ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации А.И. Есиной «Асимптотические решения уравнения индукции», представленной на соискание учений степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Диссертация посвящена изучению асимптотических решений уравнений индукции – системы уравнений в частных производных, описывающей поведение магнитного поля в заданном течении проводящей жидкости (часть уравнений Максвелла). В качестве большого параметра фигурирует т.н. магнитное число Рейнольдса, характеризующее проводимость жидкости; таким образом, рассматривается предел малого сопротивления. Задачи подобного вида имеют разнообразные физические приложения; в частности, уравнения индукции возникают при описании сильных магнитных полей в астрофизике. С точки зрения приложений особенно интересны возможность сильного роста решения, а также его (решения) пространственная структура.

В диссертации А.И. Есиной изучаются два типа задач для уравнения индукции: спектральная задача для стационарного оператора на компактной двумерной поверхности вращения и задача Коши в трехмерном пространстве. В первом случае оператор эллиптический, а поверхность и коэффициенты предполагаются аналитическими, поэтому спектр чисто дискретный и все собственные функции гладкие. Исследование квазиклассической асимптотики собственных значений и собственных функций в такой ситуации можно разделить на два этапа: первый – описание т.н. формальных асимптотик, т.е. чисел и функций, приближенно удовлетворяющих спектральному уравнению, и второй – отбор среди них тех, которые близки к точным собственным числам и собственным функциям. Для самосопряженных операторов второй шаг в изучении спектра не нужен – число, приближенно удовлетворяющее спектральному уравнению, автоматически близко к точному спектру. С другой стороны, описание формальной асимптотики, как правило, весьма сложно и связано с нетривиальными геометрическими конструкциями. В частности, если старший символ оператора задает вполне интегрируемую гамильтонову систему, асимптотические собственные значения и собственные функции соответствуют лиувиллевым торам этой системы; точнее, спектральная серия отвечает области, гладко расслоенной на торы. Собственные значения этой серии вычисляются из условий квантования Бора – Зоммерфельда – Маслова – условий целочисленности интеграла от замкнутой формы на торе по произвольному циклу (т.е. целочисленности соответствующего класса когомологий лиувиллева тора), а асимптотические собственные функции выражаются через канонический оператор Маслова.

Несамсопряженный случай исследован гораздо слабее, несмотря на наличие появившихся в последние годы сильных результатов различных групп авторов. Один из центральных эффектов в этом случае состоит в том, что числа, удовлетворяющие спектральному уравнению с точностью до произвольной степени малого параметра (т.н. псевдоспектр) могут, вообще говоря, быть совсем не близки к точному спектру; это обстоятельство связано с тем, что угол между собственными функциями может асимптотически стремиться к нулю, что приводит к росту резольвенты. В диссертации А.И. Есиной на примере оператора индукции показано, что содержательная часть задачи (и, в частности, связанные с ней геометрические конструкции) связана именно с вопросом выделения из псевдоспектра части, близкой к точному спектру. Соответствующая геометрия оказывается комплексной; роль лиувиллевых торов играет риманова поверхность постоянной энергии, а условия квантования Бора – Зоммерфельда – Маслова при этом заменяются на условия целочисленности интеграла от голоморфной формы по некоторому **фиксированному** набору циклов на этой поверхности. При этом, в отличие от самосопряженного случая, достаточно требовать целочисленности интеграла **хотя бы по одному циклу** – **разные циклы определяют разные серии собственных значений**. Индекс Маслова в данной ситуации заменяется на индекс пересечения цикла с прообразом действительной оси при проекции поверхности на конфигурационное пространство.

Нестационарная задача, исследованная в диссертации, – это задача Коши для параболического уравнения с гладкими коэффициентами, решение которой также гладкое. При этом предполагается, что коэффициенты уравнения (поле скоростей жидкости) нерегулярно зависят от малого параметра и меняются скачком вблизи заданной гладкой компактной двумерной поверхности. Другими словами, слабый предел такого поля – разрывная векторная функция, гладкая вне поверхности и внутри нее. Основной эффект, обнаруженный в диссертации, состоит в мгновенном росте решения – его амплитуда за сколь угодно малое время вырастает на величину, обратную к малому параметру задачи. При этом оказывается, что слабый предел решения представляет собой сумму дельта-функции на поверхности, умноженной на гладкое векторное поле на ней, и разрывной функции. Детально изучен вопрос инвариантности слабого предела решения относительно способа сглаживания коэффициентов; в частности, показано, что слабый предел инвариантен (т.е. зависит лишь от слабых пределов коэффициентов), если, при переходе через поверхность, скачок испытывает только длина поля скоростей.

Диссертация состоит из введения и четырех глав. В первой главе собраны необходимые предварительные сведения об уравнении индукции, а также приведены основные факты о поведении асимптотических решений обыкновенного уравнения второго порядка на комплексной плоскости. В частности, введены используемые далее объекты: линии Стокса, канонические области, матрицы перехода. Во второй главе изучается квазиклассическая асимптотика спектра одномерного оператора Шредингера на окружности с чисто мнимым потенциалом; предполагается, что этот потенциал - тригонометрический многочлен. Доказано, что спектр асимптотически концентрируется вблизи графа на комплексной плоскости спектрального параметра (спектрального графа). Получены уравнения, из которых вычисляется асимптотика собственных значений; как уже отмечалось, эти уравнения представляют собой условия целочисленности интегралов голоморфной формы по циклам римановой поверхности постоянной классической энергии. Для некоторых примеров спектральный граф описан явно; в частности, для тригонометрического многочлена второго порядка он состоит из пяти ребер, а соответствующая риманова поверхность – сфера с двумя ручками и двумя проколами.

В третьей главе описана асимптотика собственных значений и собственных функций оператора индукции на компактной двумерной поверхности вращения; такая поверхность гомеоморфна либо сфере, либо тору. Предполагается, что поле скоростей жидкости направлено вдоль параллелей поверхности; в этом случае переменные в спектральной задаче разделяются. Эта процедура приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению с комплексным коэффициентом; для разных типов поверхности вращения задача ставится по-разному. Если поверхность гомеоморфна тору, для редуцированного уравнения возникает задача на окружности, а если сфере – задача на отрезке с двумя регулярными особыми точками (от решения требуется аналитичность в окрестности каждой из них). Доказано, что собственные числа концентрируются вблизи спектрального графа и получены уравнения, из которых вычисляется их асимптотика. Кроме того, вычислена асимптотика собственных функций; доказано, что носитель каждой такой функции в пределе концентрируется вблизи некоторого набора параллелей поверхности вращения (каждая спектральная серия или цикл на римановой поверхности постоянной энергии определяет свой набор параллелей). Такая собственная функция (касательный вектор к поверхности вращения) асимптотически касается параллели (компонента вдоль меридиана стремится к нулю).

В четвертой главе изучается решение задачи Коши для нестационарного уравнения индукции в трехмерном пространстве с полем скоростей, быстро меняющимся в малой окрестности гладкой компактной двумерной поверхности. Начальное поле предполагается гладким, финитным и бездивергентным. Доказано, что решение такой задачи разлагается в асимптотический ряд по малому параметру; для обоснования асимптотики получены оценки функции Грина оператора индукции, в которых явно контролируется ее зависимость от малого параметра. Исследовано поведение слабого предела при изменении способа сглаживания коэффициентов; в частности, получены достаточные условия, гарантирующие его инвариантность. Если эти условия выполнены, слабый предел удовлетворяет некоторой обобщенной задаче Коши; постановки этих задач найдены в диссертации.

Диссертация А.И. Есиной посвящена активно развивающемуся направлению – асимптотической теории несамосопряженных операторов. В ней получен ряд важных и интересных результатов в этой области. На мой взгляд, наиболее яркие из них – вычисление асимптотики спектральных серий при помощи условий квантования на римановых поверхностях, доказательство локализации собственных функций вблизи параллелей, а также полное описание решения задачи Коши с быстроменяющимся полем скоростей и его слабого предела.

В диссертации применяются как традиционные методы теории дифференциальных уравнений, так и методы комплексного анализа, геометрии и математической физики; полученные результаты не оставляют сомнений в высокой квалификации автора в указанных областях.

Текст диссертации написан ясным математическим языком; результаты аккуратно сформулированы и снабжены строгими доказательствами. Они своевременно опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК. Считаю, что диссертация А.И. Есиной «Асимптотические решения уравнения индукции» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям, а ее автор безусловно заслуживает присуждения ей искомой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 –«дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

03.02.2014 гг

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор механико-математического
факультета Московского Государственного
Университета им. М.В. Ломоносова — А.И. Шафаревич

Подпись А.И. Шафаревича удостоверяю.
И.О. Декана механико-математического
факультета Московского Государственного
Университета им. М.В. Ломоносова,
профессор — В.Н. Чубариков