ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Есиной Анны Ивановны
"**Асимптотические решения уравнения индукции**",
представленной к защите на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 — "дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление"

В диссертации изучаются асимптотические решения уравнения индукции — системы уравнений, описывающей магнитное поле в проводящей жидкости. Эта система представляет собой часть уравнений Максвелла; при этом поле скоростей жидкости считается заданным (т.е. не учитывается влияния магнитного поля на движение частиц жидкости). Рассматриваются две задачи: спектральная задача для стационарного оператора и задача Коши для нестационарной системы. В обоих случаях изучается асимптотика решения (собственных значений и собственных функций в стационарном случае и решения задачи Коши в нестационарном) в пределе малого сопротивления жидкости; параметр, характеризующий сопротивление, входит в качестве множителя перед старшей частью оператора. Такие асимптотики называются также квазиклассическими приближениями. Их описание относится к принципиальным задачам спектральной теории дифференциальных операторов квантовой механики. Этой теме посвящено множество работ. Ставшие уже классическими результаты В.П. Маслова и М.В. Федорюка дают полный ответ в случае самосопряженных операторов. Анализу асимптотик в несамосопряженном случае также посвящено значительное число работ. Принципиальные продвижения в этом направлении получены в работах С.А. Степина, А.А. Шкаликова, E.B. Davies, L.N. Trefethen, J. Sjoestrand, M. Hitrik, А.И. Шафаревича и др. Однако, построение полной теории здесь еще далеко от завершения и описание квазиклассических приближений для различных конкретных дифференциальных операторов является важной задачей. Все вышесказанное свидетельствует об актуальности тематики исследований, результаты которых представлены в данной диссертации.

В работе спектральная задача для оператора индукции рассматривается в следующих предположениях. Во-первых, система задана на компактной аналитической двумерной поверхности вращения (диффеоморфной тору или сфере). Во-вторых, поле скоростей жидкости направлено вдоль параллелей поверхности, зависит только от широты и представляет собой многочлен (тригонометрический или алгебраический). В этих предположениях спектр оператора индукции чисто дискретный, а все собственные функции бесконечно дифференцируемы; вопрос состоит в вычислении асимптотики собственных значений и собственных функций в пределе малого сопротивления. Кроме того, переменные в спектральной задаче разделяются; соответствующая процедура приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению с комплексными коэффициентами. В случае тора коэффициенты — аналитические периодические функции и для решения ставятся условия периодичности; в случае сферы коэффициенты имеют регулярные особенности в двух точках (полюсах сферы) и от решения требуется аналитичность в обеих особых точках.

Задача вычисления асимптотики спектра естественным образом разделяется на две: описания псевдоспектра (т.е. множества чисел, для которых существует функция, приближенно с требуемой точностью удовлетворяющая спектральному уравнению) и выделения из него точек, близких к точным собственным значениям. Известно, что для несамосопряженных операторов псевдоспектр может существенно отличаться от асимптотики точного спектра; именно такой эффект наблюдается для оператора индукции. Псевдоспектр совпадает с полуплоскостью, в то время как спектр дискретен, причем собственные значения асимптотически приближаются к объединению аналитических кривых. В диссертации доказано (теорема 2.2, гл.2; теоремы 3.1 и 3.2, гл.3), что собственные значения находятся в малых окрестностях решений уравнений, представляющих собой условия целочисленности интегралов от аналитических функций независимой переменной и спектрального параметра по выделенным кривым на комплексной плоскости независимой переменной. Те же уравнения могут быть интерпретированы как условия целочисленности периодов голоморфный формы, соответствующих выделенному набору циклов на римановой поверхности, определяемой символом оператора индукции. В общем случае (т.е. для произвольных многочленов, задающих поле скоростей жидкости) из доказанных теорем следует, что спектр концентрируется в окрестности некоторого графа на плоскости спектрального параметра. Для ряда конкретных примеров этот граф детально исследован; в частности, доказаны утверждения о расположении его ребер.

Доказательства теорем о спектре основаны на исследовании асимптотики матрицы монодромии уравнения с периодическими коэффициентами или матриц монодромии обхода вокруг особых точек. После вычисления такой асимптотики задача нахождения спектра становится алгебраической. В свою очередь, описание матриц монодромии опирается на построение асимптотики фундаментальной системы решений в достаточно большой области комплексной плоскости — в периодическом случае эта область должна содержать период коэффициентов, а для уравнения на отрезке — обе особые точки. На изучение фундаментальной системы влияет, в первую очередь, граф Стокса уравнения — объединение линий, разбивающих комплексную плоскость независимой переменной на области, в которых асимптотика решений имеет фиксированный вид. Топология графа Стокса зависит от спектрального параметра; оказывается, точки спектра соответствуют специальному устройству этого графа (некоторые из вершин должны соединяться ребрами).

В диссертации также вычислена асимптотика собственных функций оператора индукции (теорема 3.3, гл.3). А именно, доказано, что каждая такая функция (представляющая собой векторное поле на поверхности вращения) локализована в малой окрестности некоторой параллели поверхности, причем само поле в старшем порядке также направлено вдоль параллели.

Упомянутые выше теоремы второй и третьей глав диссертации обобщают и развивают полученные ранее результаты нескольких групп авторов; в частности, С.А. Степина, А.А. Шкаликова, E.B. Davies, L.N. Trefethen, А.И. Шафаревича, их коллег и учеников.

В четвертой главе диссертации речь идет об асимптотике решения задачи Коши для нестационарного уравнения индукции в трехмерном пространстве. Начальное поле предполагается гладким, финитным и бездивергентным; поле скоростей (т.е. коэффициенты уравнения) выбираются в виде функций, нерегулярно зависящих от малого параметра и быстро изменяющихся в малой окрестности некоторой фиксированной поверхности. Такая постановка задачи соответствует описанию магнитного поля в жидкости со сглаженным тангенциальным разрывом: слабый предел поля скоростей терпит разрыв первого рода на указанной поверхности. Уравнение индукции в такой постановке представляет собой параболическую систему с гладкими коэффициентами; решение задачи Коши на любом промежутке времени бесконечно дифференцируемо и вопрос снова состоит в описании его асимптотики. Основной результат (теорема 4.9, гл.4) состоит в следующем. Доказано, что решение задачи Коши разлагается в асимптотический ряд по малому параметру; коэффициенты этого ряда могут быть последовательно найдены. Слабый предел решения представляет собой сумму дельта-функции на поверхности скачка, умноженной на гладкое векторное поле на этой поверхности, и функции, имеющей разрыв первого рода. Эффект генерации дельта-образной функции имеет физический смысл — он означает мгновенный сильный рост магнитного поля на особых поверхностях течения жидкости. Доказательство основной теоремы состоит из двух этапов. Сперва в п. 4.3.1 при помощи специальной асимптотической техники строится формальная асимптотика — формальный ряд по малому параметру, удовлетворяющий задаче Коши (теорема 4.6, гл.4). Затем в п. 4.3.2 доказываются оценки функции Грина, контролирующие ее зависимость от малого параметра и при помощи этих оценок устанавливается, что полученный формальный ряд в действительности асимптотический (теорема 4.8. гл.4). В диссертации также исследована зависимость слабого предела решения задачи Коши от способа сглаживания коэффициентов; в частности, получены достаточные условия инвариантности слабого предела (последнее означает, что он зависит только от слабого предела поля скоростей) (теорема 4.1, гл.4). Эти условия достаточно наглядны; они означают, что, при переходе через поверхность скачок испытывает только длина поля скоростей или только его направление; другими словами, этот скачок сосредоточен в одной скалярной функции.

Таким образом, в диссертации А.И. Есиной содержится полное и детальное исследование асимптотических свойств уравнения индукции. Постановка задачи естественна как с точки зрения асимптотической теории уравнений в частных производных, так и в виду физических приложений.

Все основные результаты, полученные в диссертационной работе и выносимые на защиту, являются новыми и впервые получены автором диссертации. Они дают исчерпывающие ответы на поставленные вопросы и существенно усиливают известные ранее факты об асимптотике решений несамосопряженных уравнений.

Приведенные в диссертации теоремы ясно сформулированы, подробно и строго доказаны и содержат все необходимые ссылки на литературу. Применяемые в доказательствах методы основаны на использовании фундаментальных классических объектов, конструкций и результатов из различных областей теории дифференциальных уравнений, комплексного анализа и математической физики.

Работа написана четко. Имеется лишь незначительное число опечаток, не снижающих впечатления от диссертации.

Результаты диссертации вовремя опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Выскажем замечание методического характера по изложению материала. Формулировка теоремы 2.2 состоит из трех пунктов. Основным является пункт 2, описывающий спектральную асимптотику. В то время, как пункты 1 и 3, текстово разделенные пунктом 2, по сути являются одним пунктом, представляющим собой описание спектрального графа. Кроме того, в пункте 2 из самой формулы (2.3) вытекает, что $n_{ij} \approx \frac{1}{\varepsilon}$; т.е. приведенное далее в тесте пункта 2 выражение "где $n_{ij} = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$" излишне.

Было бы естественно оптимизировать формулировку данной теоремы соответствующим образом, в частности, так, чтобы ее пункты 1 и 3 составляли единое целое. Аналогичные замечания относится к формулировкам теорем 3.1 и 3.2.

Еще дно замечание, которое является скорее пожеланием. В автореферате по поводу теоремы 2 (теорема 2.2. диссертации) приведено замечание 3 (инвариантная переформулировка теоремы 2 в духе соответствующего замечания 2, комментирующего теорему В.П. Маслова). Аналогичное замечание 5 приведено в автореферате по поводу теорем 3 и 4 (теоремы 3.1 и 3.2 диссертации). На мой взгляд, в этих местах должны быть сделаны более подробные поясняющие комментарии.

Приведенные замечания не влияют на оценку значимости работы.

Заключение

Диссертация Есиной Анны Ивановны "Асимптотические решения уравнения индукции" является самостоятельно выполненной научно квалификационной работой, в которой дано описание квазиклассической спектральной асимптотики дифференциальных операторов, порожденных уравнениями индукции. Работа удовлетворяет требованиям п.9 и других пунктов "Положения о порядке присуждения ученых степеней" — результаты диссертации дают решения целого ряда конкретных задач, имеющих существенное значение для спектральной теории дифференциальных операторов математической физики.

Считаю, что диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Анна Ивановна Есина, безусловно заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — "дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление".

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук,
профессор,
зав. кафедрой нелинейного анализа и
аналитической экономики Белгосуниверситета

А.В. Лебедев

Подпись Лебедева А.В. удостоверяю
Ведущий специалист управления
организационной работы и документационного
обеспечения
06.05.2014