, которой удовлетворяет слабый предел решения. Отметим, что близкий эффект “асимптотической неустойчивости” обсуждался ранее в нелинейных задачах (см., например, [78]).

## Краткое содержание диссертации

Диссертация состоит из четырех глав. В первой главе приведены общие хорошо известные факты об уравнениях индукции, а также необходимые для дальнейшего сведения об асимптотических решениях обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на комплексной плоскости (техника, основанная на конструкциях линий Стокса, канонических областей и матриц перехода между ними).

Вторая глава посвящена исследованию асимптотики спектра одномерного оператора Шредингера на окружности с периодическим потенциалом. Результаты этой главы используются далее для описания спектра оператора индукции. Одномерный оператор Шредингера имеет вид

$$\hat{H} = -\varepsilon^2 \frac{d^2}{dz^2} + iV(z), \quad (6)$$

где  $z \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ,  $V(z)$  – тригонометрический многочлен. Это неограниченный оператор в  $L^2(S^1)$  с областью определения  $W_2^2(S^1)$ ; в тоже время, поскольку спектральное уравнение  $Lw = \lambda w$  – обыкновенное дифференциальное уравнение с аналитическими коэффициентами, все его решения – це-

лые аналитические функции на комплексной плоскости переменной  $z$ ; спектральная задача состоит в нахождении чисел  $\lambda$ , при которых существуют  $2\pi$ -периодические решения. Ясно, что спектр оператора  $L$  чисто дискретный; задача состоит в описании асимптотики собственных значений при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для простейшего случая  $V = \cos z$  эта задача была решена в [15], [16].  
Центральный результат главы – следующая теорема

**Теорема 2.** 1. Спектр оператора  $\hat{H}$  сосредоточен в  $O(\varepsilon^2)$  - окрестности конечного или счетного числа аналитических кривых на комплексной плоскости спектрального параметра  $\lambda$ . Совокупность этих кривых называется **спектральным графом**.

2. Точки спектра находятся в  $O(\varepsilon^2)$  - окрестностях решений уравнений:

$$\int_{z_j}^{z_i} \sqrt{iV(x) - \lambda} dx = i\pi\varepsilon(n_{ij} + \gamma/2), \quad (7)$$

где  $n_{ij} = O(1/\varepsilon)$  – целые числа,  $\gamma \in \{0, 1\}$ ,  $z_i$  и  $z_j$  – некоторые из нулей подынтегрального выражения.

3. Ребра спектрального графа определяются уравнениями:

$$\operatorname{Re} \int_{z_j}^{z_i} \sqrt{iV(x) - \lambda} dx = 0. \quad (8)$$

Доказательство основано на вычислении асимптотики матрицы монодромии уравнения  $\hat{H}w = \lambda w$  (точнее говоря, ее следа). В свою очередь, эта матрица находится при помощи техники, описанной в главе 1: изучается асимптотика фундаментальной системы решений в комплексной плоскости переменной  $z$ . В различных областях асимптотика разная; склеивая решения в пересечениях областей при помощи матриц перехода, в конце концов получаем нужные сведения о матрице монодромии.

Таким образом, точки спектра концентрируются вблизи графа на комплексной плоскости. Граф определяется многочленом  $V(z)$ ; его свойства описаны для простейших случаев  $V = \cos z$  и  $V = \cos z + \cos 2z$ . Отметим, что, даже в этих случаях, изучение спектрального графа – достаточно трудоемкий процесс: в частности, при  $V = \cos z + \cos 2z$  существует 27 различных топологических случаев расположений линий Стокса; оказывается, ровно 7 из них участвуют в описании спектрального графа.

**Замечание 3.** Сформулированная выше теорема допускает следующую инвариантную переформулировку. Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{C} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})$  риманову поверхность  $\Lambda$ , заданную уравнением

$$p^2 + iV(z) = \lambda, \quad p \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Точки спектра находятся в  $O(\varepsilon^2)$ -окрестностях решений уравнений

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\gamma} pdz = n + \frac{\mu}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Здесь  $\gamma$  – один из некоторого конечного набора циклов на  $\Lambda$  (каждый цикл определяет свое ребро спектрального графа),  $\mu$  – индекс пересечения  $\gamma$  с прообразом окружности  $\Im z = 0$  при естественной проекции  $\pi : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ ,  $\pi(p, z) = z$ .

Третья глава посвящена исследованию спектра оператора индукции на поверхности вращения. Этот оператор действует на векторное поле  $B$  следующим образом

$$LB = -\varepsilon^2 \Delta B + \{V, B\}. \quad (9)$$

Здесь переменные  $x$  меняются на гладкой компактной двумерной поверхности вращения  $M$ ,  $V$  – заданное гладкое бездивергентное поле на  $M$ ,  $\{V, B\}$  – коммутатор полей  $V$  и  $B$ ,  $\Delta$  – оператор Лапласа – Бельтрами. Векторное поле  $B$  (собственная функция) также предполагается бездивергентным. Оператор  $L$  – неограниченный оператор в  $L^2(M)$  с областью определения  $W_2^2(M)$ , суженный на подпространство бездивергентных полей; в тоже время, поскольку все решения эллиптического уравнения  $LB = \lambda B$  бесконечно дифференцируемы, а спектр  $L$  чисто дискретный, фактически изучаются собственные значения и собственные функции  $L$  в пространстве гладких бездивергентных векторных полей на  $M$ .

Компактная поверхность вращения гомеоморфна тору или сфере; эти две ситуации рассматриваются в диссертации по отдельности. Тор получается вращением замкнутой плоской кривой вокруг оси, не пересекающей эту кривую; метрика на нем имеет вид  $ds^2 = dz^2 + u^2(z)d\varphi^2$ , где  $z$  – натуральный параметр на вращающейся кривой,  $u(z) > 0$  – расстояние до оси вращения,  $\varphi$  – угол вращения. Мы предполагаем, что поле скоростей направлено вдоль параллели:  $V = a(z)\frac{\partial}{\partial\varphi}$ , причем  $u(z)$  и  $a(z)$  – тригонометрические многочлены.

Сфера получается вращением плоской кривой – графика функции  $f(z)$  – вокруг оси пересекающей ее в двух точках  $z_1, z_2$ ,  $z_1 < z_2$ . Относительно функции  $f(z)$  мы предполагаем, что  $f(z) = \sqrt{(z - z_1)(z_2 - z)}w(z)$ , где  $w(z)$  – многочлен, причем  $f(z) > 0$  при  $z \in (z_1, z_2)$ ; относительно поля скоростей, как и в случае тора, считается, что  $V = a(z)\frac{\partial}{\partial\varphi}$ , где  $a(z)$  – многочлен (теперь алгебраический).

Основные результаты третьей главы – следующие теоремы.

**Теорема 3.** Точки спектра оператора индукции в случае сферы при  $\varepsilon \rightarrow 0$  находятся в  $O(\varepsilon^2)$  окрестностях решений уравнений:

$$\int_{z_i}^{z_j} \sqrt{(ina(z) - \lambda) \left( \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + 1 \right)} dz = i\varepsilon\pi(n_{ij} + \gamma/2), \quad (10)$$

где  $n_{ij} = O(1/\varepsilon)$ ,  $n = O(1)$  – целые числа,  $\gamma \in \{0, 1\}$ , а  $z_i, z_j$  – некоторые из нулей и полюсов подкоренной функции.

**Теорема 4.** Точки спектра оператора индукции в случае тора при  $\varepsilon \rightarrow 0$  находятся в  $O(\varepsilon^2)$  окрестностях решений уравнений:

$$\int_{z_i}^{z_j} \sqrt{ina(z) - \lambda} dz = i\varepsilon\pi(n_{ij} + \gamma/2). \quad (11)$$

где  $n_{ij} = O(1/\varepsilon)$ ,  $n = O(1)$  – целые числа,  $\gamma \in \{0, 1\}$ , а  $z_i, z_j$  – некоторые из нулей подынтегральной функции.

**Замечание 4.** Спектр оператора  $L$  сосредоточен в  $O(\varepsilon^2)$ -окрестностях счетного числа аналитических кривых на комплексной плоскости  $\lambda$  (спектральный граф) – эти кривые зависят от целочисленного параметра  $n$ . Вид спектрального графа определяется функцией  $a(z)$ . В главе 3 приведены примеры спектральных графов для разных  $a(z)$ .

**Замечание 5.** Уравнения, из которых вычисляется асимптотика собственных чисел, так же, как и для одномерного оператора Шредингера, допускают инвариантную запись. Именно: эти уравнения имеют вид

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\gamma} p dz = m + \frac{\mu}{4}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

где  $\gamma$  – один из фиксированного конечного набора циклов на римановой поверхности. Сама поверхность в случае тора задана в  $\mathbb{C} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})$  уравнением  $p^2 + ina(z) = \lambda$ , а в случае сферы – в  $\mathbb{C}^2$  уравнением  $(f_z^2 + 1)p^2 + ina(z) = \lambda$ . Числа  $\mu$  – аналоги индекса Маслова – определяются так же, как и в гл. 2.

Далее в третьей главе описана пространственная структура собственных функций. Именно: оказывается, что эти функции (векторные поля  $B$ ) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  локализованы вблизи параллели поверхности вращения. Точнее, справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.** Пусть  $B$  – собственная функция оператора  $L$ . В сформулированных относительно  $M$  и  $V$  предположениях поле  $B$  обладает следующими свойствами.

1. Существует такая параллель  $\delta$  поверхности вращения, что, для любого  $\rho > 0$ , не зависящего от  $\varepsilon$ , и для всех  $x$ , находящихся от  $\delta$  на расстоянии, большем, чем  $\rho$ ,  $|B(x)| = o(\varepsilon^N) \quad \forall N$  (поле локализовано вблизи параллелей).

2. Если  $\|B\| = 1$ , то  $\|B_z\| = O(\varepsilon)$ , причем  $|B_\varphi| = O(\varepsilon)^{-1/2m}$ ,  $|B_z| = O(\varepsilon)^{1-1/2m}$  для некоторого четного натурального  $m$ . Здесь  $B_z$ ,  $B_\varphi$  – проекции поля  $B$  на направления меридиана и параллели соответственно,  $\|\cdot\|$  – норма в  $L^2(M)$ .

**Замечание 6.** В ситуации общего положения (относительно поля  $V$ ) каждой собственной функции соответствует единственная параллель и  $m = 2$ , т.е.  $|B| = O(\varepsilon^{-1/4})$ .

Четвертая глава диссертации посвящена асимптотике решения задачи Коши для нестационарного уравнения индукции в трехмерном пространстве. Эта задача имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} + \{V, B\} = \varepsilon^2 \mu \Delta B, \\ B|_{t=0} = B^0(x) \end{cases} \quad (12)$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $V(x)$  – гладкое бездивергентное векторное поле в  $\mathbb{R}^3$ , причем  $V \rightarrow const.$  при  $|x| \rightarrow \infty$  быстрее любой степени  $|x|$ ,  $B_0$  – гладкое бездивергентное финитное векторное поле. Дополнительный параметр  $\mu \in [0, 1]$  введен для удобства: мы изучаем асимптотику решения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а в асимптотических формулах будем, в частности, рассматривать предельную ситуацию  $\mu = 0$ . Если поле  $V$  не зависит от  $\varepsilon$ , асимптотика решения такой задачи на конечных временах выписывается совсем просто (см., например, [90]); возможность роста асимптотики со временем обсуждалась в [62], [61], [90]. В диссертации рассматривается поле скоростей, нерегулярно зависящее от  $\varepsilon$ , причем слабый предел этого поля при  $\varepsilon \rightarrow 0$  представляет собой сглаженный тангенциальный разрыв. Точнее, пусть  $M$  – гладкая компактная двумерная поверхность в  $\mathbb{R}^3$ ; будем считать, что она задана уравнением  $\Phi(x) = 0$ , где  $\Phi$  – гладкая функция, равномерно ограниченная вместе со всеми производными, причем  $\nabla\Phi|_M \neq 0$ . Можно считать, что в некоторой окрестности  $M$  функция  $\Phi$  равна расстоянию до  $M$  по нормали, причем  $|\nabla\Phi| \geq c > 0$  всюду в  $\mathbb{R}^3$ . Рассматривается поле скоростей следующего вида  $V = V(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}, x)$ , причем  $V(y, x) \rightarrow V^\pm(x)$  при  $y \rightarrow \pm\infty$  быстрее любой степени  $y$ . Здесь  $y = \Phi/\varepsilon$  – “быстрая” переменная,  $V^\pm(x)$  – гладкие бездивергентные поля в  $\mathbb{R}^3$ , стремящиеся на бесконечности к константам, причем оба поля  $V^\pm$  касаются поверхности  $M$ . Слабый предел векторного поля  $V$  – разрывная функция, равная  $V^\pm$  по разные стороны от поверхности  $M$ . Асимптотика решения задачи (12) описывается следующей теоремой.

**Теорема 6.** Для любого не зависящего от  $\varepsilon$  промежутка времени  $t \in [0, T]$  векторное поле  $B(x, t, \varepsilon)$  разлагается в асимптотический ряд

$$B = \frac{1}{\varepsilon} B_{-1}\left(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}, x, t\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k\left(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}, x, t\right). \quad (13)$$

Точнее, пусть  $B^N = \sum_{k=-1}^N B_k$  – частичная сумма этого ряда; тогда  $|B(x, t, \varepsilon) - B^N| = O(\varepsilon^{N+1})$  равномерно по  $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]$ . При этом  $B_{-1}(y, x, t) \rightarrow 0$  при  $|y| \rightarrow \infty$ , а при  $k \geq 0$   $B_k(y, x, t) \rightarrow B_k^\pm$  при  $y \rightarrow \pm\infty$ , где  $B_k^\pm$  – гладкие векторные поля.

**Замечание 7.** Слабый предел поля  $B$  имеет дельта-образную особенность на поверхности  $M$  – она определяется первым слагаемым асимптотического ряда.

**Замечание 8.** Слагаемые асимптотического ряда эффективно описаны – получена рекуррентная цепочка уравнений, из которой они последовательно находятся.

**Замечание 9.** Доказательство теоремы состоит из двух этапов. Сперва строится формальный ряд, удовлетворяющий уравнению индукции и начальному условию. На этом этапе используется вариант теории пограничного слоя и комплексного роста Маслова. На втором этапе получена оценка остатка. Для этого сперва доказываются оценки функции Грина уравнения индукции, в которых зависимость от  $\varepsilon$  контролируется явно – это достигается при помощи специальной схемы теории возмущений, основанной на методе Леви и “жордановой” структуре оператора индукции.

В остальной части главы 4 исследуется следующий вопрос: зависит ли слабый предел решения задачи Коши только от предельных полей  $V^\pm$  или от всего поля  $V$  (т.е. от способа, которым сглажено разрывное поле). Ответ на этот вопрос получен для идеально проводящей жидкости (т.е. при  $\mu = 0$ ) и для эйлеровых полей  $V$  (т.е. полей, удовлетворяющих стационарным уравнениям Эйлера гидродинамики несжимаемой жидкости). Доказано, что в этом случае слабый предел решения инвариантен относительно способа сглаживания тогда и только тогда, когда при переходе через поверхность  $M$  скачком меняется только длина или только направление поля  $V$ , но не обе эти величины вместе (точные формулировки теорем приведены в гл. 4). Более того, в этом случае найдены обобщенные задачи с разрывными коэффициентами (поле скоростей заменено на его слабый предел и уравнения правильным образом регуляризованы), которым удовлетворяет слабый предел решения. Особенно просто такая обобщенная задача выглядит в случае, когда скачком меняется только величина  $V$ ; в этом случае слабый предел этого поля имеет

вид  $V(x) = V_0(x)\lambda(x)$ , где  $V_0(x)$  – гладкое поле единичных векторов, а  $\lambda$  – функция, терпящая разрыв на поверхности  $M$ . Регуляризованные уравнения индукции имеют вид

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \text{rot}(V \times B^\perp) = 0,$$

где  $B^\perp$  – проекция  $B$  на нормальную плоскость к  $V_0$ .

# Глава 1

## Предварительные сведения

### 1.1 Общие свойства уравнения индукции

#### 1.1.1 Происхождение

В диссертации рассматривается уравнение индукции магнитного поля вида:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \{V, B\} = \varepsilon^2 \Delta B, \quad (\nabla, V) = (\nabla, B) = 0. \quad (1.1)$$

$$(\nabla, V) = (\nabla, B) = 0.$$

Здесь переменная  $x$  меняется либо в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , либо на гладкой компактной двумерной поверхности,  $B$  – искомое векторное поле в  $\mathbb{R}^n$  или на поверхности (магнитное поле),  $V(x)$  – заданное гладкое векторное поле (поле скоростей жидкости),  $\varepsilon^2$  – коэффициент сопротивления (величина, обратная к магнитному числу Рейнольдса). Первая часть работы относится к спектральной задаче для соответствующего оператора на двумерной компактной поверхности вращения, во второй рассматривается задача Коши. Обе задачи решаются для случая, когда коэффициент сопротивления стремится к нулю (жидкость с высокой проводимостью).

Уравнение (1.1) получается из уравнений Максвелла, если пренебречь силой Лоренца, т.е. обратным действием магнитного поля на поле скоростей. Уравнение  $(\nabla, B) = 0$  выделяет класс векторных полей, инвариантный относительно оператора индукции; другими словами, если  $B(x, t)$  – гладкое решение системы (1.1) и в некоторый момент времени  $(\nabla, B) = 0$ , это равенство сохраняется и в остальные моменты времени.

#### 1.1.2 Спектральная задача

Оператор, заданный дифференциальным выражением  $L = -\varepsilon^2 \Delta + \{V, \bullet\}$  – неограниченный оператор в  $L^2$  на соответствующем многообразии (поверх-



ности либо евклидовом пространстве) с областью определения  $W_2^2$ . Этот оператор, вообще говоря, не симметричен; это обстоятельство играет ключевую роль при исследовании асимптотики его спектра (подробнее см. Введение). В первой части работы рассматривается оператор индукции на гладкой (даже аналитической) двумерной компактной поверхности вращения  $M$ , которая гомеоморфна либо тору либо сфере; поле  $V$  также предполагается аналитическим. В силу эллиптичности оператора  $L$ , его спектр чисто дискретный и все собственные функции бесконечно дифференцируемы, поэтому, фактически, речь идет об исследовании асимптотики собственных значений и собственных функций оператора  $L$  в пространстве  $C^\infty(M)$ . Спектр оказывается комплексным; задача состоит в описании этого множества в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Отметим физическое происхождение спектральных задач, аналогичных рассматриваемым в диссертации.

(1) Магнитное поле жидкого ядра Земли, тонкого галактического диска, а также магнитное поле, создаваемое вспышками и пятнами на Солнце. Во всех этих случаях можно перейти от трехмерной задачи для уравнения индукции к задаче на двумерной поверхности. Например, галактический диск представляет собой образование, поперечные размеры которого, как правило – несколько десятков килопарсек, в то время как толщина – сотни парсек (т.е. примерно в 100 раз меньше). Тем самым, задача описания магнитного поля в таком диске, по сути, двумерная. То же относится к изучению полей в фотосфере (узкой излучающей оболочке звезд, например, Солнца).

(2) В результате разделения переменных спектральная задача сводится к уравнению Шредингера с комплексным потенциалом. Подобные уравнения также имеют довольно широкий спектр применения:

а) Уравнение переноса и диффузии. При разделении переменных (если оно возможно), вообще говоря, возникает уравнение Шредингера с комплексным потенциалом.

б) Модельная задача для уравнения Орра-Зоммерфельда, возникающего в теории гидродинамической устойчивости. (см., например, [63]).

в) РТ-симметричная квантовая механика (см., например [51]). Раздел механики, который изучает потенциалы инвариантные относительно замены  $z$  на  $-z$  и относительно комплексного сопряжения.

г) Статистическая механика кулоновского газа ([74]).

### 1.1.3 Задача Коши

В четвертой главе диссертации изучается асимптотика решения задачи Коши при  $\varepsilon \rightarrow 0$  с быстроменяющимся полем скоростей. Рассматриваются двумерный и трехмерный случаи течения проводящей жидкости. Изучается поведение магнитного поле в области, где поле скоростей резко меняется (область

сглаженного тангенциального разрыва); в двумерном случае это кривая, в трехмерном – поверхность.

При  $\varepsilon = 0$  для гладкого поля  $V$  задача Коши решается явно. Именно: пусть поле  $V$  гладкое и ограниченное вместе со всеми производными. Обозначим через  $X(y, t)$  траекторию этого поля, выпущенную из точки  $y$ , т.е. решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений  $\dot{X} = V(X)$  с начальным условием  $X(0) = y$ . Решение задачи Коши

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \{V, B\} = 0, \quad B|_{t=0} = B^0(x),$$

где  $B^0(x)$  – гладкое финитное бездивергентное векторное поле, имеет вид

$$B(x, t) = \frac{\partial X}{\partial y}(y, t) B_0(y)|_{y=y(x, t)},$$

где  $y(x, t)$  – начальная точка траектории, пришедшей в точку  $x$  за время  $t$ , траектории векторного поля, т.е. решение системы  $X(y, t) = x$  (отметим, что, в силу бездивергентности поля  $V$ , якобиан этой системы  $\partial X/\partial y$  равен единице). Из вида решения следует, что рост поля  $B$  определяется матрицей  $\partial X/\partial y$ , которая описывает скорость разбегания траекторий поля  $V$ ; в частности, если траектории расходятся с экспоненциальной скоростью, магнитное поле, вообще говоря, экспоненциально растет со временем. Если  $\varepsilon > 0$  и  $V$  – гладкое векторное поле, достаточно быстро стремящееся к постоянному при  $|x| \rightarrow \infty$ , разрешимость задачи Коши для системы (1.1) с гладким финитным начальным полем  $B^0$  на любых конечных временах очевидна. Если, кроме того,  $V$  не зависит от  $\varepsilon$ , асимптотика решения такой задачи Коши легко строится при помощи регулярной теории возмущений. В гл. 4 рассматривается асимптотика решения для поля  $V$ , сингулярно зависящего от  $\varepsilon$ : слабый предел этого поля терпит разрыв на некоторой двумерной поверхности. Такая задача может рассматриваться как регуляризация задачи Коши для уравнения индукции с нулевой магнитной вязкостью и разрывным полем скоростей; регуляризация состоит в сглаживании поля и одновременном введении магнитной вязкости, причем параметры сглаживания и сопротивления согласованы. Отметим, что непосредственная обобщенная постановка задачи для уравнения индукции с разрывным полем скоростей и нулевым сопротивлением неизвестна. Из результатов гл. 4 вытекают, в частности, обобщенные постановки такой задачи Коши в случае специального поведения разрывного поля  $V$ . Отметим также, что поведение решения существенно отличается от поведения решений параболических задач с разрывными коэффициентами – в частности, слабый предел асимптотики имеет дельта-образную особенность на поверхности разрыва (это обстоятельство, конечно, связано с тем, что предельная обобщенная задача Коши в данном случае не параболическая – магнитная вязкость равна нулю).

## 1.2 Асимптотические решения уравнения второго порядка на комплексной плоскости

В этом параграфе собраны некоторые технические сведения из работ М.В. Федорюка (см. [20], [38]), которые понадобятся в дальнейшем для доказательства основных теорем.

### 1.2.1 Линии Стокса и матрицы перехода

Рассмотрим уравнение следующего вида:

$$-\varepsilon^2 w'' + iV(z)w = \lambda w,$$

$V(z)$  – целая функция на комплексной плоскости,  $\lambda$  – параметр, который может быть комплексным.

Это уравнение понадобится нам в дальнейшем для решения спектральной задачи в случае тора. Введем следующие определения.

**Определение 1.1.** 1. Точками поворота называются решения уравнения  $\lambda = iV(z)$ .

2. Линией Стокса называется линия, выходящая из точки поворота  $z_0$ , вдоль которой

$$\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \sqrt{iV(x) - \lambda} dx = 0. \quad (1.2)$$

Графом Стокса называется объединение всех линий Стокса. Если точка поворота простая, т.е.  $V'(z_0) \neq 0$ , то из этой точки поворота выходят три линии Стокса под одинаковыми углами в  $120^\circ$ . Взаимное расположение линий Стокса (Л.С.) при различных  $\lambda$  определяется следующими свойствами этих линий.

- (a) Линия Стокса начинается в точке поворота и заканчивается либо в точке поворота, либо в бесконечности.
- (b) Линия Стокса может содержать точку поворота внутри себя
- (c) Линия Стокса не может пересекать себя или другую Л.С.
- (d) Из точки поворота порядка  $m$  (т.е. нуля  $m$ -го порядка функции  $iV - \lambda$ ) выходят  $m + 2$  линии Стокса
- (e) Линии Стокса разбивают плоскость  $S$  на области, гомеоморфные либо полуплоскости, либо полосе.
- (f) Если  $V(z)$  периодична, то и граф линий Стокса периодичен с тем же периодом  $T$ .

(g) Если  $V(z)$  четная функция, то граф линий Стокса симметричен относительно нуля.

(h) Граф линий Стокса не может содержать топологическую окружность.

3. Область  $D$  плоскости  $z$  называется канонической, если она ограничена линиями Стокса, содержит внутри себя только одну линию Стокса и отображается функцией  $\xi(z) = \int_{z_0}^z \sqrt{iV(x) - \lambda} dx$  на всю плоскость с конечным или бесконечным числом вертикальных разрезов.

В каждой канонической области можно построить ВКБ – асимптотику фундаментальной системы решений рассматриваемого уравнения. Зная взаимное расположение линий Стокса друг относительно друга, можно распространить ВКБ – асимптотику решения из одной канонической области в другую (для этого надо вычислить т.н. матрицы перехода; формулы приведены ниже). В результате получаем асимптотику фундаментальной системы решений во всей комплексной плоскости, за исключением малых окрестностей точек поворота.

С каждой тройкой  $S, z_0, D$  (где  $z_0$  – точка поворота,  $S$  – линия Стокса и  $D$  – каноническая область) связана фундаментальная система решений, в данной области имеющая асимптотику:

$$\psi_1 = (iV(z) - \lambda)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{\xi(z_0, z)}{\varepsilon}\right)(1 + O(\varepsilon)); \quad (1.3)$$

$$\psi_2 = (iV(z) - \lambda)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\xi(z_0, z)}{\varepsilon}\right)(1 + O(\varepsilon)), \quad (1.4)$$

где  $\xi(z_0, z) = \int_{z_0}^z \sqrt{iV(x) - \lambda} dx$ , ветвь корня выбирается таким образом, что

$$\int_{z_0}^z \sqrt{iV(x) - \lambda} : C \setminus [0, +\infty) \rightarrow \{z \in C \mid \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \sqrt{iV(x) - \lambda} dx > 0\}. \quad (1.5)$$

Таким образом, фундаментальные системы решений кодируются тройками  $S, z_0, D$ ; в действительности, матрица перехода между системами, отличающимися только каноническими областями, в старшем порядке единичная, поэтому фактически фундаментальная система решений определяется парой  $z_0, S$ , где  $z_0$  – точка поворота, а  $S$  – выходящая из нее линия Стокса.

**Определение 1.2.** Матрица перехода – это матрица, которая связывает две фундаментальные системы решений. Точнее, если  $\psi_1, \psi_2$  – одна система, а  $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$  – другая, то матрица  $T$  перехода от первой ко второй опреде-

ляется равенствами

$$\widetilde{\psi}_j = \sum_{k=1}^2 T_{jk} \psi_k$$

**Лемма 1.1.** ([38]) *Всякая матрица перехода от одной фундаментальной системы решений к другой есть произведение конечного числа элементарных матриц перехода, принадлежащих к одному из 3 типов:*

1. *Переход от элементарной системы решений, определяемой тройкой  $(S, z_0, D)$  к элементарной системе решений, определяемой тройкой  $(S, z_1, D)$ . В этом случае меняется только направление линии Стокса, такой переход существует только для конечной линии Стокса. Точка поворота  $z_1$  находится справа от  $z_0$  и ветвь  $\xi$  выбрана таким образом, что  $\text{Im } \xi > 0$ , а на самой линии Стокса  $\text{Re } \xi = 0$ . Тогда матрица перехода выглядит следующим образом:*

$$T = \exp(i\xi_0) \begin{pmatrix} 0 & \exp\left(\frac{-\xi(z_1, z_0)}{\varepsilon}\right) \\ \exp\left(\frac{\xi(z_1, z_0)}{\varepsilon}\right) & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

где  $\xi_0 = \lim_{z \rightarrow z_1} (\arg(iV(z) - \lambda)^{-1/4}) - \lim_{z \rightarrow z_0} (\arg(iV(z) - \lambda)^{-1/4})$ .

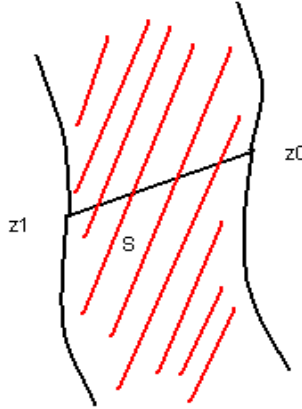


Рис. 1.1: иллюстрация к первой матрице перехода

2. *Переход от элементарной системы решений, определяемой тройкой  $(S_1, z_1, D)$  к элементарной системе решений, определяемой тройкой  $(S_2, z_2, D)$ , причем лучи  $\xi(z_1, z)$  и  $\xi(z_2, z)$  (которые лежат в  $\xi(D)$ ) направлены в одну сторону,  $\text{Re } \xi(z_1, z_2) > 0$  и  $S_2$  лежит слева от  $S_1$ . Матрица перехода выглядит следующим образом:*

$$T = \exp(i\xi_0) \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{-\xi(z_1, z_2)}{\varepsilon}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{\xi(z_1, z_2)}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

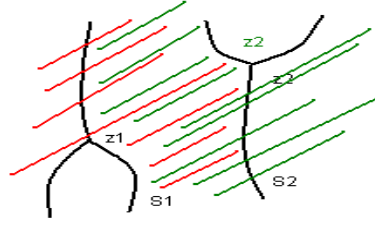


Рис. 1.2: иллюстрация ко второй матрице перехода

$$\text{где } \xi_0 = \lim_{z \rightarrow z_1} (\arg(iV(z) - \lambda)^{-1/4}) - \lim_{z \rightarrow z_2} (\arg(iV(z) - \lambda)^{-1/4}).$$

3. Переход от элементарной системы решений, определяемой тройкой  $(S_1, z_0, D_1)$  к элементарной системе решений, определяемой тройкой  $(S_2, z_0, D_2)$ . Это переход с одной линии Стокса на другую, имеющую то же начало, по часовой стрелке. Матрица перехода выглядит следующим образом:

$$T = \exp\left(\frac{i\pi}{6}\right) \begin{pmatrix} -i(1 + O(\varepsilon)) & 1 + O(\varepsilon) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

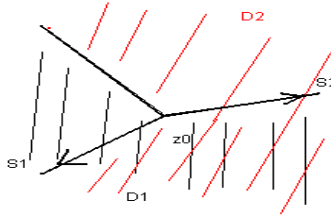


Рис. 1.3: иллюстрация к третьей матрице перехода

### 1.2.2 Уравнение с регулярными особыми точками

Рассмотрим уравнение

$$-\varepsilon^2 w'' + \varepsilon^2 p(z)w' + (q(z) + \varepsilon^2 r(z))w = 0,$$

где  $\varepsilon > 0$  - малый параметр, функции  $q(z), r(z)$  имеют полюса не выше второго, а  $p(z)$  - не выше первого порядка. Это уравнение нам понадобится в дальнейшем при решении спектральной задачи для уравнения индукции на сфере. Определим теперь для этого уравнения точки поворота и линии Стокса.

**Определение 1.3.** Точки поворота - это нули и полюса функции  $q(z)$ .

**Определение 1.4.** *Линией Стокса называется линия, выходящая из точки поворота  $z_1$ , вдоль которой*

$$\operatorname{Re} \int_{z_1}^z \sqrt{q(z)} dz = 0. \quad (1.9)$$

*Если точка поворота простая (ноль первого порядка), то из этой точки поворота выходят три линии Стокса под одинаковыми углами в  $120^\circ$ . Из каждого полюса 1-го порядка выходит по одной линии Стокса.*

Пусть  $D$  - каноническая область,  $S$  - линия Стокса, лежащая в  $D$ ,  $z_0$  - точка поворота или особая точка, начало  $S$ . Элементарная фундаментальная система решений однозначно определяется заданием тройки  $(D, S, z_0)$ . Матрицы перехода выглядят точно также как и в предыдущем случае; нам понадобится еще матрица монодромии обхода вокруг полюса 1-го порядка функции  $q(z)$ . Точнее, пусть  $z_0$  - полюс,  $S$  - линия Стокса, выходящая из него. В малой окрестности точки  $z_0$ , разрезанной вдоль линии Стокса  $S$ , существует фундаментальная система решений, имеющая в этой окрестности асимптотику

$$\begin{aligned} w_1 &= |q(z)|^{-1/4} f(a, z) \exp^{\frac{1}{\varepsilon} \xi(a, z)} (1 + O(\varepsilon)), \\ w_2 &= |q(z)|^{-1/4} f(a, z) \exp^{-\frac{1}{\varepsilon} \xi(a, z)} (1 + O(\varepsilon)), \end{aligned}$$

где  $a$  - фиксированная точка этой окрестности,  $f(a, z) = \exp^{-\frac{1}{2} \int_a^z p(t) dt}$ ,  $\xi(a, z) = \int_a^z \sqrt{q(t)} dt$ . Пусть  $\gamma$  - замкнутая кривая, обходящая точку  $z_0$  против часовой стрелки. Этой кривой отвечает оператор монодромии, действующий в пространстве решений рассматриваемого уравнения. В базисе  $w_1, w_2$  асимптотика матрицы этого оператора имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} O(\varepsilon) & A e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_\gamma \sqrt{q(t)} dt} (1 + O(\varepsilon)) \\ -A^{-1} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\gamma \sqrt{q(t)} dt} \exp(-2\pi i k) (1 + O(\varepsilon)) & (1 + \exp(-2\pi i k)) (1 + O(\varepsilon)) \end{pmatrix},$$

где

$$k = 1 + p(z_1)/2, \quad A = e^{\int_\gamma (-\frac{q'(z)}{4q(z)} - \frac{p(z)}{2}) dz}.$$

## Глава 2

# Уравнение Шредингера с мнимым периодическим потенциалом

В этой главе рассматривается уравнение Шредингера с комплексным потенциалом:

$$-\varepsilon^2 w'' + iV(z)w = \lambda w \quad (2.1)$$

где  $\varepsilon$  - малый параметр,  $V(z)$  - тригонометрический многочлен с условием периодичности функции  $w$ , т.е. спектральная задача для оператора

$$\hat{H}(x, -i\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}) = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + iV(z) \quad (2.2)$$

в пространстве  $L^2$  на окружности. Аналогичные задачи для операторов на отрезке с потенциалами  $iz, iz^2$  и на окружности с потенциалом  $i \cos z$  исследовались ранее в работах [1], [15], [16], [19] [34],[36],[37],[44],[45].

### 2.1 Формулировка результатов

#### 2.1.1 Псевдоспектр

Точки  $\lambda \in \mathbb{C}$  называются точками псевдоспектра оператора  $\hat{H}$ , если они приближенно удовлетворяют спектральному уравнению. Напомним общее определение ([60],[89]).

Пусть  $A(\varepsilon)$  - семейство операторов в гильбертовом пространстве  $B$  с одинаковой плотной областью определения.

**Определение 2.1.** Точка  $\lambda$  принадлежит  $\varepsilon^N$ -псевдоспектру оператора  $A$ , если

$$\exists w \in B : \|w\| = 1, Aw = \lambda w + O(\varepsilon^N).$$

В [60], [15], [16] доказано следующее утверждение.



**Теорема 2.1.**  $\forall N, \varepsilon^N$  – псевдоспектр оператора (2.2) совпадает с полуполосой

$$[0, +\infty) + i[\min V(z), \max V(z)].$$

**Замечание 2.1.** Псевдоспектр совпадает с числовым образом оператора  $\hat{H}$ , т.е. с множеством значений квадратичной формы  $(w, \hat{H}w)$ ,  $\|w\| = 1$ .

**Замечание 2.2.** Поскольку спектр оператора  $\hat{H}$  чисто дискретный, псевдоспектр практически не дает информации об асимптотике спектра.

### 2.1.2 Асимптотика спектра

**Теорема 2.2.** 1. Спектр оператора  $\hat{H}$  сосредоточен в  $O(\varepsilon^2)$  окрестности конечного или счетного числа аналитических кривых на комплексной плоскости  $\lambda$ , которые в совокупности образуют **спектральный граф**.

2. Точки спектра находятся в  $O(\varepsilon^2)$  окрестностях решений уравнений:

$$\int_{z_j}^{z_i} \sqrt{iV(x) - \lambda} dx = i\pi\varepsilon(n_{ij} + \gamma/2), \quad (2.3)$$

где  $n_{ij} = O(1/\varepsilon)$  – целые числа,  $\gamma \in \{0, 1\}$ ,  $z_i$  и  $z_j$  – некоторые из нулей подынтегрального выражения.

3. Ребра спектрального графа определяются уравнениями:

$$\operatorname{Re} \int_{z_j}^{z_i} \sqrt{iV(x) - \lambda} dx = 0. \quad (2.4)$$

### 2.1.3 Доказательство теоремы

Пусть  $M$  – оператор монодромии уравнения (2.1), т.е. оператор, действующий в пространстве решений по правилу  $Mw(z) = w(z + 2\pi)$ .

**Лемма 2.1.** ([15]) Условие принадлежности  $\lambda$  спектру  $\hat{H}$  эквивалентно одному из условий  $\operatorname{tr} M = \det M + 1$  или  $\operatorname{tr} M = 2$ .

*Доказательство.* Доказательство мгновенно вытекает из того факта, что наличие нетривиального периодического решения эквивалентно наличию собственной функции оператора монодромии с собственным значением 1 (отметим, что, кроме того, детерминант оператора монодромии равен 1).  $\square$

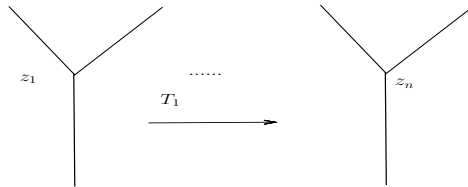
В зависимости от значения  $\lambda$ , взаимное расположение линий Стокса уравнения (2.1) может быть различным. Выясним сперва, какие графы линий Стокса могут соответствовать точкам спектра.

**Теорема 2.3.** Пусть  $\lambda$  таково, что существует цепочка канонических областей, соединяющая точки поворота  $z_0$  и  $z_0 + 2\pi$  и не содержащая конечных линий Стокса (л.с.) внутри канонических областей, через которые осуществляется переход. Тогда в  $O(\varepsilon^2)$  окрестности таких  $\lambda$  нет точек спектра оператора (2.2).

*Доказательство.* Для того, чтобы доказать эту теорему надо построить все возможные расположения линий Стокса, когда нет конечной линии, вычислить в каждом таком случае матрицу монодромии (т.е. матрицу, которая связывает фундаментальные системы решений канонических областей  $S$  и  $S + T$ , где  $T$  - период  $V(z)$ ) и доказать, что она не удовлетворяет условию  $\text{tr } M = 2$ .

Поскольку нам не придется переходить через конечную линию, то потребуются только матрицы перехода второго и третьего типа (матрица перехода между линиями Стокса, которые выходят из разных точек поворота и направлены в одну сторону, и матрица поворота).

Таким образом из одной точки поворота линий Стокса могут выходить двумя способами, когда из одной точки поворота две линии Стокса уходят на  $+\infty$  и одна на  $-\infty$  (под  $+\infty$  и  $-\infty$  подразумевается, что  $\text{Im}z \rightarrow +\infty$  и, соответственно  $\text{Im}z \rightarrow -\infty$ ), а второй случай наоборот, когда две линии Стокса уходят на  $-\infty$  и одна на  $+\infty$ . Тогда существует только четыре основных способа расположения л.с. у соседних точек поворота и все варианты расположения л.с. комбинируются из этих четырех, что будет видно далее.



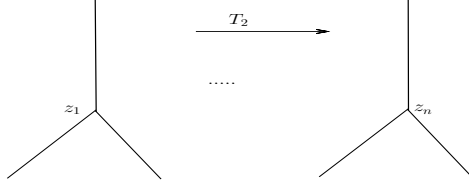
1. если из каждой из  $n$  штук соседних точек поворота две линии Стокса уходят на  $+\infty$  и одна на  $-\infty$ ; тогда нам потребуется только матрица поворота второго вида, т.к. будем переходить между л.с., которые уходят на  $-\infty$ .

В этом случае матрица монодромии будет иметь вид:

$$T_1 = \exp(i\xi_0) \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{-\xi(z_1, z_n)}{\varepsilon}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{\xi(z_1, z_n)}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}$$

где  $\xi(z_1, z_n) = \xi(z_1, z_2) + \xi(z_2, z_3) + \xi(z_3, z_4) + \dots + \xi(z_{(n-1)}, z_n)$ .

2. если из  $n$  штук соседних точек поворота две линии Стокса уходят на  $-\infty$  и одна на  $+\infty$ , то также будем переходить между л.с. уходящими на  $+\infty$ .



Тогда матрица монодромии будет иметь вид:

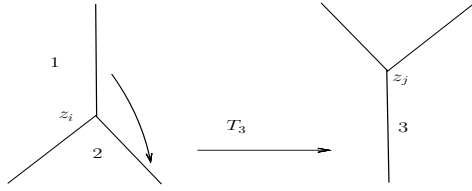
$$T_2 = \exp(i\xi_0) \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\xi(z_1, z_n)}{\varepsilon}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{-\xi(z_1, z_n)}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}$$

где  $\xi(z_1, z_n) = \xi(z_1, z_2) + \xi(z_2, z_3) + \xi(z_3, z_4) + \dots + \xi(z_{n-1}, z_n)$ .

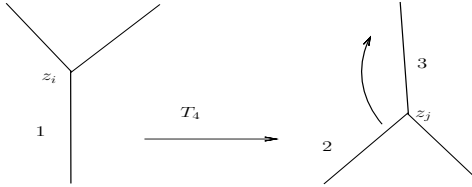
3. переход между л.с., направленными в разные стороны и выходящими из разных точек поворота, будет осуществляться с помощью матриц поворота (см. рис.). Начнем с л.с. 1, затем с помощью матрицы поворота перейдем на вторую л.с. и затем уже на третью:

$$\begin{aligned} T_3 &= \exp(i\xi_0) \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{-\xi(z_i, z_j)}{\varepsilon}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{\xi(z_i, z_j)}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -i(1 + O(\varepsilon)) & 1 + O(\varepsilon) \\ 1 + O(\varepsilon) & O(\varepsilon) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -i \exp\left(\frac{-\xi(z_i, z_j)}{\varepsilon}\right)(1 + O(\varepsilon)) & \exp\left(\frac{-\xi(z_i, z_j)}{\varepsilon}\right) \\ \exp\left(\frac{\xi(z_i, z_j)}{\varepsilon}\right) & O(\varepsilon) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

где точки  $z_i$  и  $z_j$  - это точки поворота, в которых л.с. для первой точки две линии Стокса уходят на  $-\infty$  и одна на  $+\infty$ , а для второй наоборот л.с. две линии Стокса уходят на  $+\infty$  и одна на  $-\infty$ .



4. рассмотрим также переход в обратную сторону



будем переходить также, начнем с л.с. 1, затем перейдем на вторую л.с. и затем уже на третью с помощью матрицы поворота:

$$\begin{aligned}
 T_4 &= \exp(i\xi_0) \begin{pmatrix} -i(1 + O(\varepsilon)) & 1 + O(\varepsilon) \\ 1 + O(\varepsilon) & O(\varepsilon) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{-\xi(z_i, z_j)}{\varepsilon}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{\xi(z_i, z_j)}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -i \exp\left(\frac{-\xi(z_i, z_j)}{\varepsilon}\right)(1 + O(\varepsilon)) & \exp\left(\frac{\xi(z_i, z_j)}{\varepsilon}\right) \\ \exp\left(\frac{-\xi(z_i, z_j)}{\varepsilon}\right) & O(\varepsilon) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

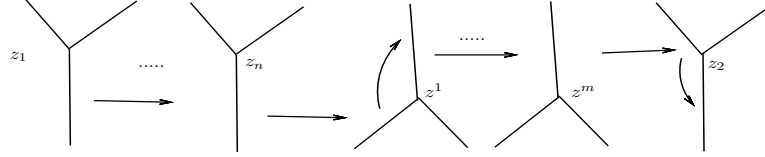
Поскольку в уравнении ставятся периодические условия, то нам надо перейти по л.с. через период. Тогда существует только два основных варианта расположения л.с., а все остальные способы расположения л.с. формируются из этих двух в различном порядке.

На рисунке показан только один способ расположения, второй получается, если все л.с. повернуть на 180 градусов.

Кроме того, точек поворота может быть сколько угодно много и тем самым все расположения л.с. можно разделить на две такие группы, которые описаны выше.

Разберем случай показанный на рисунке, нам надо вычислить оператор монодромии перехода между решениями через период, т.е. между решениями, связанными с л.с., которые выходят из точек  $z_1$  и  $z_2 = z_1 + T$ ,  $T$  - период. Переходить будем слева направо, а оператор монодромии получится из перемножения матриц этих четырех типов. Многоточие означает, что

между точками  $z_1$  и  $z_n$  находится  $n$ -штук точек поворота, все три л.с. которых направлены одинаково. Поэтому первая матрица перехода - это матрица перехода между точками поворота  $z_1, z_n$  (матрица перехода 3 типа), затем матрица перехода между точками  $z^1, z^m$  (матрица перехода 2 типа), затем матрица перехода 4 и 1 типов.



Получим матрицу монодромии:

$$M = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{-\xi(z^1, z_2) - \xi(z_1, z^1)}{\varepsilon}\right) & 0 \\ -i \exp\left(\frac{-\xi(z_1, z^1) + \xi(z^1, z_2)}{\varepsilon}\right) + i \exp\left(\frac{-\xi(z_1, z^1) - \xi(z^1, z_2)}{\varepsilon}\right) & \exp\left(\frac{\xi(z_1, z^1) + \xi(z^1, z_2)}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}$$

здесь  $\xi(z^1, z_2) = \sum_{i=1}^m \xi(z^i, z^{i+1}) + \xi(z^m, z_2)$ ,  $\xi(z_1, z^1) = \sum_{j=1}^n \xi(z_j, z_{j+1}) + \xi(z_n, z^1)$ , все коэффициенты матрицы вычислены с точностью до множителя  $1 + O(\varepsilon)$ . Таким образом, блок, приведенный на рисунке, приводит к матрице монодромии, в правом нижнем углу которой находится коэффициент, экспоненциально большой при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ясно, что комбинация таких блоков приводит к матрице с тем же свойством. Запишем условие для существования спектра

$$\text{tr } M = \exp\left(\frac{-\xi(z^1, z_2) - \xi(z_1, z^1)}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{\xi(z_1, z^1) + \xi(z^1, z_2)}{\varepsilon}\right).$$

Условие существования спектра не выполнено, поскольку ветвь корня выбиралась как  $\text{Re} \xi > 0$  и второе слагаемое экспоненциально большое (стремится к  $+\infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), а для существования спектра требуется равенство  $\text{tr } M = 2$ .

Остался второй случай, поскольку во втором случае картинка будет повернута на 180 градусов, то оператор монодромии будет получаться из произведения матриц перехода в обратном порядке к предыдущему случаю и условие существования точек спектра будет иметь вид:

$$\text{tr } M = \exp\left(\frac{\xi(z^1, z_2) + \xi(z_1, z^1)}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{-\xi(z_1, z^1) - \xi(z^1, z_2)}{\varepsilon}\right).$$

которое также не будет выполняться.

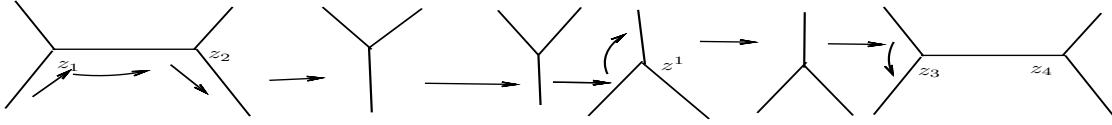
Из приведенных формул следует, что в любом случае след матрицы монодромии экспоненциально растет, т.е. уравнение  $\text{tr } M = 2$  не может выполняться. В силу аналитичности функции  $\text{tr } M(\lambda)$ , это уравнение не имеет решений в  $O(\varepsilon^2)$ -окрестности данной точки  $\lambda$ .  $\square$

Поскольку все операторы монодромии в дальнейшем будут вычисляться с точностью до  $O(\varepsilon^2)$ , то будем выписывать только главные члены асимптотики.

Перейдем теперь к непосредственному получению формул для точек спектра. Для доказательства теоремы 2.2 надо также построить разные взаимные расположения линий Стокса, но теперь уже только те расположения, которые определяют точки спектра, т.е. расположения, у которых внутри канонической области содержится конечная л.с.

Опишем способ расположения этой конечной линии, на самом деле существует только один способ ее расположения, все остальные получаются с помощью различных комбинаций этого и предыдущего случая, который не определяет точек спектра.

Разберем основной случай, будем переходить между л.с. по стрелкам



Матрица перехода между л.с., выходящими из  $z_1$  и  $z_2$  и направленными вниз имеет вид:

$$S = \exp(i\pi/6) \begin{pmatrix} 0 & 1 + O(\varepsilon) \\ 1 + O(\varepsilon) & i(1 + O(\varepsilon)) \end{pmatrix} - \text{матрица поворота,}$$

$$T = \exp(i\tilde{\xi}_0) \begin{pmatrix} 0 & \exp(\frac{-\xi(z_1, z_2)}{\varepsilon}) \\ \exp(\frac{\xi(z_1, z_2)}{\varepsilon}) & 0 \end{pmatrix} - \text{матрица перехода между}$$

точками поворота, соединенными конечной л.с..

$$M_1 = STS = \begin{pmatrix} 0 & \exp(\frac{\xi(z_1, z_2)}{\varepsilon}) \\ \exp(\frac{-\xi(z_1, z_2)}{\varepsilon}) & 2 \cos \frac{\xi(z_1, z_2)}{i\varepsilon} \end{pmatrix}$$

Затем матрица перехода между точками  $z_2$  и  $z^1$  имеет вид:

$$M_2 = \exp(i\tilde{\xi}_0) \begin{pmatrix} \exp(\frac{-\xi(z_2, z^1)}{\varepsilon}) & 0 \\ 0 & \exp(\frac{\xi(z_2, z^1)}{\varepsilon}) \end{pmatrix}$$

Затем надо повернуть и двигаться по л.с., направленным вверх, между точками поворота  $z^1$  и  $z_3$  и еще раз повернуть:

$$M_3 = \exp(i\tilde{\xi}_0) \begin{pmatrix} \exp(\frac{-\xi(z^1, z_3)}{\varepsilon}) & 0 \\ -i \exp(\frac{\xi(z^1, z_3)}{\varepsilon}) + i \exp(\frac{-\xi(z^1, z_3)}{\varepsilon}) & \exp(\frac{\xi(z^1, z_3)}{\varepsilon}) \end{pmatrix}$$

Оператор монодромии имеет вид  $M = M_3 M_2 M_1$ :

$$M = \exp(i2\pi/3) \begin{pmatrix} 0 & \exp\left(\frac{(-\xi(z^1, z_3) - \xi(z_2, z^1) + i\xi(z_1, z-2))}{\varepsilon}\right) \\ \exp\left(\frac{(\xi(z^1, z_3) + \xi(z_2, z^1) - i\xi(z_1, z-2))}{\varepsilon}\right) & A \end{pmatrix}$$

$$A = \exp\frac{i\xi(z_1, z_2)}{\varepsilon} \left( -i \exp\frac{\xi(z^1, z_3) - \xi(z_2, z^1)}{\varepsilon} + i \exp\frac{-\xi(z^1, z_3) - \xi(z_2, z^1)}{\varepsilon} \right) \\ + 2 \exp\frac{\xi(z^1, z_3) + \xi(z_2, z^1)}{\varepsilon} \cos\frac{\xi(z_1, z_2)}{i\varepsilon}$$

Запишем уравнение  $tr M = 2$  (принадлежность  $\lambda$  спектру):

$$\exp\frac{i\xi(z_1, z_2)}{\varepsilon} \left( -i \exp\frac{\xi(z^1, z_3) - \xi(z_2, z^1)}{\varepsilon} + i \exp\frac{-\xi(z^1, z_3) - \xi(z_2, z^1)}{\varepsilon} \right) \\ + 2 \exp\frac{\xi(z^1, z_3) + \xi(z_2, z^1)}{\varepsilon} \cos\frac{\xi(z_1, z_2)}{i\varepsilon} = 2$$

Сократим экспоненциально маленькие слагаемые, поскольку ветвь  $\xi$  выбрана так, что  $Re\xi > 0$ , то получаем следующее условие:

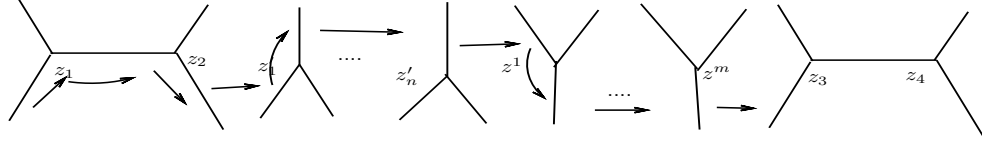
$$\exp\frac{\xi(z_1, z_2)}{\varepsilon} \left( -i \exp\frac{\xi(z^1, z_3) - \xi(z_2, z^1)}{\varepsilon} \right) + 2 \exp\frac{\xi(z^1, z_3) + \xi(z_2, z^1)}{\varepsilon} \cos\frac{\xi(z_1, z_2)}{i\varepsilon} = 2$$

Тогда

$$\cos\frac{\xi(z_1, z_2)}{i\varepsilon} = \exp\frac{-\xi(z^1, z_3) - \xi(z_2, z^1)}{\varepsilon} - \frac{1}{2}i \exp\frac{-2\xi(z^1, z_3) - \xi(z_1, z_2)}{\varepsilon}$$

Поскольку слагаемые стоящие в правой части равенства экспоненциально маленькие, то точки спектра удовлетворяют следующему уравнению:

$$\xi(z_1, z_2) = i\pi\varepsilon\left(\frac{1}{2} + n\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Разберем следующий случай, будем переходить между л.с. по стрелкам  
Матрица перехода между л.с., выходящими из  $z_1$  и  $z_2$  точно такая же,  
как и в предыдущем случае:

$$M_1 = \exp(i\pi) \begin{pmatrix} 0 & \exp\left(\frac{\xi(z_1, z_2)}{\varepsilon}\right) \\ \exp\left(\frac{-\xi(z_1, z_2)}{\varepsilon}\right) & 2 \cos \frac{\xi(z_1, z_2)}{i\varepsilon} \end{pmatrix}$$

Затем переход с  $z_2$  на  $z'_1$  и поворот:

$$M_2 = \exp(i\pi) \begin{pmatrix} -i \exp\left(\frac{-\xi(z_2, z'_1)}{\varepsilon}\right) & \exp\left(\frac{\xi(z_2, z'_1)}{\varepsilon}\right) \\ \exp\left(\frac{-\xi(z_2, z'_1)}{\varepsilon}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

Переход между  $z'_1$  и  $z^1$ :

$$M_3 = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\xi(z'_1, z^1)}{\varepsilon}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{-\xi(z'_1, z^1)}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}$$

Переход между  $z^1$  и  $z_3$ :

$$M_4 = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{-\xi(z^1, z_3)}{\varepsilon}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{\xi(z^1, z_3)}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}$$

Тогда оператор монодромии  $M = M_4 M_3 M_2 M_1$ :

$$M = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\xi(z'_1, z^1) - \xi(z^1, z_3) + \xi(z_2, z'_1) + \xi(z_1, z_2)}{\varepsilon}\right) & A \\ 0 & \exp\left(\frac{-\xi(z'_1, z^1) + \xi(z^1, z_3) - \xi(z_2, z'_1) - \xi(z_1, z_2)}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}$$

$A = \exp\left(\frac{\xi(z'_1, z^1) - \xi(z^1, z_3)}{\varepsilon}\right) \left(-i \exp\left(\frac{\xi(z_1, z_2) - \xi(z_2, z'_1)}{\varepsilon}\right) + 2 \exp\left(\frac{-\xi(z_2, z'_1)}{\varepsilon}\right) \cos \frac{\xi(z_1, z_2)}{i\varepsilon}\right)$  Напишем условие на точки спектра:



$$\begin{aligned} & \exp\left(\frac{\xi(z'_1, z^1) - \xi(z^1, z_3) + \xi(z_2, z'_1) + \xi(z_1, z_2)}{\varepsilon}\right) \\ & + \exp\left(\frac{-\xi(z'_1, z^1) + \xi(z^1, z_3) - \xi(z_2, z'_1) - \xi(z_1, z_2)}{\varepsilon}\right) = 2 \end{aligned}$$

В том случае, если  $-\xi(z'_1, z^1) + \xi(z^1, z_3) - \xi(z_2, z'_1) = 0$ , то условие на существование точек спектра имеет вид:

$$\cos \frac{\xi(z_1, z_2)}{i\varepsilon} = 1 \Rightarrow \xi(z_1, z_2) = 2i\varepsilon\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Рассмотрим случай соединения конечной линией Стокса точек  $z_i$  и  $z_i + T$ , где  $T$  - период. В этом случае нам потребуется только три матрицы перехода, поворот с л.с., выходящей из  $z_i$  и направленной вниз, матрица перехода между точками поворота по конечной линии, затем поворот с конечной линии на л.с., выходящую из  $z_{i+T}$  и направленную вниз, и, наконец, матрица перехода на л.с., выходящую из точки  $z_{i+2T}$  и направленную вниз. Матрица монодромии следующая:

$$M = \exp(i2\pi/3) \begin{pmatrix} 0 & \exp\left(\frac{\xi(z_i, z_i+T)}{\varepsilon}\right) \exp\left(\frac{-\xi(z_{i+T}, z_{i+2T})}{\varepsilon}\right) \\ \exp\left(\frac{-\xi(z_i, z_i+T)}{\varepsilon}\right) \exp\left(\frac{\xi(z_{i+T}, z_{i+2T})}{\varepsilon}\right) & 2 \cos \frac{\xi(z_i, z_i+T)}{i\varepsilon} \exp\left(\frac{\xi(z_{i+T}, z_{i+2T})}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}$$

И также получим уравнение на точки спектра из условия  $tr M = 2$ :

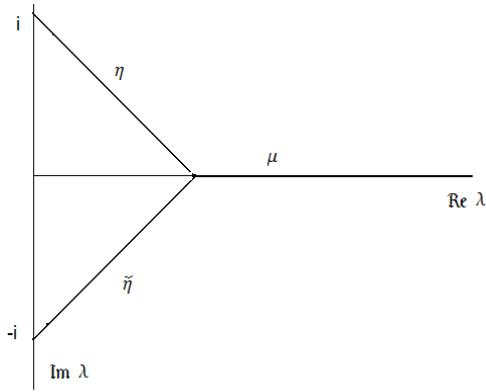
$$\exp(i2\pi/3) \cos \frac{\xi(z_i, z_i + T)}{i\varepsilon} = \exp\left(\frac{-\xi(z_{i+T}, z_{i+2T})}{\varepsilon}\right) \rightarrow 0$$

$$\xi(z_i, z_i + T) = i\pi\varepsilon\left(\frac{1}{2} + k\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Теорема 2.2 доказана.

## 2.2 Пример поля скоростей вида $V(z) = \cos z$

В случае, когда поле скоростей имеет вид  $V(z) = \cos z$ , граф выглядит следующим образом:



В этом графе три ребра на комплексной плоскости  $\lambda$ , одно находится на оси  $Re\lambda$ , два других симметричны и однозначно проектируются на ось  $Re\lambda$ . Эта задача была решена в работах [15], [16].

Случай поля скоростей вида  $V(z) = \cos z + \cos 2z$  уже значительно отличается от этого случая принципиально другим видом спектрального графа и графов Линий Стокса, поскольку точек поворота, а значит и различных взаимных расположений линий Стокса значительно больше.

### 2.3 Пример поля скоростей вида $V(z) = \cos z + \cos 2z$

Для случай поля скоростей вида  $V(z) = \cos z + \cos 2z$  спектральный граф выглядит следующим образом

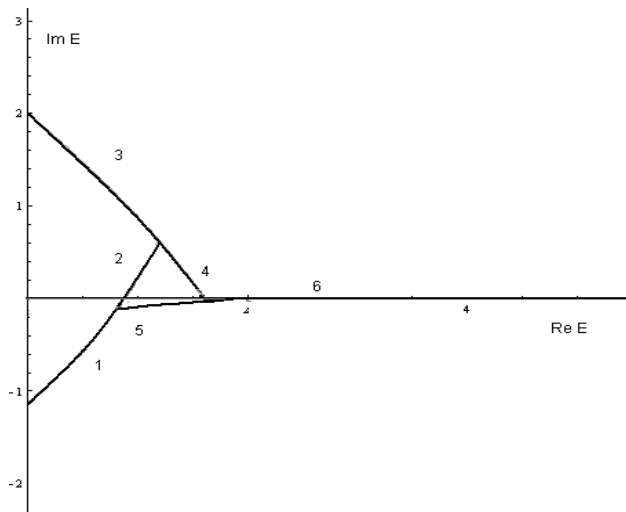


Рис. 2.1: спектральный граф

Он был построен с помощью компьютера по полученным уравнениям. Подробный вывод этих уравнений будет описан ниже.

## 2.4 Матрицы монодромии и уравнения на точки спектра

Для описания асимптотики спектра мы исследуем матрицу монодромии уравнения, т.е. матрицу оператора сдвига на период в пространстве решений. Ниже вычислена асимптотика матрицы монодромии в специальном базисе. Как уже упоминалось, принадлежность  $\lambda$  дискретному спектру эквивалентно условию  $Tr M = 2$ , где  $M$  - матрица монодромии.

## 2.5 Точки поворота

Рассмотрим пример поля скоростей вида  $V(z) = \cos z + \cos 2z$ , для того, чтобы построить определенные примеры графов линий Стокса и спектральный граф. В этом случае на комплексной плоскости существует четыре серии точек поворота, расположенных периодически, с периодом  $2\pi$ . Решая уравнение  $\lambda = i(\cos z + \cos 2z)$ , получаем искомые точки:

$$z_1 = \arccos\left(\frac{1}{4}(-1 + \sqrt{9 - 8i\lambda})\right); z_2 = -\arccos\left(\frac{1}{4}(-1 + \sqrt{9 - 8i\lambda})\right),$$

$$z_3 = \arccos\left(\frac{1}{4}(-1 - \sqrt{9 - 8i\lambda})\right); z_4 = -\arccos\left(\frac{1}{4}(-1 - \sqrt{9 - 8i\lambda})\right).$$

Точки поворота зависят от параметра  $\lambda$ . Ветвь выбирается следующим образом:

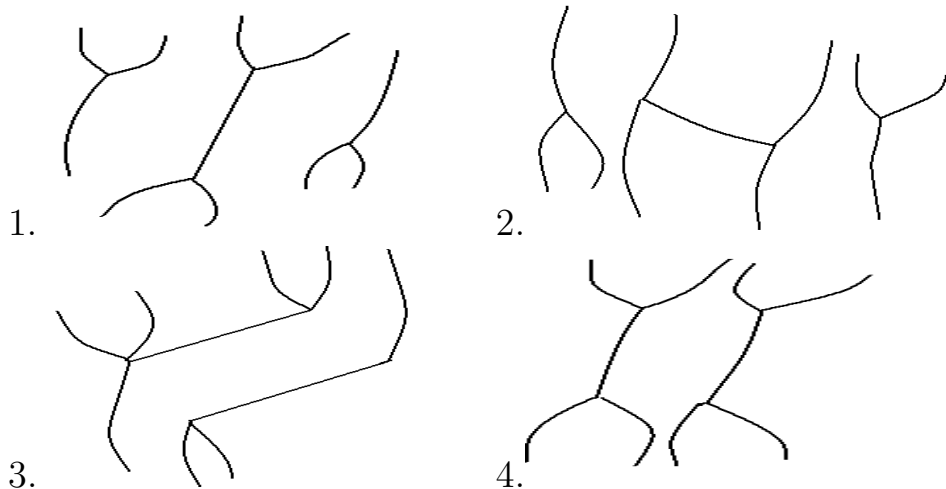
$$\arccos(\lambda) : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \rightarrow \{\lambda \in \mathbb{C} | Re \arccos(\lambda) > 0\};$$

$$\sqrt{9 - 8i\lambda} : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \rightarrow \{\lambda \in \mathbb{C} | Re \sqrt{9 - 8i\lambda} > 0\}.$$

## 2.6 Линии Стокса

**Предложение 2.1.** *В случае  $V(z) = \cos z + \cos 2z$  существует 27 топологически различных случаев взаимного расположения линий Стокса на комплексной плоскости  $z$ .*

*Доказательство.* Это следует из восьми свойств линий Стокса, приведенных выше, и получается перебором всех возможных случаев. Приведем некоторые из них:



□

Далее выясним, какие же взаимные расположения линий Стокса будут определять ребра спектрального графа. Вычислим матрицы монодромии для этих случаев и получим уравнения на точки спектра.

**Теорема 2.4.** *Если  $\lambda$  принадлежит спектральному графу, то:*

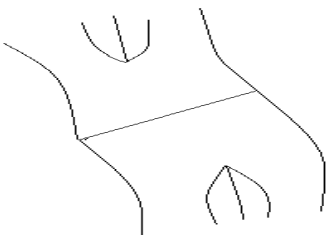
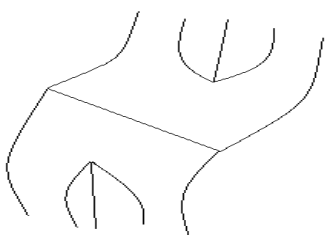
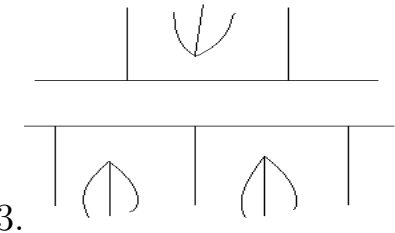
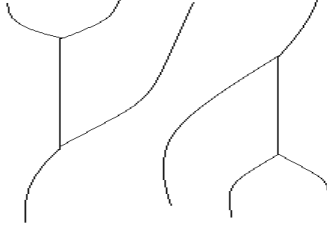
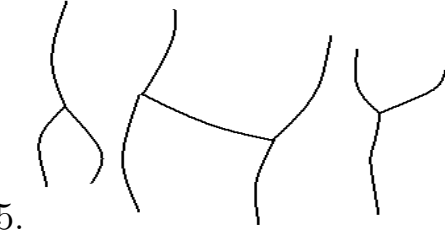
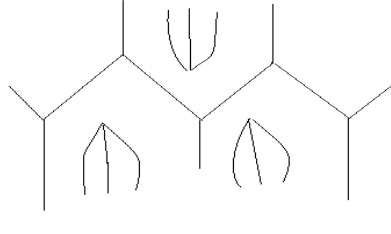
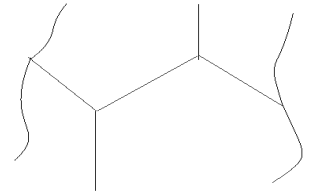
1. *Существует конечная линия Стокса, соединяющая две точки поворота;*
2. *Для любой цепочки канонических областей, инвариантной относительно сдвига  $z \rightarrow z + 2\pi$  существует область из этой цепочки, содержащая конечную линию Стокса (т.е. существование конечной линии Стокса, которую нельзя обойти, на комплексной плоскости  $z$ , задает ребро спектрального графа на комплексной плоскости  $\lambda$ ).*

*Доказательство.* Доказательство в общем случае было приведено в теореме выше. □

## 2.7 Описание топологических случаев

**Лемма 2.2.** *Существует всего семь возможных расположений линий Стокса, которые могут вносить вклад в спектр.*

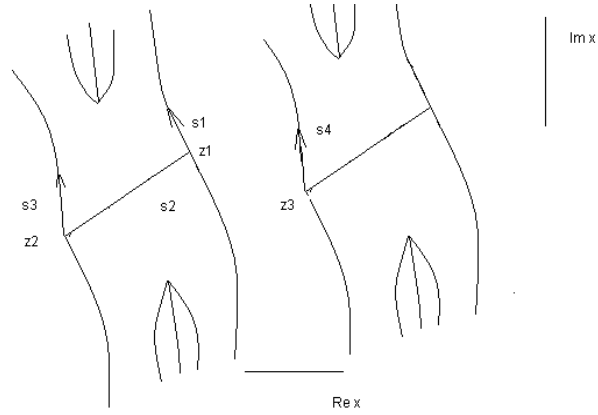
*Доказательство.* Доказательство следует из свойств 1-8 и из предыдущей теоремы прямым перебором. Ниже приведены эти семь топологических случаев расположения линий Стокса и указано какие точки поворота соединяются между собой в этих случаях.

1.   
 $z_j \rightarrow -z_j$
2.   
 $z_j \rightarrow -z_j + 2\pi$
3.   
 $z_j \rightarrow -z_j + 2\pi$
4.   
 $z_i \rightarrow z_j$
5.   
 $z_i \rightarrow z_j - 2\pi$
6.   
 $z_i \rightarrow z_j + 2\pi$
7.   
 $z_i \rightarrow z_j \rightarrow z_i + 2\pi \rightarrow z_j + 2\pi$

□

## 2.8 Матрицы монодромии

- *Топологический случай 1.*



Будем двигаться от точки  $z_2$  и л.с.  $s_3$ , затем перейдем на конечную л.с., по ней перейдем к точке поворота  $z_1$ , повернем на л.с.  $s_1$  и перейдем на  $s_4$ ,  $z_3 = z_2 + 2\pi$ .

Матрицы  $M$  имеют следующий вид:

$$M_1 = \exp(i\xi_0) \begin{pmatrix} \exp(\frac{\xi(z_1, z_3)}{\varepsilon}) & 0 \\ 0 & \exp(\frac{-\xi(z_1, z_3)}{\varepsilon}) \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \exp(-i\pi/6) \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \exp(i\tilde{\xi}_0) \begin{pmatrix} 0 & \exp(\frac{-\xi(z_2, z_1)}{\varepsilon}) \\ \exp(\frac{\xi(z_2, z_1)}{\varepsilon}) & 0 \end{pmatrix}, M_4 = M_2.$$

$$M = M_1 M_2 M_3 M_4.$$

Получаем матрицу монодромии :

$$\exp(i2\pi/3) * \begin{pmatrix} -i(\exp(\frac{\xi(z_1, z_3) + \xi(z_2, z_1)}{\varepsilon)} + \exp(\frac{\xi(z_1, z_3) - \xi(z_2, z_1)}{\varepsilon})) & \exp(\frac{\xi(z_1, z_3) + \xi(z_2, z_1)}{\varepsilon}) \\ \exp(\frac{-\xi(z_1, z_3) - \xi(z_2, z_1)}{\varepsilon}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем условие принадлежности  $\lambda$  спектру ( $tr M = 2$ ):

$$-2 \cos \frac{\xi(z_2, z_1)}{i\varepsilon} \exp(\frac{\xi(z_1, z_3)}{\varepsilon}) = 2$$

Так как ветвь выбрана так, что  $Re \xi(z_0, z) > 0$  (где  $z_0$  точка поворота), то получаем уравнение на точки спектра и на ребро спектрального графа:

$$\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{iV(z) - \lambda} dx = \varepsilon i(\frac{\pi}{2} + \pi n), n = 1, 2, \dots$$

Из этого условия следует, что  $Re\xi(z_1, z_2) = 0$ ; именно этим уравнением определяется ребро спектрального графа на комплексной плоскости  $\lambda$ .

Точки спектра будут определяться из уравнения

$$Im \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{iV(z) - \lambda} dz = \varepsilon \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n = 1, 2, \dots$$

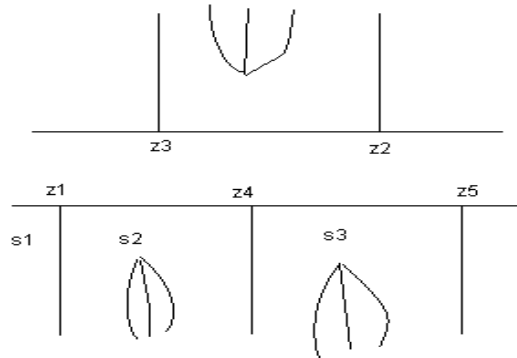
- *Топологический случай 2.*

Этот случай аналогичен предыдущему, с тем лишь различием, что в уравнении на точки спектра интеграл будет между другими точками поворота, т.е.

$$\int_{z_1}^{z_2+2\pi} \sqrt{iV(z) - \lambda} dz = i\varepsilon \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n = 1, 2, \dots$$

В этом случае ребро спектрального графа на комплексной плоскости  $\lambda$  определяется уравнением  $Re\xi(z_1, z_2 + 2\pi) = 0$ , это ребро будет отличаться от предыдущего случая.

- *Топологический случай 3.*



Как и в предыдущем случае, получаем матрицу монодромии:

$$M = \exp(i(\tau_0 - \pi/6)) \begin{pmatrix} 0 & \exp(\frac{\tau}{\varepsilon}) \\ \exp(\frac{-\tau}{\varepsilon}) & i(\exp(\frac{\tau}{\varepsilon}) + \exp(\frac{-\tau}{\varepsilon})) \end{pmatrix},$$

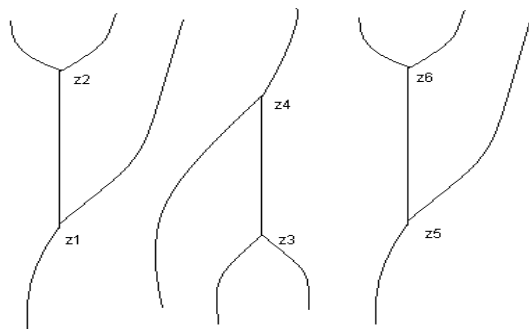
где  $\int_{z_1}^{z_4} \sqrt{iV(z) - \lambda} dz = \tau$ .

Получим уравнение на точки спектра и на ребро спектрального графа  $\tau = i\varepsilon 2\pi n, n = 0, 1, 2, \dots$

Т.к.  $\tau = \int_0^{2\pi} \sqrt{iV(z) - \lambda} dz$  ( $z_4 + 2\pi = z_1$ ), получаем такое уравнение

$\int_0^{2\pi} \sqrt{iV(z) - \lambda} dz = i\varepsilon 2\pi n$ . Отсюда,  $Re \int_0^{2\pi} \sqrt{iV(z) - \lambda} dz = 0$ , это условие определяет другое ребро спектрального графа.

- *Топологический случай 4.*



Уравнение на точки спектра и на ребро спектрального графа:

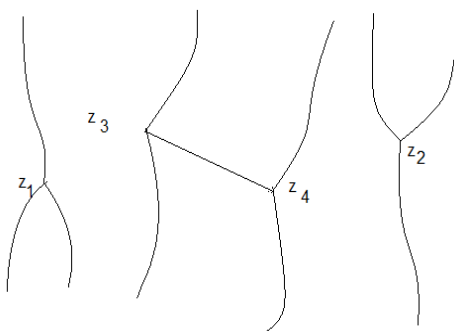
$$\int_{z_6}^{z_5} \sqrt{iV(z) - \lambda} dz = i\varepsilon \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right).$$

Ребро спектрального графа, таким образом, выглядит так

$$Re \int_{z_6}^{z_5} \sqrt{iV(z) - \lambda} dz = 0.$$

Остальные топологические случаи рассматриваются аналогично. Приведем результаты - уравнения на точки спектра и на ребра графа.

- *Топологический случай 5.*



Уравнение на точки спектра и ребро графа:

$$\int_{z_4}^{z_3} \sqrt{iV(z) - \lambda} dz = i\varepsilon \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right).$$



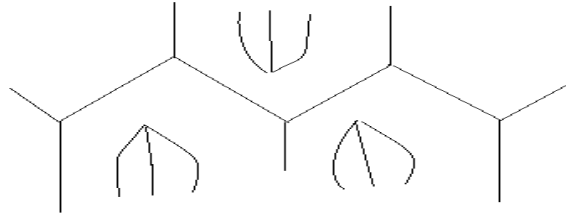
Ребро спектрального графа, в этом случае, задается уравнением

$$\operatorname{Re} \int_{z_4}^{z_3} \sqrt{iV(z) - \lambda} dz = 0.$$

- *Топологический случай 6.*

Уравнение на точки спектра и ребро графа:

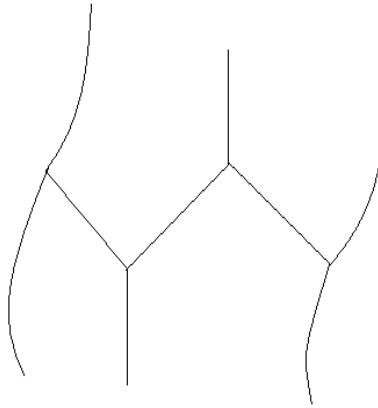
$$\int_0^{2\pi} \sqrt{iV(z) - \lambda} dz = i\varepsilon 2\pi n.$$



Ребро спектрального графа определяется уравнением:

$$\operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{iV(z) - \lambda} dz = 0.$$

- *Топологический случай 7.*



Уравнение на точки спектра и ребро графа:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{iV(z) - \lambda} dz = i\varepsilon 2\pi n.$$

Ребро спектрального графа:  $\operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{iV(z) - \lambda} dz = 0.$

Таким образом, каждый случай, который вносит вклад в спектр, задает ребро спектрального графа на комплексной плоскости  $\lambda$ . В это условие входит интеграл между точками поворота, которые соединены линией Стокса. То есть существование конечной линии Стокса задает ребро спектрального графа на комплексной плоскости  $\lambda$ .

**Замечание 2.3.** Таким образом, каждый из 7 топологических случаев расположения линий Стокса определяет свою серию собственных значений и свое ребро спектрального графа.

## 2.9 Спектральный граф и описание его ребер

Спектральный граф получен с помощью компьютера. Различным ребрам соответствуют различные топологические случаи расположения линий Стокса; именно:

- ребру 1 соответствует топологический случай под номером 1,
- ребру 2 соответствует топологический случай под номером 4,
- ребру 3 соответствует топологический случай под номером 5,
- ребру 6 соответствует топологический случай под номером 3,
- ребру 4 соответствует топологический случай под номером 5,
- ребру под номером 5 соответствует топологический случай под номером 3,
- точке соединения ребер 1 и 5 соответствует топологический случай 6,
- точке соединения ребер 1 и 2 соответствует топологический случай 7.

Ниже доказаны некоторые свойства спектрального графа.

**Утверждение 2.1.** Если выполняется равенство  $\lambda \in C \setminus i(-\frac{9}{8}, 2)$

$$I(\lambda) = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i(\cos z + \cos 2z) - \lambda} dz = 0, \text{ то}$$

$$\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Im} \lambda < 0$$

(это означает, что ребра под номерами 5 и 6 лежат ниже оси  $\operatorname{Re} \lambda$ )

*Доказательство.* Будем анализировать функцию такого вида

$$I(\lambda) = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i(\cos z + \cos 2z) - \lambda} dz = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\pi} \sqrt{i(\cos z + \cos 2z) - \lambda} dz$$

Рассмотрим  $\lambda = Re\lambda < 0$ . Следовательно, нулей подынтегрального выражения нет. Знак  $Re\sqrt{i(\cos z + \cos 2z) - \lambda}$  постоянен, следовательно, отличен от нуля на всем пути интегрирования и  $I(\lambda) \neq 0$ . А значит, мы пришли к противоречию и  $Re\lambda > 0$ .

Рассмотрим  $\lambda$  с положительной действительной частью. Получаем  $Re(i(\cos z + \cos 2z) - \lambda) = -Re\lambda < 0$  для любого  $z$  принадлежащего отрезку  $(0, \pi)$ . То есть образ пути интегрирования под действием функции  $i(\cos z + \cos 2z) - \lambda$  не переходит через луч  $[0, +\infty)$ . Следовательно, можно зафиксировать ветвь корня с разрезом вдоль этого луча. Выберем следующую ветвь:  $\sqrt{\cdot}: \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} | Imz > 0\}$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial Re\sqrt{i(\cos z + \cos 2z) - \lambda}}{\partial Im\lambda} &= -Re\frac{i}{2\sqrt{i(\cos z + \cos 2z) - \lambda}} \\ &= -Im\frac{1}{2\sqrt{i(\cos z + \cos 2z) - \lambda}} > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, подынтегральная функция возрастает на всем пути интегрирования для любого  $z \in (0, \pi)$ . А значит, и сам интеграл строго монотонно возрастает по  $Im\lambda$  при любом фиксированном  $Re\lambda$ . И при любом фиксированном  $Re\lambda > 0$  уравнение  $I(\lambda) = 0$  имеет не более одного решения. Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \sqrt{i(\cos z + \cos 2z) - \lambda} &= \sqrt{-\lambda}\left(1 - \frac{i(\cos z + \cos 2z)}{2\lambda} + \frac{(\cos z + \cos 2z)^2}{8\lambda^2} + \right. \\ &\left. + \frac{i(\cos z + \cos 2z)^3}{16\lambda^3} + \dots\right) \end{aligned}$$

и проинтегрируем:

$$Re \int_0^{2\pi} \sqrt{i(\cos z + \cos 2z) - \lambda} dz = Re(2\sqrt{-\lambda}\left((1 + \frac{\lambda^2}{8})\pi + \frac{3\pi i}{32\lambda^3}\right)).$$

Рассмотрим случай  $Im = 0$ ,  $Re\lambda > 0$ . Следовательно,

$$I(\lambda) = -\frac{3\pi}{16\lambda^2\sqrt{\lambda}} < 0$$

при любом фиксированном  $Re\lambda$ . Отсюда следует, что кривая  $I(\lambda) = 0$  будет находиться ниже оси  $Re\lambda$ .  $\square$

**Утверждение 2.2.** Уравнение относительно  $\lambda$ :

$$J(\lambda) = Re \int_{-z_j}^{z_j} \sqrt{i(\cos z + \cos 2z) - \lambda} dz = 0, \text{ где}$$

$$z_{1,2} = \pm ArcCos\left(\frac{1}{4}(-1 - \sqrt{9 - 8i\lambda})\right); z_{3,4} = \pm ArcCos\left(\frac{1}{4}(-1 + \sqrt{9 - 8i\lambda})\right),$$

при условии, что  $I(\lambda) = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i(\cos z + \cos 2z) - \lambda} dz = 0$  имеет ровно одно решение (это утверждение означает, что ребра под номерами 1 и 4 пересекают ребра 5 и 6 соответственно только в одной точке).

*Доказательство.* Как и в предыдущей лемме зафиксируем ветвь корня:

$$\sqrt{\cdot}: \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Перепишем интеграл  $J(\lambda)$  в виде интеграла по действительной переменной  $r$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{-z_j(\lambda)}^{z_j(\lambda)} \sqrt{i(\cos z + \cos 2z) - \lambda} dz &= 2 \operatorname{Re} \int_0^{z_j(\lambda)} \sqrt{i(\cos z + \cos 2z) - \lambda} dz = \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_0^1 z_j \sqrt{i(\cos z_j r + \cos 2z_j r) - \lambda} dr. \end{aligned}$$

Вычислим производную подынтегрального выражения по параметру  $\lambda$ :

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(z_j \sqrt{i(\cos z_j r + \cos 2z_j r) - \lambda})}{\partial \operatorname{Im} \lambda} = -\operatorname{Re} \frac{z_j i}{2\sqrt{i(\cos z_j r + \cos 2z_j r) - \lambda}} > 0.$$

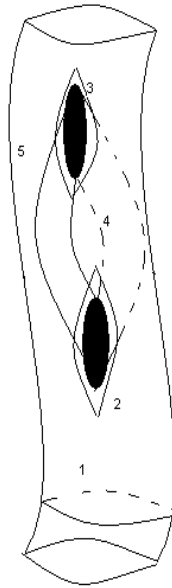
Интеграл строго монотонно возрастает по параметру  $\operatorname{Im} \lambda$  при любом фиксированном  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . И при любом фиксированном  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  уравнение  $J(\lambda) = 0$  имеет не более одного решения. Отсюда следует, что при любом фиксированном  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  уравнение  $I(\lambda) = 0$  имеет не более одного решения. Следовательно, система уравнений:  $I(\lambda) = 0$  и  $J(\lambda) = 0$  имеет не более одного решения.  $\square$

## 2.10 Условие квантования на римановой поверхности

Оказывается, асимптотика спектра оператора  $\hat{H}$  выражается через интегралы от голоморфной формы  $pdx$  по циклам на римановой поверхности, задаваемой уравнением  $p^2 + i(\cos z + \cos 2z) = \lambda$ . Эта поверхность получается путем склейки двух цилиндров ( $z \in \mathbb{C} \bmod 2\pi$ ) вдоль одного конечного разреза (соединяющего две точки поворота) и двух бесконечных разрезов (соединяющих оставшиеся точки с бесконечностями); она гомеоморфна сфере с двумя ручками и двумя проколами. Условия, определяющие спектр, имеют вид

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\gamma_j} p dz = n_j + \frac{\gamma}{2},$$

где  $\mu_j$  – один из циклов римановой поверхности, изображенных на рис. 2.2,  $\gamma \in \{0, 1\}$ . Отметим, что, для того, чтобы точка  $\lambda$  приближала точку спектра, достаточно выполнения условия квантования на одном цикле римановой поверхности (а не на всех, как в вещественной теории; см., например, [28]). Условия квантования, соответствующее каждому циклу, определяет серию собственных значений, лежащую на определенном ребре спектрального графа. Циклу под номером 1 соответствует 6 ребро спектрального графа и  $\gamma = 0$ , у всех остальных циклов  $\gamma = 1$ , циклу 2 соответствует ребро 1, циклу 5 - 2, циклу 4 - 4 и циклу 3 - 3.



## Глава 3

# Спектральные серии оператора индукции на поверхности вращения

### 3.1 Постановка задачи

Магнитное поле  $B(z, t)$  в проводящей жидкости, текущей по двумерной поверхности  $M$ , удовлетворяет уравнению индукции

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \{V, B\} = \varepsilon^2 \Delta B, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (3.2)$$

где  $B, V$  - векторные поля на поверхности  $M$ ,  $V$  - заданное поле скоростей жидкости,  $\{V, B\}$  - их коммутатор,  $\Delta$  - оператор Лапласа-Бельтрами. Ниже мы не различаем векторные поля и 1-формы, отождествляя их при помощи формы объема; напомним, что на 1-формах оператор  $\Delta$  имеет вид  $\Delta = d * d * + * d * d$ . Параметр  $\varepsilon$  характеризует сопротивление в жидкости; мы рассматриваем предел высокой проводимости ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ).

Ниже изучается спектральная задача для оператора индукции на поверхности вращения:

$$L = -\varepsilon^2 \Delta + \{V, \bullet\}, \quad (3.3)$$

Двумерная компактная поверхность вращения диффеоморфна тору или сфере.

1. Тор получается вращением некоторой гладкой замкнутой кривой вокруг оси, не пересекающей эту кривую.

Метрика на торе имеет вид  $ds^2 = dz^2 + u(z)^2 d\varphi^2$ , где  $u(z)$  - расстояние до оси вращения,  $z$  - натуральный параметр на кривой, которая вращается,  $\varphi$  - угол вращения. Всюду ниже поле скоростей будет вида  $V(z) = a(z) \frac{\partial}{\partial \varphi}$ , где  $a(z)$  - тригонометрический многочлен. Пусть  $B_z$  - координата поля  $B$  вдоль

долготы. После замены  $B_z = \exp(-\frac{1}{2} \int \frac{1}{u(z)} \frac{\partial u}{\partial z} dz) w(z) e^{in\varphi}$ :

$$-\varepsilon^2 w'' + ina(z)w = \lambda w. \quad (3.4)$$

Ниже получены уравнения на спектр оператора (3.3), пространственная структура и асимптотика собственных функций этого оператора при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

2. Сферу мы получаем вращением некоторой гладкой кривой вокруг оси, пересекающей эту кривую в двух точках (особые точки), в которых касательная к кривой перпендикулярна оси вращения.

Метрика в этом случае имеет вид  $ds^2 = dz^2((\frac{\partial f}{\partial z})^2 + 1) + f(z)^2 d\phi^2$ , где  $f(z) = \sqrt{(z - z_1)(z - z_2)}k(z)$ ,  $z_1$  и  $z_2$  - особые точки (полюса сферы),  $k(z)$  - многочлен. После замены  $B_z f(z) \exp^{in\phi} = \psi(z)$  и получим уравнение на  $\psi(z)$ :

$$\frac{1}{(\frac{\partial f}{\partial z})^2 + 1} \psi'' + \left( \frac{1}{f} \frac{1}{(\frac{\partial f}{\partial z})^2 + 1} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1}{((\frac{\partial f}{\partial z})^2 + 1)^2} \right) \psi' + \left( -\frac{\lambda}{\varepsilon^2} + \frac{ina(z)}{\varepsilon^2} - \frac{n^2}{f^2} \right) \psi = 0. \quad (3.5)$$

Поле скоростей также имеет вид  $V(z) = a(z) \frac{\partial}{\partial \phi}$ , где  $a(z)$  - многочлен. Поскольку уравнение (3.5) содержит особые точки  $z_1, z_2$ , его решения, вообще говоря, многозначные функции. Будем искать такие решения, которые однозначны, т.е. аналитичны в окрестности особых точек.

Ниже получены уравнения на точки спектра оператора  $L$ , вычислена асимптотика собственных функций и их пространственная структура.

## 3.2 Формулировка результатов

Основные результаты этой части диссертации – следующие утверждения.

**Теорема 3.1.** *Точки спектра  $L$  оператора в случае сферы при  $\varepsilon \rightarrow 0$  находятся в  $O(\varepsilon^2)$  окрестностях решений уравнений:*

$$\int_{z_i}^{z_j} \sqrt{(ina(z) - \lambda)((\frac{\partial f}{\partial z})^2 + 1)} dz = i\varepsilon\pi(n_{ij} + \gamma/2), \quad (3.6)$$

где  $n_{ij} = O(1/\varepsilon)$ ,  $n = O(1)$  - целые числа,  $\gamma \in \{0, 1\}$ , а  $z_i, z_j$  - некоторые из нулей и полюсов подынтегральной функции, которые будут описаны ниже.

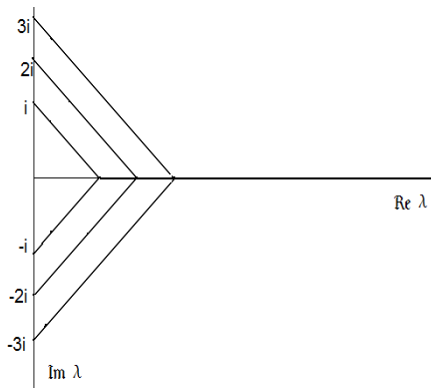
**Теорема 3.2.** *Точки спектра оператора  $L$  в случае тора при  $\varepsilon \rightarrow 0$  находятся в  $O(\varepsilon)$  окрестностях решений уравнений:*

$$\int_{z_i}^{z_j} \sqrt{ina(z) - \lambda} dz = i\varepsilon\pi(n_{ij} + \gamma/2). \quad (3.7)$$

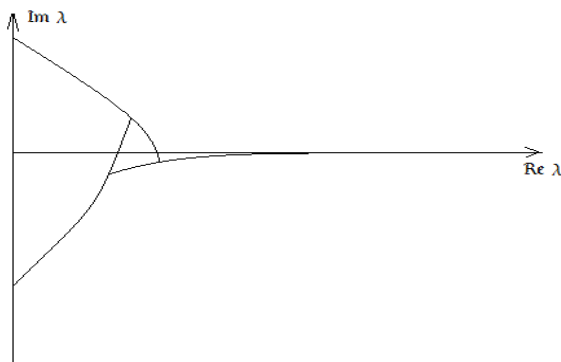
где  $n_{ij} = O(1/\varepsilon)$ ,  $n = O(1)$  - целые числа,  $\gamma \in \{0, 1\}$ , а  $z_i, z_j$  - некоторые из нулей подынтегральной функции.

**Замечание 3.1.** *Спектр операторов (3.4), (3.5) сосредоточен в  $O(\varepsilon^2)$  окрестностях нескольких аналитических кривых на комплексной плоскости  $\lambda$  (спектральный граф). Спектральный граф зависит от  $a(z)$ . Ниже приведены примеры спектральных графов для разных  $a(z)$ .*

1. *Спектральный граф в случае тора, получающегося вращением окружности вокруг некоторой оси, для  $a(z) = \cos z$  и в случае стандартной сферы для  $a(z) = z$ .*



2. *Спектральный граф в случае тора для  $a(z) = \cos z + \cos 2z$  и  $n = 1$*



Асимптотика магнитного поля зависит от того, какому ребру принадлежит  $\lambda$ .

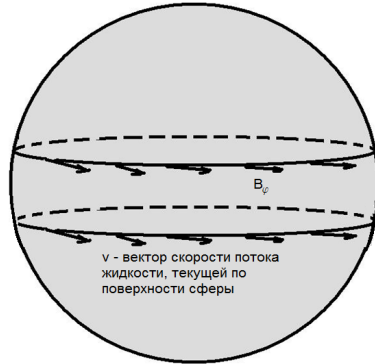
**Теорема 3.3.** *Пусть  $B$  – собственная функция оператора  $L$ . В сформулированных относительно  $M$  и  $V$  предположениях поле  $B$  обладает следующими свойствами.*



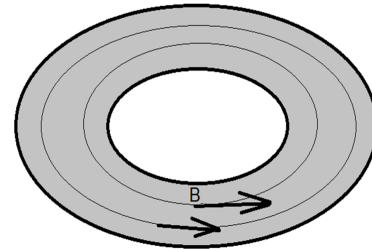
1. Существует конечный набор параллелей  $\delta$  поверхности вращения, обладающий следующим свойством. Для любого  $\rho > 0$ , не зависящего от  $\varepsilon$ , и для всех  $x$ , находящихся от  $\delta$  на расстоянии, большем, чем  $\rho$ ,  $|B(x)| = o(\varepsilon^N) \quad \forall N$  (поле локализовано вблизи параллелей).

2. Если  $\|B\| = 1$ , то  $\|B_z\| = O(\varepsilon)$ , причем  $|B_\varphi| = O(\varepsilon)^{-1/2m}$ ,  $|B_z| = O(\varepsilon)^{1-1/2m}$  для некоторого четного натурального  $m$ . Здесь  $B_z$ ,  $B_\varphi$  – проекции поля  $B$  на направления меридиана и параллели соответственно,  $\|\cdot\|$  – норма в  $L^2(M)$ .

**Замечание 3.2.** Утверждение теоремы означает, что магнитное поле на торе и на сфере в старшем порядке направлено вдоль параллелей и локализовано вблизи параллелей, поскольку экспоненциально убывает по координате, которая направлена вдоль долготы ( $z$ ).



1.



2.

Каждое ребро спектрального графа соответствует некоторой параллели на соответствующей компактной двумерной поверхности. Например, если  $a(z) = z$  и  $M$  – стандартная сфера, то ребро спектрального графа, которое находится на оси  $Re\lambda$ , соответствует экватору, ребра которые находятся в верхней полуплоскости соответствуют параллелям между северным полюсом и экватором, а в нижней полуплоскости – параллелям между южным полюсом и экватором.

**Замечание 3.3.** В ситуации общего положения (относительно поля  $V$ ) каждой собственной функции соответствует единственная параллель и  $m = 2$ , т.е.  $|B| = O(\varepsilon^{-1/4})$ .

### 3.3 Схемы доказательств теорем

**Замечание 3.4.** Поскольку для тора получается уравнение Шредингера с комплексным потенциалом и периодическими условиями, то теорема 3.2

уже была доказана выше. Схема доказательства состоит в том, что мы строили для точек поворота различные расположения линий Стокса и для каждого из них строили матрицу монодромии перехода через период. Ребро спектрального графа определяется тем положением линий Стокса, для матрицы монодромии  $M$  которого выполнено следующее равенство  $\text{tr}M = 2$ , которое было получено в работе [16]. Именно из этого равенства и получены условия квантования.

**Замечание 3.5.** Идея доказательства теоремы 3.1 состоит в следующем. Как упоминалось выше, решения уравнения (3.5) многозначные функции, т.к. это уравнение содержит особые точки  $z_1$  и  $z_2$ . Построим различные взаимные расположения линий Стокса. Для каждого такого графа Стокса рассмотрим замкнутые кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  вокруг каждого из полюсов. Каждой из этих кривых отвечает оператор монодромии в пространстве решений уравнения (3.5). Условие аналитичности решения  $\psi(z)$  означает, что  $\psi(z)$  - собственный вектор каждого из двух операторов, соответствующий собственному значению 1. Мы вычисляем асимптотику этих операторов. Для этого фиксируем для каждой точки поворота ФСР, связанную с этой точкой. В этих ФСР определяем асимптотику соответствующей матрицы монодромии. Затем соединяем окрестности полюсов цепочкой канонических областей  $u$ , зная матрицы перехода в этой цепочке, вычислим асимптотику матрицы перехода между двумя ФСР, соответствующих полюсам. После этого уравнения на точки спектра совпадают с условиями существования  $u$  двух матриц монодромии, посчитанных в одном базисе, общего собственного вектора с собственным значением 1. Если это условие выполнено, то такой граф линий Стокса, который находится в комплексной плоскости  $z$ , определяет ребро спектрального графа уже на комплексной плоскости  $\lambda$ .

Разберем отдельно два случая: тор и сферу.

## 3.4 Сфера

### 3.4.1 Спектр и взаимное расположение линий Стокса

В зависимости от значения  $\lambda$ , взаимное расположение линий Стокса может быть различным. Как отмечалось выше, каждому ребру спектрального графа соответствует свое взаимное расположение линий Стокса. Поэтому для доказательства первой теоремы выясним какие графы линий Стокса будут задавать ребра спектрального графа, а какие нет.

**Теорема 3.4.** Пусть  $\lambda$  таково, что существует цепочка канонических областей, соединяющая особые точки и не содержащая конечных линий Стокса. Тогда в  $O(\varepsilon)$  окрестности таких  $\lambda$  нет точек спектра оператора (3.5).

*Доказательство.* Фиксируем ФСР при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для каждой из особых точек (из каждой особой точки выходит по одной линии Стокса).

$$\begin{aligned} \psi_{1,2} = c & \left( \frac{1}{(ina(z)-\lambda)(1+(\frac{\partial f}{\partial z})^2)} \right)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{z_{1,2}}^z p(z) \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right) dz\right) \\ & \exp\left(\pm \frac{1}{\varepsilon} \int_{z_{1,2}}^z \sqrt{q(z) \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right)} dz\right) (1 + O(\varepsilon)), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $z_1, z_2$ -особые точки,  $q(z) = ina(z) - \lambda, p(z) = \frac{1}{f} \frac{1}{(\frac{\partial f}{\partial z})^2 + 1} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1}{((\frac{\partial f}{\partial z})^2 + 1)^2}$  и  $r(z) = -\frac{n^2}{f^2}$ . Ветвь выбираем таким образом, что слева от линии Стокса:

$$Im\left(\int \sqrt{\widetilde{q(z)}} dz\right) > 0, \quad (3.9)$$

где  $\widetilde{q(z)} = q(z) \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right)$  и обозначим  $\widetilde{p(z)} = p(z) \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right)$ .

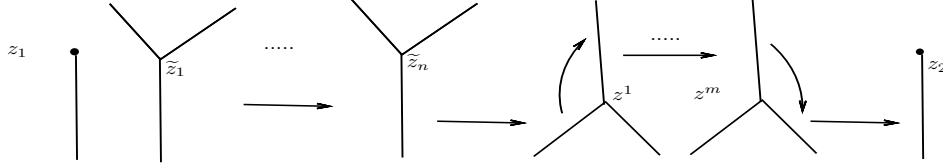
$\gamma_1$  и  $\gamma_2$  - замкнутые кривые вокруг точек  $z_1$  и  $z_2$  соответственно. Как уже отмечалось выше, каждой такой кривой соответствует оператор монодромии  $T$  в пространстве решений нашего уравнения. Собственный вектор этого оператора монодромии, соответствующий единичному собственному значению, выглядит следующим образом:

$$T_1 = \begin{pmatrix} A \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Двигаясь по цепочке канонических областей, запишем оператор монодромии, соответствующий особой точки  $z_1$  в базисе, связанном с точкой  $z_2$  и сравним собственный вектор полученного оператора монодромии соответствующий единичному собственному значению с  $T_1$ .

Движение по цепочке осуществляется с помощью матриц перехода, которые связывают ФСР соседних канонических областей в графе Стокса.

Доказательство очень схоже с доказательством теоремы в пункте 2.2, разница лишь в том, что требуется написать оператор матрицы монодромии соответствующий особой точки  $z_1$  в базисе, связанном с точкой  $z_2$ . Это означает, что точно таким же способом, который описан в доказательстве теоремы пункта 2.2, надо будет двигаться от ФСР, связанной с точкой  $z_1$ , с помощью матриц перехода к ФСР, связанной с точкой  $z_2$ . Поэтому случаи расположения л.с., рассмотренные в теореме, будут находиться между особыми точками. Тогда, нам добавятся случаи, когда л.с., выходящие из особых точек, направлены либо в одну либо в разные стороны. Рассмотрим два основных случая, все остальные случаи получаются из них, если перевернуть каждый из графов л.с. на 180 градусов либо переходить по каноническим областям не слева направо, а справа налево и все эти случаи будут эквиваленты (т.е. с такими же операторами монодромии) рассматриваемым ниже.



1. Будем переходить между л.с. по стрелкам, многоточие означает, что точек поворота  $n$  и, соответственно,  $m$  штук, где  $n$  и  $m$  - любые числа.

В этом случае,  $z_1$  и  $z_2$  - особые точки, оператор монодромии в базе другой особой точки записывается так:  $S = M_5^{-1}M_4^{-1}M_3^{-1}M_2^{-1}M_1^{-1}TM_1M_2M_3M_4M_5$  - произведение матриц перехода между линиями Стокса, выходящими из разных точек поворота. Здесь  $M_2 = M_4$  - матрицы поворота по часовой стрелке,  $M_1$  - матрица перехода между точками  $z^m$  и  $z_2$ ,  $M_3$  - матрица перехода между точками  $z^1$  и  $z^m$  и, наконец,  $M_5$  - матрица перехода между точками  $z_1$  и  $z^1$ .

Тогда собственный вектор, соответствующий собственному значению 1 имеет вид:

$$S_1 = \left( -\frac{\exp((2\xi(z^1, z^m) + 2\xi(z_1, z^1))/\varepsilon)(i + A \exp((2\xi(z^1, z^m) + \int_{\gamma} \sqrt{q(t)} dt))/\varepsilon)}{-1 + \exp(\xi(z^1, z^m)/\varepsilon) - iA \exp((2\xi(z^1, z^m) + \int_{\gamma} \sqrt{q(t)} dt))/\varepsilon}, 1 \right).$$

Сравним его с собственным вектором оператора монодромии  $(A, 1)$ , который был получен выше. Получим равенство

$$\begin{aligned} & \exp((2\xi(z^1, z^m) + 2\xi(z_1, z^1))/\varepsilon)(i + A \exp((2\xi(z^1, z^m) + \int_{\gamma} \sqrt{q(t)} dt))/\varepsilon) \\ &= -A + A \exp(\xi(z^1, z^m)/\varepsilon) - iA^2 \exp((2\xi(z^1, z^m) + \int_{\gamma} \sqrt{q(t)} dt))/\varepsilon, \end{aligned}$$

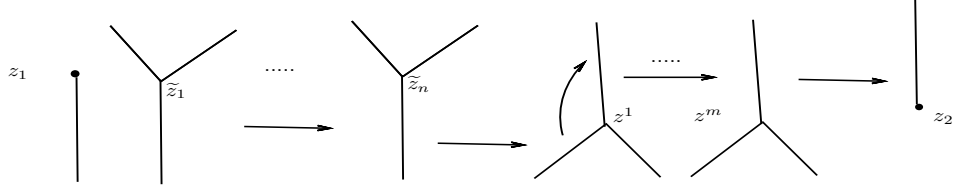
но это равенство невозможно, поскольку все слагаемые в левой части стремятся к  $\infty$ .

2. Изменилось лишь то, что л.с., выходящая из  $z_2$  направлена вверх, это означает, что одна матрица поворота  $M_2$  не нужна. Все остальные матрицы перехода точно такие же.

Теперь сравним собственные вектора с единичным собственным значением полученного оператора монодромии и оператора монодромии, соответствующего другой особой точке. Получим условие:

$$iA \exp\left(\frac{2\xi(z^1, z^m)}{\varepsilon}\right) + A^2 \exp\left(\frac{2\xi(z^1, z^m) + \int_{\gamma} \sqrt{q(t)} dt}{\varepsilon}\right) = \exp\left(\frac{2\xi(z^1, z^m) + 2\xi(z_1, z^1)}{\varepsilon}\right)$$

Но так как ветвь здесь выбрана так, что  $Re(\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{q(z)} dz) > 0$ , то правая часть равенства, а также второе слагаемое из левой части стремятся к  $\infty$ , а, следовательно, равенство собственных векторов также невозможно.



□

Таким образом выяснено какие графы Стокса задают ребра спектрального графа. Следующим этапом мы переходим к доказательству основной теоремы, т.е. теоремы 3.1.

### 3.4.2 Доказательство теоремы 3.1

Для доказательства этой теоремы будем строить различные взаимные расположения линий Стокса, содержащие в себе конечную линию, которую нельзя обойти, как было доказано в предыдущей теореме, только такие графы задают ребра спектрального графа.

1. Самый простой случай, это когда две особые точки соединяются между собой конечной линией Стокса. В этом случае другие л.с. нас уже не интересуют, перейдем по этой конечной линии от одной особой точки к другой. Запишем оператор монодромии, соответствующий особой точки  $z_1$ , в базисе, связанном с точкой  $z_2$ , и сравним собственный вектор получившегося оператора монодромии соответствующий единичному собственному значению с вектором  $T_1$ .

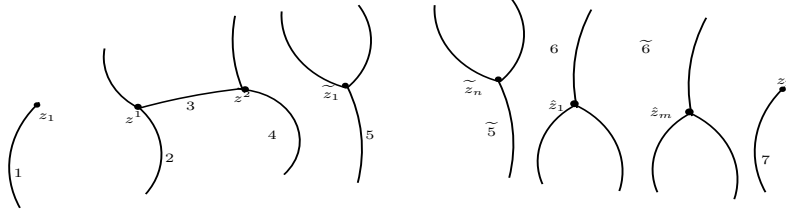
$$\begin{aligned}
 S &= \begin{pmatrix} 0 & \exp(\xi(z_1, z_2)/\varepsilon) \\ \exp(-\xi(z_1, z_2)/\varepsilon) & 0 \end{pmatrix} \\
 &\times \begin{pmatrix} O(\varepsilon) & Ae^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma} \sqrt{q(t)} dt} (1 + O(\varepsilon)) \\ -A^{-1} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma} \sqrt{q(t)} dt} \exp(-2\pi i k) (1 + O(\varepsilon)) & (1 + \exp(-2\pi i k)) (1 + O(\varepsilon)) \end{pmatrix} \\
 &\times \begin{pmatrix} 0 & \exp(-\xi(z_1, z_2)/\varepsilon) \\ \exp(\xi(z_1, z_2)/\varepsilon) & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Собственный вектор, получившегося оператора монодромии имеет вид  $(\frac{\exp(2S/\varepsilon)}{A}, 1)$  Сравним собственный вектор получившейся матрицы, соответ-

ствующий собственному значению 1, с собственным вектором  $T_1$  оператора монодромии обхода вокруг особой точки. Получим следующее условие  $\exp(2S/\varepsilon) = A^2$ , т.к. в первом приближении  $A = i$ , то условие имеет вид:

$\int_{z_2}^{z_1} \sqrt{q(z)} dz = 2i\varepsilon\pi(n_1 + \frac{1}{2})$ , где  $n_1$  - целые числа,  $z_1, z_2$  - особые точки. Это и есть уравнение на точки спектра. Т.е. такой граф линий Стокса будет задавать ребро спектрального графа.

2. Теперь будем рассматривать случаи, когда между собой конечной линией соединяются не особые точки, а какие-либо две другие точки поворота.



И уходящих на  $+\infty$  или  $-\infty$  линий Стокса  $n$  и  $m$  штук соответственно. Будем переходить по л.с., которые пронумерованы числами, точно также как это делали раньше. В таком случае матрица монодромии будет выглядеть следующим образом:  $S = M^{-1}TM$ , где  $M$  - матрица перехода от одной особой точки до другой, т.е. от л.с. 1 до л.с. 7,  $M^{-1}$  - произведение матриц перехода, т.ч. каждая матрица перехода возводится в степень  $-1$ .

$$M = \begin{pmatrix} -i \exp(-\xi(\hat{z}_m, z_2)/\varepsilon) & \exp(-\xi(\hat{z}_m, z_2)/\varepsilon) \\ \exp(\xi(\hat{z}_m, z_2)/\varepsilon) & 0 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} -i \exp(\xi(\hat{z}_1, \hat{z}_m)/\varepsilon) & \exp(\xi(\hat{z}_1, \hat{z}_m)/\varepsilon) \\ \exp(-\xi(\hat{z}_1, \hat{z}_m)/\varepsilon) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-\xi(z^2, \hat{z}_1)/\varepsilon) & 0 \\ 0 & \exp(\xi(z^2, \hat{z}_1)/\varepsilon) \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 0 & \exp(\xi(z^1, z^2)/\varepsilon) \\ \exp(-\xi(z^1, z^2)/\varepsilon) & 2i \cos(\xi(z^1, z^2)/\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-\xi(z_1, z^1)/\varepsilon) & 0 \\ 0 & \exp(\xi(z_1, z^1)/\varepsilon) \end{pmatrix}$$

Сравнивая собственный вектор этой матрицы с  $T_1$ , получаем уравнение на точки спектра

$$\int_{z_2}^{z_3} \sqrt{q(z)} dz = i2\varepsilon\pi n_2,$$

где  $n_2$  - целые числа.

3. И, наконец, последний случай, это случай соединения конечной линией Стокса особой точки и точки поворота. Также сравнивая этот собственный вектор с  $T_1$  получаем уравнение на точки спектра

$$\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{q(z)} dz = i2\varepsilon\pi n_3,$$

где  $n_3$  - целые числа.

**Замечание 3.6.** Точки спектра при  $\varepsilon \rightarrow 0$  находятся в  $O(\varepsilon)$  окрестностях решений уравнений:

$$\int_{z_i}^{z_j} \sqrt{q(z)} dz = i\varepsilon\pi(n_{ij} + \gamma/2), \quad (3.10)$$

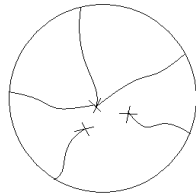
где  $n_{ij}$  - целые числа,  $\gamma = 0, 1$ , а  $z_i, z_j$  - точки поворота, которые соединены конечной линией в графе Стокса, в котором нет такой канонической области при переходе от одной особой точки к другой, которая не содержала бы в себе эту конечную линию.

### 3.4.3 Случай поля скоростей вида $V(z) = (0, z)$

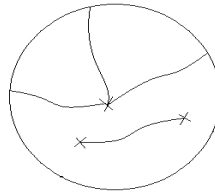
Выясним взаимное расположение линий Стокса (Л.С.) в случае сферы при различных  $\lambda$  и  $a(z) = z$ , т.е. для трех точек поворота, а также увидим на конкретном примере какие графы Стокса задают ребра спектрального графа.

**Утверждение 3.1.** Перечислим все возможные случаи расположений линий Стокса, для этого возьмем окружность такого радиуса, что все точки поворота окажутся внутри нее; выпустим из точки  $z = i\lambda/n$  (точка поворота, которая определяется уравнением  $-\lambda + ina(z) = 0$ ) три линии Стокса и по одной линии Стокса из особых точек. На окружности будут лежать точки пересечения ее с линиями Стокса.

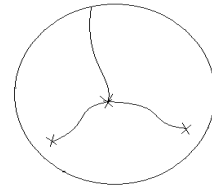
1. Когда две особые точки не разделены одной из линий Стокса, выходящей из точки  $z = -i\lambda/n$ . В этом случае получают следующие картины взаимного расположения (крестиками обозначены точки поворота):



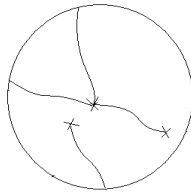
1.



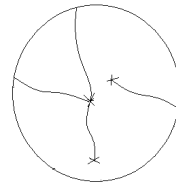
2.



3.

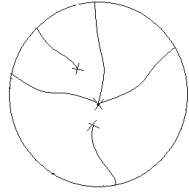


4.

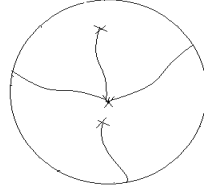


5.

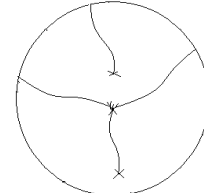
2. Когда они разделены одной из линий Стокса:



6.

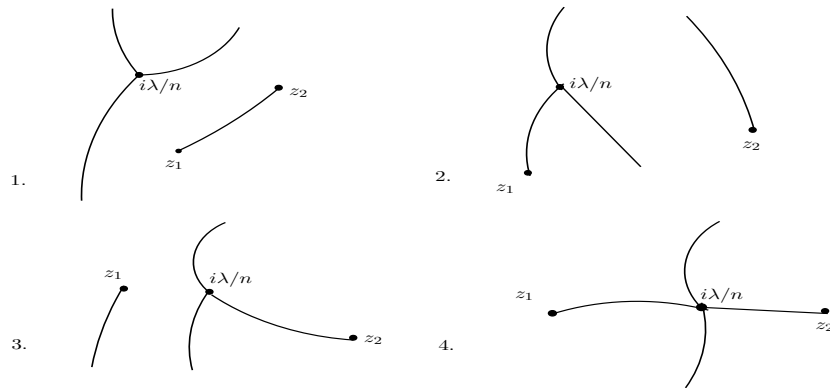


7.



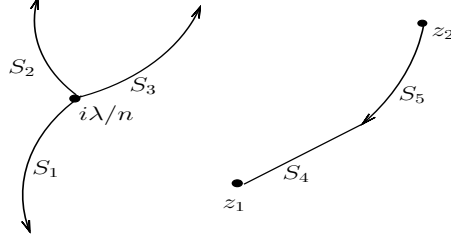
8.

Выберем из этих случаев расположения линий Стокса, случаи удовлетворяющие теореме 3.4:



Получим уравнения на точки спектр для наших четырех случаев взаимного расположения линий Стокса. Напишем для каждого из четырех случаев расположения линий Стокса условие на спектр, подобно тому, как мы это сделали выше.





1. Поскольку особые точки в этом случае находятся в соседних канонических областях, то нам требуется перейти из канонической области  $D_1$ , связанной с точкой  $z_1$  и линией Стокса  $S_4$ , в каноническую область  $D_2$ , связанную с точкой  $z_2$  и линией Стокса  $S_5$ . Асимптотика ФСР в окрестностях этих точек выглядит также как и в предыдущем пункте:

$$\psi_{1,2} = c \left( \frac{1}{(inz - \lambda)(1 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2)} \right)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{z_{1,2,3}}^z \widetilde{p}(z) dz\right) \exp\left(\pm \frac{1}{\varepsilon} \int_{z_{1,2,3}}^z \sqrt{q(z)} dz\right) \quad (3.11)$$

$$(1 + O(\varepsilon)).$$

Так как линии Стокса  $S_4$  и  $S_5$  направлены в разные стороны, то ветвь решения в окрестностях особых точек будет выбрана разная. Соответственно, будут выполняться соотношения:

$$w_1 = m_{12}v_2; w_2 = m_{21}v_1. \quad (3.12)$$

Где  $w_1, w_2$  - решение в окрестности особой точки  $z_2$ , а  $v_1, v_2$  - в окрестности особой точки  $z_1$ . Матрица перехода выглядит следующим образом:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя  $m_{12}$  и  $m_{21}$ , получим:

$$m_{12} = c \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{z_2}^{z_1} \widetilde{p}(z) dz\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{z_2}^{z_1} \sqrt{q(z)} dz\right) (1 + O(\varepsilon)), \quad (3.13)$$

$$m_{21} = c \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{z_2}^{z_1} \widetilde{p}(z) dz\right) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_{z_2}^{z_1} \sqrt{q(z)} dz\right) (1 + O(\varepsilon)); \quad (3.14)$$

$c = \text{const}$ . Ветвь у  $m_{12}$  и  $m_{21}$  выбрана слудующая:

$$\text{Re}\left(\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{q(z)} dz\right) < 0.$$

Теперь запишем один из операторов монодромии, а именно, соответствующий особой точке  $z_1$  ( $T_1$ ), в базисе оператора монодромии соответствующего особой точке  $z_2$ :  $S = M^{-1}T_1M$ ,

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -\exp\left(\frac{2}{\varepsilon} \int_{z_2}^{z_1} \sqrt{q(z)} dz\right) \exp(-\pi i/2) \\ \exp\left(-\frac{2}{\varepsilon} \int_{z_2}^{z_1} \sqrt{q(z)} dz\right) \exp(\pi i/2) & 0 \end{pmatrix}.$$

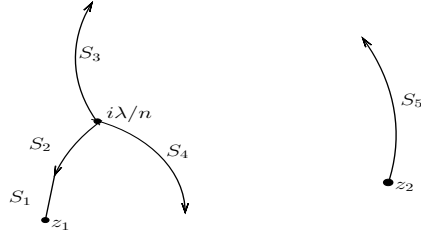
И сравним собственные вектора с единичным собственным значением матрицы  $S$  и матрицы монодромии, соответствующей особой точке  $z_2$ . Получим условие:

$$\int_{z_2}^{z_1} \sqrt{q(z)} dz = i\varepsilon(\pi/2 + \pi n_1).$$

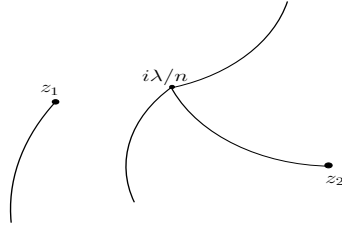
Где  $n_1$  - целое число. Это и есть уравнение на точки спектра.

2. Действуя точно также, как и в предыдущем случае. Перемещаясь от одной канонической области к другой между особыми точками, т.е. от линии Стокса  $S_1$  к  $S_2$ , затем к  $S_3$ , а от  $S_3$  к  $S_5$ . Получим уравнение на точки спектра:

$$\int_{z_1}^{\frac{-i\lambda}{n}} \sqrt{q(z)} dz = i\varepsilon(\pi n_2).$$

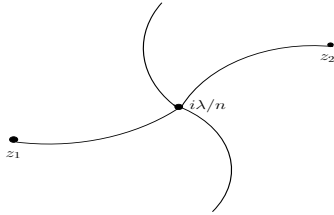


3. Также получаем уравнение на точки спектра:  $\int_{\frac{-i\lambda}{n}}^{z_2} \sqrt{q(z)} dz = i\varepsilon(\pi n_3)$ .



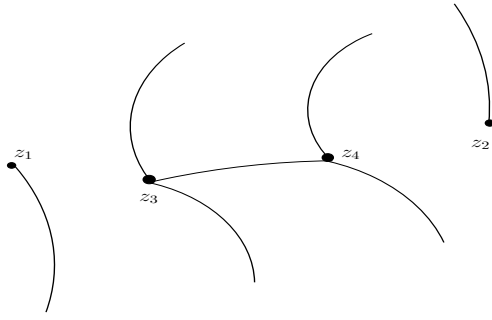
4. Так как в этом случае существует две конечные линии Стокса, то получается следующее уравнение на точки спектра:

$$\exp\left(\frac{2}{\varepsilon} \int_{z_1}^{z_3} \sqrt{q(z)} dz\right) + \exp\left(\frac{2}{\varepsilon} \int_{z_3}^{z_2} \sqrt{q(z)} dz\right) = i \exp(2\pi i n_4).$$



Аналогично считаются матрицы обхода вокруг особых точек и в случае произвольного  $a(z)$ , меняется лишь картина линий Стокса, т.к. увеличивается кол-во точек поворота. Приведем для примера некоторое расположение линий Стокса для четырех точек поворота (для двух особых точек и при  $a(z) = z^2 - 1$ ) и условия, которые получаются на точки спектра в этих случаях. Пусть  $z_1$  и  $z_2$  - особые точки, а  $z_3$  и  $z_4$  - решения уравнения  $ina(z) - \lambda = 0$ .

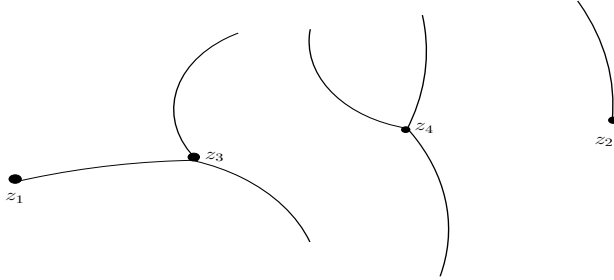
1.



В этом случае уравнение на точки спектра следующее:

$$\int_{z_3}^{z_4} \sqrt{q(z)} dz = i\varepsilon(\pi/2 + \pi k_1).$$

2.



Уравнения на точки спектра для этого случая:

$$\int_{z_1}^{z_3} \sqrt{q(z)} dz = i\varepsilon\pi k_2.$$

### Спектральный граф и условия на спектр

Отделяя в равенстве (3.10) действительную и мнимую части, получаем два уравнения:

1.  $Re \int_{z_i}^{z_j} \sqrt{q(z)} dz = 0;$
2.  $Im \int_{z_i}^{z_j} \sqrt{q(z)} dz = \varepsilon\pi(n_{ij} + \gamma/2).$

Первое уравнение задает некоторое множество на комплексной плоскости  $\lambda$ , которое называется ребром, а совокупность всех ребер называется спектральным графом, в  $O(\varepsilon)$  окрестности которого находятся точки спектра искомого оператора, задаваемые вторым уравнением. Спектральный граф (см. рис.3.3)

был получен по уравнениям (3.10) для случая стандартной сферы и  $a(z) = z$  (три точки поворота).

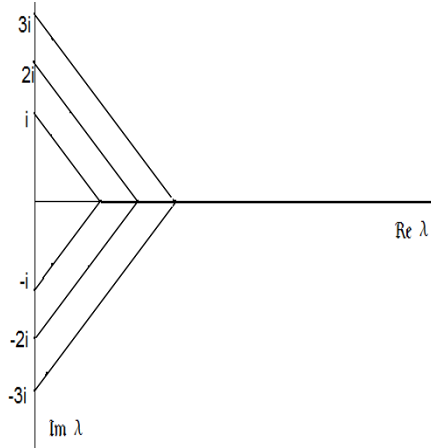


Рис. 3.1: Спектральный граф для стандартной сферы

И в этом случае ребру спектрального графа, которое находится на оси  $Re \lambda$  соответствует взаимное расположение линий Стокса под номером 1, которое было описано выше, где конечной линией соединены особые точки; верхним ребрам случай расположения линий Стокса под номером 2 и нижним ребрам под номером 3. Случай 4 взаимного расположения линий Стокса соответствует точкам - вершинам спектрального графа, в которых сходятся верхние и нижние ребра.

#### 3.4.4 Пространственная структура магнитного поля проводящей жидкости на сфере

В этом пункте приведено доказательство теоремы 3.3.

*Доказательство.* Для нахождения пространственной структуры магнитного поля напишем асимптотику собственных функции и будем раскладывать ее в окрестности точки максимума в ряд Тейлора. Нетрудно заметить, что в таком случае, для каждого ребра спектрального графа будет своя асимптотика собственных функций, т.к. для каждого ребра своя точка максимума. Пусть точки поворота  $z_1, z_2$  и т.д. Асимптотика собственной функции оператора (3.5) на линии Стокса, выходящей из точки поворота  $z_1$  выглядит

следующим образом:

$$B_z = C(\varepsilon)e^{in\varphi}(\exp(\pi i/2)\exp(\frac{i}{\varepsilon}\int_{z_1}^z \sqrt{q(z)}dz)(1 + O(\varepsilon)) + \exp(-\frac{i}{\varepsilon}\int_{z_1}^z \sqrt{q(z)}dz) \\ (1 + O(\varepsilon))). \quad (3.15)$$

Здесь  $L(z) = (\widetilde{q(z)})^{\frac{1}{4}}\exp(-\frac{1}{2}\int_{z_1}^z \widetilde{p(z)}dz)$ ,  $C(\varepsilon)$  – нормировочная константа; напомним, что  $B_z$  – компонента магнитного поля вдоль долготы. Запишем асимптотику в виде:

$$B_z = C(\varepsilon)e^{in\varphi}(-iL(z)\exp(\frac{i}{\varepsilon}S)(1 + O(\varepsilon)) + L(z)\exp(-\frac{i}{\varepsilon}S)(1 + O(\varepsilon))), \quad (3.16)$$

где  $S = S_1 + iS_2 = \int_{z_1}^z \sqrt{q(z)}dz$ ,  $S_2 > 0$ . Таким образом,

$$B_z = C(\varepsilon)e^{in\varphi}(-iL(z)\exp(\frac{i}{\varepsilon}S_1)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}S_2)(1 + O(\varepsilon)) + L(z)\exp(-\frac{i}{\varepsilon}S_1)\exp(\frac{1}{\varepsilon}S_2) \\ \times (1 + O(\varepsilon))) = C(\varepsilon)e^{in\varphi}L(z)\exp(-\frac{i}{\varepsilon}S_1)\exp(\frac{1}{\varepsilon}S_2)(1 + O(\varepsilon)).$$

Найдем точку максимума  $S_2$  и разложим в ее окрестности асимптотику собственной функции в ряд Тейлора. Затем, из условия  $div B = 0$  находим  $B_\varphi$  – компоненту магнитного поля вдоль широты,  $B_\varphi = \frac{1}{in} \frac{\partial B_z}{\partial z}$ , где  $z$  – координата вдоль долготы, а  $\varphi$  – координата вдоль широты. Получаем

$$B_\varphi = \frac{iS_z}{\varepsilon}C(\varepsilon)e^{in\varphi}L(z)\exp(-\frac{i}{\varepsilon}S_1)\exp(\frac{1}{\varepsilon}S_2)(1 + O(\varepsilon)). \quad (3.17)$$

Пусть  $z_0$  – точка максимума функции  $S_2(z)$ ; если

$$S_2 = S_2(z_0) + O((z - z_0)^m), \quad m > 1 \quad \text{и} \quad ||B|| = O(1),$$

то  $C(\varepsilon) = C_0 e^{-S_2(z_0)/\varepsilon} \varepsilon^{1-\frac{1}{2m}}$ , где  $C_0$  не зависит от  $\varepsilon$ . В этом случае  $|B_\varphi| = O(\varepsilon^{-\frac{1}{2m}})$ , а  $|B_z| = O(\varepsilon^{1-\frac{1}{2m}})$ . Точка  $z_0$  определяет параллель поверхности вращения (если этих точек несколько, получаем конечный набор параллелей  $\delta$ ; заметим, что из свойств функции  $\widetilde{q}$  вытекает, что точек максимума конечное число); из предыдущих формул мгновенно следует, что на расстоянии  $\rho = O(1)$  от этой параллели функция  $B$  экспоненциально мала.  $\square$

Рассмотрим для примера случай стандартной сферы ( $f(z) = 1 - z^2$ ),  $n = 1$  и  $a(z) = z$  (напомним, что  $n$  – константа разделения переменных). В

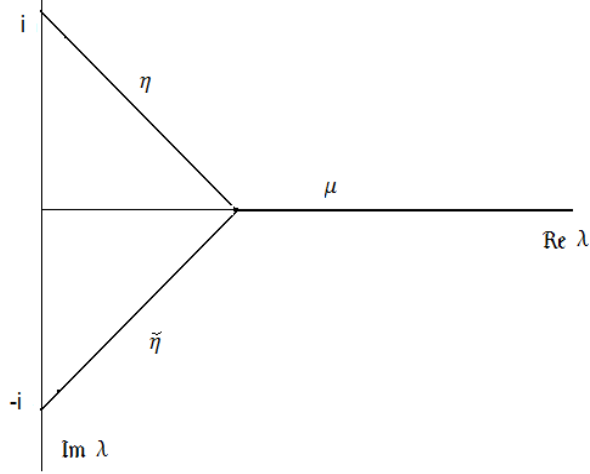


Рис. 3.2: Спектральный граф для стандартной сферы,  $n = 1$  и  $a(z) = z$

этом случае спектральный граф выглядит следующим образом. Точки поворота следующие  $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = -i\lambda/n$ . Будем отдельно рассматривать каждое ребро спектрального графа.

1.  $\lambda \subset \mu$  ( $Im \lambda = 0$ )

Так как собственный вектор оператора монодромии  $(exp(\pi i/2), 1)$ , то асимптотика собственной функции оператора (3.5) выглядит следующим образом:

$$B_z = C(\varepsilon) e^{in\varphi} exp(\pi i/2) exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_1^z \sqrt{\frac{inz - \lambda}{1 - z^2}} dz\right) (1 + O(\varepsilon)), \quad (3.18)$$

где  $L(z) = \left(\frac{1-z^2}{inz-\lambda}\right)^{-\frac{1}{4}} exp\left(-\frac{1}{2} \int_1^z \frac{-2z(n+1)}{1-z^2} dz\right)$ . Запишем асимптотику в виде:

$$B_z = -iL(z)C(\varepsilon) e^{in\varphi} exp\left(\frac{1}{\varepsilon} S\right) (1 + O(\varepsilon)), \quad (3.19)$$

где  $S = S_1 + iS_2 = \int_1^z \sqrt{\frac{\lambda+inz}{1-z^2}} dz$ . Получаем

$$B_z = -iL(z)C(\varepsilon) e^{in\varphi} exp\left(\frac{1}{\varepsilon} S_1\right) exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} S_2\right) (1 + O(\varepsilon)). \quad (3.20)$$

Будем искать точку максимума  $S_2$  и раскладывать в ее окрестности асимптотику собственной функции в ряд Тейлора. Для этого будет удобней перейти от  $z$  к  $\cos y$ , тогда  $S_2 = Im \int_0^{\arccos z} \sqrt{in \cos y - \lambda} dz$ . Точка максимума  $S_2$ :

$$S'_2 = Im \sqrt{\lambda + i \cos y} = 0 \rightarrow \cos y = 0 \rightarrow y = \pm \frac{\pi}{2} + \pi m. \quad (3.21)$$

Получаем, что  $y = \frac{\pi}{2}$  - точка максимума, а  $y = -\frac{\pi}{2}$  - минимума. Т.к. мы ищем точку максимума асимптотики собственной функции, то надо сравнить  $Im \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\lambda + in \cos y} dz$  и  $-Im \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sqrt{in \cos y - \lambda} dz$ . Поскольку ветвь корня выбрана так, что  $Im \int \sqrt{in \cos y - \lambda} dz > 0$ , то  $Im \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{in \cos y - \lambda} dz > -Im \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sqrt{in \cos y - \lambda} dz$ .

Разложим  $S_1$  и  $S_2$  в ряд Тейлора в окрестности  $\frac{\pi}{2}$  и, возвращаясь от всех замен, получим искомую формулу:

$$B_z = C \exp\left(-\frac{i\sqrt{M_1}}{\varepsilon} z\right) \exp\left(-\frac{1}{4\varepsilon\sqrt{M_1}} z^2\right) \exp(in\varphi)(1 + O(\varepsilon)). \quad (3.22)$$

Затем из равенства  $div B = 0$  получим, что

$$B_\varphi = C \exp\left(-\frac{i\sqrt{M_1}}{\varepsilon} z\right) \exp\left(-\frac{1}{4\varepsilon\sqrt{M_1}} z^2\right) \left(\frac{\sqrt{M_1}}{\varepsilon} - \frac{iz}{2\sqrt{M_1}\varepsilon} + \frac{i\pi}{4\sqrt{M_1}\varepsilon}\right) \exp(in\varphi) \quad (3.23)$$

$$(1 + O(\varepsilon)).$$

Где  $C = const$ .

2.  $\lambda \subset \eta$  или  $\lambda \subset \bar{\eta}$

Точно также как и в предыдущем пункте получаем  $B_z$  и  $B_\varphi$ .

$$B_z = C \exp\left(-\frac{i\sqrt{M_1}}{\varepsilon} z_1\right) \exp\left(-\frac{1}{4\varepsilon} \sqrt{\frac{1 - M_2^2}{M_1}} z_1^2\right) \exp(in\varphi)(1 + O(\varepsilon)), \quad (3.24)$$

$$B_\varphi = CK(z, \varepsilon) \exp\left(-\frac{i\sqrt{M_1}}{\varepsilon} z_1\right) \exp\left(-\frac{1}{4\varepsilon} \sqrt{\frac{1 - M_2^2}{M_1}} z_1^2\right) \exp(in\varphi)(1 + O(\varepsilon)). \quad (3.25)$$

Где  $z_1 = (z + \arcsin(\mp M_2))$ ,  $C = const$ ,  $M = \lambda + \varepsilon n^2$  и  $M_1 = ReM$ ,  $M_2 = ImM$ . Здесь знак “-” относится к ребру  $\eta$  спектрального графа, а знак “+” - к  $\bar{\eta}$ .

$$K(z, \varepsilon) = \sqrt{\frac{M_1}{\varepsilon}} - \frac{iz}{2\varepsilon} \sqrt{\frac{1 - M_2^2}{M_1}} - \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt{\frac{1 - M_2^2}{M_1}} \arccos(\mp M_2). \quad (3.26)$$

**Замечание 3.7.** В случае стандартной сферы и  $a(z) = z$  критическая точка функции  $S_2$  для каждого ребра спектрального графа единственна и невырождена; в этом случае  $|B_\varphi| = O(\varepsilon^{-1/4})$ ,  $|B_z| = O(\varepsilon^{3/4})$ .



**Замечание 3.8.** Таким образом, доказано, что имеет место отношение  $\frac{B_z}{B_\varphi} \rightarrow 0$ , которое приводит к тому, что магнитное поле вытягивается и концентрируется вдоль параллелей при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Каждое ребро спектрального графа отвечает за некоторую параллель: ребро на действительной оси соответствует экватору, нижние ребра – параллелям между северным полюсом и экватором, а верхние – параллелям между южным полюсом и экватором.

Функция  $f(z)$  на точки минимума и максимума асимптотики собственных функций не влияет, т.к. в асимптотику входит следующий множитель  $(1 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2)$  не равный нулю, а влияет только  $a(z)$ .

### 3.4.5 Риманова поверхность и условия квантования на ней

Асимптотика спектра оператора (3.5) выражается через интегралы от голоморфной формы  $p dz$  по циклам на римановой поверхности, т.е. на поверхности постоянной энергии, задаваемой уравнением  $p^2 f(z)^2 + ina(z) + \lambda = 0$ .

Риманова поверхность в случае трех точек поворота и стандартной сферы получается путем склейки двух римановых сфер вдоль двух разрезов, разрез делаем на сфере между двумя точками поворота и получаем тор.

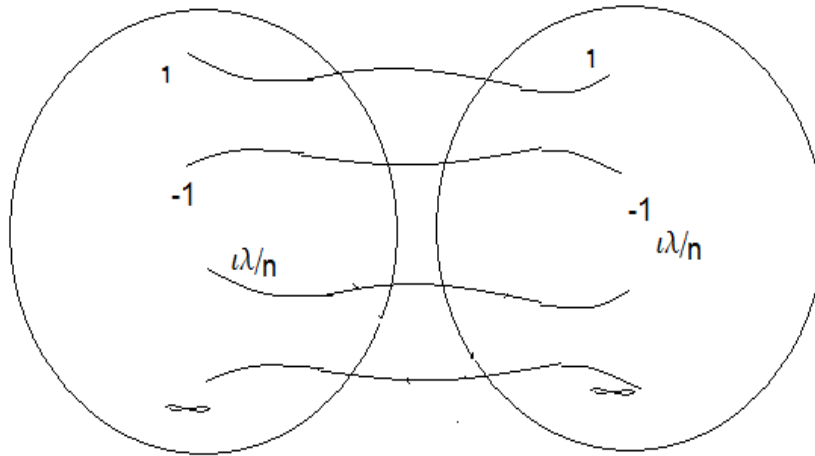


Рис. 3.3: Римановы сферы, склеенные по двум разрезам

Затем на торе делаем проколы в особых точках и в  $\infty$ , если  $\infty$  - точка ветвления, то ей соответствует на торе два прокола, если не точка ветвления, то один прокол, поэтому на любой римановой поверхности в случае произ-

вольной сферы будет всегда не больше четырех проколов. В случае стандартной сферы, получаем тор с тремя проколами (две особые точки и  $\infty$ ): Таким

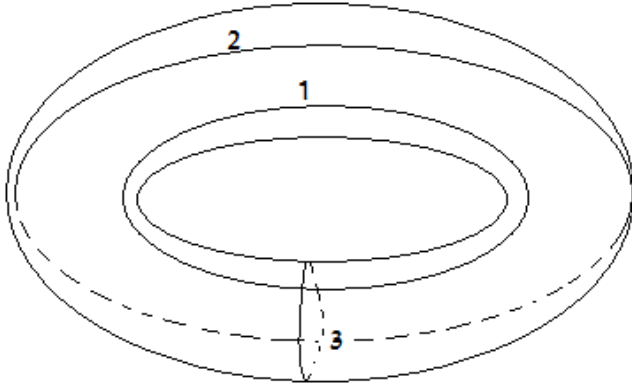


Рис. 3.4: Риманова поверхность

образом, риманова поверхность в случае стандартной сферы и трех точек поворота - это тор с тремя проколами. На нем имеется три базисных цикла, отмеченные на рисунке 3.6:

1. Цикл под номером 1 - цикл, внутри которого находятся точки  $-1$  и  $1$ ;
2. Цикл 2 - цикл, обходящий точки  $-i\lambda/n$  и  $-1$ ;
3. Цикл 3 - цикл, обходящий точки  $-i\lambda/n$  и  $1$ .

Каждый цикл задает соответствующее условие квантования, которое и является интегралом от голоморфной формы по циклам на этой поверхности. Условия квантования и циклы, соответствующие им:

1. Цикл 1 (см.рис.Риманова поверхность) -  $\gamma_1$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma_1} \sqrt{\frac{inz-\lambda}{1-z^2}} dz = i\frac{\pi}{2} + \pi m_1;$$

2. Цикл 2 -  $\gamma_2$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma_2} \sqrt{\frac{inz-\lambda}{1-z^2}} dz = i\pi m_2;$$

3. Цикл 3 -  $\gamma_3$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma_3} \sqrt{\frac{inz-\lambda}{1-z^2}} dz = i\pi m_3;$$

$m_j = O(\varepsilon)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Поскольку каждому условию квантования соответствует ребро спектрального графа, то каждому циклу на римановой поверхности так же соответствует ребро спектрального графа.

### 3.5 Тор

Как было уже сказано, для тора получается уравнение Шредингера с комплексным потенциалом см. пункт 3. В этом пункте была доказана следующая теорема

**Теорема 3.5.** *Точки спектра оператора (3.4) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  находятся в  $O(\varepsilon)$  окрестностях решений уравнений:*

$$\int_{z_i}^{z_j} \sqrt{ina(z) - \lambda} dz = i\varepsilon\pi(n_{ij} + \gamma/2). \quad (3.27)$$

Где  $n_{ij}$  - целые числа,  $\gamma = 0, 1$ , а  $z_i, z_j$  - точки поворота, которые соединяются конечной линией в графе Стокса, в котором нет такой цепочки канонических областей, соединяющих каноническую область  $K$  и  $K + T$ , где  $T$  - период, которая бы эту конечную линию не содержала.

#### Пространственная структура магнитного поля на торе

Для определения пространственной структуры, также как и в случае со сферой, будем раскладывать в ряд Тейлора в окрестности точки максимума асимптотики собственных функций, соответствующие разным точкам поворота; пусть  $z_0$  - точка поворота, тогда асимптотика для нее имеет вид  $w_{1,2} = (ia(z) - \lambda)^{-1/4} \exp(\pm \frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \sqrt{ia(s) - \lambda} ds)$ . Для каждого ребра спектрального графа будет своя точка максимума, своя точка поворота и своя асимптотика, получив таким образом  $B_z$  - составляющую магнитного поля, которая направлена вдоль долготы, из уравнения  $div B = 0$  получим вторую составляющую магнитного поля  $B_\varphi$ . Поскольку  $B_\varphi = \int \frac{\partial B_z}{\partial z} d\varphi$ , то  $B_z \ll B_\varphi$ . Что означает, что магнитное поле также вытягивается и концентрируется вдоль параллелей.

## Глава 4

# Асимптотика решения задачи Коши с быстроменяющимся полем скоростей

### 4.1 Постановка задачи

В линейном приближении магнитное поле в проводящей жидкости описывается уравнением индукции:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + (V, \nabla)B - (B, \nabla)V = \varepsilon^2 \mu \Delta B, \quad (\nabla, V) = (\nabla, B) = 0. \quad (4.1)$$

Здесь  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ ,  $B$  – искомое векторное поле в  $\mathbb{R}^n$  (магнитное поле),  $V(z)$  – заданное векторное поле (поле скоростей жидкости), коэффициент сопротивления (величина, обратная к магнитному числу Рейнольдса) записан в виде  $\varepsilon^2 \mu$  для удобства при дальнейшем написании асимптотики (ниже мы будем считать, что  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Для уравнения (3.1) рассмотрим задачу Коши

$$B|_{t=0} = B^0(z), \quad (4.2)$$

где  $B_0$  – гладкое финитное бездивергентное векторное поле.

Нас интересует случай разрывного поля скоростей  $V$ ; хорошо известно, что бездивергентное поле может иметь тангенциальный разрыв на гладкой поверхности (в двумерном случае – на кривой); обозначим эту поверхность через  $M$  и будем считать, что она компактна и задается уравнением  $\Phi(z) = 0$ , где  $\Phi$  – гладкая функция. Как будет видно в дальнейшем, магнитное поле  $B$  имеет, вообще говоря,  $\delta$ -образную особенность на поверхности  $M$ ; таким образом, обобщенная постановка задачи (3.1) – (4.2), вообще говоря, не ясна (даже при написании системы в дивергентном виде приходится умножать  $\delta$ -функцию на разрывную). Поэтому мы регуляризуем задачу следующим образом. Введем быструю переменную  $y = \frac{\Phi(z)}{\varepsilon}$  и рассмотрим сглаженное

поле скоростей  $V(y, z)$ ; будем считать, что  $V$  – гладкая функция, причем

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} V(z, y) = V_{\pm}(z), \quad \forall z. \quad (4.3)$$

Здесь  $V_{\pm}$  – гладкие бездивергентные векторные поля, причем стремление к пределу предполагается достаточно быстрым (быстрее любой степени  $y$ ).

В частности, можно рассматривать поле вида

$$V(z, y) = \frac{V_+(z) + V_-(z)}{2} + \beta(y) \frac{V_+(z) - V_-(z)}{2},$$

где  $\beta(y)$  – гладкая функция, стремящаяся к  $\pm 1$  при  $y \rightarrow \pm\infty$ .

Нас будет особенно интересовать слабый предел поля  $B$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и его зависимость от способа сглаживания поля скоростей  $V$  (т.е. от функции  $\beta$ ). Заметим, что, если коэффициент магнитной вязкости по порядку величины больше, чем  $O(\varepsilon^2)$ , дельта-особенности, вообще говоря, не образуется – вязкость препятствует резким изменениям  $B$ . Именно поэтому этот коэффициент в системе (3.1) был выбран в виде  $\varepsilon^2 \mu$ . Мы начнем с изучения решения задачи Коши (3.1) – (4.2) в случае  $\mu = 0$  (идеально проводящая жидкость).

## 4.2 Зависимость магнитного поля от функции сглаживания поля скоростей в случае идеально проводящей жидкости

Рассмотрим сперва двумерный случай. Поскольку поле  $V$  бездивергентно, его траектории – это линии уровня скалярной функции (функции тока). Гладкая замкнутая кривая  $M$  – траектория этого поля; в ее окрестности можно ввести переменные действие – угол  $I, \varphi$ . Можно считать, что кривая  $M$  задается уравнением  $I = 0$  и  $y = I/\varepsilon$ , а поле  $V$  имеет вид

$$V = \omega(y, I) \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

где  $\omega \rightarrow \omega_{\pm}$  при  $y \rightarrow \pm\infty$ .

**Теорема 4.1.** *В двумерном случае, если жидкость идеально проводящая ( $\mu=0$ ), слабый предел магнитного поля не зависит от способа сглаживания и магнитное поле имеет дельта-образную особенность на кривой разрыва.*

*Доказательство.* Запишем уравнение (3.1) для двух компонент магнитного поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_I}{\partial t} + \omega \frac{\partial B_I}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial t} + \omega \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial \varphi} &= \frac{1}{\varepsilon} B_I \frac{\partial \omega}{\partial y} + B_I \frac{\partial \omega}{\partial I} \end{aligned}$$

$$B_I|_{t=0} = B_I^0(I, \varphi),$$

$$B_\varphi|_{t=0} = B_\varphi^0(I, \varphi).$$

Решение этой системы имеет вид:

$$B_I = B_I^0(I, \varphi - \omega t),$$

$$B_\varphi = t\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial I}\right)B_I^0(I, \varphi - \omega t) + B_\varphi^0(I, \varphi).$$

Вычислим слабый предел решения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; поскольку

$$\omega \rightarrow \omega_\pm, \quad \frac{\partial\omega}{\partial I} \rightarrow \frac{\partial\omega_\pm}{\partial I}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} \rightarrow 0$$

при  $y \rightarrow \pm\infty$ , получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_I = B_I^0(I, \varphi - \omega_- t) + \theta(I)(B_I^0(I, \varphi - \omega_+ t) - B_I^0(I, \varphi - \omega_- t)),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varphi = t\delta(I) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\omega}{\partial y}(y, 0)B_I^0(0, \varphi - \omega(y, 0)t)dy$$

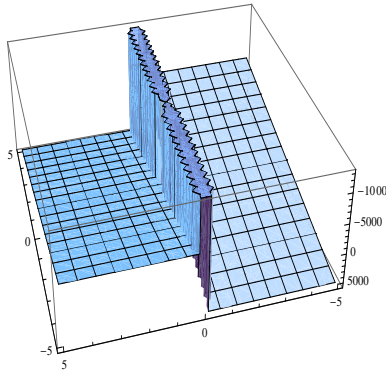
$$+ t\frac{\partial\omega_-}{\partial I}B_I^0(I, \varphi - \omega_- t) + B_\varphi^0(I, \varphi - \omega_- t) + \theta(I)\left(t\frac{\partial\omega_+}{\partial I}B_I^0(I, \varphi - \omega_+ t)\right.$$

$$\left. + B_\varphi^0(I, \varphi - \omega_+ t) - t\frac{\partial\omega_-}{\partial I}B_I^0(I, \varphi - \omega_- t) - B_\varphi^0(I, \varphi - \omega_- t)\right)$$

Здесь  $\theta(I)$  – функция Хевисайда. От способа сглаживания  $V$  может зависеть только коэффициент при  $\delta(I)$ ; внося  $t\omega$  под дифференциал и вычисляя интеграл, получим, что этот коэффициент равен

$$- \int_{\varphi - \omega_-(0)t}^{\varphi - \omega_+(0)t} B_I^0(0, z)dz, \quad z = \varphi - \omega t \quad (4.4)$$

и не зависит от способа сглаживания  $V$ . На рисунке можно увидеть как магнитное поле возрастает с обеих сторон от кривой разрыва поля скоростей. На этом рисунке изображен график функции  $B_\varphi(I, \varphi, t)$  при  $V = (0, \tanh I/\varepsilon)$ , и



$t = 500$ .

□

Заметим, что в двумерном случае нетрудно предъявить регуляризацию исходной задачи, не использующую сглаживания и допускающую обобщенную постановку. Действительно, пусть  $\omega(I)$  – разрывная функция:  $\omega = \omega_-(I) + \theta(I)(\omega_+(I) - \omega_-(I))$  ( $\omega_{\pm}(I)$  гладкие). Запишем систему в дивергентном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_I}{\partial t} + \omega \frac{\partial B_I}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial I}(B_I \omega), \\ B_I|_{t=0} &= B_I^0(I, \varphi), \quad B_{\varphi}|_{t=0} = B_{\varphi}^0(I, \varphi). \end{aligned} \tag{4.5}$$

**Теорема 4.2.** *Обобщенная функция*

$$\begin{aligned} B_I &= B_I^0(I, \varphi - \omega t), \\ B_{\varphi} &= \frac{\partial}{\partial I} \omega_- \int_0^t B_I^0(I, \varphi - \omega_-(I)t) dt \\ &+ \theta(I) \frac{\partial}{\partial I} \left( \omega_+ \int_0^t B_I^0(I, \varphi - \omega_+(I)t) dt - \omega_- \int_0^t B_I^0(I, \varphi - \omega_-(I)t) dt \right) \\ &+ \delta(I) \int_0^t (\omega_+(0) B_I^0(0, \varphi - \omega_+(0)t) - \omega_-(0) B_I^0(0, \varphi - \omega_-(0)t)) dt + B_{\varphi}^0(I, \varphi) \end{aligned} \tag{4.6}$$

удовлетворяет системе (4.5)

*Доказательство.* Решим сначала первое уравнение в системе, решение имеет вид:

$$B_I = B_I^0(I, \varphi - \omega t).$$

Решим теперь второе уравнение. Получаем:

$$B_{\varphi} = \int_0^t \frac{\partial}{\partial I}(B_I \omega) dt + B_{\varphi}^0(I, \varphi).$$

Перепишывая  $\omega B_I^0(I, \varphi - \omega(I)t)$  в виде

$$\begin{aligned} \omega B_I^0(I, \varphi - \omega(I)t) &= \omega_-(I) B_I^0(I, \varphi - \omega_-(I)t) + \theta(I)(\omega_+ B_I^0(I, \varphi - \omega_+(I)t) \\ &- \omega_- B_I^0(I, \varphi - \omega_-(I)t)) \end{aligned}$$

и дифференцируя произведение  $\theta(I)$  а гладкую функцию, получим

$$\begin{aligned}
B_\varphi &= \frac{\partial}{\partial I} \omega_- \int_0^t B_I^0(I, \varphi - \omega_-(I)t) dt \\
&+ \theta(I) \frac{\partial}{\partial I} \left( \omega_+ \int_0^t B_I^0(I, \varphi - \omega_+(I)t) dt - \omega_- \int_0^t B_I^0(I, \varphi - \omega_-(I)t) dt \right) \\
&+ \delta(I) \int_0^t (\omega_+(0) B_I^0(0, \varphi - \omega_+(0)t) - \omega_-(0) B_I^0(0, \varphi - \omega_-(0)t)) dt + B_\varphi^0(I, \varphi).
\end{aligned}$$

□

Отметим, что полученное обобщенное решение совпадает со слабым пределом решения сглаженной задачи. Действительно, сравним, например, коэффициенты при дельта-функции. Обозначим через  $\bar{F}(z)$  первообразную от функции  $B_I^0(0, z)$ . Очевидно, функция (4.4) может быть записана в виде

$$F(\varphi - \omega_-(0)t) - F(\varphi - \omega_+(0) + t);$$

ясно, что она равна функции

$$\int_0^t (\omega_+(0) B_I^0(0, \varphi - \omega_+(0)t) - \omega_-(0) B_I^0(0, \varphi - \omega_-(0)t)) dt,$$

определяющей коэффициент при дельта-функции в формуле (4.4). Аналогично (с учетом бездивергентности начального поля  $B^0$ ) проверяется совпадение остальных слагаемых.

Перейдем к трехмерному случаю. Оказывается, в этом случае слабый предел решения сглаженной задачи определен однозначно (т.е. не зависит от способа сглаживания  $V$ ) тогда и только тогда, когда, при переходе через поверхность, скачок испытывает только длина вектора  $V$  (но не его направление). Уточним формулировку результата. Будем считать, что  $V$  – эйлерово поле (т.е. решение стационарных уравнений Эйлера) общего положения; последнее означает, что поля  $V$  и  $\text{rot} V$  линейно независимы всюду в рассматриваемой области трехмерного пространства. В этом случае траектории  $V$  лежат на двумерных поверхностях – поверхностях Бернулли – которые, если они компактны, гомеоморфны торами. Более, того, в области, расслоенной на эти торы, существуют переменные действие – угол  $I, \varphi$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ , в которых

$$V = (\omega(I), \frac{\partial}{\partial \varphi}) = \omega_1(I) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \omega_2(I) \frac{\partial}{\partial \varphi_2}.$$

Здесь переменная  $I$  нумерует торы и пропорциональна объему полнотория,  $\varphi \bmod 2\pi$  – угловые координаты на торах. Как и ранее, будем считать,



что поверхность скачка поля задается уравнением  $I = 0$  и представим вектор частот  $\omega$  в виде

$$\omega(I) = \lambda\omega_0,$$

где  $\lambda$  – скалярная функция, а  $\omega_0$  – единичный вектор:

$$\omega_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Скачок поля при переходе через поверхность – это разрыв (или, в сглаженной задаче, быстрые изменения) двумерного вектора  $\omega$ , скачок модуля – это разрыв коэффициента  $\lambda$ , а скачок направления – разрыв угловой функции  $\alpha$ . Рассмотрим сглаженную задачу; пусть  $y = I/\varepsilon$  и пусть  $\omega \rightarrow \omega_{\pm}$  при  $y \rightarrow \pm\infty$ .

**Теорема 4.3.** *Пусть одна из двух функций  $\alpha$ ,  $\lambda$  не зависит от  $y$ . Тогда слабый предел решения сглаженной задачи Коши не зависит от сглаживающей функции.*

*Доказательство.* Запишем уравнения в координатах действие – угол

$$\begin{cases} \frac{\partial B_I}{\partial t} + (\omega, \frac{\partial B_I}{\partial \varphi}) = 0, \\ \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial t} + (\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi})B_{\varphi} = B_I(\frac{\partial \omega}{\partial I} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \omega}{\partial y}). \end{cases} \quad (4.7)$$

Решение первого уравнения имеет вид  $B_I = B_I^0(I, \varphi - \omega t)$ . Второе (векторное) уравнение разложим на компоненты вдоль единичного вектора  $\omega_0$  и вдоль перпендикулярного ему единичного вектора  $n = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$ . Обозначая соответствующие компоненты вектора  $B_{\varphi}$  через  $B_{\omega}$  и  $B_n$ , получим

$$\begin{aligned} (\frac{\partial}{\partial t} + (\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi}))B_{\omega} &= B_I(\omega_0, (\frac{\partial}{\partial I} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y})\omega), \\ (\frac{\partial}{\partial t} + (\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi}))B_n &= B_I(n, (\frac{\partial}{\partial I} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y})\omega), \end{aligned}$$

Представим  $\omega$  в виде  $\lambda\omega_0$  и воспользуемся тем, что производная от единичного вектора  $\omega_0$  равна вектору  $n$ , умноженному на производную от  $\alpha$ . В результате система запишется в виде

$$\begin{aligned} (\frac{\partial}{\partial t} + (\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi}))B_{\omega} &= B_I(\frac{\partial}{\partial I} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y})\lambda, \\ (\frac{\partial}{\partial t} + (\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi}))B_n &= \lambda B_I(\frac{\partial}{\partial I} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y})\alpha. \end{aligned}$$

Решение имеет вид:

$$B_\omega = t\left(\frac{\partial\lambda}{\partial I} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)B_I^0(I, \varphi - \omega t) + B_\omega^0(I, \varphi - \omega t),$$

$$B_n = t\lambda\left(\frac{\partial\alpha}{\partial I} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)B_I^0(I, \varphi - \omega t) + B_n^0(I, \varphi - \omega t).$$

Воспользуемся тем, что от  $y$  зависит только одна из функций  $\alpha$ ,  $\lambda$ .

1. Пусть  $\alpha$  не зависит от  $y$ ; вычислим слабый предел решения. Получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\omega &= \delta(I) \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{\partial\lambda}{\partial y} B_I^0(0, \varphi - t\lambda\omega_0(0)) dy \\ &+ B_\omega^0(I, \varphi - \omega_- t) + \theta(I)(B_\omega^0(I, \varphi - \omega_+ t) - B_\omega^0(I, \varphi - \omega_- t)) \\ &+ t \frac{\partial\lambda_-}{\partial I} B_I^0(I, \varphi - \omega_- t) + \theta(I) \left( t \frac{\partial\lambda_+}{\partial I} B_I^0(I, \varphi - \omega_+ t) - t \frac{\partial\lambda_-}{\partial I} B_I^0(I, \varphi - \omega_- t) \right). \end{aligned}$$

Очевидно, от сглаживания может зависеть только коэффициент при дельта-функции. Занося под дифференциал  $t\lambda$ , этот коэффициент можно переписать в виде

$$\int_{\lambda_- t}^{\lambda_+ t} B_I^0(0, \varphi - \omega_0(0)z) dz, \quad z = \lambda t$$

в который не входит функция сглаживания  $V$ . Аналогично вычисляется слабый предел  $B_n$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_n &= B_n^0(I, \varphi - \omega_- t) + \theta(I)(B_n^0(I, \varphi - \omega_+ t) - B_n^0(I, \varphi - \omega_- t)) \\ &+ t\lambda_- \frac{\partial\alpha_-}{\partial I} B_I^0(I, \varphi - \omega_- t) + \theta(I) \left( t\lambda_+ \frac{\partial\alpha_+}{\partial I} B_I^0(I, \varphi - \omega_+ t) - t\lambda_- \frac{\partial\alpha_-}{\partial I} B_I^0(I, \varphi - \omega_- t) \right). \end{aligned}$$

Этот предел также не зависит от функции сглаживания  $V$ .

2. Пусть теперь  $\lambda$  не зависит от  $y$ . Вычисляя слабый предел вектора  $B_\varphi = B_\omega\omega_0 + B_n n$ , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varphi &= \delta(I) \int_{-\infty}^{\infty} t\lambda \frac{\partial\alpha}{\partial y} B_I^0(0, \varphi - t\lambda\omega_0(0, \alpha)) n(0, \alpha) dy \\ &+ n_-(B_n^0(I, \varphi - \omega_- t) + t\lambda_- \frac{\partial\alpha_-}{\partial I} B_I^0(I, \varphi - \omega_- t)) + \theta(I)(n_+(B_n^0(I, \varphi - \omega_+ t) \\ &+ t\lambda_+ \frac{\partial\alpha_+}{\partial I} B_I^0(I, \varphi - \omega_+ t)) - n_-(B_n^0(I, \varphi - \omega_- t)) + t\lambda_- \frac{\partial\alpha_-}{\partial I} B_I^0(I, \varphi - \omega_- t)) \\ &+ \omega_0^-(B_\omega^0(I, \varphi - \omega_- t) + t \frac{\partial\lambda_-}{\partial I} B_I^0(I, \varphi - \omega_- t)) + \theta(I)(\omega_0^+(B_\omega^0(I, \varphi - \omega_+ t) \end{aligned}$$

$$+t\frac{\partial\lambda_+}{\partial I}B_I^0(I,\varphi-\omega_+t)) - \omega_0^-(B_\omega^0(I,\varphi-\omega_-t)) + t\frac{\partial\lambda_-}{\partial I}B_I^0(I,\varphi-\omega_-t)),$$

где  $\omega_0^\pm = \omega_0(0, \alpha_\pm)$ ,  $n_\pm = n(0, \alpha_\pm)$ . Ясно, что от способа сглаживания может зависеть только коэффициент при дельта-функции. Занеся  $\alpha$  под дифференциал, приведем этот коэффициент к виду

$$t\lambda(0) \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} B_I^0(o, \varphi - t\lambda(0)\omega_0(\alpha))n(0, \alpha)d\alpha,$$

который не зависит от сглаживающей функции.  $\square$

**Замечание 4.1.** Вообще говоря, существуют и другие способы сглаживания поля скоростей; один из них, например, указан в начале работы. Способы сглаживания, указанные выше (при сглаживании сохраняется либо направление, либо модуль вектора) представляются наиболее естественными; в частности, в случае быстрого изменению модуля  $\omega$  слабый предел решения при нашем способе сглаживания совпадает с обобщенным решением приведенной ниже регуляризованной задачи.

**Замечание 4.2.** Рассмотрим два разных способа сглаживания, при которых получаются два разных результата.

1. Пусть  $\omega = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $\alpha = \alpha(y)$ ,  $B_I^0 = \cos \varphi_1$  В этом случае коэффициент при дельта-функции имеет вид:

$$t \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} \cos(\varphi_1 - t \cos \alpha) \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} d\alpha$$

2. Пусть  $\omega = \omega(\alpha_-) + \beta(y)(\omega(\alpha_+) - \omega(\alpha_-))$ . В этом случае слабый предел, т.е. коэффициент при дельта-функции выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & (\omega(\alpha_+) - \omega(\alpha_-))t \int_0^1 \cos(\varphi_1 - t \cos(\alpha_-) - \beta(\cos(\alpha_+) - \cos(\alpha_-)))d\beta \\ &= \frac{\sin(\varphi_1 - t \cos(\alpha_-) - \beta(\cos(\alpha_+) - \cos(\alpha_-)))}{\cos(\alpha_-) - \cos(\alpha_+)}. \end{aligned}$$

Аналогично двумерному случаю, инвариантность слабого предела по отношению к способу сглаживания поля скоростей связана с возможностью формулировки обобщенной постановки исходной задачи. Пусть при переходе через поверхность разрыва скачок испытывает только модуль (но не направление) поля скоростей. Обобщенная постановка основана на двух соображениях.

1. Если  $V$  гладкое, систему уравнений индукции можно записать в дивергентном виде

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot}(V \times B). \quad (4.8)$$

2. Из формул для решения, полученных при доказательстве предыдущей теоремы, вытекает, что, если при переходе через поверхность  $M$  отсутствует скачок направления  $V$ , дельта-образная особенность возникает только у компоненты магнитного поля, параллельной  $V$ . В то же время, в правую часть системы (4.8) эта компонента, очевидно, не входит – эту систему можно переписать в виде

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot}(V \times B_{\perp}), \quad (4.9)$$

где  $B_{\perp}$  – проекция вектора  $B$  на плоскость, ортогональную  $V$  (заметим, что, в наших предположениях, эта плоскость гладко зависит от  $z$ ).

В дальнейшем под обобщенной постановкой задачи Коши с разрывным полем  $V$  будем понимать именно задачу для системы (4.9). Как и ранее, будем считать, что  $V$  – эйлерово поле общего положения без скачка направления, т.е. что в переменных действие – угол

$$V = \lambda(I)(\omega_0(I), \frac{\partial}{\partial \varphi}),$$

где  $\omega_0(I)$  – гладкая единичная вектор-функция, а скалярная функция  $\lambda$  разрывна при  $I = 0$ :

$$\lambda = \lambda_{-}(I) + \theta(I)(\lambda_{+}(I) - \lambda_{-}(I)),$$

где  $\lambda_{\pm}$  – гладкие функции.

**Теорема 4.4.** *В сформулированных предположениях обобщенная функция*

$$\begin{aligned} B_I &= B_I^0(I, \varphi - \lambda \omega_0^- t) + \theta(I)(B_I^0(I, \varphi - \lambda \omega_0^+ t) - B_I^0(I, \varphi - \lambda \omega_0^- t)), \\ B_n &= t \frac{\partial \alpha_{-}}{\partial I} \lambda_{-}(I) B_I^0(I, \varphi - \omega_{-} t) + t \theta(I) \left( \frac{\partial \alpha_{+}}{\partial I} \lambda_{+}(I) B_I^0(I, \varphi - \omega_{+} t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \alpha_{-}}{\partial I} \lambda_{-}(I) B_I^0(I, \varphi - \omega_{-} t) \right) + B_n^0(I, \varphi - \omega_{-} t) + \theta(I) \left( B_n^0(I, \varphi - \omega_{+} t) - B_n^0(I, \varphi - \omega_{-} t) \right), \\ B_{\omega} &= \int_0^t \left( \lambda(I) \left( n, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) B_n + \frac{\partial}{\partial I} (\lambda_{-} B_I(I, \varphi - \omega_{-} t)) \right) dt \\ &\quad + \delta(I) \int_0^t (\lambda_{+} B_I^0(0, \varphi - \omega_{+} t) - \lambda_{-} B_I^0(0, \varphi - \omega_{-} t)) dt \\ &\quad + \theta(I) \int_0^t \frac{\partial}{\partial I} \left( \lambda_{+} B_I^0(0, \varphi - \omega_{+} t) - \lambda_{-} B_I^0(0, \varphi - \omega_{-} t) \right) dt. \end{aligned}$$

удовлетворяет системе (4.9) с начальными условиями (4.2). Эта функция совпадает со слабым пределом сглаженной задачи.

*Доказательство.* Перейдем к координатам действие – угол  $I$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ . Систему можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_I}{\partial t} + (\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi})B_I &= 0 \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} + (\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi})B_\varphi - B_I \frac{\partial \omega}{\partial I} &= 0 \\ \lambda(I) \int_0^t (n, \frac{\partial}{\partial \varphi})B_n dt &= \lambda(I) \frac{\partial \alpha}{\partial I} \int_0^t B_I^0(I, \varphi - \lambda \omega_0 t) t dt\end{aligned}$$

Используя условие бездивергентности магнитного поля, уравнение на  $B_\varphi$  можно переписать в виде:

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} + (\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi})B_\varphi - \omega(\frac{\partial}{\partial \varphi}, B_\varphi) = \frac{\partial}{\partial I}(\omega B_I)$$

Разложим данную компоненту магнитного поля на следующие составляющие:

$$B_\varphi = B_\omega \omega_0 + B_n n,$$

где  $\omega = (\omega_1, \omega_2) = \lambda(I)\omega_0$ ,  $\lambda(I)$  – разрывная функция,  $\omega_0(I)$  – единичный вектор, гладко зависящий от  $I$ .

Правая часть уравнения запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial I}(B_I \lambda \omega_0) = \omega_0 \frac{\partial}{\partial I}(B_I \lambda) + B_I \lambda \frac{\partial \omega_0}{\partial I}$$

Спроектируем уравнение на гладкие единичные векторы  $\omega_0$  и  $n$ ; учитывая, что  $\frac{\partial \omega_0}{\partial I} = n(I) \frac{\partial \alpha}{\partial I}$ , получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_I}{\partial t} + \lambda(\omega_0, \frac{\partial}{\partial \varphi})B_I &= 0 \\ \frac{\partial B_n}{\partial t} + \lambda(\omega_0, \frac{\partial}{\partial \varphi})B_n &= \frac{\partial \alpha}{\partial I} \lambda(I) B_I \\ \frac{\partial B_\omega}{\partial t} &= \lambda(I) (n, \frac{\partial}{\partial \varphi})B_n + \frac{\partial}{\partial I}(\lambda B_I) \\ B_I|_{t=0} &= B_I^0(I, \varphi), \quad B_\omega|_{t=0} = B_\omega^0(I, \varphi), \quad B_n|_{t=0} = B_n^0(I, \varphi)\end{aligned}$$

Решения первых двух уравнений имеют вид

$$B_I = B_I^0(I, \varphi - \lambda\omega_0 t),$$

$$B_n = t\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial I} B_I^0(I, \varphi - \lambda\omega_0 t);$$

отметим, что эти функции имеют простой разрыв на поверхности  $M$ . Выражая их через функцию Хевисайда и подставляя в уравнение для  $B_\omega$ , получим окончательно

$$B_I = B_I^0(I, \varphi - \lambda\omega_0^- t) + \theta(I)(B_I^0(I, \varphi - \lambda\omega_0^+ t) - B_I^0(I, \varphi - \lambda\omega_0^- t)),$$

$$B_n = t \frac{\partial \alpha_-}{\partial I} \lambda_-(I) B_I^0(I, \varphi - \omega_- t) + t\theta(I) \left( \frac{\partial \alpha_+}{\partial I} \lambda_+(I) B_I^0(I, \varphi - \omega_+ t) - \frac{\partial \alpha_-}{\partial I} \lambda_-(I) B_I^0(I, \varphi - \omega_- t) \right) + B_n^0(I, \varphi - \omega_- t) + \theta(I) \left( B_n^0(I, \varphi - \omega_+ t) - B_n^0(I, \varphi - \omega_- t) \right),$$

$$B_\omega = \int_0^t \left( \lambda(I) \left( n, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) B_n + \frac{\partial}{\partial I} (\lambda_- B_I(I, \varphi - \omega_- t)) \right) dt$$

$$+ \delta(I) \int_0^t (\lambda_+ B_I^0(0, \varphi - \omega_+ t) - \lambda_- B_I^0(0, \varphi - \omega_- t)) dt$$

$$+ \theta(I) \int_0^t \frac{\partial}{\partial I} \left( \lambda_+ B_I^0(0, \varphi - \omega_+ t) - \lambda_- B_I^0(0, \varphi - \omega_- t) \right) dt.$$

Тем самым на поверхности разрыва компонента магнитного поля  $B_\omega$  имеет дельта-образную особенность.

Сравним коэффициенты при дельта функции слабого предела сглаженной задачи и обобщенного решения. Коэффициент при дельта функции обобщенного решения имеет вид:

$$\int_0^t (\lambda_+ B_I^0(0, \varphi - \omega_+ t) - \lambda_- B_I^0(0, \varphi - \omega_- t)) dt$$

$$= \int_0^{\lambda_+ t} (B_I^0(0, \varphi - \omega_+ t) d(\lambda_+ t) - \int_0^{\lambda_- t} B_I^0(0, \varphi - \omega_- t) d(\lambda_- t))$$

$$= \int_{\lambda_- t}^{\lambda_+ t} (B_I^0(0, \varphi - \omega t) d(\lambda t)).$$

Что в точности совпадает с коэффициентом при дельта функции сглаженной задачи. Теорема доказана.  $\square$

Теперь пусть  $\alpha$  и  $n$  разрывные функции, а функция  $\lambda(I)$  - гладкая. В этом случае тоже можно регуляризовать исходную систему так, чтобы имели смысл ее обобщенные решения.

Рассмотрим исходную систему уравнений и преобразуем ее, временно считая  $V$  гладким полем. Система имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_I}{\partial t} + \left(\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) B_I &= 0, \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} + \left(\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) B_\varphi &= B_I \frac{\partial \omega}{\partial I}.\end{aligned}$$

Как и ранее, положим  $\omega = \lambda \omega_0$ ,  $\omega_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ .

Решение первого уравнения с начальным условием  $B_I|_{t=0} = B_I^0(I, \varphi)$  имеет вид:

$$B_I = B_I^0(I, \varphi - \omega t);$$

перепишем уравнение на  $B_\varphi$  в виде:

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} + \left(\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) B_\varphi = B_I^0(I, \varphi - \omega t) \frac{\partial \lambda}{\partial I} \omega_0 + B_I^0(I, \varphi - \omega t) \lambda \frac{\partial \alpha}{\partial I} n(\alpha). \quad (4.10)$$

Представим решение в виде суммы  $B_\varphi = B_1 + B_2$ , где каждый из векторов  $B_j$  удовлетворяет уравнению, в правой части которого стоит одно из двух слагаемых из (4.10). Отметим, что  $B_1$  - это компонента поля, направленная вдоль  $\omega_0$ , а  $B_2$  - ортогональная ей компонента. Для  $B_1, B_2$  получим уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial B_1}{\partial t} + \left(\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) B_1 = B_I^0(I, \varphi - \omega t) \frac{\partial \lambda}{\partial I} \omega_0, \\ \frac{\partial B_2}{\partial t} + \left(\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) B_2 = B_I^0(I, \varphi - \omega t) \lambda \frac{\partial \alpha}{\partial I} n(\alpha), \end{cases} \quad (4.11)$$

$$B_1|_{t=0} = B_1^0(I, \varphi) \quad B_2|_{t=0} = B_2^0(I, \varphi).$$

Легко видеть, что первое уравнение в (4.11) допускает обобщенные решения и в случае разрывной функции  $\alpha$  - решение также будет разрывной функцией. Для того чтобы придать смысл второму уравнению, преобразуем его следующим образом. Обозначим  $\int_{\alpha_0}^{\alpha} n(\alpha) B_I^0(I, \varphi - \lambda \omega_0(\alpha) t) d\alpha = w(\alpha, I)$ , тогда второе уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{\partial B_2}{\partial t} + \left(\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) B_2 = \lambda(I) \left( \frac{\partial}{\partial I} (w(\alpha(I), I)) - \frac{\partial w}{\partial I} \right).$$

Если поле  $V$  гладкое, решение системы (4.11) имеет вид

$$B_1 = t B_I^0(I, \varphi - \omega t) \frac{\partial \lambda}{\partial I} \omega_0 + B_1^0(I, \varphi - \omega t),$$

$$B_2 = t\lambda(I)\left(\frac{\partial}{\partial I}(w(\alpha(I), I)) - \frac{\partial w}{\partial I}\right) + B_1^0(I, \varphi - \omega t),$$

где  $B_1^0 = (B_\varphi^0, \omega_0)\omega_0$ ,  $B_2^0 = (B_\varphi^0, n)n$ . Легко видеть, что эти функции имеют смысл и при разрывном  $\alpha$ ; именно их (вместе с разрывной функцией  $B_I$ ) мы и назовем обобщенным решением системы (4.10).

**Теорема 4.5.** *В сформулированных выше предположениях, обобщенная функция, которая является решением уравнения (4.10) совпадает со слабым пределом сглаженной задачи.*

Отметим, что функций  $w$  и ее производные имеют следующий вид.

$$\frac{\partial w}{\partial I} = \int_{\alpha_0}^{\alpha(I)} \frac{\partial B_I^0}{\partial I}(I, \varphi - \lambda\omega_0 t) d\alpha - t \int_{\alpha_0}^{\alpha(I)} n(\alpha) \left(\frac{\partial B_I^0}{\partial \varphi}, \omega_0(\alpha)\right) \frac{\partial \lambda}{\partial I} d\alpha,$$

$$w = \int_{\alpha_0}^{\alpha_-(I)} n(\alpha) B_I^0(I, \varphi - \lambda\omega_0 t) d\alpha + \theta(I) \int_{\alpha_-(I)}^{\alpha_+(I)} n(\alpha) B_I^0(I, \varphi - \lambda\omega_0 t) d\alpha.$$

Ясно, что обобщенное решение может отличаться от слабого предела сглаженной задачи только слагаемым, содержащим дельта-функцию. Выпишем коэффициент при  $\delta(I)$  для  $B_\varphi$ ; он имеет вид:

$$\begin{aligned} & t\lambda\delta(I) \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} n(0, \alpha) B_I^0(0, \varphi - \lambda\omega_0(0, \alpha)t) d\alpha \\ &= \delta(I) \int_{-\infty}^{\infty} t\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial y} n(0, \alpha) B_I^0(0, \varphi - \lambda\omega_0(0, \alpha)t) dy, \end{aligned}$$

что в точности совпадает со слабым пределом сглаженной задачи. Теорема доказана.

### 4.3 Жидкость с высокой проводимостью: асимптотика решения задачи Коши

Ниже описана асимптотика решения задачи Коши для уравнений (3.1) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (малое сопротивление). Будем считать, что начальное поле не зависит от  $\varepsilon$ :

$$B|_{t=0} = B^0(z), \tag{4.12}$$

где  $B^0$  – гладкое финитное бездивергентное поле. Опишем сперва формальную асимптотику решения такой задачи, т.е. предъявим формальный



ряд, удовлетворяющий уравнению и начальному условию, а затем приведем обоснование, т.е. докажем, что частичные суммы этого ряда отличаются от точного решения на величину, достаточно быстро убывающую при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . На втором этапе нам понадобятся оценки разрешающего оператора задачи Коши, которые мы докажем отдельно.

#### 4.3.1 Формальная асимптотика

Пусть  $V(z, y)$  – гладкая вектор-функция:  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющая равенствам (4.3) и равномерно ограниченная вместе со всеми производными. Пусть  $\Phi(z)$  – гладкая скалярная функция:  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , гладкая двумерная поверхность  $M : \Phi(z) = 0$  компактна, причем  $(V, \nabla\Phi)|_M = 0$  и  $|\nabla\Phi|^2 = 1$  в окрестности  $M$ . Будем считать, что внутри  $M$   $\Phi < 0$  и  $|\nabla\Phi| \geq Const. > 0$  всюду в  $\mathbb{R}^3$ .

Будем искать решение уравнения (3.1) в виде:

$$B\left(z, \frac{\Phi(z)}{\varepsilon}, t, \varepsilon\right) = \frac{1}{\varepsilon}B_{-1}\left(z, \frac{\Phi(z)}{\varepsilon}, t\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k\left(z, \frac{\Phi(z)}{\varepsilon}, t\right) \quad (4.13)$$

Относительно слагаемых ряда будем предполагать следующие векторные поля  $B_k(y, z, t)$  – гладкие функции всех своих аргументов, причем  $B_{-1} \rightarrow 0$  при  $|y| \rightarrow \infty$ ,  $B_k \rightarrow B_k^\pm$  при  $y \rightarrow \pm\infty$  быстрее любой степени  $y$ . Таким образом, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  первое слагаемое ряда слабо сходится к дельта-функции на  $M$ , а остальные – к функции, имеющей на  $M$  простой разрыв.

Фиксируем произвольное  $T$ , не зависящее от  $\varepsilon$ .

**Теорема 4.6.** *При  $t \in [0, T]$  существуют такие гладкие векторные поля  $B_k(z, y, t)$ , что частичные суммы ряда (4.13):*

$$B^N\left(z, \frac{\Phi(z)}{\varepsilon}, t, \varepsilon\right) = \frac{1}{\varepsilon}B_{-1}\left(z, \frac{\Phi(z)}{\varepsilon}, t\right) + \sum_{k=0}^N \varepsilon^k B_k\left(z, \frac{\Phi(z)}{\varepsilon}, t\right)$$

удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial B^N}{\partial t} + (V, \nabla)B^N - (B^N, \nabla)V - \frac{1}{\varepsilon}(B^N, \nabla\Phi)\frac{\partial V}{\partial y} = \varepsilon^2 \Delta B^N + O(\varepsilon^{N+1}). \quad (4.14)$$

*Доказательство.* Введем следующие обозначения:

$$u(z, y, \varepsilon) = B_{-1}(z, y, \varepsilon)|_M,$$

$$f(z, y, \varepsilon) = (B_0, \nabla\Phi)|_M,$$

$$w(z, y) \equiv y \frac{\partial}{\partial \Phi} \Big|_M (V, \nabla \Phi).$$

Подставим в уравнение (4.3) ряд (4.13) и приравняем множители при одинаковых степенях  $\varepsilon$ .

При  $\varepsilon^{-2}$  получим:

$$(V, \nabla \Phi) \frac{\partial B_{-1}}{\partial y} - (B_{-1}, \nabla \Phi) \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Отметим, что левая часть этого равенства быстро убывает при  $|y| \rightarrow \infty$ , поэтому, в силу известной оценки [29]

$$\begin{aligned} F(z, \frac{\phi(z)}{\varepsilon}) &= F(z, y)|_{z \in M, y = \Phi/\varepsilon} + \Phi \left( \frac{\partial}{\partial \Phi} F(z, y) \right) \Big|_{z \in M, y = \Phi/\varepsilon} + \dots = \\ &= F(z, y)|_{z \in M, y = \Phi/\varepsilon} + \varepsilon y \left( \frac{\partial}{\partial \Phi} F(z, y) \right) \Big|_{z \in M, y = \Phi/\varepsilon} + \dots = F(z, y)|_{z \in M, y = \Phi/\varepsilon} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

ее можно по  $\text{mod} O(\varepsilon)$  ограничить на поверхность  $M$ . Отметим, что фактически речь идет о тейлоровском разложении по расстоянию от поверхности  $M$ . Так как  $(V, \nabla \Phi) = 0$  на поверхности  $M$ , то из полученного равенства следует, что  $(B_{-1}, \nabla \Phi)|_M = 0$ . В дальнейшем нам понадобится продолжать убывающие по  $y$  функции, заданные на  $M$ , в окрестность этой поверхности (и, далее, на все пространство). Примем следующее соглашение: функции и поля будем в окрестность  $M$  продолжать так, чтобы они не зависели от  $\Phi$  (т.е. как решения уравнений  $\nabla_{\nabla \Phi} F = 0$ ). Тем самым,  $(B_{-1}, \nabla \Phi) = 0$  в окрестности  $M$ ; во все пространство продолжим эту функцию также нулем. Это означает, что старшее слагаемое в разложении  $B$  касается поверхности разрыва.

При  $\varepsilon^{-1}$  получим:

$$\begin{aligned} y \frac{\partial B_{-1}}{\partial y} \Big|_M \left[ \frac{\partial}{\partial \Phi} (V, \nabla \Phi) \right] \Big|_M + \frac{\partial B_{-1}}{\partial t} + (V, \nabla) B_{-1} - (B_{-1}, \nabla) V + (V, \nabla \Phi) \frac{\partial B_0}{\partial y} \\ - (B_0, \nabla \Phi) \frac{\partial V}{\partial y} = \mu^2 (\nabla \Phi)^2 \frac{\partial^2 B_{-1}}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Первое слагаемое в левой части этого уравнения получено из второго слагаемого тейлоровского разложения для  $(B_{-1}, \nabla \Phi) \frac{\partial V}{\partial y}$  по переменной  $\Phi$ . Поскольку  $(\nabla \Phi)^2 = 1$ ,  $B_{-1}|_M = u$  и  $V|_M = v$  касаются  $M$  и левая часть этого уравнения быстро убывает при  $|y| \rightarrow \infty$ , ее можно ограничить на  $M$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \{v, u\} - (B_0, \nabla \Phi)|_M \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial y} = \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4.15)$$

Рассмотрим теперь слагаемые, содержащие  $\varepsilon^0$ . Легко видеть, что левая часть соответствующего равенства, вообще говоря, не убывает в пределе  $y \rightarrow \pm\infty$ . Перейдем в этом равенстве к пределу при  $y \rightarrow \pm\infty$ ; поскольку при  $y \rightarrow \pm\infty$   $B_k \rightarrow B_k^\pm$  и  $V \rightarrow V^\pm$ , получим уравнение:

$$\frac{\partial B_0^\pm}{\partial t} + (V^\pm, \nabla)B_0^\pm - (B_0^\pm, \nabla)V^\pm = 0.$$

Пусть  $B_0^\pm$  – решения этих уравнений с начальными условиями  $B_0^\pm|_{t=0} = B^0$  вне и внутри поверхности  $M$  соответственно; тогда при  $y \rightarrow \pm\infty$  весь множитель при  $\varepsilon^0$  стремится к нулю, и, значит, его можно  $\text{mod}O(\varepsilon)$  ограничить на  $M$ . Умножая полученное равенство скалярно на  $\nabla\Phi|_M$ ; получим:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v, \nabla)f + w \frac{\partial f}{\partial y} - f \frac{\partial}{\partial \Phi}(V, \nabla\Phi)|_M + f(\nabla\Phi, \frac{\partial}{\partial \Phi} \frac{\partial V}{\partial y})|_M = \mu^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (4.16)$$

Уравнения (4.15) – (4.16) представляют собой зацепленную систему относительно касательной к  $M$  компоненты поля  $B_1$  и нормальной компоненты поля  $B_0$ , ограниченных на поверхность  $M$ . Дополним эту систему начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad f|_{t=0} = (B_0, \nabla\Phi)|_M. \quad (4.17)$$

Функция  $u(z, y, t)$  задана только на  $M$  и стремится к 0 при  $|y| \rightarrow \infty$ . Обозначим продолжение функции  $u(z, y, t)$  вне  $M$  следующим образом  $u^*(z, y, t)$ . Продолжим  $u(z, y, t)$  в окрестности  $M$ , т.ч.  $\nabla_{\nabla\Phi} u^* = 0$  и далее на все  $\mathbb{R}^3$  произвольным гладким и финитным образом. Обозначим  $B_{-1}(y, z, t) = u^*(y, z, t)$ ; отметим, что функция  $B_{-1}(y, z, t)$  определена всюду.

Функция  $f(z, y, t)$  определена только на  $M$  и  $f(z, y, t) \rightarrow (B_0^\pm, \nabla\Phi)|_M$  при  $y \rightarrow \pm\infty$ . Поэтому  $f(z, y, t)$  можно представить в виде:

$$f = \frac{(B_0^+, \nabla\Phi)|_M + (B_0^-, \nabla\Phi)|_M}{2} + \beta(y) \frac{(B_0^+, \nabla\Phi)|_M - (B_0^-, \nabla\Phi)|_M}{2} + \hat{f}(z, y, t),$$

где  $\hat{f}(z, y, t) \rightarrow 0$  и  $\beta(y) \rightarrow \pm 1$  при  $y \rightarrow \pm\infty$ . Продолжение  $F(z, y, t)$  функции  $f(z, y, t)$  на все пространство  $\mathbb{R}^3$  определим можно записать следующим образом:

$$F = \frac{(B_0^+, \nabla\Phi)|_M + (B_0^-, \nabla\Phi)|_M}{2} + \beta(y) \frac{(B_0^+, \nabla\Phi)|_M - (B_0^-, \nabla\Phi)|_M}{2} + \hat{F}(z, y, t),$$

где  $\hat{F}(z, y, t)$  – гладкое финитное продолжение  $\hat{f}(z, y, t)$ , т.ч.  $\nabla_{\nabla\Phi} \hat{F} = 0$ .

Теперь векторное поле  $B_{-1}$  и проекция  $(B_0, \nabla\Phi)$  определены всюду.

Запишем теперь проекцию уравнения для  $B_0$  на касательную плоскость к поверхности  $M$ . После несложных выкладок получаем:

$$\frac{\partial b_0}{\partial t} + \{v, b_0\} - (B_1, \nabla\Phi)|_M \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial b_0}{\partial y} = \mu^2 \frac{\partial^2 b_0}{\partial y^2} + p_0, \quad (4.18)$$

где векторное поле  $p_0$  выражается через уже известные функции. В это уравнение входит функция  $f_1 = (B_1, \nabla\Phi)|_M$ ; чтобы получить для нее уравнение, приравняем коэффициенты при  $\varepsilon^1$ , полученный в результате подстановки асимптотического ряда (4.13) в уравнение индукции (4.1). В полученном равенстве устремим  $y$  к  $\pm\infty$ ; получим

$$\frac{\partial B_1^\pm}{\partial t} + \{V^\pm, B_1^\pm\} = R_1^\pm,$$

где гладкие векторные поля  $R_1^\pm$  выражаются через уже известные функции. Эти уравнения должны быть выполнены вне и внутри поверхности  $M$  с нулевыми начальными условиями.

Теперь обе части равенства, полученного приравниванием коэффициентов при  $\varepsilon^1$ , убывают при  $|y| \rightarrow \infty$ , поэтому его можно  $\text{mod}O(\varepsilon)$  ограничить на поверхность  $M$ . Проекция полученного равенства на нормаль к  $M$  имеет вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + (v, \nabla)f_1 + w \frac{\partial f_1}{\partial y} - f_1 \frac{\partial}{\partial \Phi} (V, \nabla\Phi)|_M + f_1 (\nabla\Phi, \frac{\partial}{\partial \Phi} \frac{\partial V}{\partial y})|_M = \mu^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + q_1, \quad (4.19)$$

где  $q_1$  выражается через уже известные функции. Уравнения (4.18), (4.19) представляют собой замкнутую систему относительно касательной к  $M$  компоненты поля  $B_0$  и нормальной компоненты поля  $B_1$ , ограниченных на  $M$ . Продолжая эти функции по описанным выше правилам во все пространство, получим указанные компоненты асимптотического ряда.

Остальные слагаемые ряда (4.13) вычисляются аналогично. Именно: рассматриваются уравнения, полученные приравниванием коэффициентов при произвольной степени  $\varepsilon$ . Сначала в этих уравнениях устремляем  $y$  к  $\pm\infty$ ; в результате получаем уравнения вида

$$\frac{\partial B_k^\pm}{\partial t} + \{V^\pm, B_k^\pm\} = R_k^\pm,$$

где  $R_k^\pm$  выражается через уже найденные функции. Далее ограничиваем уравнение на поверхность  $M$ ; из касательной компоненты  $k$ -го и нормальной ком-

поненты  $k + 1$ -го приближения получаем замкнутую систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_k}{\partial t} + \{v, b_k\} - f_{k+1} \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial b_k}{\partial y} &= \mu^2 \frac{\partial^2 b_k}{\partial y^2} + p_k, \\ \frac{\partial f_{k+1}}{\partial t} + (v, \nabla) f_{k+1} + w \frac{\partial f_{k+1}}{\partial y} - f_{k+1} \frac{\partial}{\partial \Phi} (V, \nabla \Phi)|_M + f_{k+1} (\nabla \Phi, \frac{\partial}{\partial \Phi} \frac{\partial V}{\partial y})|_M \\ &= \mu^2 \frac{\partial^2 f_{k+1}}{\partial y^2} + q_{k+1}, \end{aligned}$$

где  $b_k, f_{k+1}$  – касательная компонента  $B_k$  и нормальная  $B_{k+1}$  соответственно, ограниченные на  $M$ , векторное поле  $p_k$  и скалярная функция  $q_{k+1}$  выражаются через величины, найденные из предыдущих приближений. Продолжая решения этих систем с поверхности  $M$  во все пространство по описанным выше правилам, находим все слагаемые асимптотического ряда. Поскольку при этом последовательно убиваются коэффициенты при всех степенях  $\varepsilon$ , построенный формальный ряд удовлетворяет задаче Коши для уравнения индукции. Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 4.3.** *Старшая часть асимптотического ряда находится из системы уравнений*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \{v, u\} - f \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial y} = \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial t} + (v, \nabla) f + w \frac{\partial f}{\partial y} - f \frac{\partial}{\partial \Phi} (V, \nabla \Phi)|_M + f (\nabla \Phi, \frac{\partial}{\partial \Phi} \frac{\partial V}{\partial y})|_M = \mu^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (4.20)$$

#### 4.3.2 Оценка для функции Грина уравнения (4.1)

**Лемма 4.1.** *Пусть при  $|z| \rightarrow \infty$  все производные  $V(z, y)$  и  $\Phi(z)$  равномерно по  $y, t$ , и  $\varepsilon$  сходятся к константам. Рассмотрим скалярный параболический оператор  $L_0 = \frac{\partial}{\partial t} + (V, \nabla) - \varepsilon^2 \Delta$ . Тогда функция Грина  $G(z, \xi, t, \tau)$  для уравнения  $L_0 u = g$  удовлетворяет оценке*

$$|D^m G| \leq A \frac{1}{(\varepsilon^2(t - \tau))^{3/2}} \frac{1}{(t - \tau)^{|m|/2}} \exp(-\lambda \frac{|z - \xi|^2}{\varepsilon^2(t - \tau)}) \quad (4.21)$$

где  $m = (m_1, m_2, m_3)$ ,  $|m| = m_1 + m_2 + m_3$ ,  $D^m = \varepsilon^{|m|} \frac{\partial^{|m|}}{\partial z_1^{m_1} \partial z_2^{m_2} \partial z_3^{m_3}}$ ,  $A$  не зависит от  $\varepsilon$ ,  $0 < \lambda < 1$ .

*Доказательство.* Для доказательства воспользуемся методом Леви (метод параметрикса, см. [42]). Введем функцию:  $Z(z, \xi, t, \tau) = \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{3/2}\varepsilon^3} \exp\left(\frac{-|z-\xi|^2}{4\varepsilon^2|t-\tau}\right)$ . Это фундаментальное решение для уравнения  $(\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta)u = 0$ . Будем считать этот оператор "первым приближением" к оператору  $L_0$ , а  $Z$  будем рассматривать как "главную часть" фундаментального решения  $G_0$  уравнения  $L_0 u = 0$ , а  $G_0$  будем искать в виде:

$$G_0(z, t, \xi, \tau) = Z(z, t, \xi, \tau) + \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}^3} Z(z, t, \eta, \sigma) \Psi(\eta, \sigma, \xi, \tau) d\eta d\sigma. \quad (4.22)$$

Из уравнения  $L_0 G_0 = 0$  следует, что функция  $\Psi(z, t, \xi, \tau)$  удовлетворяет уравнению Вольтерра с особым ядром  $LZ(z, t, \eta, \sigma)$ :

$$\Psi(z, t, \xi, \tau) = LZ(z, t, \xi, \tau) + \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}^3} LZ(z, t, \eta, \sigma) \Psi(\eta, \sigma, \xi, \tau) d\eta d\sigma. \quad (4.23)$$

Решение этого уравнения имеет вид (см. [42]):

$$\Psi(z, t, \xi, \tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (LZ)_{\nu}(z, t, \xi, \tau), \quad (4.24)$$

где

$$(LZ)_1 = LZ = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (V, \nabla) - \varepsilon^2 \Delta\right)Z,$$

$$(LZ)_{\nu+1} = \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}^3} [LZ(z, t, \eta, \sigma)](LZ)_{\nu}(\eta, \sigma, \xi, \tau).$$

Оценим  $|(LZ)_{\nu}|$ :

$$|(LZ)_1(z, t, \xi, \tau)| = |LZ(z, t, \xi, \tau)| = |(V(z, y), \nabla)Z(z, t, \xi, \tau)| \quad (4.25)$$

$$\leq A_1 \frac{|z - \xi|}{(t - \tau)^{5/2}\varepsilon^5} \exp\left(\frac{-|z - \xi|^2}{4\varepsilon^2(t - \tau)}\right) \leq A_1 \frac{1}{(t - \tau)^2\varepsilon^4} \exp\left(-\lambda \frac{|z - \xi|^2}{4\varepsilon^2(t - \tau)}\right).$$

Таким образом можно найти все  $(LZ)_{\nu}$  и функцию Грина, но нам достаточно будет только оценить ее. В [42] доказана сходимость ряда (4.24) для произвольного параболического оператора. Для получения оценки на функцию Грина и ее производные продифференцируем нужно количество раз уравнение (4.22).

$$D^m G_0(z, t, \xi, \tau) = D^m Z(z, t, \xi, \tau) + \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}^3} (D^m Z(z, t, \eta, \sigma)) \Psi(\eta, \sigma, \xi, \tau) d\eta d\sigma.$$

Для оценки важно только первое слагаемое (см. [42]).

$$\frac{\partial}{\partial z_i} Z(z, t, \xi, \tau) = \frac{z_i - \xi_i}{2^{3/2+2|m|}\pi^{3/2}(t - \tau)^{3/2+|m|}\varepsilon^{3+2|m|}} \exp\left(-\lambda \frac{|z - \xi|^2}{4\varepsilon^2|t - \tau|}\right),$$

$$D^m Z(z, t, \xi, \tau) \leq \frac{C}{2^{3/2+|m|} \pi^{3/2} (t - \tau)^{3/2+|m|/2} \varepsilon^3} \exp\left(-\lambda \frac{|z - \xi|^2}{4\varepsilon^2 |t - \tau|}\right).$$

Лемма доказана.  $\square$

Отличие этого доказательства от того, что приведено в [42] состоит в том, что в оценку зависимость от  $\varepsilon$  включена явно.

**Теорема 4.7.** *Матрица Грина задачи Коши для уравнения (4.3) для всех  $t$  удовлетворяет оценке:  $|D^m G_{ij}| \leq \frac{C}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^3 t^{1/2}} \frac{1}{t^{|m|/2}} \exp\left(-\frac{|z-z|^2}{\varepsilon^2 t}\right)$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим столбец  $T$  матрицы  $G$  и разложим его на составляющие, параллельную и ортогональную вектору  $\nabla\Phi$ :  $T = a\nabla\Phi + w$ ,  $(w, \nabla\Phi) = 0$ . Этот столбец удовлетворяет уравнению:

$$L_0 T - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial y} (\nabla\Phi, T) - \frac{\partial V}{\partial z} T = 0.$$

Для дальнейшего доказательства теоремы докажем следующую лемму.

**Лемма 4.2.**  *$a$  и  $w$  связаны следующими уравнениями:*

$$\begin{cases} L_0 a = \Lambda a + \varepsilon(M, w), \\ L_0 w = \frac{1}{\varepsilon} a \frac{\partial V_0}{\partial y} + Pw + \varepsilon Qa, \end{cases} \quad (4.26)$$

где  $\Lambda$ , элементы вектора  $Q$  и матрицы  $P$  многочлены первой степени от операторов  $\varepsilon \frac{\partial}{\partial z_j}$ , коэффициенты которых – гладкие функции от  $z$ ,  $y$ ,  $t$  и  $\varepsilon$ ,  $a(M, w) = \varepsilon(\nabla\Phi, \Delta w)$ .

*Доказательство.* Подставляя разложение столбца  $T$  можно получить:

$$L_0 a \nabla\Phi - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial y} a - a \frac{\partial V}{\partial z} \nabla\Phi + L_0 w - \frac{\partial V}{\partial z} w = 0. \quad (4.27)$$

Проекция этого уравнения на направление, задаваемое вектором  $\nabla\Phi$ , будет

$$(\nabla\Phi, L_0 a \nabla\Phi) - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla\Phi, \frac{\partial V}{\partial y} a) - a (\nabla\Phi, \frac{\partial V}{\partial z} \nabla\Phi) + (\nabla\Phi, L_0 w) - (\nabla\Phi, \frac{\partial V}{\partial z} w) = 0.$$

Здесь  $(\nabla\Phi, \frac{\partial V}{\partial y}) = 0$ ,  $(\nabla\Phi, \frac{\partial w}{\partial t}) = 0$ ,

$$L_0 a \nabla\Phi = \left(\frac{\partial a}{\partial t} + (V, \nabla)a - \varepsilon^2 \Delta a\right) \nabla\Phi + a(V, \nabla) \nabla\Phi + 2\varepsilon^2 (\nabla a, \nabla) \nabla\Phi - \varepsilon^3 \nabla^3 \Phi a,$$

$$(\nabla\Phi, (V, \nabla)w) - (\nabla\Phi, \frac{\partial V}{\partial z} w) = (V, \nabla)(w, \nabla\Phi) - (w, (V, \nabla) \nabla\Phi) - (w, \frac{\partial V^*}{\partial z} \nabla\Phi)$$

$$= -(w, (V, \nabla) \nabla \Phi + \frac{\partial V^*}{\partial z} \nabla \Phi) = -(w, \nabla(V, \nabla \Phi)) = 0.$$

Все слагаемые с  $a$ , не вошедшие в  $L_0 a$ , суммируются в  $\Lambda a$ . Итак, первое уравнение доказано. Для доказательства второго уравнения, надо спроектировать (4.27) на касательную плоскость к поверхности разрыва (перпендикулярную  $\nabla \Phi$ ).

$$(L_0 a \nabla \Phi - a \frac{\partial V}{\partial z} \nabla \Phi - \frac{\partial V}{\partial z} w) - ((L_0 a \nabla \Phi - a \frac{\partial V}{\partial z} \nabla \Phi - \frac{\partial V}{\partial z} w), \nabla \Phi) \nabla \Phi - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial y} a + \Pi|_{T_p M}(L_0 w) = 0.$$

Ненулевые множители при  $a$  образуют следующее выражение:

$$(V, \nabla) \nabla \Phi - \frac{\partial V}{\partial z} \nabla \Phi - (((V, \nabla) \nabla \Phi - \frac{\partial V}{\partial z} \nabla \Phi), \nabla \Phi) \nabla \Phi;$$

$j$ -я компонента этого вектора равна

$$V_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\partial V_j}{\partial z_i} \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} - V_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \partial z_l} \frac{\partial \Phi}{\partial z_l} \frac{\partial \Phi}{\partial z_j} + \frac{\partial V_l}{\partial z_i} \frac{\partial \Phi}{\partial z_l} \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \frac{\partial \Phi}{\partial z_j}.$$

Заметим, что  $(V, \nabla) \nabla \Phi = \nabla(V, \nabla \Phi) - \frac{\partial V^*}{\partial z} \nabla \Phi = -\frac{\partial V_i}{\partial z_j} \frac{\partial \Phi}{\partial z_i}$ , тогда множитель при  $a$  равен:  $-\left(\frac{\partial V_j}{\partial z_i} + \frac{\partial V_i}{\partial z_j}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} + \left(\frac{\partial V_l}{\partial z_i} + \frac{\partial V_i}{\partial z_l}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial z_l} \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \frac{\partial \Phi}{\partial z_j}$ . Для слагаемых с  $l = j$ :  $-\left(\frac{\partial V_j}{\partial z_i} + \frac{\partial V_i}{\partial z_j}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} + \left(\frac{\partial V_j}{\partial z_i} + \frac{\partial V_i}{\partial z_j}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_j}\right)^2$ , т.к.  $|\nabla \Phi|^2 = 1$ . Поскольку жидкость несжимаема  $(\nabla, V) = \frac{\partial V_i}{\partial z_i} = 0$ , то слагаемые при  $l = i$  имеют вид:  $\left(\frac{\partial V_i}{\partial z_i} + \frac{\partial V_i}{\partial z_i}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \frac{\partial \Phi}{\partial z_j}$ .

Последнее слагаемое при  $l \neq i \neq j$ :  $\left(\frac{\partial V_i}{\partial z_l} + \frac{\partial V_l}{\partial z_i}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial z_l} \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \frac{\partial \Phi}{\partial z_j}$ . Это выражение не зависит от выбора ортонормированной системы координат  $z_i$ , поэтому можно выбрать такую систему, в которой одна ось будет направлена по  $\nabla \Phi$ , а две другие в касательной плоскости. Из условия  $l \neq i \neq j$  следует, что хотя бы одна из осей лежит в касательной плоскости к поверхности разрыва  $M$ , а для него  $\frac{\partial \Phi}{\partial z_m} = 0$ , а отсюда следует, что это выражение зануляется. Если все эти слагаемые аккуратно собрать, то мы получим второе уравнение. Лемма доказана.  $\square$

Продолжим доказательство теоремы. Будем искать решения в виде:

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k a_k \quad w = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k w_k.$$



Приравнивая слагаемые при соответствующих степенях  $\varepsilon$  получаем:

1.

$$\begin{aligned}(L_0 - \Lambda)a_k &= (\nabla\Phi, \Delta w_{k-2}), \\ (L_0 - P)w_k &= a_{k+1} \frac{\partial V_0}{\partial y} + Qa_{k-1}\end{aligned}$$

$$(L_0 - \Lambda)a_0 = 0, \text{ поэтому } a_0 \leq A_0 \frac{1}{(\varepsilon^3 t^{3/2})} \exp(-\lambda_a \frac{|z-\xi|^2}{\varepsilon^2 t}) \text{ см. 4.1.}$$

2.

$$\begin{aligned}(L_0 - P)w_{-1} &= a_0 \frac{\partial V_0}{\partial y}, \\ w_{-1} &\leq \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}^3} B_0 \frac{1}{\varepsilon^3 (t-\sigma)^{3/2}} \left| \frac{\partial V_0}{\partial y} \right| \exp\left(-\lambda \left( \frac{|z-\eta|^2}{\varepsilon^2 (t-\sigma)} + \frac{|\eta-\xi|^2}{\varepsilon^2 (\sigma-\tau)} \right)\right) d\eta d\sigma,\end{aligned}$$

где  $\lambda = \max(\lambda_a, \lambda_w)$ . Для оценки интеграла сверху сделаем подстановку

$$W_i = \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{t-\sigma}{t-\tau} \right)^{1/2} \frac{\eta_i - \xi_i}{2(\tau-\sigma)^{1/2}} + \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\tau-\sigma}{t-\tau} \right)^{1/2} \frac{\xi_i - z_i}{2(\tau-\sigma)^{1/2}}.$$

Заметим, что выражение под экспонентой можно переписать в виде  $\frac{|z_i - \eta_i|^2}{4\varepsilon^2(t-\sigma)} + \frac{|\eta_i - \xi_i|^2}{4\varepsilon^2(\sigma-\tau)} = \frac{|z_i - \xi_i|^2}{4\varepsilon^2(t-\tau)} + W_i^2$ . Пользуясь этой подстановкой, интеграл можно оценить сверху  $w_{-1} \leq W_{-1} \frac{1}{\varepsilon^3 t^{1/2}} \exp(\lambda \frac{|z-\xi|^2}{\varepsilon^2 t})$ .

Тоже самое можно проделать со всеми остальными степенями  $\varepsilon$  и найти все  $a_k$  и  $w_k$ . Это следует из того, что система (4.26) имеет жорданову структуру.

Тем самым справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}|a_k| &\leq \frac{A_k}{\varepsilon^3} t^{-3/2+2k} \exp(-\lambda \frac{|z-\xi|^2}{\varepsilon^2 t}), \\ |w_k| &\leq \frac{W_k}{\varepsilon^3} t^{3/2+2k} \exp(-\lambda \frac{|z-\xi|^2}{\varepsilon^2 t}).\end{aligned}$$

После суммирования ряда получим следующие оценки:

$$\begin{aligned}|a| &\leq \frac{A}{\varepsilon^3} t^{-3/2} \exp(-\lambda \frac{|z-\xi|^2}{\varepsilon^2 t}), \\ |w| &\leq \frac{W}{\varepsilon^4} t^{-1/2} \exp(-\lambda \frac{|z-\xi|^2}{\varepsilon^2 t}).\end{aligned}$$

Для всех  $t$  справедлива оценка  $|T| \leq \frac{C}{\varepsilon^4} t^{-1/2} \exp(-\lambda \frac{|z-\xi|^2}{\varepsilon^2 t})$ . К оценкам на производные функции Грина приводят точно такие же рассуждения.

Теорема доказана. □

### 4.3.3 Обоснование формальной асимптотики

**Теорема 4.8.** *Решение задачи Коши уравнения (4.1) с начальными условиями  $B|_{t=0} = B^0(z)$ , не зависящими от  $\varepsilon$  имеет вид:*

$$B(z, t, \varepsilon) = B^N(z, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1})$$

*Доказательство.* Рассмотрим следующую разность  $Q = B - B^{N+1}$ . Тогда  $Q(z, t, \varepsilon)$  будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (V, \nabla)Q - (Q, \nabla)V - \frac{1}{\varepsilon}(Q, \nabla\Phi)\frac{\partial V}{\partial y} - \varepsilon^2\mu^2\Delta Q = F.$$

где  $F = O(\varepsilon^{N+2})$ , с начальным условием  $Q|_{t=0} = 0$ .  
Как известно,

$$Q = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G(t - \tau, z, \xi) F(\tau, \xi) d\xi d\tau,$$

тогда

$$|Q| \leq \max|F| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G(t - \tau, z, \xi) d\xi d\tau, \quad \max|F| = O(\varepsilon^{N+2}).$$

Используя полученную в теореме 4.7 оценку на функцию Грина, получим оценку на функцию  $Q(z, t, \varepsilon)$ .

$$|Q| \leq \max|F| \frac{A}{\varepsilon^4} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|z - \xi|^2}{\varepsilon^2(t - \tau)}\right) d\xi.$$

Сделаем замену переменных, чтобы избавиться от  $\varepsilon$  в экспоненте:  $z = \frac{z - \xi}{\varepsilon}$

$$|Q| \leq \max|F| \frac{A}{\varepsilon} \int_0^t \frac{1}{(t - \tau)^{3/2}} d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-\frac{|z|^2}{(t - \tau)}\right) dz = \varepsilon^{N+1} C(t).$$

Функция  $C(t)$  от  $\varepsilon$  не зависит. Поскольку

$$B = B^{N+1} + O(\varepsilon^{N+1}) = B^N + B_{N+1} + O(\varepsilon^{N+1}),$$

а  $B_{N+1} = O(\varepsilon^{N+1})$ , то  $B = B^N + O(\varepsilon^{N+1})$ .

Теорема доказана. □

#### 4.3.4 Асимптотика решения задачи Коши

Суммируя результаты предыдущих пунктов, получаем следующее утверждение.

**Теорема 4.9.** *Для любого не зависящего от  $\varepsilon$  промежутка времени  $t \in [0, T]$  векторное поле  $B(x, t, \varepsilon)$  разлагается в асимптотический ряд*

$$B = \frac{1}{\varepsilon} B_{-1}\left(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon} x, t\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k\left(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}, x, t\right). \quad (4.28)$$

*Точнее, пусть  $B^N = \sum_{k=-1}^N B_k$  – частичная сумма этого ряда; тогда  $|B(x, t, \varepsilon) - B^N| = O(\varepsilon^{N+1})$  равномерно по  $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]$ . При этом  $B_{-1}(y, x, t) \rightarrow 0$  при  $|y| \rightarrow \infty$ , а при  $k \geq 0$   $B_k(y, x, t) \rightarrow B_k^\pm$  при  $y \rightarrow \pm\infty$ , где  $B_k^\pm$  – гладкие векторные поля.*

# Литература

- [1] А.А. Аржанов, С.А.Степин. Квазиклассические спектральные асимптотики и явление Стокса для уравнения Вебера. //ДАН – 2001. – 378, 1. – 18-21
- [2] В.И. Арнольд, Б.А. Хесин. Топологические методы в гидродинамике. // М.: МЦНМО, 2007.
- [3] Арнольд В.И. Замечания о поведении течений трехмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скоростей // Прикл. матем. и механ. - 1972. - Т. 35, N2 2. - С. 255-252.
- [4] Арнольд В.И. Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения //В кн.: Материалы Всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы (Дилижан, 21 мая- 3 июня 1973 г.). - Ереван: АН Арм. ССР, 1974. - С. 229-255.
- [5] Арнольд В.И. Несколько замечаний об антидинамо-теореме // Вестник МГУ. Сер. 1.- 1982.- Т. 5.- С. 50-57.
- [6] Арнольд В.И. Эволюция магнитного поля под действием переноса и диффузии// Успехи матем. наук.- 1983.- Т. 38, N2 2.- С. 225-227;
- [7] Арнольд В.И. Об эволюции магнитного поля под действием переноса и диффузии// В кн.: Некоторые вопросы современного анализа. Сборник памяти В. М. Алексеева. Под ред. В. М. Тихомирова. - М.: изд-во МГУ, 1984. - С. 8-21.
- [8] Арнольд В.И. Экспоненциальное разбегание траекторий и его гидродинамические приложения // В кн.: Н. Е. Кочин и развитие механики. - М.: Наука, 1984.- С. 185-193.
- [9] Арнольд В.И., Коркина В. И. Рост магнитного поля в трехмерном стационарном потоке несжимаемой жидкости// Вестник МГУ. Сер. 1, матем., механ. - 1983. - Т. 3. - С. 43-46.

- [10] Арнольд В.И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д.Д. Магнитное поле в стационарном течении с растяжениями в римановом пространстве // Журнал эксп. и теор. физики.- 1981.- Т. 81, N2 6. - С. 2052-2058.
- [11] Арнольд В.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитное поле в движущейся проводящей жидкости // Успехи матем. наук. - 1981. - Т. 35, N2 5. - С. 220-221;
- [12] Арнольд В.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Стационарное магнитное поле в периодическом потоке // ДАН СССР.- 1982.- Т. 266, N2 6.с. 1357-1361.
- [13] Брагинский С.И. О самовозбуждении магнитного поля при движении хорошо проводящей жидкости // Журнал эксп. и теор. физики. - 1964.- Т. 47.- С. 1084-1098; К теории гидромагнитного динамо // Журнал эксп. и теор. физики. - 1964. - Т. 47. - С. 2178-2193.
- [14] Вайнштейн С.И., Зельдович Я.В. О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентные механизмы кдинамо) // Успехи физ. наук. 1972.- Т. 106, вып. 3.- С. 431-457.
- [15] С.В. Гальцев, А.И. Шафаревич. Спектр и псевдоспектр несамосопряженного оператора Шредингера с периодическими коэффициентами. // Математические заметки – 2006.- 80, - 3. – 356-366
- [16] С.В. Гальцев, А.И. Шафаревич. Квантованные римановы поверхности и квазиклассические спектральные серии для несамосопряженного оператора Шредингера с периодическими коэффициентами. // Теоретическая и математическая физика. – 2006. – 48, - 2.- 206-226
- [17] И.К Гохберг, М.Г. Крейн. Введение в теорию несамосопряженных операторов. // Наука, 1965.
- [18] Доброхотов С. Ю., Мартинес-Оливе В. Локализованные асимптотические решения уравнения магнитного динамо в АВС-полях // Матем. заметки. - 1993. - Т. 54, вып. 4. - С. 45-68.
- [19] А.В. Дьяченко, А.А. Шкаликов. О модельной задаче для уравнения Орра-Зоммерфельда с линейным профилем. // Функциональный анализ и его приложения. – 2002. – 36, - 3, - 71-75
- [20] М.А. Евграфов, М.В. Федорюк. Асимптотика решений для уравнения  $w'' - p(z, \lambda)w = 0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  на комплексной плоскости. // Успехи математических наук – 1966.- том (21), 1.-3-50.

- [21] А.И. Есина, А.И. Шафаревич. Условия квантования на римановой поверхности и спектр оператора Шредингера с комплексным потенциалом. // Математические заметки – 2010. – том (88), 2. – 61-79.
- [22] А.И. Есина, А.И. Шафаревич. Асимптотика спектра и собственных функций оператора магнитной индукции на двумерной компактной поверхности вращения (в печати).
- [23] Я.Б. Зельдович, А.А. Рузмайкин. Гидромагнитное динамо как источник планетарного, солнечного и галактического магнетизма. // Успехи физических наук, 1987. – том (152), 2. – 263-284.
- [24] Зельдович Я.Б. Магнитное поле в проводящей турбулентной жидкости при двумерном движении // Журнал эксп. и теор. физики. – 1956. – т. 31. – с. 154.
- [25] Зельдович Я.Б. Избранные труды. Частицы, ядра, Вселенная. – М.: Наука, 1985.
- [26] Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А. Проблемы динамо в астрофизике // Итоги науки. Астрономия. Т. 21. – М.: ВИНТИ, 1982. – С. 151- 187.
- [27] Л. К. Кусаинова, А. Ж. Монашова, А. А. Шкаликов. Асимптотика собственных значений несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на оси // Матем. заметки, 93:4 (2013), 630-633
- [28] В.П. Маслов. Теория возмущений и асимптотические методы. // МГУ, 1965.
- [29] В.П. Маслов. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях // Наука, 1973.
- [30] В.П. Маслов, М.В. Федорюк. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. Москва: Наука, 1976.
- [31] В. И. Покотило, А. А. Шкаликов. Квазиклассическое приближение для несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с параболическим потенциалом // Матем. заметки, 86:3 (2009), 469-473
- [32] Славянов С.Ю. Асимптотика решений одномерного уравнения Шредингера. // ЛГУ, 1990.
- [33] С.А. Смирнов. Диссертация бакалавра. // МФТИ, 2010.
- [34] С.А. Степин. Несамосопряженные сингулярные возмущения: модель перехода от дискретного спектра к непрерывному. // УМН – 1995. – 50, - 6. – 219-220

- [35] С.А. Степин. Модель перехода от дискретного спектра к непрерывному в сингулярной теории возмущений. // *Фундамент. и прикл. матем.*, 1997, 3(4)4, 1199-1227.
- [36] С. А. Степин, В.А. Титов, “О концентрации спектра в модельной задаче теории сингулярных возмущений” *Доклады РАН*, **413** (1), 27–30 (2007).
- [37] С.Н. Туманов, А.А. Шкаликов. О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра-Зоммерфельда с профилем Пуазейля. // *Известия РАН, математическая серия* –2002. –66,4. – 174-204
- [38] М.В. Федорюк. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. // *Наука*, 1983
- [39] М.В. Федорюк. Асимптотика дискретного спектра оператора  $w''(x) - \lambda^2 p(x)w(x)$ . // *Математический сборник*, 68 (1), 1965, 81 - 110.
- [40] М.В. Федорюк. Топология линий Стокса уравнений второго порядка. // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1965, 29 (3), 645-656.
- [41] М.В. Федорюк. Одномерная задача о рассеянии в квазиклассическом приближении. // *Диф. Уравнения*, 1965, 1(5), 631-646, 1(11), 1525-1536.
- [42] А. Фридман. Уравнения с частными производными параболического типа. // *М.: Мир*, 1968.
- [43] А.И. Шафаревич. Поведение магнитного поля в проводящей жидкости с быстроменяющимся полем скоростей. // *Доклады академии наук*, 1998.– том **360** (1), 31-33.
- [44] А.А.Шкаликов. О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи. // *Математические заметки*.– 1997.–62, 950-953
- [45] А.А. Шкаликов. Спектральные портреты оператора Орра-Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // *Современная математика. Фундаментальные направления*. Том 3 (2003). С. 89-112
- [46] Akhmetiev P., Ruzmaikin A. Bormomeanism and bordism // *Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas*. Kluwer Academic Publ. - 1992. - P. 249-264; A fourth-order topological invariant of magnetic or vortex lines // *J. of Geometry and Physics*. - 1995.- V. 15. - P. 95-101.
- [47] Anufriev A., Sokoloff D. Fractal properties of geodynamo models // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*- 1994.- V. 74, N2 1-4.- P. 207-223.
- [48] Bayly B.J. Fast magnetic dynamos in chaotic flows // *Phys. Rev. Lett.* - 1986. - V. 57. - P. 2800-2803.

- [49] Bayly B.J. Scalar dynamo models // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.- 1993.- V. 73.- P. 61-74.
- [50] Bayly B.J. and Childress S. Construction of fast dynamos using unsteady flows and maps in three dimensions // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. - 1988. - V. 44. - P. 211-240.
- [51] Carl M. Bender, Dorje C. Brody, Hugh F. Jones, and Bernhard K. Meister, "Faster than Hermitian Quantum Mechanics", Phys. Rev. Lett. 98, 040403 (2007)
- [52] Berger M.A. Energy-crossing number relations for braided magnetic fields // Phys. Rev. Lett. - 1993.- V. 70, N2 6. - P. 705-708.
- [53] Bruno O.P. and Laurence P. Existence of three-dimensional toroidal MHD equilibria with nonconstant pressure // Comm. Pure Appl. Math.- 1996. - V. 49, Nt 7. - P. 717-764.
- [54] Chicone C., Latushkin Y. and Montgomery-Smith S. The Spectrum of the kinematic dynamo operator for an ideally conducting fluid Comm. Math. Phys. - 1995. - V. 173. - P. 379-400.
- [55] Childress S. Construction of steady-state hydromagnetic dynamos. I. Spatially periodic fields // Report MF-53, Courant Inst. of Math. Sci.- 1967; New Solutions of the kinematic dynamo problem // J. Math. Phys.- 1970. - V. 11. - P. 3063-3076.
- [56] Childress S. Fast dynamo theory. Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas (Eds: H. K. Moffatt, G. M. Zaslavsky, M. Tabor and P. Comte).- Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.- P. 111-147.
- [57] Childress S. On the geometry of fast dynamo action in unsteady flows near the onset of chaos // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. -1993.- V. 73.P. 75-90.
- [58] Childress S. and Gilbert A. Stretch, twist and fold: the fast dynamo // Lecture notes in Physics, V. 37.- Springer-Verlag, 1995.
- [59] Chlui A. Y. K. and Moffatt H. K. The energy and helicity of knotted magnetic flux tubes // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.- 1995.- V. 451, N2 1943. - P. 609-629.
- [60] E. B. Davies, "Pseudospectra of Differential Operators," Operator Theory **43**, 243-262 (2000)
- [61] S. Yu. Dobrokhotov, A. A. Ruzmaikin, V.M. Olive, A.I. Shafarevich. Magnetic field asymptotics in a well conducting fluid// Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 1996, 82 (3-4), 255-280.



- [62] Dombre T., Frisch U., Greene J.M., Henon M., Mehr A., Soward A. M. Chaotic streamlines in the ABC flows // J. Fluid Mech. - 1986.- V. 167. - P. 353-391.
- [63] R.G.Drazin, W.H.Reid. Hydrodynamic Stability. // Cambridge,1981.
- [64] A. I. Esina and A. I. Shafarevich, "Analogues of Bohr – Sommerfeld – Maslov Quantization Conditions on Riemann Surfaces and Spectral Series of Nonself-adjoint Operators" Russian Journal of Mathematical Physics, **20** (2), 172-181 (2013).
- [65] A. I. Esina and A. I. Shafarevich, "Delta-type Solutions for the system of induction equations with discontinuous velocity field" Methods of Functional Analysis and Topology, 2014, N 1.
- [66] Anna I. Esina, Andrei I. Shafarevich. Semiclassical asymptotics of eigenvalues for non-selfadjoint operators and quantization conditions on Riemann surfaces. Acta Politecnica (в печати).
- [67] Etnyre J. and Ghrist R. Contact topology and hydrodynamics. I. Beltrami fields and the Seifert conjecture, nonlinearity. - 2000. - V. 13, Nt 2. - P. 441-458; II. Solid tori // Ergodic Theory Dynam. Systems. - 2002.- V. 22, Nt 3.- P. 819-833; III. Knotted orbits // Trans. AMS.- 2000.- V. 352, Nt 12.P. 5781-5794.
- [68] Freedman M. H. A note on topology and magnetic energy in incompressible perfectly conducting fluids // J. Fluid Mech. - 1988. - V. 194. - P. 549-551.
- [69] Friedlander S. and Vishik M. M. On stability and instability criteria for magnetohydrodynamics // Chaos.- 1995.- V. 5 (2).- P. 416-423.
- [70] Galloway D.J. and Frisch U. A numerical investigation of magnetic field generation in a flow with chaotic streamlines // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.- 1984.- V. 29 (1).- P. 13-18.
- [71] Gilbert A.D. Magnetic field evolution in steady chaotic flows // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. - 1992. - V. A339. - P. 627-656.
- [72] Gilbert A.D. Towards a realistic fast dynamo: models based on cat maps and pseudo-Anosov maps // Phil. Trans. R. Soc. Lond. -1993.- V. A443.P. 585-606.
- [73] M.Hitrik, J. Sjostrand, S.Vu Ngoc, Diophantine tori and spectral asymptotics for non-selfadjoint operators Amer. J. Math. 129 (2007), 105182.
- [74] Tobias Gulden, Michael Janas, Peter Koroteev, Alex Kamenev "Statistical mechanics of Coulomb gases as quantum theory on Riemann surfaces, "JETP, 144 (9) 574 (2013).

- [75] Klapper I. and Young L.-S. Rigorous bounds on the fast dynamo growth rate involving topological entropy // *Cott. Math. Phys.* - 1995. - V. 173. - P. 623-646.
- [76] Krause F. and Radler K.-H. Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory.- NY: Pergamon Press, Oxford-E1msford, 1980.
- [77] La Llave R.D. Hyperbolic dynamical systems and generation of magnetic fields by perfectly conducting fluids // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*- 1993.- V. 73.- P. 123-131.
- [78] V.P. Maslov, G.A. Omel'yanov. Geometric Asymptotics for Nonlinear PDE//AMS,v.201, 2001.
- [79] Moffatt H. K. Magnetic field generation in electrically conducting fluid.- Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
- [80] Oseledets V. L Fast dynamo problem for a smooth map on a two-torus // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* - 1993.- V. 73, 1-4.- P. 133-145.
- [81] Reddy S. G., Schmidt P. J., Henningson D. S., "Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator," *SIAM J. Appl. Math.*, 53:1 (1993), 15-47
- [82] Redparth P., "Spectral properties of non-selfadjoint operators in the semiclassical regime", *J. Differ. Equations*, 177:2 (2001), 307-330
- [83] Roberts G.O. Dynamo action in fluid motions with two-dimensional periodicity // *Phil. Trans. Roy. Soc. London A.*- 1972.- V. 271.- P. 411-454.
- [84] Roberts G.O. and Soward A.M. Dynamo theory // *Annual Review in Fluid Mechanics.* - 1992. - V. 24. - P. 459-512.
- [85] H. Roohian and A. I. Shafarevich. "Semiclassical Asymptotics of the Spectrum of a Nonself-adjoint Operator on the Sphere,"*Russ. J. Math. Phys.* **16** (2), 309–315 (2009)
- [86] H.Roohian, A.I. Shafarevich. "Semiclassical Asymptotic Behavior of the Spectrum of a Nonself-adjoint Elliptic Operator on a Two-Dimensional Surface of Revolution,"*Russ. J. Math. Phys.* **17** (3), 328–334 (2010)
- [87] Soward A.M. Fast dynamo action in a steady flow // *J. Fluid Mech.* - 1987.- V. 180. - P. 267-295.
- [88] Soward A. M. An asymptotic solution of a fast dynamo in a two-dimensional pulsed flow // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* - 1993. - V. 73, Nt 1-4. - P. 179-215.

- [89] L.N.Trefethen. Pseudospectra of Linear Operators. // ISIAM 95: Proceedings of the Third Int.Congress of Industrial and Applied Math., Academic Verlag, Berlin- 1996.-401-434. Vishik M.M. Magnetic field generation by the motion of a highly conducting fluid // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. - 1989. - V. 48, N2 1-3. - P. 151-167.
- [90] M.M. Vishik. Magnetic field generation by the motion of a highly conducting fluid. // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 1989, 48, 151-167.
- [91] Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A. and Sokolov D. Magnetic fields in astrophysics. - Gordon Breach, 1983.