

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации А.И. Есиной «Асимптотические решения уравнения индукции», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Диссертация посвящена исследованию уравнений, описывающих эволюцию магнитного поля в проводящей жидкости, в предположении высокой проводимости жидкости. Круг задач, рассмотренных в диссертации, естественным образом, разбивается на две части. К первой части относится изучение спектра оператора индукции на двумерной компактной поверхности вращения. Ко второй части относится изучение задачи Коши для оператора индукции с быстроменяющимся полем скоростей.

В первой части, с помощью метода линий Стокса, описывается спектр оператора магнитной индукции с малым параметром. Подобные задачи возникают чаще всего в астрофизике при описании магнитных полей планет и звезд, а также при описании явления гидромагнитного динамо. Главный инструмент исследования спектра – это комплексный аналог квазиклассической теории, опирающийся на правила квантования римановых поверхностей.

Во второй части исследуется асимптотика решения задачи Коши с гладким начальным условием, в том случае, когда поле скоростей жидкости, определяющее коэффициенты уравнений, меняется скачком в малой окрестности некоторой поверхности в трёхмерном пространстве.

Диссертация состоит из введения и четырёх глав. В первой главе приводится обзор необходимых в дальнейшем сведений, в частности, излагаются результаты М.В. Федорюка о структуре асимптотических решений обыкновенного дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами и с регулярными особыми точками.

Во второй главе описана асимптотика собственных значений оператора второго порядка с периодическим потенциалом. Центральную роль играет вычисление асимптотики матрицы монодромии для различных вариантов расположения линий Стокса уравнения. Опираясь на эту асимптотику, автор вычисляет асимптотику собственных чисел μ , в частности,

доказывает, что спектр концентрируется в окрестности некоторого набора аналитических кривых на комплексной плоскости. Сами собственные значения находятся из топологических условий квантования на римановой поверхности, соответствующей уравнению (поверхности постоянной классической энергии). В простейших случаях поведение собственных значений описано детально.

Третья глава посвящена спектральным асимптотикам для двумерного оператора индукции. Оператор рассматривается на компактной поверхности вращения, любая такая поверхность гомеоморфна либо тору, либо сфере. Оба эти случая разобраны по отдельности. В случае тора задача редуцирована к обыкновенному дифференциальному уравнению с комплексным периодическим потенциалом, а в случае сферы, задача сведена к уравнению с регулярными особыми точками. Затем к этим уравнениям применяется развитая в предыдущей главе техника вычисления матрицы монодромии. Предполагается, что поле скоростей жидкости полиномиально и направлено вдоль параллелей. Доказаны теоремы об асимптотике собственных значений и собственных функций оператора индукции. Собственные значения концентрируются в окрестности графа на комплексной плоскости и их асимптотика вычисляется из условия целочисленности периодов голоморфного дифференциала на (некомпактной!) римановой поверхности, поверхности постоянной энергии. Существенно, что собственные значения соответствуют некоторым, вполне определённым циклам на этой поверхности. Иначе, каждый цикл, из некоторого фиксированного набора, определяет серию собственных чисел. Для ряда примеров эти циклы определены явно и подробно исследовано расположение спектрального графа.

В четвертой главе диссертации строится асимптотика решения задачи Коши для нестационарного оператора индукции с быстроменяющимся полем скоростей. Точнее. Предполагается, что это поле испытывает скачок в малой окрестности некоторой компактной двумерной поверхности в трёхмерном пространстве, или в окрестности кривой на плоскости. Скачок сглаживается при помощи введения быстрой переменной, и далее изучается асимптотика решения по малому параметру, которым является ширина области скачка. Доказано, что решение задачи Коши разлагается в асимптотический ряд, слагаемые которого вычисляются из рекуррентной цепочки уравнений. Старшее слагаемое представляет собой дельтаобразную функцию. Его слабый предел, при стремлении малого параметра к нулю, имеет вид дельта-функции на поверхности

скачка, умноженной на гладкое векторное поле на этой поверхности. Далее изучается вопрос о зависимости этого поля от способа сглаживания поля скоростей. При дополнительных предположениях относительно коэффициентов исходной задачи показано, что в двумерном случае слабый предел решения не зависит от способа сглаживания, т.е. зависит лишь от слабого предела поля скоростей. В трёхмерном случае это, вообще говоря, неверно. Для трёхмерного случая в диссертации получены достаточные условия инвариантности слабого предела. Эти условия имеют наглядный геометрический смысл, а именно, при переходе через поверхность разрыва, скачок должна испытывать либо только длина поля скоростей, либо только его направление, но не и то, и другое вместе. В тех случаях, в которых условия инвариантности выполнены, слабый предел удовлетворяет некоторой обобщенной задаче Коши, эти задачи явно описаны. Асимптотическое решение полностью обосновано. С этой целью получены оценки функции Грина, явно учитывающие зависимость от малого параметра.

В заключение хочу отметить, что асимптотика спектра несамосопряженных операторов активно изучалась в последние десятилетия. Одна из особенностей таких задач состоит в том, что псевдоспектр и точный спектр, вообще говоря, сильно отличаются. В общем случае вопрос о том, как выглядят условия квантования и асимптотические собственные функции несамосопряженных операторов, остается открытым. В диссертации он решен для важного примера оператора индукции.

Что касается второго типа задач, рассмотренных в диссертации, то они связаны с интереснейшими приложениями в физике. Много работ разных авторов посвящено т.н. *проблеме динамо*. Вопрос состоит в том, существуют ли решения, экспоненциально растущие при больших временах. В диссертации А.И. Есиной показано, в частности, что, при наличии резкого скачка поля скоростей, решение задачи Коши может сильно увеличиться по амплитуде за малое время, тут рост амплитуды понимается в смысле предела по малому параметру. Такое растущее решение локализовано вблизи поверхности скачка, что естественно как с точки зрения результатов численных экспериментов, так и астрофизических наблюдений – сильные магнитные поля, как правило, концентрируются вблизи кривых или поверхностей. Аналогичная локализация наблюдается и у собственных функций стационарного оператора, это доказано в главе 3 диссертации.

Таким образом, диссертация представляет собой исследование на актуальную тематику. Диссертанткой решены важные и трудные задачи об асимптотике решений несамосопряженных уравнений. В работе применяются методы из различных областей математики, результаты носят законченный характер. Текст диссертации написан ясным математическим языком, все результаты являются новыми. Они аккуратно сформулированы, строго доказаны и вовремя опубликованы в журналах из списка, рекомендованного ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация “Асимптотические решения уравнения индукции” удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор А.И. Есина безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – “Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление”.

Ведущий сотрудник
федерального государственного бюджетного
учреждения науки Санкт-Петербургского
отделения Математического института им. В.А.Стеклова
Российской академии наук
доктор физ.-мат. наук

М.В.Бабич

