Утверждаю
Заместитель директора по науке
МИЭМ НИУ ВШЭ, профессор
В.Н.Азаров

ОТЗЫВ

ведущей организации о диссертации А.И. Есиной «Асимптотические решения уравнения индукции», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

В работе изучаются асимптотические решения линейной системы уравнений индукции, описывающие поведение магнитного поля в проводящей жидкости с малым сопротивлением. В ряде случаев найдены спектральные серии стационарного оператора, а также асимптотика решения задачи Коши с полем скоростей, испытывающим сглаженный тангенциальный разрыв. Такие задачи возникают, в частности, при описании сильных магнитных планет, звезд и галактик, а также при изучении процесса роста магнитного поля из малого начального возмущения. Оператор индукции несамосопряженный, что существенным образом отражается на свойствах асимптотики.

Спектральные серии несамосопряженных операторов изучались различными авторами (С.А. Степин, А.А. Шкаликов, Е. Б. Девис, Л.Н. Трефетен и другие). Основная трудность при их описании состоит в том, что формальные асимптотические собственные значения и собственные функции (т.е. числа и функции, приближенно удовлетворяющие спектральному уравнению), вообще говоря, сильно отличаются от точных. Кроме того, аналоги геометрических объектов, участвующих в описании спектральных серий самосопряженных операторов (лагранжевы многообразия, канонический оператор и др.), в несамосопряженном случае оказываются комплексными; развитая теория таких объектов к настоящему времени отсутствует. В частности, даже в случае, когда старший символ оператора задает интегрируемую гамильтонову систему, вообще говоря, не известно полного комплексного аналога правил квантования и канонического оператора. В диссертации А.И. Есиной спектральные серии описаны для оператора Шредингера на окружности с мнимым потенциалом, представляющим собой тригонометрический многочлен, а также для оператора индукции на двумерной компактной поверхности вращения с полиномиальным полем скоростей, направленным вдоль параллелей. Во всех случаях спектр концентрируется вблизи некоторого графа на комплексной плоскости спектрального параметра; асимптотика собственных чисел вычисляется из комплексных условий квантования, представляющих собой требования целочисленности интегралов от голоморфной формы по циклам на римановой поверхности постоянной комплексной энергии. Циклы выбираются из некоторого фиксированного набора.

Асимптотические решения задачи Коши для нестационарного уравнения индукции исследовались во многих работах; в большинстве случаев изучалось поведение решения при больших временах; в частности, возможность экспоненциального роста. Этот вопрос естественно возникает в рамках теории динамо - рост поля из малых возмущений может приводить к наличию сильных магнитных полей в астрофизике. В диссертации А.И. Есиной описан эффект быстрого роста решения задачи Коши по малому параметру (сопротивлению жидкости) в случае, когда поле скоростей зависит от этого параметра нерегулярно и быстро меняется вблизи гладкой поверхности в трехмерном пространстве (сглаженный тангенциальный разрыв). С этой целью построена и обоснована асимптотика решения задачи Коши с произвольной точностью по параметру.

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Во введении приводится обзор работ по теме диссертации, а также излагаются основные результаты.

В первой главе приводятся необходимые вспомогательные сведения об уравнении индукции и о квазиклассической асимптотике решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на комплексной плоскости.

Вторая глава посвящена исследованию квазиклассической асимптотики спектра одномерного оператора Шредингера на окружности с чисто мнимым потенциалом, представляющим собой тригонометрический многочлен. Доказано, что собственные значения в пределе концентрируются вблизи некоторого графа на комплексной плоскости спектрального параметра (т.н. спектрального графа). Получены формулы для вычисления асимптотики спектра – они представляют собой условия целочисленности интегралов от голоморфной формы по циклам на соответствующей классической римановой поверхности (множестве уровня комплексного символа оператора). Для простейших тригонометрических многочленов спектральный граф детально исследован; в частности, для многочлена второго порядка он состоит из 5 ребер. Результаты этой главы используются в дальнейшем при исследовании спектра оператора индукции.

В третьей главе описана асимптотика собственных значений оператора индукции на гладкой двумерной компактной поверхности вращения (такая поверхность гомеоморфна тору или сфере). Предполагается, что поле скоростей жидкости направлено вдоль параллелей, причем скорость, как и коэффициенты метрики поверхности, представляют собой многочлены (тригонометрический в случае тора и алгебраические в случае сферы). После разделения переменных задача сводится к спектральной задаче для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с мнимым потенциалом; в случае тора оператор задан на окружности, а в случае сферы – на отрезке с двумя регулярными особыми точками (соответствующими полюсам сферы). Доказаны теоремы об асимптотике спектра: собственные значения локализуются в окрестности графа и вычисляются из комплексных условий квантования. Доказательство основано на исследовании асимптотики операторов монодромии уравнения с периодическим потенциалом или уравнения с особыми точками. Спектральный граф явно описан в простейших примерах.

Четвертая глава диссертации посвящена асимптотике решения задачи Коши для нестационарного оператора индукции в трехмерном пространстве с полем скоростей, нерегулярно зависящим от малого параметра. Предполагается, что это поле резко меняется вблизи гладкой компактной двумерной поверхности (сглаженный тангенциальный разрыв); начальная функция считается гладкой и финитной. Основной результат главы – теорема о разложении решения в асимптотический ряд по малому параметру. Доказательство проводится в два этапа; сперва строится формальный ряд, удовлетворяющий уравнению и начальному условию, затем доказываются оценки на матрицу Грина оператора индукции и с их помощью оценивается разность между точным решением и частичной суммой построенного ряда. Слабый предел решения при стремлении малого параметра к нулю имеет дельта-образную особенность на поверхности сглаженного разрыва. В диссертации исследуется зависимость этого предела от способа сглаживания коэффициентов; в случаях, когда предел не зависит от профиля поля скоростей (а зависит только от его слабого предела), найдена обобщенная задача с разрывными коэффициентами, которой удовлетворяет слабый предел решения задачи Коши. Интересно отметить, что подобный эффект концентрации возникает в решении уравнения неразрывности в разрывном поле скоростей – это так называемые дельта-шок решения. Такие решения получаются, например, методом характеристик и основная трудность (преодоленная) состояла в том, как понимать решение – обычное определение в виде интегрального тождества здесь не работает. Конечно, эта трудность исчезает при сглаживании.

Характеризуя работу в общем, следует отметить свободное владение автором современными методами исследования уравнений в частных производных, тонкие и кропотливые исследования.

Диссертация представляет собой законченное научное исследование, в котором решены актуальные и трудные задачи описания асимптотики спектра и решения задачи Коши для уравнения индукции. Результаты диссертации развивают и обобщают известные результаты С.А. Степина, А.А. Шкаликова, С.Ю. Доброхотова, А.И. Шафаревича, М.М. Вишика, Е.Б. Девиса, Л.Н. Трефетена и других авторов; они, безусловно, важны и интересны. Текст диссертации написан ясным языком; результаты являются новыми, аккуратно сформулированы, строго доказаны и своевременно опубликованы в журналах из списка, рекомендованного ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Считаем, что диссертация А.И. Есиной «Асимптотические решения уравнения индукции» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор безусловно заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Отзыв заслушан и одобрен на заседании кафедры прикладной математики МИЭМ НИУ ВШЭ 12 мая 2014 года, протокол N4.

Доктор физико-математических наук,
академик, ординарный профессор НИУ ВШЭ

В.П. Маслов.

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры прикладной математики
МИЭМ НИУ ВШЭ

В.Г. Данилов.

ПОДПИСЫ ЗАВЕРЯЮ

Управление персонала
Зам. нач. отдела по
работе с НПР
Тихонова Е.Р.

12. 05. 2014