МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.926.4

ВЕТОХИН Александр Николаевич

МЕТОД НЕОРДИНАРНЫХ СЕМЕЙСТВ В ТЕОРИИ БЭРОВСКИХ КЛАССОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
доктор физико-математических наук
профессор И. Н. Сергеев

Москва 2013

Содержание

Введение

§ 1 Постановки задач и обзор литературы

Одним из основных направлений качественной теории дифференциальных уравнений является изучение характеристических показателей, которые первоначально были введены А.М. Ляпуновым [75] в связи с исследованием устойчивости по первому приближению.

Развитие теории линейных систем привело к созданию целого ряда новых показателей: все они или определяются непосредственно через показатели Ляпунова, или являются их модификациями, а потому также могут, в широком смысле, называться *ляпуновскими* (во избежание путаницы для каждого из них, как правило, предусмотрено и свое собственное название). Библиография по теории показателей Ляпунова в обзорах [61, 67] и книгах [14, 68] насчитывает более тысячи наименований.

I. Вопросы непрерывности ляпуновских показателей. Важное место в теории показателей Ляпунова занимает вопрос о характере их зависимости от коэффициентов системы.

Как показал О. Перрон [131] показатели Ляпунова *не являются непрерывными* функционалами на пространстве линейных однородных систем с *равномерной топологией* (на положительной полуоси времени). Он же предложил и первые достаточные условия на линейную систему, при которых она является точкой непрерывности показателей Ляпунова [132].

Впоследствии необходимые и достаточные условия, при которых линейная система является точкой полунепрерывности сверху показателей Ляпунова, были полностью изучены: сначала для старшего показателя — Р.Э. Виноградом [55] и В.М. Миллионщиковым [79], а затем и для любого показателя — И.Н. Сергеевым [113].

Критерии полунепрерывности снизу к настоящему времени гораздо менее изучены. Так, в работе [55] приведено достаточное условие полунепрерывности снизу младшего показателя Ляпунова, а в работе [79] доказана его необходимость. Далее, Н.А. Изобов [62] получил критерий полунепрерывности снизу старшего показателя Ляпунова в двумерном случае, а затем И.Н. Сергеев [114] указал критерий полунепрерывности снизу каждого из показателей Ляпунова в трехмерном случае.

В работах [15, 16, 78] найден критерий непрерывности одновременно всех показателей Ляпунова линейной системы. Кроме того, к задачам о нахождении достижимых границ подвижности этих показателей тесно примыкают работы о различных видах управления показателями Ляпунова [**?**], а также другими характеристиками асимптотического поведения решений линейных систем [110].

Рассматривая множества линейных систем, возникающих как системы в вариациях по начальным значениям (или параметрам) вдоль решений нелинейных систем, и изучая их показатели Ляпунова или другие ляпуновские показатели, нередко приходится отказываться от топологии равномерной сходимости коэффициентов на полупрямой. Действительно, поскольку теорема о непрерывной зависимости решений от начальных условий (или параметров) обеспечивает близость решений лишь на любых заранее заданных компактах оси времени, то только такая близость и гарантируется для соответствующих этим решениям линейных систем в вариациях.

Таким образом, на пространстве линейных систем, наряду с топологией равномерной сходимости, приходится рассматривать и более слабую *компактно-открытую топологию* (т. е. топологию равномерной сходимости коэффициентов на каждом компакте положительной полуоси).

Несомненный интерес вызывает и самая общая ситуация, когда коэффициенты системы, непрерывные на полуоси времени, еще и непрерывно (возможно, равномерно по времени) зависят от параметра из некоторого метрического пространства. Тогда ляпуновские показатели такой системы (точнее, семейства систем) можно рассматривать как функционалы, определенные на этом метрическом пространстве, и ставить вопросы об их непрерывности или полунепрерывности по параметру, а также о типичности точек такой непрерывности или полунепрерывности.

Существует несколько, не эквивалентных друг другу, подходов к тому, какие свойства называть типичными, а какие — нет. В диссертации используется понятие типичности, введенное и изученное Р. Бэром [17, 128], а именно: свойство точки топологического пространства называется *ти-*

пичным по Бэру, если множество точек, обладающих этим свойством, содержит всюду плотное множество типа G_δ (т. е. множество, представимое в виде счетного пересечения открытых подмножеств).

II. Классификация Бэра ляпуновских показателей. В 1980–1983 гг. В.М. Миллионщиков в цикле своих работ [81]–[92] открыл новое направление в качественной теории дифференциальных уравнений: он предложил для описания зависимости ляпуновских показателей от параметров использовать классификацию Бэра разрывных функций [17].

В частности, он установил [81], что для любого семейства линейных систем, непрерывно зависящих от параметра из метрического пространства, показатели Ляпунова, рассматриваемые как функции на этом метрическом пространстве, принадлежат второму классу Бэра, т. е. представимы в виде двух поточечных пределов от непрерывных функций (более того, для вычисления значений этих функций достаточно иметь информацию о системе лишь на некотором конечном участке временной полуоси, своем для каждой функции [12, 116]).

В дальнейшем В.М. Миллионщиковым и его учениками были получены оценки сверху для номеров бэровских классов целого ряда ляпуновских показателей [3], [94]–[97], [99]–[101], [107], [119], [122]–[126]. В результате возник естественный вопрос о неулучшаемости полученных результатов, т. е. об адекватных оценках для тех же номеров бэровских классов снизу.

Первой работой в указанном направлении была, по всей видимости, работа М.И. Рахимбердиева [111, 1982 г.], в которой с помощью довольно тонких построений установлено, что показатели Ляпунова не принадлежат первому классу Бэра на пространстве линейных однородных систем с равномерной (а тем более и с компактно-открытой) топологией.

В дальнейшем, с помощью аналогичных построений, другими авторами была доказана непринадлежность первому классу Бэра еще некоторых ляпуновских показателей на пространстве линейных систем с равномерной топологией [107] или с компактно-открытой топологией [1, 2, 4]. Отметим, что для каждой характеристики приходилось изобретать свой способ доказательства непринадлежности первому классу Бэра.

Поэтому возникла необходимость в получении универсальных и сравнительно просто проверяемых условий, позволяющих доказывать непринадлежность показателей первому классу Бэра. Методы же доказательства непринадлежности показателей второму, третьему и т. д. классам Бэра некоторое время оставались неизвестными.

Функционалы, представимые в виде нескольких поточечных пределов от непрерывных функций, встречаются не только в теории показателей Ляпунова, но и в теории динамических систем. Одним из таких функционалов является *топологическая энтропия* [127] динамической системы, представляющая собой скорость экспоненциального роста числа отрезков орбит, различимых с произвольно хорошей, но конечной точностью. Можно сказать, что топологическая энтропия описывает одним числом полную экспоненциальную сложность орбитальной структуры.

Изучению свойств топологической энтропии, рассматриваемой как функционал на множествах отображений компактных метрических пространств и гладкий многообразий с различными топологиями, посвящено немало работ (см., например, книгу [70] или обзор [71]). В частности [70], имеет место полунепрерывность снизу топологической энтропии на пространстве непрерывных отображений отрезка, наделенном равномерной топологией, причем в общем случае этого нельзя утверждать.

III. Приложения теории Бэра. Опишем несколько возможных приложений теории Бэра к теории показателей Ляпунова.

Во-первых, для записи ляпуновских показателей обычно используется несколько предельных переходов. Поэтому возникает вопрос, можно ли уменьшить количество пределов в формуле для данного показателя. На этот вопрос помогает ответить бэровская теория разрывных функций, причем как раз в той части, которая связана с оценкой номера класса Бэра данного показателя снизу.

Во-вторых, в процессе развития теории дифференциальных уравнений уже введено в рассмотрение целое множество ляпуновских показателей, а со временем продолжают появляться все новые и новые. Поэтому не праздным оказывается вопрос, не совпадает ли новая характеристика с какой-либо из введенных ранее. Ответ на этот вопрос иногда может дать теория классов Бэра.

Например, минимальные полунепрерывные сверху мажоранты показателей Ляпунова на пространстве линейных систем с равномерной топологией принадлежат первому классу Бэра (на том же пространстве, в силу определения), а сами показатели Ляпунова не принадлежат первому классу Бэра, следовательно, эти характеристики асимптотического поведения решений заведомо различны.

В-третьих, если две функции принадлежат разным классам Бэра, то существует хотя бы одна точка, в которой эти функции принимают разные значения. Эту информацию можно использовать для доказательства существования объектов с определенными свойствами: скажем, из приведенного выше примера непосредственно вытекает существование линейной системы, которая не является точкой полунепрерывности сверху показателей Ляпунова (ни в равномерной, ни тем более в компактно-открытой топологии).

В-четвертых, принадлежность того или иного показателя конкретному классу Бэра позволяет гарантировать наличие у него определенных свойств. Например, если показатель принадлежит первому классу Бэра, то, в силу теоремы Бэра о функциях первого класса, в типичной по Бэру точке он непрерывен. Если показатель представим в виде поточечного предела от неубывающей (невозрастающей) последовательности функций первого класса Бэра, то в типичной по Бэру точке он полунепрерывен снизу (сверху). Если показатель принадлежит конечному (причем любому) классу Бэра, то найдется такое всюду плотное множество типа G_δ, что его сужение на это множество есть непрерывная функция.

IV. Основные результаты диссертации. Остановимся подробнее на основных результатах автора, включенных в настоящую диссертацию.

Центральное место в предлагаемом исследовании занимает вопрос о принадлежности или непринадлежности конкретных ляпуновских характеристик тому или иному классу Бэра, причем основной акцент в диссертации сделан именно на доказательстве непринадлежности.

Благодаря проведенному исследованию, удалось получить окончательные ответы на целый ряд вопросов, поставленных В.М. Миллионщиковым на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в МГУ имени М.В. Ломоносова в 1991–1995 гг. (когда семинаром руководили профессора В.А. Кондратьев, В.М. Миллионщиков, Н.Х. Розов).

Метод диссертации. Основным методом работы является построение *специальных семейств* линейных систем, непрерывно (возможно, равномерно по независимой переменной) зависящих от параметра, с *неординарным*, иногда даже экзотическим, или «уродливым», поведением ляпуновских показателей. С помощью таких семейств автору удалось установить, в частности, непринадлежность тех или иных показателей первому, второму или третьему классам Бэра на пространстве линейных систем с непрерывными и ограниченными на полуоси коэффициентами, наделенном компактно-открытой или равномерной топологией.

Мажоранты показателей Ляпунова и другие показатели. В.М. Миллионщиков в одном из своих докладов [98, 1991 г.] поставил задачу о нахождении минимального бэровского класса, которому принадлежит минимальная полунепрерывная сверху мажоранта k-го показателя Ляпунова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией (в равномерной топологии она, будучи полунепрерывной функцией, принадлежит первому классу Бэра). Позднее И.Н. Сергеев установил, что она принадлежит второму классу Бэра [118, 2002 г.].

В первой главе диссертации выделены простые условия, при выполнении которых ляпуновский показатель не принадлежит первому классу Бэра на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией [28]. С их помощью во второй главе диссертации доказано, что минимальная полунепрерывная сверху мажоранта k-го показателя Ляпунова не принадлежит первому классу Бэра на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией [28], а также является наименьшей функцией первого класса Бэра на пространстве линейных систем с равномерной топологией, оценивающей k-й показатель Ляпунова сверху [38].

Кроме того, в первой главе диссертации получены простые условия, при выполнении которых ляпуновский показатель не принадлежит первому классу Бэра на пространстве линейных систем с равномерной топологией [18]. С их помощью в третьей главе доказана непринадлежность первому классу Бэра на этом пространстве δ-показателей [28], индекса условной экспоненциальной устойчивости решений линейной системы [20], конструктивного показателя Изобова [33] и сигма-показателя Изобова [32].

В то же время для любого семейства линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра из некоторого метрического пространства, в диссертации установлено, что все эти показатели, рассматриваемые как функционалы на этом метрическом пространстве, принадлежат второму классу Бэра, а в случае полноты этого пространства все они, за исключением индекса условной экспоненциальной устойчивости, в типичной по Бэру точке полунепрерывны сверху.

Миноранты показателей Ляпунова и другие показатели. В своем докладе [102, 1993 г.] В.М. Миллионщиков поставил задачу о нахождении минимального класса Бэра, которому принадлежит максимальная полунепрерывная снизу миноранта k-го показателя Ляпунова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией (принадлежащая в равномерной топологии опять же первому классу Бэра). В.В. Быков и Е.Е. Салов установили, что она принадлежит третьему классу Бэра [13, 2003 г.] (ранее это было установлено И.Н. Сергеевым для трехмерного случая [115, 1995 г.]).

Используя результат Р. Бэра [129, 1909 г.], автор в первой главе диссертации установил необходимые условия принадлежности функции второму классу Бэра на произвольном метрическом пространстве. С помощью этих условий во второй главе диссертации доказано, что максимальная полунепрерывная снизу миноранта k-го показателя Ляпунова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией не принадлежит второму классу Бэра [29], а в случае $k = 1, 2$ является наибольшей функцией первого класса Бэра на пространстве линейных систем с равномерной топологией, оценивающей k-й показатель Ляпунова снизу [34].

Также в третьей главе установлено, что размерность векторного подпространства, определяемого k-м показателем Ляпунова, на пространстве линейных систем, наделенном компактно-открытой или равномерной топологией, принадлежит третьему классу Бэра и не принадлежит второму [23].

Отметим, что доказательство непринадлежности минимальной полунепрерывной сверху мажоранты k-го показателя Ляпунова первому классу Бэра и непринадлежности максимальной полунепрерывной снизу миноранты k-го показателя Ляпунова второму классу Бэра на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией составляют содержание кандидатской диссертации автора [24, 1997 г.].

В докладе [102, 1993 г.] В.М. Миллионщиков, в предположении, что коэффициенты линейной системы непрерывно зависят от параметра из некоторого полного метрического пространства, поставил вопрос о типичности точек полунепрерывности снизу миноранты k-го показателя Ляпунова, рассматриваемой как функция этого параметра.

Во второй главе диссертации построено такое семейство линейных систем, непрерывно зависящее от вещественного параметра, что множество точек полунепрерывности целого ряда ляпуновских показателей, рассматриваемых как функционалы от этого параметра, пусто [51]. В частности, для этого семейства оказалось пустым (а значит, нетипичным) и множество точек полунепрерывности снизу максимальной полунепрерывной снизу миноранты k-го показателя Ляпунова.

Н.А. Изобов в работе [64, 1982 г.] ввел старший экспоненциальный показатель линейной системы, который является достижимой границей подвижности вверх старшего показателя Ляпунова при экспоненциально убывающих возмущениях исходной системы. В.Г. Агафонов по заданию В.М. Миллионщикова установил, что этот показатель не принадлежит первому классу Бэра [2, 1993 г.] и принадлежит третьему классу Бэра [3, 1994 г.] на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией.

В третьей же главе диссертации доказано, что старший экспоненциальный показатель не принадлежит на том же пространстве и второму классу Бэра [30].

Вспомогательные показатели Миллионщикова. Для исследования стохастической устойчивости показателей Ляпунова линейных систем В.М. Миллионщиков ввел верхние и нижние вспомогательные показатели [80, 1970 г.], старшие из которых совпадают с верхним центральным показателем, а младшие с нижним центральным показателем, введенными Р.Э. Виноградом [55, 1957 г.]. Тогда же В.М. Миллионщиков предположил, что промежуточный верхний и соответствующий ему нижний вспомогательный показатели совпадают. В дальнейшем О.Г. Илларионовой была построена трехмерная система, для которой промежуточные вспомогательные показатели не совпадают [69, 1988 г.].

В.Г. Феклин по заданию В.М. Миллионщикова установил [119, 1992 г.], что нижние вспомогательные показатели принадлежат третьему классу Бэра на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией (заметим, что старший вспомогательный показатель, совпадая с минимальной полунепрерывной сверху мажорантой старшего показателя Ляпунова, принадлежит даже второму классу Бэра). Затем К.Е. Ширяев установил [122, 1995 г.], что вспомогательные показатели не принадлежат первому классу Бэра на том же пространстве.

В третьей главе диссертации установлено, что все нижние вспомогательные показатели, кроме старшего, не принадлежат и второму классу Бэра на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией [26].

Используя результат Л.В. Келдыш [72, 74, 1945 г.], автор в первой главе диссертации получил необходимые условия принадлежности функции третьему классу Бэра (они могут быть обобщены и на произвольный конечный класс Бэра) на произвольном метрическом пространстве. С помощью этих условий в третьей главе диссертации установлена непринадлежность промежуточных верхних вспомогательных показателей третьему классу Бэра на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией [25], [35].

Отсюда, кстати попутно, вытекает, что никакие промежуточные верхние и нижние вспомогательные показатели не могут полностью совпадать друг с другом.

Правильные по Ляпунову системы. Один из важнейших классов линейных систем образуют правильные системы, которые были введены А.М. Ляпуновым в связи с исследованием экспоненциальной устойчивости неавтономной системы по первому приближению. Рассматривая семейства линейных систем, в которые параметр входит как множитель при матрице коэффициентов системы, а сама эта система правильна по Ляпунову, Ю.С. Богданов в 1980 г. поставил вопрос о пустоте множества (в дальнейшем будем называть его множеством неправильности данного семейства) тех значений параметра, при которых соответствующая система является неправильной.

Н.А. Изобов и Е.К. Макаров в работах [65, 77, 1988 г.] построили такие семейства систем, линейно зависящие от вещественного параметра, множества неправильности которых могут оказаться следующими: множеством значений произвольной бесконечной в обе стороны арифметической прогрессии, не содержащей нуля и единицы; объединением значений таких прогрессий, замыкание которого счетно; дополнение до $\mathbb{R}$ такой арифметической прогрессии; множество $\mathbb{R} \setminus \{0,\ 1\}$.

В четвертой главе диссертации доказано, что для любого семейства систем, непрерывно зависящих от параметра из некоторого метрического пространства, множество неправильности является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ [21, 1995 г.], а также существуют такие полное метрическое пространство и семейство систем, непрерывно (равномерно по времени, при не менее чем двумерном фазовом пространстве) зависящих от параметра, что множество неправильности не является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ [31, 2000 г.].

В дальнейшем Е.А. Барабанов в работе [7, 2009 г.], в частности, доказал, что множество вещественной прямой тогда и только тогда есть множество неправильности некоторого семейства линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от вещественного параметра, когда оно является множеством типа $G_{\delta\sigma}$.

В.М. Миллионщиков предложил два естественных расширения подмножества правильных линейных систем [103, 104, 105, 1993 г.]. Первое — это подмножество линейных систем, у которых показатели Ляпунова инвариантны относительно экспоненциально убывающих возмущений. Второе — подмножество линейных систем, которые обобщенными ляпуновскими преобразованиями приводимы к диагональным системам с упорядоченными диагоналями. В докладе В.М. Миллионщикова [106] установлено включение второго множества в первое и поставлен вопрос о его строгости.

В четвертой главе диссертации доказано, что это включение является строгим [48].

Топологическая энтропия. В книге [70, стр. 501] установлено, что топологическая энтропия, рассматриваемая как функционал на пространстве непрерывных отображений из $[0;1]$ в $[0;1]$ с равномерной топологией, является всюду полунепрерывной снизу функцией, а следовательно, принадлежит первому классу Бэра. В работе [130, 1973 г.] установлено, что в случае произвольного компактного риманова многообразия топологическая энтропия не является полунепрерывной ни снизу, ни сверху даже на пространстве диффеоморфизмов с C^1-топологией, и поставлен вопрос о классе Бэра, которому принадлежит топологическая энтропия.

В пятой главе диссертации доказано, что топологическая энтропия на пространстве липшицевых отображений компактного метрического пространства с равномерной топологией принадлежит второму классу Бэра [39], и построено такое семейство липшицевых отображений, непрерывно зависящих от параметра из некоторого компактного метрического пространства, что топологическая энтропия не является функцией первого класса Бэра [44].

Кроме того, в пятой главе доказано, что для любого семейства липшицевых отображений, непрерывно зависящих от параметра из полного метрического пространства, в типичной по Бэру точке топологическая энтропия, рассматриваемая как функция на этом метрическом пространстве, полунепрерывна снизу [44], и предъявлен пример такого семейства, для которого утверждение о полунепрерывности снизу топологической энтропии нельзя заменить непрерывностью [43].

Автор глубоко признателен профессору В.М. Миллионщикову, профессору И.Н. Сергееву и доценту В.В. Быкову за постановки задач и полезное обсуждение работы, а также академику Н.А. Изобову за организационную и моральную поддержку.

§ 2 Формулировки основных результатов

В. М. Миллионщиков в работе [81] для любого $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{1, \ldots, n\}$ установил, что k-ый показатель Ляпунова системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывной ограниченной оператор-функцией $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$, определяется формулой

$$\lambda_k(A) = \inf_{L \in G_k(\mathbb{R}^n)} \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t, 0)|_L\|,$$

где $G_k(\mathbb{R}^n)$ — множество k-мерных векторных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, $X_A(t, 0)|_L$ — сужение оператора Коши системы (1) на подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\overline{\lambda}_k(A)$ минимальную полунепрерывную сверху мажоранту k-го показателя Ляпунова системы (1), определяемую формулой

$$\overline{\lambda}_k(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\{B \colon \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} \|B(t)\| < \varepsilon\}} \lambda_k(A + B),$$

а через $\underline{\lambda}_k(A)$ максимальную полунепрерывную снизу миноранту k-го показателя Ляпунова системы (1), определяемую формулой

$$\underline{\lambda}_k(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{\{B \colon \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} \|B(t)\| < \varepsilon\}} \lambda_k(A + B).$$

По метрическому пространству $\mathfrak{M}$ и непрерывному ограниченному отображению

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{2}$$

образуем функции

$$\mu \mapsto \overline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot)), \tag{3}$$

$$\mu \mapsto \underline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot)). \tag{4}$$

Изучим поведение функций (3), (4) с точки зрения бэровской классификации. Напомним, что функциями *нулевого* класса Бэра на метрическом пространстве $\mathfrak{M}$ называются непрерывные функции и для всякого натурального числа p функциями *p-го класса* Бэра называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$-го класса Бэра.

Теорема I [28]. *Существует такое полное метрическое пространство $\mathfrak{M}$, что для любого $n \geqslant 1$ и каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ найдется отображение (2), для которого функция (3) всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра на $\mathfrak{M}$.*

Теорема II [19, 29]. *Существует такое полное метрическое пространство $\mathfrak{M}$, что для любого $n \geqslant 2$ и каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ найдется отображение (2), для которого функция (4) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра на $\mathfrak{M}$.*

Теорема III [51]. *Для $\mathfrak{M} \equiv [0, 1]$ и любого $n \geqslant 1$ существует отображение (2) такое, что для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ множество точек полунепрерывности снизу функции (4) пусто.*

Н. А. Изобов в работе [64] ввел экспоненциальный показатель

$$\nabla(A) = \sup_{B \in K_0} \lambda_n(A + B),$$

который отвечает за подвижность вверх старшего показателя Ляпунова при непрерывных возмущениях системы (1), принадлежащих множеству

$$K_0 = \{B(\cdot) : \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \ln \|B(t)\| < 0\}.$$

По метрическому пространству $\mathfrak{M}$ и отображению (2) образуем функцию

$$\mu \mapsto \nabla(A(\mu, \cdot)). \tag{5}$$

Изучим поведение функции (5) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема IV [30]. *Существует такое полное метрическое пространство $\mathfrak{M}$, что для любого $n \geqslant 2$ найдется отображение (2), для которого функция (5) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра на $\mathfrak{M}$.*

В. М. Миллионщиков в работе [80] ввел верхние вспомогательные показатели системы (1), определяемые формулами

$$\overline{\nu}_k(A) = \overline{\lim_{T \to \infty}} \, \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln \delta_k(jT, (j-1)T), \quad k = 1, \ldots, n,$$

и нижние вспомогательные показатели —

$$\underline{\nu}_k(A) = \varliminf_{T\to\infty} \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln \delta_k(jT,(j-1)T), \quad k=1,\ldots,n,$$

где $\delta_k(t,\tau)$ — k-е сингулярное число оператора Коши $X_A(t,\tau)$ системы (1). По метрическому пространству $\mathfrak{M}$ и отображению (2) образуем функции

$$\mu \mapsto \overline{\nu}_k(A(\mu,\cdot)), \tag{6}$$

$$\mu \mapsto \underline{\nu}_k(A(\mu,\cdot)). \tag{7}$$

Изучим поведение функций (6), (7) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема V [26]. *Существует такое полное метрическое пространство $\mathfrak{M}$, что для любого $n \geqslant 2$ и каждого $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ найдется отображение (2), для которого функция (7) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра на $\mathfrak{M}$.*

Теорема VI [35]. *Существует такое полное метрическое пространство $\mathfrak{M}$, что для любого $n \geqslant 2$ при каждом $k \in \{2,\ldots,n-1\}$ найдется отображение (2), для которого функция (6) всюду разрывна и не принадлежит третьему классу Бэра на $\mathfrak{M}$, а при $k=1$ — не принадлежит второму.*

Следуя работе Н. А. Изобова [65], для произвольного отображения (2) обозначим через W_n подмножество тех значений параметра $\mu \in \mathfrak{M}$, при которых система $\dot{x} = A(\mu,t)x$ неправильна по Ляпунову, т. е. удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A(\mu,\cdot) > \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{Sp}A(\mu,\tau)d\,\tau.$$

Теорема VII [31]. *Для любого метрического пространства $\mathfrak{M}$ и каждого отображения (2), подмножество W_n является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\mathfrak{M}$.*

Теорема VIII [31]. *Существует такое полное метрическое пространство $\mathfrak{M}$, что для любого $n \geqslant 1$ найдется отображение (2) (а при $n>1$ еще и непрерывное по $\mu \in \mathfrak{M}$ равномерно по $t \in \mathbb{R}^+$), для которого подмножество W_n не является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве $\mathfrak{M}$.*

В. М. Миллионщиков в работах [103, 104, 105] предложил два расширения множества правильных линейных систем. Первое EI_n множество систем вида (1) таких, что для всякой непрерывной оператор-функции $B \in K_0$ система $\dot{y} = (A(t) + B(t))y$ имеет те же показатели Ляпунова, что и система (1). Второе GROD_n множество систем вида (1), которые заменой переменных $x = Q_A(t)y$, где $Q_A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая оператор-функция, удовлетворяющая условиям

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|Q_A(t)\| \leqslant 0, \quad \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|Q_A^{-1}(t)\| \leqslant 0,$$

приводимы к диагональным системам

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} p_1(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p_n(t) \end{pmatrix} y$$

с упорядоченной диагональю

$$p_1(t) \leqslant \ldots \leqslant p_n(t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

В докладе [106] утверждается справедливость включения $\mathrm{GROD}_n \subset \mathrm{EI}_n$ и поставлен вопрос о его строгости.

Теорема IX [48]. *Пусть $n \geqslant 2$, тогда $GROD_n \neq EI_n$.*

Напомним определение топологической энтропии динамической системы [70, стр. 120]. Пусть X— компактное метрическое пространство, а $f : X \to X$— непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x,y) = \max_{0\le i\le n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $B_f(x,\varepsilon,n)$ открытый шар $\{y \in X : d_n^f(x,y) < \varepsilon\}$. Множество $E \subset X$ называется (f,ε,n)-покрытием, если

$$X \subset \bigcup_{x\in E} B_f(x,\varepsilon,n).$$

Пусть $S_d(f,\varepsilon,n)$ обозначает минимальное количество элементов (f,ε,n)-покрытия. Топологической энтропией динамической системы, порожденной непрерывным отображением f называется

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln S_d(f,\varepsilon,n).$$

По метрическому пространству $\mathfrak{M}$ и непрерывному отображению

$$f : \mathfrak{M} \times X \to X, \tag{8}$$

образуем функцию

$$\mu \mapsto h_{\mathrm{top}}(f_\mu(\cdot)). \tag{9}$$

Изучим поведение функции (9) с точки зрения бэровской классификации. Напомним, что свойство точки топологического пространства называется *типичным по Бэру*, если множество точек, обладающих этим свойством, содержит всюду плотное множество типа G_δ, т. е. множество, представимое в виде счетного пересечения открытых подмножеств.

Теорема X [43]. *Для любого метрического пространства $\mathfrak{M}$ и каждого отображения (8), удовлетворяющего условию Липшица по $x \in X$ при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathfrak{M}$, функция (9) принадлежит второму классу Бэра, а если $\mathfrak{M}$ метризуемо полной метрикой, то в типичной по Бэру точке полунепрерывна снизу.*

Теорема XI [44]. *Существуют такие компактные метрические пространства $\mathfrak{M}$ и X, что для любого $K > 1$ найдется такое отображение (8), удовлетворяющее условию Липшица с константой K по $x \in X$ при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathfrak{M}$, что функция (9) не принадлежит первому классу Бэра.*

Глава I Некоторые факты и результаты из бэровской классификации функций

§ 1 Лебеговские множества бэровских функций

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное метрическое пространство. Напомним, что функциями *нулевого* класса Бэра на метрическом пространстве $\mathfrak{M}$ называются непрерывные функции и для всякого натурального числа p функциями *p-го класса* Бэра называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$-го класса.

Более тонкой классификацией разрывных функций является классификация функций при помощи их *лебеговских множеств* [120, стр. 223–224]. Пусть $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ — две системы подмножеств метрического пространства $\mathfrak{M}$, а f — отображение из $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{R}$. Если для любого $p \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in \mathfrak{M} : f(x) > p\}$ принадлежит системе $\mathcal{G}$, то скажем, что функция f принадлежит классу $(\mathcal{G}, *)$; если множество $\{x \in \mathfrak{M} : f(x) \geqslant p\}$ принадлежит системе $\mathcal{F}$, то функция f принадлежит классу $(*, \mathcal{F})$, если же $f \in (\mathcal{G}, *) \bigcap (*, \mathcal{F})$, то скажем, что функция f принадлежит классу $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$.

Рассмотрим ситуацию, когда $\mathcal{G}$ — система открытых подмножеств, а $\mathcal{F}$ — система замкнутых подмножеств метрического пространства $\mathfrak{M}$, $\mathcal{G}_\delta$ — система подмножеств метрического пространства $\mathfrak{M}$, которые можно представить в виде пересечения счетного числа множеств из системы $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}_\sigma$ — система подмножеств метрического пространства $\mathfrak{M}$, которые можно представить в виде объединения счетного числа множеств из системы $\mathcal{F}$ и т. д. Тогда [120, стр. 236] класс непрерывных функций $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ совпадает с нулевым классом Бэра на $\mathfrak{M}$, класс *полунепрерывных снизу* функций $(\mathcal{G}, *)$ — с классом функций, являющихся поточечными пределами неубывающих последовательностей непрерывных функций, класс *полунепрерывных сверху* функций $(*, \mathcal{F})$ — с классом функций, являющихся поточечными пределами невозрастающих последовательностей непрерывных функций, класс $(\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{G}_\delta)$ — с первым классом Бэра на $\mathfrak{M}$. Аналогично [120, стр. 231], функции второго класса Бэра принадлежат классу $(\mathcal{G}_{\delta\sigma}, \mathcal{F}_{\sigma\delta})$ и, возможно, какому-либо из классов $(\mathcal{F}_\sigma, *)$, $(*, \mathcal{G}_\delta)$ и т. д.

Доказательства формулируемых ниже утверждений не приводятся, поскольку близкие утверждения содержатся, например, в [73] или [120].

1. Пусть λ — функционал p-го класса Бэра на метрическом пространстве $\mathfrak{M}$. Тогда $\lambda\,|_E$ также является функционалом p-го класса Бэра, каково бы ни было подмножество $E \subset \mathfrak{M}$ [73, стр. 386].

2. Пусть отображение $\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{M}$ метрических пространств $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{M}$ непрерывно, а функционал $\lambda\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ принадлежит p-му классу Бэра. Тогда функционал $\lambda(\varphi(\cdot))$ принадлежит p-му классу Бэра на $\mathfrak{B}$ [73, стр. 386].

3. Пусть функционал $\lambda\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ принадлежит p-му классу Бэра, а функция $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ первому классу. Тогда функционал $\delta(\lambda(\cdot))$ принадлежит $p+1$-му классу Бэра на $\mathfrak{M}$ [73, стр. 385].

4. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность замкнутых подмножеств в $\mathfrak{M}$, такая, что $\mathfrak{M} = E_1 \bigcup E_2 \bigcup \ldots$, и пусть $\lambda|_{E_n}$ — функция класса $p \geqslant 1$ на E_n; тогда λ — функция класса p на $\mathfrak{M}$ [73, стр. 385].

5. Для того, чтобы характеристическая функция некоторого множества F была функцией второго (третьего) класса Бэра, необходимо и достаточно, чтобы F было множеством типа $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ и $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ (типа $\mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma}$ и $\mathcal{G}_{\delta\sigma\delta}$) [73, стр. 382].

6. Если функционал λ принадлежит первому классу Бэра, то для любого замкнутого подмножества $F \subset \mathbb{R}$ множество $\lambda^{-1}(F)$ является множеством типа $\mathcal{G}_\delta$ [73, стр. 382].

7. Если функционал λ принадлежит второму классу Бэра, то для любого замкнутого подмножества $F \subset \mathbb{R}$ множество $\lambda^{-1}(F)$ является множеством типа $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ [73, стр. 382].

8. Если функционал λ принадлежит третьему классу Бэра, то для любого замкнутого подмножества $F \subset \mathbb{R}$ множество $\lambda^{-1}(F)$ является множеством типа $\mathcal{G}_{\delta\sigma\delta}$ [73, стр. 382].

9. Пусть $\mathfrak{M}$ — полное метрическое пространство, тогда для любого бэровского функционала λ найдется всюду плотное множество A типа $\mathcal{G}_\delta$ такое, что сужение $\lambda|_A$ — непрерывно [73, стр. 409].

10. Любое замкнутое подмножество полного метрического пространства само является полным пространством (относительно индуцированной метрики) [73, стр. 419].

11. Пусть $Q_1, Q_2, \dots$ — всюду плотные подмножества типа G_δ в полном метрическом пространстве, тогда $\bigcap_i Q_i$ также является всюду плотным подмножеством типа G_δ [73, стр. 428].

12. Если функционалы λ_1 и λ_2 принадлежат p-му классу Бэра, то функционалы $\max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ и $\min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ принадлежат тому же классу Бэра [120, стр. 224].

13. Если функционал λ полунепрерывен сверху, то существует последовательность непрерывных функционалов $(\varphi_m)_{m=1}^{\infty}$ такая, что
$$\lambda = \inf_{m \in \mathbb{N}} \varphi_m$$
[120, стр. 237].

§ 2 Теоремы Р. Бэра, Л. В. Келдыш и следствия из них

Напомним, что свойство точки топологического пространства называется *типичным по Бэру*, если множество точек, обладающих этим свойством, содержит всюду плотное множество типа G_δ, т. е. множество, представимое в виде счетного пересечения открытых подмножеств.

Р. Бэр установил, в случае полного метрического пространства $\mathfrak{M}$, необходимое условие принадлежности функций первому классу Бэра.

Теорема I [120, стр. 241–242]. *Если функционал $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра, то в типичной по Бэру точке он непрерывен.*

Выведем несколько следствий из теоремы I для некоторых функций второго класса Бэра.

Лемма 1 [6]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — полное метрическое пространство. Тогда любой функционал $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$, представимый в виде поточечного предела невозрастающей последовательности функций первого класса Бэра, в типичной по Бэру точке полунепрерывен сверху.*

Доказательство. Поскольку функционал $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ представим в виде поточечного предела невозрастающей последовательности функций первого класса Бэра

$$\lambda(\mu) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(\mu),$$
$$\lambda_1(\mu) \geqslant \lambda_2(\mu) \geqslant \dots ,$$

то, в силу теоремы I, множество G_n точек непрерывности каждой функции λ_n является всюду плотным множеством типа $\mathcal{G}_\delta$. Пересечение всех G_n снова является всюду плотным множеством типа $\mathcal{G}_\delta$ (см. п. 11 § 1 гл. I), каждая точка которого является точкой непрерывности всех функционалов λ_n. Действительно, пусть $\mu_0 \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$ и $\varepsilon > 0$. При достаточно большом n окажется $\lambda_n(\mu_0) < \lambda(\mu_0)+\varepsilon$. Зафиксируем такое n, найдем $\mathcal{O}(\mu_0)$ окрестность точки μ_0 такую, что для всякого $\mu \in \mathcal{O}(\mu_0)$ будет $\lambda_n(\mu) < \lambda(\mu_0) + \varepsilon$. Так как $\lambda(\mu) \leqslant \lambda_n(\mu)$, то для $\mu \in \mathcal{O}(\mu_0)$ окажется $\lambda(\mu) < \lambda(\mu_0) + \varepsilon$, откуда и вытекает утверждение леммы 1.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — полное метрическое пространство. Тогда любой функционал $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ представимый в виде поточечного предела неубывающей последовательности функций первого класса Бэра, в типичной по Бэру точке полунепрерывен снизу.*

Установим несколько необходимых условий принадлежности функций 1-му, 2-му и 3-му классу Бэра.

На множестве последовательностей $\{\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots) : \mu_k \in \{0, 1\}\}$ введем метрику

$$d_0(\mu, \nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = \nu; \\ \frac{1}{\min\{k\colon \mu_k \neq \nu_k\}}, & \text{если } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Полученное компактное метрическое пространство обозначим через $\mathcal{B}$ [5, стр. 154].

Лемма 3. *Пусть λ — произвольный функционал на метрическом пространстве $\mathfrak{M}$. Если λ принадлежит первому классу Бэра, то для любой непрерывной функции $\varphi : \mathcal{B} \to \mathfrak{M}$ и всяких непересекающихся всюду* *плотных подмножеств* P_1, P_2, *содержащихся в* $\mathcal{B}$, *пересечение замыканий множеств*

$$\lambda(\varphi(P_1)) \quad и \quad \lambda(\varphi(P_2))$$

непусто.

Доказательство. Допустим противное. Пусть существует такая непрерывная функция $\varphi : \mathcal{B} \to \mathfrak{M}$, что пересечение замыканий указанных в лемме множеств пусто. Пусть Z_1 замыкание первого из этих множества, а Z_2 — замыкание второго из них. Следовательно, для любой точки $\mu_0 \in \mathcal{B}$ и любых двух последовательностей $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \mu_0,$$

верно неравенство

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\varphi(\nu_n)) \neq \lim_{n\to\infty} \lambda(\varphi(\xi_n)).$$

Следовательно, каждая точка $\mu_0 \in \mathcal{B}$ является точкой разрыва функции $\lambda(\varphi(\cdot))$. С другой стороны, функция $\lambda(\varphi(\cdot))$ принадлежит первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}$,а следовательно, в силу теоремы I, в $\mathcal{B}$ найдется точка непрерывности функции $\lambda(\varphi(\cdot))$. Полученное противоречие доказывает лемму 3.

Построим метрическое пространство $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ [5, стр. 154] следующим образом: точками пространства $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ являются, по определению, всевозможные (счетные) последовательности $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m, \ldots)$ натуральных чисел. Расстояние между двумя точками μ и ν определяется формулой

$$d(\mu, \nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = \nu; \\ \frac{1}{\min\{k:\, \mu_k \neq \nu_k\}}, & \text{если } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Для любого натурального числа q обозначим через P_q множество тех последовательностей из $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, у которых все члены, кроме, быть может, конечного числа, больше q. Обозначим через $\mathbf{E}$ пересечение всех множеств P_q, т. е. множество тех последовательностей, которые стремятся к бесконечности.

Р. Бэр доказал [129], что характеристическая функция множества $\mathbf{E}$ не принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Используя этот результат, докажем следующую лемму (необходимое условие принадлежности функционала второму классу Бэра).

Лемма 4 [22]. *Пусть λ — произвольный функционал на метрическом пространстве $\mathfrak{M}$. Если λ принадлежит второму классу Бэра, то для любой непрерывной функции $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{M}$ пересечение замыканий множеств*

$$\lambda(\varphi(\mathbf{E})) \quad \textit{и} \quad \lambda(\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{E}))$$

непусто.

Доказательство. Допустим противное. Пусть существует такая непрерывная функция $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{M}$, что пересечение замыканий указанных в лемме множеств пусто. Пусть Z_1 замыкание первого из этих множества, а Z_2 — замыкание второго. Так как отображение $\lambda(\varphi(\cdot))$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, то множества

$$\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_1)) \quad \text{и} \quad \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_2))$$

являются множествами типа $F_{\sigma\delta}$ в $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, а множества

$$\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(\mathbb{R} \setminus Z_1)) \quad \text{и} \quad \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(\mathbb{R} \setminus Z_2))$$

являются множествами типа $G_{\delta\sigma}$ в $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Заметим, что

$$\mathbf{E} \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_1)) \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(\mathbb{R} \setminus Z_2)) \subset \mathbf{E},$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{E} \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_2)) \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(\mathbb{R} \setminus Z_1)) \subset \mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{E},$$

а значит, множества $\mathbf{E}$ и $\mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{E}$ являются одновременно множествами типа $F_{\sigma\delta}$ и $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Следовательно, в силу п. 5 § 1 гл. I, характеристическая функция множества $\mathbf{E}$ является функцией второго класса Бэра на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, что противоречит результату Р. Бэра. Лемма 4 доказана.

Обозначим через $\mathbf{S}$ множество тех последовательностей

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m, \ldots)$$

из $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, у которых бесконечно много различных μ_i, каждое из которых повторяется бесконечное число раз. Л. В. Келдыш было установлено, что характеристическая функция множества $\mathbf{S}$ не принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ [72], [74]. Используя этот результат, докажем следующую лемму (необходимое условие принадлежности функционала третьему классу Бэра).

Лемма 5 [35]. *Пусть λ– произвольный функционал на метрическом пространстве $\mathfrak{M}$. Если λ принадлежит третьему классу Бэра на $\mathfrak{M}$, то для любой непрерывной функции $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{M}$ пересечение замыканий множеств*

$$\lambda(\varphi(\mathbf{S})) \text{ и } \lambda(\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{S}))$$

непусто.

Доказательство. Допустим противное. Пусть существует непрерывная функция $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{M}$ такая, что пересечение замыканий множеств

$$\lambda(\varphi(\mathbf{S})) \text{ и } \lambda(\varphi(\mathcal{B}(N) \setminus \mathbf{S}))$$

пусто. Пусть Z_1 замыкание множества $\lambda(\varphi(\mathbf{S}))$, а Z_2 замыкание множества $\lambda(\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{S}))$. Так как отображение $\lambda(\varphi(\cdot))$ принадлежит третьему классу на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, то множества

$$\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_1)) \text{ и } \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_2))$$

являются множествами типа $G_{\delta\sigma\delta}$ в $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, а множества

$$\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(R \setminus Z_1)) \text{ и } \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(R \setminus Z_2))$$

являются множествами типа $F_{\sigma\delta\sigma}$ в $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Заметим, что

$$\mathbf{S} \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_1)) \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(\mathbb{R} \setminus Z_2)) \subset \mathbf{S},$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{S} \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_2)) \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(\mathbb{R} \setminus Z_1)) \subset \mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{S},$$

а значит, множества $\mathbf{S}$ и $\mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{S}$ являются одновременно множествами типа $F_{\sigma\delta\sigma}$ и $G_{\delta\sigma\delta}$ в пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Следовательно, в силу п. 5 § 1 гл. I, характеристическая функция множества $\mathbf{S}$ является функцией третьего класса Бэра на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, что противоречит результату Л. В. Келдыш. Лемма 5 доказана.

§ 3 Необходимые условия принадлежности остаточных показателей первому классу Бэра на пространстве линейных систем с равномерной топологией

Для заданного натурального числа n рассмотрим линейное пространство M_n систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

где $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ — непрерывная ограниченная оператор-функция. Обозначим через M_n^u метрическое пространство, точками которого являются системы вида (1) (или просто оператор-функции, которыми эти системы определяются), с метрикой

$$\varrho(A, B) = \sup_{t \in [0, \infty)} \|A(t) - B(t)\|, \tag{2}$$

которая определяет топологию равномерной сходимости коэффициентов на $\mathbb{R}^+$. Заметим, что, хотя метрика (2) зависит от нормы $\|\cdot\|$, которая определена в пространстве End $\mathbb{R}^n$, но топология, задаваемая ею, не зависит от этой нормы. В дальнейшем, для определенности, будем считать, что норма в пространстве $\operatorname{End} \mathbb{R}^n$ определена следующей формулой

$$\|A\| = \sup_{(x,x)=1} \sqrt{(Ax, Ax)}, \quad (x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Для произвольной оператор-функции A обозначим через $X(A)$ множество тех оператор-функций, которые совпадают с A на всей полуоси кроме, быть может, некоторого отрезка конечной длины, $\overline{X}(A)$ – замыкание множества $X(A)$ в пространстве M_n^u. Отметим, что множество $\overline{X}(A)$ допускает простое описание

Лемма 6 [28]. *Для всякой функции $A \in M_n$ выполнено равенство*

$$\overline{X}(A) = \{B \in M_n : \lim_{t \to \infty} \|A(t) - B(t)\| = 0\}.$$

Доказательство.

1. Докажем включение

$$\overline{X}(A) \subset \{B \in M_n : \lim_{t \to \infty} \|A(t) - B(t)\| = 0\}.$$

Пусть $C \in \overline{X}(A)$ и $\varepsilon > 0$, тогда существует функция $B \in X(A)$ такая, что

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|C(t) - B(t)\| < \varepsilon,$$

и такое число $T_\varepsilon > 0$, что $A(t) = B(t)$ вне отрезка $[0;\, T_\varepsilon]$, следовательно,

$$\sup_{t\in[T_\varepsilon,\infty)} \|C(t) - A(t)\| = \sup_{t\in[T_\varepsilon,\infty)} \|C(t) - B(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\in[0,\infty)} \|C(t) - B(t)\| < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - C(t)\| = 0.$$

2. Докажем обратное включение

$$\overline{X}(A) \supset \{B \in M_n :\ \lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0\}.$$

Пусть $C \in M_n :\ \lim\limits_{t\to\infty} \|A(t) - C(t)\| = 0$. Построим последовательность функций $(A_m)_{m=1}^{\infty} \subset X(A)$, где

$$A_m(t) = \begin{cases} C(t), & 0 \leqslant t < m; \\ C(t)(m+1-t) + A(t)(t-m), & m \leqslant t \leqslant m+1; \\ A(t), & t > m+1. \end{cases}$$

Так как

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|A_m(t) - C(t)\| \leqslant \sup_{t\in[m+1,\infty)} \|A(t) - C(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|A_m(t) - C(t)\| =$$
$$= \sup_{t\in[m+1,\infty)} \|A(t) - C(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|C(t)(m+1-t) + A(t)(t-m) - C(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sup_{t\in[m,\infty)} \|A(t) - C(t)\|,$$

получаем

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0,\infty)} \|A_m(t) - C(t)\| \leqslant 2 \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[m,\infty)} \|A(t) - C(t)\| = 0.$$

Следовательно, последовательность $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ сходится к функции C в пространстве M_n^u.

Из пунктов 1 и 2 следует утверждение леммы 6.

Следуя [113], показатель $\lambda : M_n \to \mathbb{R}$ назовем остаточным, если для любой системы A и любой системы $B \in X(A)$ выполнено равенство $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Теорема II [18]. *Пусть остаточный показатель λ принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Тогда для любых двух функций $A, B \in M_n$, из условия*

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0$$

вытекает равенство $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Доказательство. Допустим противное, что существуют две функции $A, B \in M_n$, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0 \text{ и } \lambda(A) \neq \lambda(B).$$

В силу леммы 1, функция B принадлежит множеству $\overline{X}(A)$.

Пусть $C \in \overline{X}(A)$. Построим последовательность функций $(B_m)_{m=1}^{\infty}$, где

$$B_m(t) = \begin{cases} C(t), & \text{при } 0 \leqslant t < m; \\ C(t)(m+1-t) + B(t)(t-m), & \text{при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ B(t), & \text{при } t > m+1. \end{cases}$$

Так как

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|B_m(t) - C(t)\| \leqslant \sup_{t\in[m+1,\infty)} \|B(t) - C(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|B_m(t) - C(t)\| =$$

$$= \sup_{t\in[m+1,\infty)} \|B(t) - C(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|C(t)(m+1-t) + B(t)(t-m) - C(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{t\in[m,\infty)} \|B(t) - C(t)\|,$$

получаем

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0,\infty)} \|B_m(t) - C(t)\| \leqslant 2 \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[m,\infty)} \|B(t) - C(t)\| = 0.$$

Следовательно, последовательность функций $(B_m)_{m=1}^{\infty}$ сходится к функции C в пространстве M_n^u и, в силу остаточности показателя λ, имеем $\lambda(B_m) = \lambda(B)$.

Аналогично построим последовательность функций $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ сходящуюся к C такую, что $\lambda(A_m) = \lambda(A)$. Таким образом, каждая точка $C \in \overline{X}(A)$ не является точкой непрерывности показателя $\lambda|_{\overline{X}(A)}$.

С другой стороны, показатель λ принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u, следовательно, показатель λ принадлежит первому классу Бэра на множестве $\overline{X}(A)$. Так как множество $\overline{X}(A)$ является замкнутым, то его можно считать полным метрическим пространством с метрикой, индуцированной метрикой пространства M_n^u. В силу теоремы I § 2 гл. I, в этом пространстве должна существовать хотя бы одна точка непрерывности показателя $\lambda|_{\overline{X}(A)}$. Полученное противоречие доказывает теорему II.

Отметим, что для полунепрерывных остаточных показателей результат аналогичный теореме II был установлен И. Н. Сергеевым в работе [112].

§ 4 Критерий принадлежности остаточных показателей первому классу Бэра на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией

Наделим пространство M_n системой полунорм

$$\rho_k(A, B) \sup_{t\in[0,k]} \|A(t) - B(t)\|, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \tag{3}$$

которая определяет на пространстве M_n компактно-открытую топологию. Получившееся топологическое пространство, обозначим через M_n^c. Отметим, что топологическое пространство M_n^c можно превратить в полное метрическое пространство [73, стр. 221]. Заметим, что, хотя система полунорм (3) зависит от нормы $\|\cdot\|$, которая определена в пространстве $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$, но топология, задаваемая ею, не зависит от этой нормы.

Установим критерий принадлежности остаточного показателя первому классу Бэра на пространстве M_n^c.

Теорема III [28]. *Остаточный показатель λ принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^c тогда и только тогда, когда для любых двух функций $A, B \in M_n$ верно равенство $\lambda(A) = \lambda(B)$.*

Доказательство. Достаточность вытекает из того, что постоянная функция является остаточным показателем первого класса Бэра.

Докажем необходимость. Допустим противное, что существуют две функции $A, B \in M_n$, удовлетворяющие условиям

$$\lambda(A) \neq \lambda(B).$$

Обозначим

$$\mathcal{E} = \{C \in M_n : \sup_{t \geqslant 0} \|C(t)\| \leqslant \max\{\sup_{t \geqslant 0} \|A(t)\|, \sup_{t \geqslant 0} \|B(t)\|\}\}.$$

Пусть $C \in \mathcal{E}$. Построим последовательность функций $(B_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$, где

$$B_m(t) = \begin{cases} C(t), & \text{при } 0 \leqslant t < m; \\ C(t)(m+1-t) + B(t)(t-m), & \text{при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ B(t), & \text{при } t > m+1. \end{cases}$$

Из определения последовательности $(B_m)_{m=1}^{\infty}$ получаем

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{t \in [0,k]} \|B_m(t) - C(t)\| = 0.$$

Следовательно, последовательность $(B_m)_{m=1}^{\infty}$ сходится к функции C в пространстве M_n^c и, в силу остаточности показателя λ, имеем $\lambda(B_m) = \lambda(B)$.

Аналогично, построим последовательность $(A_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ сходящуюся к C такую, что $\lambda(A_m) = \lambda(A)$. Таким образом, каждая точка $C \in \mathcal{E}$ не является точкой непрерывности показателя $\lambda|_{\mathcal{E}}$.

С другой стороны показатель λ принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^c, следовательно функционал λ принадлежит первому классу Бэра на множестве $\mathcal{E}$.

Докажем, что множество $\mathcal{E}$ является замкнутым в пространстве M_n^c. Пусть $(V_m)_{m=1}^{\infty}$ произвольная последовательность функций из $\mathcal{E}$ такая, что

$$\lim_{m \to \infty} V_m = V_0. \tag{4}$$

Докажем, что функция V_0 принадлежит множеству $\mathcal{E}$. Пусть $t^* \in \mathbb{R}^+$ и $k > t^*$. Так как, в силу (4), имеем

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{t \in [0,k]} \|V_m(t) - V_0(t)\| = 0,$$

то получаем, что функция V_0 непрерывна в точке t^* и

$$V_0(t^*) \leqslant \max\{\sup_{t\geqslant 0} \|A(t)\|, \sup_{t\geqslant 0} \|B(t)\|\}.$$

Таким образом, множество $\mathcal{E}$ является замкнутым. Следовательно, его можно считать полным метрическим пространством с метрикой, индуцированной метрикой пространства M_n^c. В силу теоремы I § 2 гл. I, в этом пространстве должна существовать хотя бы одна точка непрерывности показателя $\lambda|_{\mathcal{E}}$. Полученное противоречие доказывает теорему III.

§ 5 Бэровские классы показателей на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из принадлежности функции p-му классу Бэра на пространстве M_n^c следует ее принадлежность тому же классу Бэра на пространстве M_n^u; если же функция не принадлежит p-му классу Бэра на пространстве M_n^u, то она не принадлежит этому классу на M_n^c.

В дальнейшем, будем часто рассматривать ситуацию, когда коэффициенты системы, непрерывные на полуоси времени, еще и непрерывно (возможно, равномерно по времени) зависят от параметра из некоторого метрического пространства. Тогда ляпуновские показатели такой системы (точнее, семейства систем) можно рассматривать как функционалы, определенные на этом метрическом пространстве.

Пусть $\mathfrak{M}$ метрическое пространство, а отображение

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n \tag{5}$$

непрерывно по совокупности переменных и ограничено по $t \in \mathbb{R}^+$ при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathfrak{M}$.

Лемма 7. *Отображение $\varphi : \mathfrak{M} \to M_n^c$, определяемое формулой $\varphi(\mu) = A(\mu, \cdot)$, является непрерывным.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $r \in \mathbb{N}$. В силу непрерывности отображения (5) для каждой точки $t \in [0, r]$ найдется ее окрестность $\mathcal{V}(t) \subset [0, r]$

и окрестность $\mathcal{U}_t(\mu_0)$ точки $\mu_0 \in \mathfrak{M}$ такие, что для любой точки $(\mu, \tau) \in \mathcal{U}_t(\mu_0) \times \mathcal{V}(t)$ выполнено неравенство

$$\|A(\mu_0, t) - A(\mu, \tau)\| < \varepsilon.$$

Из компактности отрезка $[0,\, r]$ следует существование конечного набора точек $(t_k)_{k=1}^m \subset [0,\, r]$ такого, что

$$[0,\, r] \subset \bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{V}(t_k).$$

Пусть

$$\mathcal{U}(\mu_0) = \bigcap_{k=1}^{m} \mathcal{U}_{t_k}(\mu_0).$$

Тогда для любого $\mu \in \mathcal{U}(\mu_0)$ выполнено неравенство

$$\sup_{t \in [0,\, r]} \|A(\mu_0, t) - A(\mu, t)\| < \varepsilon,$$

которое доказывает лемму 7.

Установим критерий принадлежности показателя p-му классу Бэра на пространстве M_n^c.

Теорема IV. *Показатель $\lambda : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве M_n^c тогда и только тогда, когда для любого метрического пространства $\mathfrak{M}$ и каждого отображения (5) функция $\mu \mapsto \lambda(A(\mu, \cdot))$ принадлежит p-му классу Бэра на $\mathfrak{M}$.*

Доказательство.

`Достаточность.` Пусть $\mathfrak{M} = M_n^c$. Рассмотрим отображение

$$P : M_n^c \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n,$$

определяемое формулой $P(A, t) = A(t)$. В силу определения, отображение P непрерывно по совокупности переменных и ограничено по второму аргументу при всяком фиксированном значении первого. В силу п. 2 § 1 гл. I, функционал $A \mapsto \lambda(P(A, \cdot))$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве M_n^c. Так как для любой системы $A \in M_n$ выполнено равенство $\lambda(A) = \lambda(P(A, \cdot))$, то функционал $\lambda : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве M_n^c.

`Необходимость.` Допустим, что существуют метрическое пространство $\mathfrak{M}$ и отображение P_0 вида (5) такие, что функция $\mu \mapsto \lambda(P_0(\mu, \cdot))$ не принадлежит p-му классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$.

В силу леммы 7, отображение $\varphi_0 : \mathfrak{M} \to M_n^c$, определяемое формулой $\varphi_0(\mu) = P_0(\mu, \cdot)$ является непрерывным, а следовательно сложная функция $\mu \mapsto \lambda(\varphi_0(\mu)) = \lambda(P_0(\mu, \cdot))$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$. Полученное противоречие, доказывает теорему IV.

Пусть $\mathfrak{M}$ метрическое пространство, а отображение

$$U : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n \tag{6}$$

является отображением вида (5) непрерывным по $\mu \in \mathfrak{M}$ равномерно по $t \in \mathbb{R}^+$.

Лемма 8. *Отображение $\psi : \mathfrak{M} \to M_n^u$, определяемое формулой $\varphi(\mu) = U(\mu, \cdot)$, является непрерывным.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности по $t \in \mathbb{R}^+$ отображения (6), найдется окрестность $\mathcal{U}(\mu_0)$ точки $\mu_0 \in \mathfrak{M}$ такая, что для каждого значения $\mu \in \mathcal{U}(\mu_0)$ и любого $t \in \mathbb{R}^+$ выполнено неравенство

$$\|A(\mu_0, t) - A(\mu, t)\| < \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\mu \in \mathcal{U}(\mu_0)$ выполнено неравенство

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(\mu_0, t) - A(\mu, t)\| < \varepsilon.$$

Лемма 8 доказана.

Установим критерий принадлежности показателя p-му классу Бэра на пространстве M_n^u.

Теорема V. *Показатель $\lambda : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве M_n^u тогда и только тогда, когда для любого метрического пространства $\mathfrak{M}$ и каждого отображения (6) функция $\mu \mapsto \lambda(U(\mu, \cdot))$ принадлежит p-му классу Бэра на $\mathfrak{M}$.*

Доказательство.

`Достаточность.` Пусть $\mathfrak{M} = M_n^u$. Рассмотрим отображение

$$U : M_n^u \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n,$$

определяемое формулой $U(A,t) = A(t)$. В силу определения, отображение U непрерывно по совокупности переменных, причем равномерно по $t \in \mathbb{R}^+$, и ограничено по второму аргументу при всяком фиксированном значении первого. В силу п. 2 § 1 гл. I, функционал $A \mapsto \lambda(U(A,\cdot))$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве M_n^u. Так как для любой системы $A \in M_n$ выполнено равенство $\lambda(A) = \lambda(U(A,\cdot))$, то функционал $\lambda : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве M_n^u.

`Необходимость.` Допустим, что существуют метрическое пространство $\mathfrak{M}$ и отображение U_0 вида (6) такие, что функция $\lambda(U_0(\mu,\cdot))$ не принадлежит p-му классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$.

В силу леммы 8, отображение $\varphi_0 : \mathfrak{M} \to M_n^u$, определяемое формулой $\varphi_0(\mu) = U_0(\mu,\cdot)$ является непрерывным, а следовательно функция $\mu \mapsto \lambda(\varphi_0(\mu)) = \lambda(U_0(\mu,\cdot))$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$. Полученное противоречие, доказывает теорему V.

Докажем теорему о непрерывной зависимости решений систем линейных уравнений от коэффициентов системы в удобной для дальнейшего использования форме. Для этого приведем (без доказательства) лемму Гронуолла-Беллмана [59, стр. 108].

Лемма 9. *Пусть*

$$f(t) \leqslant \alpha e^{\gamma(t-t_0)} + \beta \int\limits_{t_0}^{t} e^{\gamma(t-\tau)} p(\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

где $p(t)$ — неотрицательная непрерывная функция. Тогда

$$f(t) \leqslant \alpha e^{\gamma(t-t_0)+\beta \int\limits_{t_0}^{t} p(\tau) f(\tau)\, d\tau}.$$

Обозначим $X_A(t,\tau)$ — оператор Коши системы (1). Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По отображению (5), построим функцию

$$\mu \mapsto X_{A(\mu,\cdot)}(t,\tau). \tag{7}$$

Лемма 10. *Пусть $t \geqslant \tau \geqslant 0$. Тогда для любого отображения (5) функция (7) является непрерывной на пространстве $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть μ_0, $\mu \in \mathfrak{M}$. При помощи метода вариации произвольной постоянной для оператора Коши системы

$$\dot{x} = A(\mu_0, t)x$$

получаем

$$X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,\tau) = E + \int\limits_{\tau}^{t} A(\mu_0, s) X_{A(\mu_0,\cdot)}(s,\tau)\, ds.$$

Отсюда

$$\|X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,\tau)\| \leqslant \|E\| + \int\limits_{\tau}^{t} \|A(\mu_0, s)\| \cdot \|X_{A(\mu_0,\cdot)}(s,\tau)\|\, ds.$$

Используя оценку

$$a_{\mu_0} = \sup_{t \geqslant 0} \|A(\mu_0, t)\| < \infty,$$

и лемму Гронуолла-Беллмана, получаем

$$\|X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,\tau)\| \leqslant e^{a_{\mu_0}(t-\tau)}. \tag{8}$$

Представим систему

$$\dot{x} = A(\mu, t)x$$

в виде

$$\dot{x} = A(\mu_0, t)x + (A(\mu, t) - A(\mu_0, t))x.$$

При помощи метода вариации произвольной постоянной для оператора Коши этой системы получаем

$$\begin{gathered} X_{A(\mu,\cdot)}(t,\tau) = X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,\tau) + \\ + \int\limits_{\tau}^{t} X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,s)(A(\mu,s) - A(\mu_0,s)) X_{A(\mu,\cdot)}(s,\tau)\, ds. \end{gathered} \tag{9}$$

Отсюда, используя оценку (8), имеем

$$\|X_{A(\mu,\cdot)}(t,\tau)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,\tau)\| + \int\limits_{\tau}^{t} \|X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,s)\| \|A(\mu,s) - A(\mu_0,s)\| \|X_{A(\mu,\cdot)}(s,\tau)\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{a_{\mu_0}(t-\tau)} + \int\limits_{\tau}^{t} e^{a_{\mu_0}(t-s)} \|A(\mu, s) - A(\mu_0, s)\| \|X_{A(\mu,\cdot)}(s,\tau)\| \, ds.$$

По лемме Гронуолла-Беллмана, имеем

$$\|X_{A(\mu,\cdot)}(t,\tau)\| \leqslant e^{a_{\mu_0}(t-\tau)} e^{\int\limits_{\tau}^{t} \|A(\mu,s)-A(\mu_0,s)\| \, ds}.$$

Из этого неравенства и формулы (9) следует

$$\begin{gathered}
\|X_{A(\mu,\cdot)}(t,\tau) - X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,\tau)\| \leqslant \\
\leqslant \int\limits_{\tau}^{t} \|X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,s)\| \|A(\mu, s) - A(\mu_0, s)\| \|X_{A(\mu,\cdot)}(s,\tau)\| \, ds \leqslant \\
\leqslant \int\limits_{\tau}^{t} e^{a_{\mu_0}(t-s)} \|A(\mu, s) - A(\mu_0, s)\| e^{a_{\mu_0}(s-\tau)} e^{\int\limits_{\tau}^{s} \|A(\mu,q)-A(\mu_0,q)\| \, dq} \, ds = \\
= \int\limits_{\tau}^{t} e^{a_{\mu_0}(t-\tau)} e^{\int\limits_{\tau}^{s} \|A(\mu,q)-A(\mu_0,q)\| \, dq} \|A(\mu, s) - A(\mu_0, s)\| \, ds \leqslant \\
\leqslant e^{a_{\mu_0} t} \int\limits_{\tau}^{t} e^{\int\limits_{\tau}^{s} \|A(\mu,q)-A(\mu_0,q)\| \, dq} \|A(\mu, s) - A(\mu_0, s)\| \, ds = \\
= e^{a_{\mu_0} t} \left(e^{\int\limits_{\tau}^{t} \|A(\mu,s)-A(\mu_0,s)\| \, ds} - 1 \right).
\end{gathered} \tag{10}$$

Пусть число $T > t$. Из леммы 7 получаем

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \sup_{t \in [0;T]} \|A(\mu, t) - A(\mu_0, t)\| = 0$$

Тогда, в силу (10), получаем

$$\lim_{m \to \infty} \|X_{A(\mu,\cdot)}(t,\tau) - X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,\tau)\| = 0.$$

Следовательно, функция (7) является непрерывной на пространстве $\mathfrak{M}$. Лемма 10 доказана.

§ 6 Достаточные условия ляпуновской эквивалентности линейных систем

Для заданного натурального числа n рассмотрим линейную систему вида

$$\dot{y} = B(t)y, \qquad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{11}$$

где $B : \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$ — кусочно-непрерывная ограниченная оператор-функция. Напомним, что система (11) ляпуновски эквивалентна линейной дифференциальной системе (1), если существуют фундаментальные матрицы $Y_B(t)$, $X_A(t)$ этих систем, для которых выполнено неравенство [58, стр. 227]

$$\sup_{t \geqslant 0}(\|Y_B(t)X_A^{-1}(t)\| + \|X_A(t)Y_B^{-1}(t)\|) < \infty.$$

В книге [76] приведен целый ряд достаточных условий ляпуновской эквивалентности линейных систем, но, для дальнейшего изложения, нам потребуется достаточное условие ляпуновской эквивалентности линейных систем в следующей форме.

Лемма 11. *Если интеграл*

$$K = \int_0^{+\infty} e^{\tau^2}\|A(\tau) - B(\tau)\|\, d\tau \tag{12}$$

сходится, то системы (11) и (1) ляпуновски эквивалентны.

Доказательство. Обозначим

$$a = \sup_{t \geqslant 0}\|A(t)\|, \quad b = \sup_{t \geqslant 0}\|B(t)\|.$$

В силу сходимости интеграла (12), найдется такое $t_0 \geqslant \max\{2\sqrt{a}, 2\sqrt{b}\}$, что

$$\int_{t_0}^{+\infty} e^{\tau^2}\|A(\tau) - B(\tau)\|\, d\tau < \frac{1}{2}. \tag{13}$$

На пространстве W_{t_0} — непрерывных ограниченных матричных функций, заданных на $[t_0, +\infty)$, наделенном метрикой

$$\sup_{t \geqslant t_0}\|Z_1(t) - Z_2(t)\|,$$

рассмотрим интегральный оператор

$$F(Z(t)) = E + \int_t^{+\infty} X_A^{-1}(s,0)(B(s) - A(s))X_A(s,0)Z(s)\, ds, \tag{14}$$

где $X_A(t,0)$ — оператор Коши системы $\dot{x} = A(t)x$.

Докажем, что оператор F, определяемый формулой (14), сжимает W_{t_0}.

1. Покажем, что $F : W_{t_0} \to W_{t_0}$. Используя оценки

$$\|X_A(t,0)\| \leqslant e^{at}, \quad \|X_A^{-1}(t,0)\| \leqslant e^{at},$$

для любой функции $Z \in W_{t_0}$, получаем

$$\begin{gathered}\sup_{t\geqslant t_0}\|F(Z(t))\| \leqslant \\ \leqslant \|E\| + \int\limits_t^{+\infty} \|X_A^{-1}(s,0)\|\|(B(s)-A(s))\|\|X_A(s,0)\|\|Z(s)\|\,ds \leqslant \\ \leqslant 1 + \sup_{t\geqslant t_0}\|Z(t)\| \int\limits_{t_0}^{+\infty} \|X_A^{-1}(s,0)\|\|(B(s)-A(s))\|\|X_A(s,0)\|\,ds \leqslant \\ \leqslant 1 + \sup_{t\geqslant t_0}\|Z(t)\| \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{2as}\|(B(s)-A(s))\|\,ds \leqslant \\ \leqslant 1 + \sup_{t\geqslant t_0}\|Z(t)\| \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{s^2}\|(B(s)-A(s))\|\,ds \leqslant \\ \leqslant 1 + \tfrac{1}{2}\sup_{t\geqslant t_0}\|Z(t)\| < +\infty.\end{gathered}$$

Далее, для любых t_1, $t_2 : t_2 \geqslant t_1 \geqslant t_0$ получаем

$$\begin{gathered}\|F(Z(t_1)) - F(Z(t_2))\| \leqslant \\ \\ \leqslant \sup_{t\geqslant t_0}\|Z(t)\| \int\limits_{t_1}^{t_2} \|X_A^{-1}(s,0)\|\|(B(s)-A(s))\|\|X_A(s,0)\|\,ds \leqslant \\ \leqslant \sup_{t\geqslant t_0}\|Z(t)\| e^{2at_2}(a+b)(t_2-t_1).\end{gathered}$$

Таким образом, функция $F(Z(\cdot))$ непрерывна на $\mathbb{R}^+$. Следовательно $F : W_{t_0} \to W_{t_0}$.

2. Покажем, что для любых Z_1, $Z_2 \in W_{t_0}$ выполнено неравенство

$$\sup_{t\geqslant t_0}\|F(Z_2(t)) - F(Z_1(t))\| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{t\geqslant t_0}\|Z_2(t) - Z_1(t)\|.$$

В силу неравенства (13), имеем

$$\|F(Z_2(t)) - F(Z_1(t))\| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_t^{+\infty} \|X_A^{-1}(s,0)\| \|(B(s)-A(s))\| \|X_A(s,0)\| \|Z_2(s)-Z_1(s)\|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\geqslant t_0} \|Z_2(t)-Z_1(t)\| \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{2as} \|(B(s)-A(s))\|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\geqslant t_0} \|Z_2(t)-Z_1(t)\| \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{s^2} \|(B(s)-A(s))\|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2} \sup_{t\geqslant t_0} \|Z_2(t)-Z_1(t)\|,$$

беря супремум по $t \geqslant t_0$ от левой части неравенства, получаем

$$\sup_{t\geqslant t_0} \|F(Z_2(t)) - F(Z_1(t))\| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{t\geqslant t_0} \|Z_2(t)-Z_1(t)\|.$$

Итак, мы доказали, что оператор F сжимает W_{t_0}. Применяя принцип сжатых отображений, получаем, что уравнение

$$Z(t) = E + \int\limits_t^{+\infty} X_A^{-1}(s,0)(B(s)-A(s))X_A(s,0)Z(s)\, ds \tag{15}$$

имеет решение $\widetilde{Z}(t)$, непрерывное и ограниченное на полуоси $[t_0, +\infty)$ и притом единственное.

Дифференцируя по t тождество

$$X_A(t,0)\widetilde{Z}(t) = X_A(t,0)(\int\limits_t^{+\infty} X_A^{-1}(s,0)(B(s)-A(s))X_A(s,0)\widetilde{Z}(s)\, ds),$$

получаем, что матричная функция $Y_B(t) = X_A(t,0)\widetilde{Z}(t)$ является решением системы уравнений $\dot{y} = B(t)y$. В силу оценок

$$0 \leqslant \lim_{t\to+\infty} \|\widetilde{Z}(t) - E\| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{t\to+\infty} \sup_{t\geqslant t_0} \|\widetilde{Z}(t)\| \int\limits_t^{+\infty} \|X_A^{-1}(s,0)\| \|(B(s)-A(s))\| \|X_A(s,0)\|\, ds = 0,$$

для любого $t \geqslant t_0$, получаем

$$\det(Y_B(t)) = \det(X_A(t,0)\widetilde{Z}(t)) \neq 0.$$

Таким образом, матричная функция $Y_B(t)$ является фундаментальной матрицей для системы уравнений $\dot{y} = B(t)y$.

Пусть

$$N = \sup_{t \geqslant t_0} \|\widetilde{Z}(t)\| < \infty.$$

В силу (15), для матрицы $Y_B(t)X_A^{-1}(t,0)$, при $t \geqslant t_0$, получаем

$$Y_B(t)X_A^{-1}(t,0) = X_A(t,0)\widetilde{Z}(t)X_A^{-1}(t,0) =$$
$$= X_A(t,0)(E + \int\limits_t^{+\infty} X_A^{-1}(s,0)(B(s)-A(s))X_A(s,0)\widetilde{Z}(s)\,ds)X_A^{-1}(t,0) =$$
$$= E + X_A(t,0)(\int\limits_t^{+\infty} X_A^{-1}(s,0)(B(s)-A(s))X_A(s,0)\widetilde{Z}(s)\,ds)X_A^{-1}(t,0).$$

Следовательно, имеем

$$\begin{gathered}\|Y_B(t)X_A^{-1}(t,0)\| \leqslant \\ \leqslant 1 + e^{2at}\int\limits_t^{+\infty} \|X_A^{-1}(s,0)\|\|B(s)-A(s)\|\|X_A(s,0)\|\|\widetilde{Z}(s)\|\,ds \leqslant \\ \leqslant 1 + Ne^{2at}\int\limits_t^{+\infty} e^{2as}\|B(s)-A(s)\|\,ds \leqslant \\ \leqslant 1 + N\int\limits_t^{+\infty} e^{4as}\|B(s)-A(s)\|\,ds \leqslant \\ \leqslant 1 + N\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{s^2}\|B(s)-A(s)\|\,ds \leqslant 1 + \tfrac{N}{2}.\end{gathered} \tag{16}$$

При $t < t_0$, найдется такое $C > 0$, что

$$\|Y_B(t)X_A^{-1}(t,0)\| \leqslant Ce^{bt}e^{at} \leqslant Ce^{(a+b)t_0} < \infty. \tag{17}$$

Таким образом, из (16) и (17) следует

$$\|Y_B(t)X_A^{-1}(t,0)\| < \infty, \text{при } t \geqslant 0.$$

Меняя в предыдущих рассуждениях системы A и B местами, получаем

$$\|X_A(t)Y_B^{-1}(t,0)\| < \infty, \text{при } t \geqslant 0.$$

Лемма 11 доказана.

Следуя [113], показатель λ назовем *ляпуновски инвариантным*, если для любых двух ляпуновски эквивалентных систем A и B выполнено равенство $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ метрическое пространство, а отображение

$$B : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n \tag{18}$$

удовлетворяет двум условиям:

1. кусочно-непрерывно и ограничено по $t \in \mathbb{R}^+$ при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathfrak{M}$;

2. для любой точки $\mu^* \in \mathfrak{M}$ и любого $T > 0$ найдется такая окрестность $\mathcal{U}(\mu^*)$ точки μ^*, что для любого $\mu \in \mathcal{U}(\mu^*)$ выполнено тождество $B(\mu, t)|_{[0,T]} \equiv B(\mu^*, t)|_{[0,T]}$.

Лемма 12. *Пусть λ ляпуновски инвариантный показатель. Тогда для любого метрического пространства $\mathfrak{M}$ и отображения (18) существует такое отображение*

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\,\mathbb{R}^n \tag{19}$$

непрерывное по совокупности переменных и ограниченное по t при всяком фиксированном μ, что для любого $\mu \in \mathfrak{M}$ выполнено равенство $\lambda(A(\mu, \cdot)) = \lambda(B(\mu, \cdot))$.

Доказательство. По точкам разрыва $(\xi_m)_{m=1}^{\infty}$ кусочно-непрерывной функции $B(\mu, \cdot)$ и последовательности положительных чисел $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ такой, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{(\xi_m+\varepsilon_m)^2}\varepsilon_m \leqslant 1.$$

построим функцию $A(\mu, \cdot)$ следующим образом

$$A(\mu, t) = \begin{cases} K_m \cdot (t - \xi_m - \varepsilon_m) + B(\mu, \xi_m + \varepsilon_m), & \text{при } t \in [\xi_m - \varepsilon_m; \xi_m + \varepsilon_m]; \\ B(\mu, t), & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

$$K_m = \frac{B(\mu, \xi_m + \varepsilon_m) - B(\mu, \xi_m - \varepsilon_m)}{2\varepsilon_m}.$$

Эта функция непрерывна по $t \in \mathbb{R}^+$. Действительно, в точках непрерывности функции $B(\mu, \cdot)$, которые не принадлежат объединению отрезков $\bigcup\limits_m [\xi_m - \varepsilon_m, \xi_m + \varepsilon_m]$ функция $A(\mu, \cdot)$ совпадает с функцией $B(\mu, \cdot)$, а на любом из отрезков $[\xi_m - \varepsilon_m, \xi_m + \varepsilon_m]$ график функции $A(\mu, \cdot)$ представляет собой отрезок прямой, который соединяет точку с координатами $(\xi_m - \varepsilon_m, B(\mu, \xi_m - \varepsilon_m))$ и точку с координатами $(\xi_m + \varepsilon_m, B(\mu, \xi_m + \varepsilon_m))$. Так как

$$\int\limits_0^\infty e^{t^2} \|A(\mu, t) - B(\mu, t)\| \, dt =$$

$$= \sum_{m=1}^\infty \int\limits_{\xi_m - \varepsilon_m}^{\xi_m + \varepsilon_m} e^{t^2} \|A(\mu, t) - B(\mu, t)\| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{t \geqslant 0} \|A(\mu, t) - B(\mu, t)\| \sum_{m=1}^\infty e^{(\xi_m + \varepsilon_m)^2} \varepsilon_m \leqslant 4,$$

в силу леммы 11, то система $\dot{y} = A(\mu, t) y$ ляпуновски эквивалентна системе $\dot{x} = B(\mu, t) x$, а следовательно для любого $\mu \in \mathfrak{M}$ верно равенство $\lambda(A(\mu, \cdot)) = \lambda(B(\mu, \cdot))$.

Рассмотрим отображение $A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End} \mathbb{R}^n$, определяемое формулой

$$(\mu, t) \mapsto A(\mu, t).$$

Это отображение непрерывно по совокупности переменных. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$, $(\mu^*, t^*) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+$ и $m > t^* + 1$. Возьмем такую окрестность $\mathcal{U}(\mu^*)$, что $B(\mu, t)|_{[0,m]} = B(\mu^*, t)|_{[0,m]}$, а $\delta \in (0, 1)$ такое, что для любого $t \in (t^* - \delta, t^* + \delta)$ выполнено неравенство

$$\|A(\mu^*, t) - A(\mu^*, t^*)\| < \varepsilon.$$

Тогда для любой точки (μ, t) такой, что $\mu \in \mathcal{U}(\mu^*)$ и $|t - t^*| < \delta$, в силу тождества $A(\mu^*, t)|_{[0,m-1]} \equiv A(\mu, t)|_{[0,m-1]}$, выполнено неравенство

$$\|A(\mu^*, t^*) - A(\mu, t)\| = \|A(\mu^*, t^*) - A(\mu^*, t)\| < \varepsilon.$$

Лемма 12 доказана.

Глава II Бэровская классификация мажорант и минорант показателей Ляпунова

§ 1 Уточнение бэровского класса показателей Ляпунова на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

с непрерывной и ограниченной на полупрямой $t \in \mathbb{R}^+$ оператор-функцией. В работе [81], для любого $k \in \{1, \dots, n\}$, получены формулы для показателей Ляпунова

$$\begin{gathered} \lambda_k(A) = \lim_{m\to\infty} a_m^k(A), \\ a_m^k(A) = \lim_{s\to\infty} \min_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \max_{j\in\{m,\dots,s\}} \tfrac{1}{j} \ln \|X_A(j,0)|_L\|, \end{gathered} \tag{2}$$

где $G_k(\mathbb{R}^n)$ — множество k-мерных векторных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, $X_A(t,0)|_L$ — сужение оператора Коши системы (1) на подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$. Из формулы (2) и леммы 10 § 5 гл. I получаем, что показатели Ляпунова принадлежат второму классу Бэра на пространствах M_n^u и M_n^c. Более того, они представимы в виде поточечного предела невозрастающей последовательности функций $(a_m^k)_{m=1}^\infty$, которые является функциями первого класса Бэра на пространствах M_n^u и M_n^c.

Докажем, что формула (2) является оптимальной не только количеству предельных переходов, но и по типу монотонности последовательности, от которой берется внешний предел.

Теорема I [37]. *Пусть $n \geqslant 2$, тогда для всякого $k \in \{1, \dots, n\}$ функция $\lambda_k(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ не может быть представлена в виде поточечного предела неубывающей последовательности функций первого класса Бэра на пространстве M_n^u.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда, в силу леммы 2 § 2 гл. I, для любой точки $A \in M_n$ в типичной по Бэру точке множества $\overline{X}(A)$, рассматриваемого как полное метрическое пространство с метрикой, индуцированной из M_n^u, функция $\lambda_k|_{\overline{X}(A)}$ полунепрерывна снизу. Из формулы (2) и леммы 1 § 2 гл. I следует, что в типичной по Бэру точке множества

$\overline{X}(A)$ функция $\lambda_k|_{\overline{X}(A)}$ полунепрерывна сверху. Таким образом, для любой точки $A \in M_n$ множество $\overline{X}(A)$ содержит хотя бы одну точку непрерывности функции $\lambda_k|_{\overline{X}(A)}$. Докажем, что для любой системы $B \in \overline{X}(A)$ выполнено равенство

$$\lambda_k(A) = \lambda_k(B). \tag{3}$$

Допустим противное, что существуют две функции $A, B \in M_n$, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0, \text{ и } \lambda_k(A) \neq \lambda_k(B).$$

Пусть $C \in \overline{X}(A)$. Построим последовательность функций $(B_m)_{m=1}^{\infty}$, где

$$B_m(t) = \begin{cases} C(t), & \text{при } 0 \leqslant t < m; \\ C(t)(m+1-t) + B(t)(t-m), & \text{при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ B(t), & \text{при } t > m+1. \end{cases}$$

Так как

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|B_m(t) - C(t)\| \leqslant \sup_{t\in[m+1,\infty)} \|B(t) - C(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|B_m(t) - C(t)\| =$$

$$= \sup_{t\in[m+1,\infty)} \|B(t) - C(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|C(t)(m+1-t) + B(t)(t-m) - C(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{t\in[m,\infty)} \|B(t) - C(t)\|,$$

получаем

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0,\infty)} \|B_m(t) - C(t)\| \leqslant 2 \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[m,\infty)} \|B(t) - C(t)\| = 0.$$

Следовательно, последовательность $(B_m)_{m=1}^{\infty}$ сходится к функции C в пространстве M_n^u и, в силу остаточности функционала λ_k, имеем $\lambda_k(B_m) = \lambda_k(B)$. Аналогично построим последовательность $(A_m)_{m=1}^{\infty}$, сходящуюся к C, для которой выполнено равенство $\lambda_k(A_m) = \lambda_k(A)$. Таким образом, каждая точка $C \in \overline{X}(A)$ не является точкой непрерывности функционала $\lambda_k|_{\overline{X}(A)}$. Полученное противоречие доказывает равенство (3).

С другой стороны, рассмотрим исходную систему

$$\dot{x} = \operatorname{diag}\{\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k-1}, A(t), 3, \ldots, 3\}x,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin(\ln t) + \cos(\ln t) - 1,02 & 0 \\ 0 & -0{,}51 \end{pmatrix} x, \quad t \geqslant 1,$$

с показателями Ляпунова

$$\lambda_1(A) = -1, \ldots, \lambda_{k-1}(A) = -1,$$

$$\lambda_k(A) = -0{,}51,$$

$$\lambda_{k+1}(A) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}(t \sin(\ln t) - 1,02t + 1,02) = -0,02,$$

$$\lambda_{k+2}(A) =, \ldots, \lambda_n(A) = 3,$$

и возмущенную систему

$$\dot{y} = \mathrm{diag}\{\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k-1}, B(t), 3, \ldots, 3\}y,$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \sin(\ln t) + \cos(\ln t) - 1,02 & e^{-0{,}51t} \\ 0 & -0,51 \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 1.$$

Эта система имеет решения

$$x_k(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{t\sin(\ln t) - 1{,}02t + 1{,}02} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_{k+1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{t\sin(\ln t) - 1{,}02t - 0{,}51} \int\limits_1^t e^{-\tau\sin(\ln\tau)}\, d\tau \\ e^{-0{,}51t + 0{,}51} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим две последовательности $e^{2\pi m - \frac{\pi}{2}}$ и $e^{2\pi m - \frac{2\pi}{3}}$. Для любого

$$\tau \in [e^{2\pi m - \frac{2\pi}{3}}; e^{2\pi m - \frac{\pi}{2}}]$$

справедливы неравенства

$$2\pi m - \frac{2\pi}{3} \leqslant \ln\tau \leqslant 2\pi m - \frac{\pi}{2},$$

$$\sin\ln\tau \leqslant \sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$-\tau\sin(\ln\tau) \geqslant \frac{\sqrt{3}\tau}{2}.$$

Следовательно

$$\int\limits_{e^{2\pi m-\frac{2\pi}{3}}}^{e^{2\pi m-\frac{\pi}{2}}} e^{-\tau\sin(\ln\tau)}\,d\tau \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{2\pi m-\frac{\pi}{2}}} - e^{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{2\pi m-\frac{2\pi}{3}}}) = \frac{2}{\sqrt{3}}(1-e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{12}})e^{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{2\pi m-\frac{\pi}{2}}}.$$

Используя последнее неравенство, получаем

$$e^{e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}\sin\ln e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-1{,}02e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-0{,}51}\int\limits_{1}^{e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}} e^{-\tau\sin\ln\tau}\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant e^{e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-1{,}02e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-0{,}51}\int\limits_{e^{2\pi m-\frac{2\pi}{3}}}^{e^{2\pi m-\frac{\pi}{2}}} e^{-\tau\sin\ln\tau}\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant e^{e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-1{,}02e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-0{,}51}\frac{2}{\sqrt{3}}(1-e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{12}})e^{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{2\pi m-\frac{\pi}{2}}}.$$

Следовательно характеристический показатель решения x_{k+1} не менее $-0,02 + e^{\ln(\frac{\sqrt{3}}{2})-\pi}$, а решения x_k равен $-0,02$. Таким образом, показатели возмущенной системы удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_1(B) =, \ldots, \lambda_{k-1}(B) = -1,$$

$$\lambda_k(B) = -0{,}02, \quad \lambda_{k+1}(B) \geqslant -0,02 + e^{\ln(\frac{\sqrt{3}}{2})-\pi},$$

$$\lambda_{k+2}(B) =, \ldots, \lambda_n(B) = 3.$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty}\|A(t)-B(t)\| = \lim_{t\to\infty} e^{-0{,}51t} = 0,$$

то получаем противоречие с (3). Теорема I доказана.

В случае $n = 1$, для показателя Ляпунова системы (1) справедлива формула

$$\lambda_1(A) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\int\limits_0^t A(\tau)\,d\tau,$$

а следовательно функция $\lambda_1(\cdot) : M_1 \to \mathbb{R}$ является непрерывной на пространстве M_1^u.

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из теоремы I следует, что для $n \geqslant 2$ и каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_k(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ не может быть представлена в виде поточечного предела неубывающей последовательности функций первого класса Бэра на пространстве M_n^c. Установим этот факт для любого $n \in \mathbb{N}$, не опираясь на теорему I.

Теорема II [36]. *Пусть $n \geqslant 1$, тогда для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_k(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ не может быть представлена в виде поточечного предела неубывающей последовательности функций первого класса Бэра на пространстве M_n^c.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда, в силу леммы 2 § 2 гл. I, в типичной по Бэру точке множества

$$\mathcal{E} = \{A \in M_n : \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(t)\| \leqslant 1\},$$

рассматриваемого как полное метрическое пространство с метрикой, индуцированной из M_n^c, функция $\lambda_k|_{\mathcal{E}}$ полунепрерывна снизу. Из формулы (2) и леммы 1 § 2 гл. I следует, что в типичной по Бэру точке множества $\mathcal{E}$ функция $\lambda_k|_{\mathcal{E}}$ полунепрерывна сверху. Таким образом, множество $\mathcal{E}$ содержит хотя бы одну точку непрерывности функции $\lambda_k|_{\mathcal{E}}$. Докажем, что для любой системы $B \in \mathcal{E}$ выполнено равенство

$$\lambda_k(A) = \lambda_k(B). \tag{4}$$

Допустим противное, что существуют две функции $A, B \in \mathcal{E}$, удовлетворяющие условию

$$\lambda_k(A) \neq \lambda_k(B).$$

Пусть $C \in \mathcal{E}$. Построим последовательность функций $(B_m)_{m=1}^{\infty}$, где

$$B_m(t) = \begin{cases} C(t), & \text{при } 0 \leqslant t < m; \\ C(t)(m+1-t) + B(t)(t-m), & \text{при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ B(t), & \text{при } t > m+1. \end{cases}$$

Для любого $k < m$ выполнено равенство

$$\sup_{t\in[0,k]} \|B_m(t) - C(t)\| = 0,$$

следовательно

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0,k]} \|B_m(t) - C(t)\| = 0.$$

Таким образом, последовательность $(B_m)_{m=1}^{\infty}$ сходится к функции C в пространстве M_n^c и, в силу остаточности функционала λ_k, имеем $\lambda_k(B_m) = \lambda_k(B)$. Аналогично построим последовательность $(A_m)_{m=1}^{\infty}$, сходящуюся к C, для которой выполнено равенство $\lambda_k(A_m) = \lambda_k(A)$. Следовательно, каждая точка $C \in \mathcal{E}$ не является точкой непрерывности функционала $\lambda_k|_{\mathcal{E}}$. Полученное противоречие доказывает равенство (4).

С другой стороны, рассмотрим две диагональные системы

$$\dot{x} = \operatorname{diag}\{1, \ldots, 1\}x,$$

$$\dot{y} = \operatorname{diag}\{0, \ldots, 0\}y.$$

Для первой системы $\lambda_k = 1$, а для второй $\lambda_k = 0$. Таким образом, получаем противоречие с (4). Теорема II доказана.

§ 2 Точный бэровский класс мажорант показателей Ляпунова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией

Обозначим через $\overline{\lambda}_k(A)$ минимальную полунепрерывной сверху мажоранту k-го показателя Ляпунова системы (1), определяемую формулой

$$\overline{\lambda}_k(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\{B:\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} \|B(t)\|<\varepsilon\}} \lambda_k(A+B),$$

В докладе [98] поставлена задача о наименьшем классе Бэра, которому принадлежит функция $\overline{\lambda}_k(\cdot)$ на пространстве M_n^c, а в [118] установлено, что она принадлежит второму классу Бэра. Следующая теорема утверждает, что она не принадлежит первому классу Бэра.

Теорема III [28]. *Для $n \geqslant 1$ и всякого $k \in \{1,\ldots,n\}$ функция $\overline{\lambda}_k(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Доказательство. Рассмотрим две диагональные системы

$$\dot{x} = \mathrm{diag}\{1,\ldots,1\}x,$$

$$\dot{y} = \mathrm{diag}\{0,\ldots,0\}y.$$

Для первой системы $\overline{\lambda}_k = 1$, а для второй $\overline{\lambda}_k = 0$. Следовательно, в силу теоремы III § 4 гл. I, функция $\overline{\lambda}_k(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^c. Теорема III доказана.

Из теоремы III и теоремы IV § 5 гл. I получаем

Следствие 1. *Существует такое полное метрическое пространство $\mathfrak{M}$, что для любого $n \geqslant 1$ и каждого $k \in \{1,\ldots,n\}$ найдется отображение*

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$$

непрерывное по совокупности переменных и ограниченное по t при всяком фиксированном значении μ, для которого функция $\mu \mapsto \overline{\lambda}_k(A(\mu,\cdot))$ всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра на $\mathfrak{M}$.

§ 3 Точный бэровский класс миноранты старшего показателя Ляпунова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией

Через $\underline{\lambda}_n$ обозначим максимальную полунепрерывную снизу миноранту старшего показателя Ляпунова как функции на пространстве M_n^u, т. е.

$$\underline{\lambda}_n(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{\{B\colon \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} \|B(t)\| < \varepsilon\}} \lambda_n(A+B).$$

В докладе [102] была поставлена задача о минимальном классе Бэра, которому принадлежит функция $\underline{\lambda}_n(\cdot)$ на пространстве M_n^c. В работе [11] установлена принадлежность функции $\underline{\lambda}_n(\cdot)$ третьему классу Бэра на пространстве M_n^c (ранее это было установлено для $n = 3$ в работе [115]). При

$n = 1$ максимальная полунепрерывная снизу миноранта старшего показателя Ляпунова совпадает с показателем Ляпунова, а следовательно принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_1^c.

Для доказательства непринадлежности функции $\underline{\lambda}_n : M_n \to \mathbb{R}$ второму классу Бэра на пространстве M_n^c нам понадобятся несколько следующих результатов и определений.

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} u_1(t) & 0 \\ 0 & u_2(t) \end{pmatrix} x.$$

Возьмем произвольные положительные числа ε и T. Пусть $[p_k, p_{k+1})$, $p_k = l_k T$ интервал максимальной длины такой, что для всех sT из этого промежутка выполнено одно из неравенств

$$|\int\limits_{sT}^{(s+1)T} (u_1(t) - u_2(t))\,dt| \leqslant \varepsilon T,$$

$$\int\limits_{sT}^{(s+1)T} (u_2(t) - u_1(t))\,dt > \varepsilon T,$$

$$\int\limits_{sT}^{(s+1)T} (u_1(t) - u_2(t))\,dt > \varepsilon T,$$

Пусть $r_T(t)$, $R_T(t)$ — функции, определяемые равенствами

$$\int\limits_{sT}^{(s+1)T} r_T(t)\,dt = \min_{i=1,\,2}(\int\limits_{sT}^{(s+1)T} u_i(t)\,dt)$$

$$\int\limits_{sT}^{(s+1)T} R_T(t)\,dt = \max_{i=1,\,2}(\int\limits_{sT}^{(s+1)T} u_i(t)\,dt).$$

В [62] доказано, что

$$\begin{gathered} \underline{\lambda}_2 = \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{T\to\infty} \varlimsup_{t\to\infty} \Psi(\varepsilon, T, t), \\ \Psi(\varepsilon, T, t) = \frac{\sup\limits_{\theta,\eta,\tau}\left(\int\limits_0^\tau R_T(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_\theta^\eta (R_T(\zeta) - r_T(\zeta))\,d\zeta + \int\limits_0^t r_T(\zeta)\,d\zeta\right)}{\tau + t} \end{gathered} \tag{5}$$

и супремум вычисляется по всем θ и η, принадлежащим всякому k-му отрезку

$$\max\{\tau, p_k\} \leqslant \theta \leqslant \eta \leqslant \max\{t, p_{k+1}\}$$

и всем $\tau \leqslant t = \text{fix}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ метрическое пространство, а отображение

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n \tag{6}$$

непрерывно по совокупности переменных и ограничено по второму аргументу при всяком фиксированном значении первого.

Теорема IV. *Если $n \geqslant 2$, то для $\mathfrak{M} = \mathcal{B}(\mathbb{N})$ существует отображение (6) такое, что функция $\mu \mapsto \underline{\lambda}_n(A(\mu, \cdot))$ всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.*

Доказательство. Каждому $\mu = (\mu_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ поставим в соответствие систему уравнений

$$\dot{x} = U(\mu, t)x$$

с кусочно-непрерывной функцией

$$U(\mu, t) = \begin{pmatrix} u(\mu, t) & 0 \\ 0 & -u(\mu, t) \end{pmatrix} x,$$

где

$$u(\mu, t) = \begin{cases} 0, & \text{при } \tau_k \leqslant t < t_k; \\ 1, & \text{остальных } t, \end{cases}$$

$$\tau_k = \sum_{i=1}^{k} i^2 + i - \min\{k, \mu_{[\log_2 k]}\},$$

$$t_k = \sum_{i=1}^{k} i^2 + i, \quad k = 3, 4, 5, \ldots .$$

Отметим несколько свойств разбиений $(\tau_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(t_k)_{k=1}^{\infty}$.

1. Для любого $k = 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства

$$\tau_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2} - \min\{k, \mu_{[\log_2 k]}\} \leqslant 2\frac{(3k)^3}{6} = 9k^3,$$

$$\tau_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2} - \min\{k, \mu_{[\log_2 k]}\} \geqslant \frac{k^3}{6}.$$

2. Аналогично получаем

$$t_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2} \leqslant 2\frac{(3k)^3}{6} = 9k^3,$$

$$t_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2} \geqslant \frac{k^3}{6}.$$

3. Для любого $m = 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства

$$\sum_{l=1}^{2s} (\tau_{m+l} - t_{m+l-1})(-1)^l =$$

$$-((m+1)^2 + (m+1) - \min\{m+1, \mu_{[\log_2(m+1)]}\}) +$$

$$+((m+2)^2 + (m+2) - \min\{m+2, \mu_{[\log_2(m+2)]}\}) - \ldots$$

$$\ldots - ((m+2s-1)^2 + (m+2s-1) - \min\{m+2s-1, \mu_{[\log_2(m+2s-1)]}\}) +$$

$$+((m+2s)^2 + (m+2s) - \min\{m+2s, \mu_{[\log_2(m+2s)]}\}) \leqslant$$

$$\leqslant 2m + 3 + m + 2 + \ldots + 2m + 4s - 1 + m + 2s \leqslant 3ms + 3(s+1)^2.$$

4. Аналогично для любого $m = 1, 2, \ldots$, получаем

$$\sum_{l=1}^{2s+1} (\tau_{m+l} - t_{m+l-1})(-1)^{l+1} =$$

$$((m+1)^2 + (m+1) - \min\{m+1, \mu_{[\log_2(m+1)]}\}) -$$

$$-((m+2)^2 + (m+2) - \min\{m+2, \mu_{[\log_2(m+2)]}\}) +$$

$$+((m+3)^2 + (m+3) - \min\{m+3, \mu_{[\log_2(m+3)]}\}) - \ldots$$

$$\ldots - ((m+2s)^2 + (m+2s) - \min\{m+2s, \mu_{[\log_2(m+2s)]}\}) +$$

$$+((m+2s+1)^2 + (m+2s+1) - \min\{m+2s+1, \mu_{[\log_2(m+2s+1)]}\}) \leqslant$$

$$\leqslant ((m+1)^2 + (m+1) - \min\{m+1, \mu_{[\log_2(m+1)]}\}) +$$

$$+2m + 5 + m + 3 + \ldots + 2m + 4s + 1 + m + 2s + 1 \leqslant$$

$$\leqslant 3(m+1)^2 + 3ms + 2s + 3(s+1)^2.$$

Для каждого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ вычислим $\underline{\lambda}_2(U(\mu,\cdot))$. Пусть $\mu \notin \mathbf{E}$, тогда существуют подпоследовательность $(\mu_{[\log_2 k']})_{k'=1}^{\infty}$ и натуральное число q такие, что $\mu_{[\log_2 k']} = q$. Возьмем произвольное число $T > 2q$. Пусть

$$s_{\min}(k') = \min\{s|\, sT > t_{2^{k'}}\},$$

$$s_{\max}(k') = \max\{s|\, sT \leqslant t_{2^{k'+1}}\}.$$

Можно считать k' настолько большим, что $t_l - t_{l-1} > 2T$ при $l \in \{2^{k'}, \ldots, 2^{k'+1}\}$. Итак, если $s \in \{s_{\min}(k'), \ldots, s_{\max}(k') - 1\}$, то имеем

$$\int\limits_{sT}^{(s+1)T} (2u(\mu,\zeta) - 1)\, d\zeta \geqslant 2T - 2q \geqslant T,$$

$$\int\limits_{sT}^{(s+1)T} R_T(\mu,t)\, dt = \max_{i=1,\,2}\Big(\int\limits_{sT}^{(s+1)T} u_i(\mu,t)\, dt\Big) \geqslant T - q > T - \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}T.$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int\limits_{sT}^{(s+1)T} r_T(\mu,t)\, dt = \min_{i=1,\,2}\Big(\int\limits_{sT}^{(s+1)T} u_i(\mu,t)\, dt\Big) \geqslant -\sup_{t\geqslant 0}\|U(\mu,t)\|T = -T,$$

$$\int\limits_{sT}^{(s+1)T} R_T(\mu,t)\, dt = \max_{i=1,\,2}\Big(\int\limits_{sT}^{(s+1)T} u_i(\mu,t)\, dt\Big) \geqslant -\sup_{t\geqslant 0}\|U(\mu,t)\|T = -T.$$

Итак, из формулы (5), полагая $\tau = \theta = s_{\min}(k')T$, $\eta = t = s_{\max}(k')T$, находим, что

$$\Psi(\mu,\varepsilon,T,t) \geqslant \frac{\int\limits_0^{s_{\max}(k')T} R_T(\mu,t)\, dt + \int\limits_0^{s_{\min}(k')T} r_T(\mu,t)\, dt}{s_{\max}(k')T + s_{\min}(k')T} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\frac{1}{2}(s_{\max}(k')T - s_{\min}(k')T) - 2s_{\min}(k')T}{s_{\max}(k')T + s_{\min}(k')T} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\frac{1}{2}(t_{2^{k'+1}} - t_{2^{k'}}) - 2t_{2^{k'}} - 4T}{t_{2^{k'+1}} + t_{2^{k'}} + T},$$

откуда получаем

$$\underline{\lambda}_2(U(\mu,\cdot)) \geqslant \varlimsup_{k'\to\infty} \frac{\frac{1}{2}(t_{2^{k'+1}} - t_{2^{k'}}) - 2t_{2^{k'}} - 4T}{t_{2^{k'+1}} + t_{2^{k'}} + T} \geqslant$$

$$\geqslant \varlimsup_{k'\to\infty} \frac{\frac{1}{2}(2^{3k'+3} - 2^{3k'} - T) - 2^{3k'+1} - 4T}{2^{3k'+3} + 2^{3k'} + T} = \frac{1}{6}.$$

Пусть $\mu \in \mathbf{E}$. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = (U(\mu, t) + B_m(\mu, t))x,$$

где

$$B_m(\mu, t) = \begin{cases} (-1)^k \frac{\pi}{2(t_k - \tau_k)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{при } \tau_k \leqslant t < t_k; \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{при остальных } t, \end{cases}$$
$$k = m, m+1, \ldots .$$

У этой системы при всяком $m = 1, 2, \ldots$ показатели Ляпунова не превосходят 0. В самом деле, рассмотрим решение $x_1(t)$ с начальным условием (1, 0). Это решение ведет себя следующим образом: при $t < \tau_m$ оно идет по оси Ox и

$$\ln \|x_1(t)\| \leqslant \tau_m,$$

за время от τ_m до t_m оно поворачивается вокруг начала координат на угол $(-1)^m \frac{\pi}{2}$, затем при $t_m < t < \tau_{m+1}$ идет по оси Oy и

$$\ln \|x_1(t)\| - \ln \|x_1(t_m)\| = -(t - t_m),$$

за время от τ_{m+1} до t_{m+1} оно поворачивается вокруг начала координат на угол $(-1)^{m+1} \frac{\pi}{2}$ (т.е. снова попадет на ось Ox), затем при $t_{m+1} < t < \tau_{m+2}$ идет по оси Ox и

$$\ln \|x_1(t)\| - \ln \|x_1(t_m)\| = (t - t_{m+1}),$$

и т. д. В результате

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|x_1(t)\| \leqslant \lim_{s\to\infty} \frac{\tau_m + \sum\limits_{l=1}^{2s} (\tau_{m+l} - t_{m+l-1})(-1)^l}{\tau_{m+2s}} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{s\to\infty} \frac{9m^3 + 3ms + 3(s+1)^2}{\frac{(2m+2s)^3}{6}} = 0.$$

Рассмотрим решение $x_2(t)$ с начальным условием $(0,\,1)$. Это решение ведет себя следующим образом: при $t<\tau_m$ оно идет по оси Oy и

$$\ln\|x_2(t)\|\leqslant-\tau_m,$$

за время от τ_m до t_m оно поворачивается вокруг начала координат на угол $(-1)^m\frac{\pi}{2}$, затем при $t_m<t<\tau_m$ оно идет по оси Ox и

$$\ln\|x_2(t)\|-\ln\|x_2(t_m)\|=(t-t_m),$$

за время от τ_{m+1} до t_{m+1} оно поворачивается вокруг начала координат на угол $(-1)^{m+1}\frac{\pi}{2}$ (т.е. снова попадает на ось Oy), затем при $t_{m+1}<t<\tau_{m+2}$ идет по оси Oy и

$$\ln\|x_2(t)\|-\ln\|x_2(t_m)\|=-(t-t_{m+1}),$$

и т.д. В результате

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\|x(t)\|=\overline{\lim_{s\to\infty}}\frac{-\tau_m+\sum\limits_{l=1}^{2s+1}(\tau_{m+l}-t_{m+l-1})(-1)^{l+1}}{\tau_{m+s}}\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{s\to\infty}\frac{-\frac{m^3}{6}+3(m+1)^2+3ms+2s+3(s+1)^2}{\frac{(2m+2s)^3}{6}}=0.$$

Итак, построены два линейно независимых решения системы

$$\dot{x}=(U(\mu,t)+B_m(\mu,t))x,$$

с неположительными показателями, а значит, показатели Ляпунова системы не превосходят 0. Так как $\mu\in\mathbf{E}$, то для всякого $\delta>0$ существует $k(\delta)$ такое, что при всяком $m>k(\delta)$ выполнено неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|U(\mu,t)-U(\mu,t)-B_m(\mu,t)\|\leqslant\delta.$$

Из определения следует, что

$$\underline{\lambda}_2(U_\mu)\leqslant\lim_{m\to\infty}\lambda_2(U(\mu,\cdot)+B_m(\mu,\cdot))\leqslant0.$$

Для отображения $(\mu,t)\mapsto U(\mu,t)$, в силу ляпуновской инвариантности показателя $\underline{\lambda}_2$, существует такое отображение

$$Q:\mathcal{B}(\mathbb{N})\times\mathbb{R}^+\to\operatorname{End}\mathbb{R}^2$$

непрерывное по совокупности переменных и ограниченное по t при всяком фиксированном μ, что для любого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ выполнено равенство $\underline{\lambda}_2(Q(\mu,\cdot)) = \underline{\lambda}_2(U(\mu,\cdot))$ (см. лемму 12 § 6 гл. I).

Рассмотрим отображение $A : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$, определяемое формулой

$$(\mu, t) \mapsto \mathrm{diag}\{Q(\mu,t), \underbrace{-2,\ldots,-2}_{n-2}\}.$$

Из непрерывности по совокупности переменных отображения A, в силу леммы 7 § 5 гл. I, следует, что функция $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to M_n^c$, определяемая формулой $\mu \mapsto A(\mu,\cdot)$, непрерывна.

Допустим, что функция $\mu \mapsto \underline{\lambda}_n(\varphi(\mu))$ принадлежит второму классу Бэра. Тогда, в силу леммы 4 § 2 гл. I, замыкание множеств

$$\underline{\lambda}_n(\varphi(\mathbf{E})) \text{ и } \underline{\lambda}_n(\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{N})\backslash\mathbf{E}))$$

непусто.

С другой стороны

$$\underline{\lambda}_n(\varphi(\mu)) \leqslant 0, \text{ при } \mu \in \mathbf{E};$$

$$\underline{\lambda}_n(\varphi(\mu)) \geqslant \frac{1}{6}, \text{ при } \mu \notin \mathbf{E}.$$

Получили противоречие, следовательно функция $\mu \mapsto \underline{\lambda}_n(A(\mu,\cdot))$ не принадлежит второму классу Бэра. Теорема IV доказана.

Из теоремы IV § 5 гл. I и теоремы IV получаем

Следствие 2 [29]. *Если $n > 1$, то функция $\underline{\lambda}_n(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

§ 4 Точный бэровский класс нижнего центрального показателя Винограда на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией

Напомним [55], что нижний центральный показатель определяется формулой

$$\omega(A) = \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|X_A(jT,(j+1)T)\|^{-1}, \tag{7}$$

где $X_A(t,s)$ — оператор Коши системы (1).

Пусть $\mathfrak{M}$ метрическое пространство, а отображение

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n \tag{8}$$

непрерывно по совокупности переменных и ограничено по второму аргументу при всяком фиксированном значении первого.

Теорема V. *Если $n \geqslant 2$, то для $\mathfrak{M} = \mathcal{B}(\mathbb{N})$ существует отображение (8) такое, что функция $\mu \mapsto \omega(A(\mu,\cdot))$ всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.*

Доказательство. Каждому $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ поставим в соответствие систему уравнений $\dot{x} = U(\mu,t)x$ с кусочно-непрерывной функцией

$$\begin{gathered} U(\mu,t) = \begin{pmatrix} u(\mu,t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ u(\mu,t) = \begin{cases} -1, & \text{при } t \in [t_{2k-1}, t_{2k}); \\ 1, & \text{при } t \in [t_{2k}, t_{2k+1}), \end{cases} \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} t_1 = 0,\, t_2 = 1, \ldots,\, t_k = t_{k-1} + \tau_k, \\ \tau_k = 2^{\min\{[\log_2(\log_2 k)],\, \mu_{[\log_2(\log_2 k)]}\}}. \end{gathered} \tag{10}$$

Отметим два свойства разбиения (10), которые будут использоваться ниже.

1. Так как для τ_k выполнено неравенство

$$\tau_k = 2^{\min\{[\log_2(\log_2 k)],\, \mu_{[\log_2(\log_2 k)]}\}} \leqslant 2^{\log_2(\log_2 k)} = \log_2 k,$$

и для t_k имеем

$$t_k = 1 + 1 + \ldots + 2^{\min\{[\log_2(\log_2 k)],\, \mu_{[\log_2(\log_2 k)]}\}} \geqslant k.$$

Получаем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t_k}{t_{k+2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{t_{k+1} - \tau_{k+1}}{t_{k+1} + \tau_{k+1}} = 1. \tag{11}$$

2. Так как для $t_{2^{2^k}}$ выполнены неравенства

$$t_{2^{2^k}} = 1 + 1 + \ldots + 2^{\min\{k),\, \mu_k\}} \geqslant 2^{2^k},$$

$$t_{2^{2^k}} = 1 + 1 + \ldots + 2^{\min\{k),\, \mu_k\}} \leqslant 2^k \cdot 2^{2^k},$$

получаем

$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{t_{2^{2^k}}}{t_{2^{2^{k+1}}}} \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{2^{2^k+k}}{t_{2^{2^{k+1}}}} = \lim_{k\to\infty} 2^{2^k+k-2^{k+1}} = 0. \qquad (12)$$

Для каждого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ вычислим $\omega(U(\mu,\cdot))$. Используя формулу (7), получим

$$\omega(U(\mu,\cdot)) = \lim_{i\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m\cdot 2^i} \sum_{j=0}^{m-1} d(\mu,i,j), \text{где}$$

$$d(\mu,i,j) = \ln \|X_{U(\mu,\cdot)}(j\cdot 2^i,(j+1)\cdot 2^i)\|^{-1}.$$

Так как оператор Коши системы (9) имеет вид

$$X_{U(\mu,\cdot)}(j\cdot 2^i,(j+1)\cdot 2^i) = \begin{pmatrix} e^{-\int\limits_{j\cdot 2^i}^{(j+1)\cdot 2^i} u(\mu,\tau)\,d\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$d(\mu,i,j) = \min\{\int\limits_{j\cdot 2^i}^{(j+1)\cdot 2^i} u(\mu,\tau)\,d\tau,\, 0\}.$$

Зафиксируем $i \in \mathbb{N}$. Если $\mu \in \mathbf{E}$, то существует такое четное натуральное число h, что для любого $k > \frac{h}{2}+1$ выполнено неравенство $\mu_{[\log_2(\log_2 k)]} > i$. Вычислим $d(\mu,i,j)$ при $j > h$. Из определения функции $u(\mu,\cdot)$ получаем (при $2k > h$)

$$d(\mu,i,j) = \begin{cases} 0, & \text{при } t_{2k} \leqslant j\cdot 2^i < t_{2k+1}; \\ -(t_{2k+2}-t_{2k+1}), & \text{при } t_{2k+1} \leqslant j\cdot 2^i < t_{2k+2}, \end{cases}$$

следовательно

$$\sum_{j=t_{2k}\cdot 2^{-i}}^{j=t_{2k+2}\cdot 2^{-i}-1} d(\mu,i,j) = -\frac{1}{2}(t_{2k+2}-t_{2k+1}), \text{при } 2k \geqslant h.$$

Пусть $m-1 > h+2$, а p_m — максимальное четное число, удовлетворяющее неравенству $t_{p_m} \leqslant (m-1)\cdot 2^i$, тогда можно записать

$$\sum_{j=0}^{m-1} d(\mu,i,j) = \sum_{j=0}^{j=h-1} d(\mu,i,j) + \sum_{j=h}^{t_{p_m}\cdot 2^{-i}-1} d(\mu,i,j) + \sum_{j=t_{p_m}\cdot 2^{-i}}^{m-1} d(\mu,i,j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} d(\mu,i,j) = \sum_{j=0}^{j=h-1} d(\mu,i,j) + (-\frac{1}{2})(t_{p_m} - t_h) + \sum_{j=t_{p_m}\cdot 2^{-i}}^{m-1} d(\mu,i,j).$$

Так как

$$\sum_{j=t_{p_m}\cdot 2^{-i}}^{m-1} d(\mu,i,j) \leqslant \sup_{t\geqslant 0} \|A_\mu(t)\|(m\cdot 2^i - t_{p_m}) = m\cdot 2^i - t_{p_m},$$

то получаем, используя (11),

$$\omega(U(\mu,\cdot)) = \lim_{i\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m\cdot 2^i} \sum_{j=0}^{m-1} d(\mu,i,j) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{i\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m\cdot 2^i} \left(m\cdot 2^i - \frac{3}{2} t_{p_m} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{i\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{t_{p_m}}{m\cdot 2^i} \right) \leqslant \lim_{i\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{t_{p_m}}{t_{p_m+2}} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Пусть $\mu \notin \mathbf{E}$, тогда существует подпоследовательность

$$(\mu_{[\log_2(\log_2 k')]}) \subset (\mu_{[\log_2(\log_2 k)]})$$

и натуральное число q такие, что $\{\mu_{[\log_2(\log_2 k')]}\} \equiv q$. Фиксируем произвольное $i > q$. В силу (12) существует такое k'_0, что для всех $k' \geqslant k'_0$ выполнено условие: дробь

$$\frac{t_{2^{2^{k'+1}}} - t_{2^{2^{k'}}}}{2^i} \tag{13}$$

является четным натуральным числом. Тогда из (13) и определения функции $u(\mu,\cdot)$ заключаем, что $d(\mu,i,j) = 0$ при $T_{k'} \leqslant j\cdot 2^i < T_{k'+1}$, где $T_{k'} = t_{2^{2^{k'}}}$. Таким образом, получаем

$$\sum_{j=T_{k'}\cdot 2^{-i}}^{T_{k'+1}\cdot 2^{-i}-1} d(\mu,i,j) = 0$$

откуда, в силу (12),

$$\omega(U(\mu,\cdot)) \geqslant \lim_{i\to\infty} \overline{\lim_{k'\to\infty}} \frac{1}{T_{k'+1}} \left(\sum_{j=0}^{j=T_{k'}\cdot 2^{-i}-1} d(\mu,i,j) + \sum_{j=T_{k'}\cdot 2^{-i}}^{j=T_{k'+1}\cdot 2^{-i}-1} d(\mu,i,j) \right) \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{k'\to\infty} -\frac{T_{k'}}{T_{k'+1}} = 0.$$

Для отображения $(\mu, t) \mapsto U(\mu, t)$, в силу ляпуновской инвариантности показателя ω, существует такое отображение

$$Q : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^2$$

непрерывное по совокупности переменных и ограниченное по t при всяком фиксированном μ, что для любого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ выполнено равенство $\omega(Q(\mu, \cdot)) = \omega(U(\mu, \cdot))$ (см. лемму 12 § 6 гл. I).

Рассмотрим отображение $A : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$, определяемое формулой

$$(\mu, t) \mapsto \operatorname{diag}\{\underbrace{2, \ldots, 2}_{n-2}, Q(\mu, t)\}.$$

Из непрерывности отображения A, в силу леммы 7 § 5 гл. I, следует, что функция $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to M_n^c$, определяемая формулой $\mu \mapsto A(\mu, \cdot)$, непрерывна.

Допустим, что функция $\mu \mapsto \omega(\varphi(\mu))$ принадлежит второму классу Бэра. Тогда, в силу леммы 4 § 2 гл. I, замыкание множеств

$$\omega(\varphi(\mathbf{E})) \text{ и } \omega(\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{N})\backslash\mathbf{E}))$$

непусто.

С другой стороны

$$-1 \leqslant \omega(\varphi(\mu)) \leqslant -\frac{1}{2}, \text{ при } \mu \in \mathbf{E};$$

$$\omega(\varphi(\mu)) \geqslant 0, \text{ при } \mu \notin \mathbf{E}.$$

Получили противоречие, следовательно функция $\mu \mapsto \omega(A(\mu, \cdot))$ не принадлежит второму классу Бэра. Теорема V доказана.

Из теоремы IV § 5 гл. I и теоремы V получаем

Следствие 3 [19]. *Если $n > 1$, то функция $\omega : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Пусть $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Через $\underline{\lambda}_k$ обозначим максимальную полунепрерывную снизу миноранту k-го показателя Ляпунова как функции на пространстве M_n^u, т. е.

$$\underline{\lambda}_k(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{\{B \colon \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} \|B(t)\| < \varepsilon\}} \lambda_k(A + B).$$

В докладе [102] была поставлена задача о минимальном классе Бэра, которому принадлежит функция $\underline{\lambda}_k(\cdot)$ на пространстве M_n^c. В работе [13] установлена принадлежность функций $\underline{\lambda}_k(\cdot)$ третьему классу Бэра на пространстве M_n^c (ранее это было установлено для $n = 3$ и $k = 2$ в работе [115]).

Теорема VI. *Если $n > 1$ и $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, то для $\mathfrak{M} = \mathcal{B}(\mathbb{N})$ существует отображение (8) такое, что функция $\mu \mapsto \underline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot))$ всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $A : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$, определяемое формулой

$$(\mu, t) \mapsto \mathrm{diag}\{2, \ldots, 2, Q(\mu, t), \underbrace{2, \ldots, 2}_{k-1}\},$$

где отображение Q из доказательства теоремы V.

В работе [79] доказано равенство

$$\omega(A(\mu, \cdot)) = \underline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot)).$$

Следовательно функция $\mu \mapsto \underline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot))$ всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра. Теорема VI доказана.

Из теоремы IV § 5 гл. I и теоремы VI получаем

Следствие 4 [22]. *Если $n > 1$ и $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, то функция $\underline{\lambda}_k : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

§ 5 Семейство линейных систем с пустым множеством точек полунепрерывности снизу минорант показателей Ляпунова

Пусть $\mathfrak{M}$ полное метрическое пространство. В. М. Миллионщиков установил [93], что для любого отображения

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n \tag{14}$$

непрерывного по совокупности переменных и ограниченого по второму аргументу при всяком фиксированном значении первого и любых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{1, \ldots, n\}$ множество точек полунепрерывности сверху функции

$\mu \mapsto \lambda_k(A(\mu,\cdot))$ содержит всюду плотное множество типа G_δ в пространстве $\mathfrak{M}$. В данном параграфе построены примеры семейств линейных систем, с коэффициентами непрерывно зависящими от параметра, для которых множества точек полунепрерывности снизу функций $\mu \mapsto \lambda_k(A(\mu,\cdot))$, $\mu \mapsto \underline{\lambda}_k(A(\mu,\cdot))$, $\mu \mapsto \overline{\lambda}_k(A(\mu,\cdot))$ пусты, в частности, получен ответ на один из вопросов, поставленных в [102].

Для всякой непрерывной функции $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ условимся обозначать через $\overline{q}$ ее верхнее среднее:

$$\overline{q} = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t q(\tau)\, d\tau.$$

Лемма 1. *Существует непрерывная и ограниченная функция $q : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \to [-1,1]$ такая, что множество полунепрерывности снизу функции, определенной формулой $\mu \mapsto \overline{q}(\mu,\cdot)$ пусто.*

Доказательство. Определим функцию $a : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \to [-1,1]$ следующим образом: положим

$$a(\mu,t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in [0,2]; \\ \mu_k - \frac{2}{\pi}\arctan(\mu_1 + \ldots + \mu_{k-1} + 1), & \text{при } t \in [k!, (k+1)!), \end{cases}$$

$$k = 2,3,4,\ldots .$$

Обозначим через $\mathcal{K}_0$, множество тех последовательностей из $\mathcal{B}$, у которых все члены, начиная с некоторого, равны 0. Для всякого $\mu \in \mathcal{K}_0$ найдется k_0 такое, что функция

$$a(\mu,t) = -\frac{2}{\pi}\arctan(\mu_1 + \ldots + \mu_{k_0-1} + 1),$$

при $t \geqslant k_0$. Следовательно,

$$\overline{a}(\mu,\cdot) = -\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(\mu_1 + \ldots + \mu_{k_0-1} + 1) > -1. \tag{15}$$

Для всякого $\mu \notin \mathcal{K}_0$ обозначим через $(m_k)_{k=1}^\infty$ возрастающую последовательность номеров элементов последовательности μ, которые равны 1. Имеем цепочку неравенств

$$\begin{gathered}\overline{a}(\mu,\cdot)=\varlimsup_{t\to\infty}\tfrac{1}{t}\int\limits_0^t a(\mu,\tau)\,d\tau\geqslant\varlimsup_{k\to\infty}\tfrac{1}{m_k!}\int\limits_0^{m_k!}a(\mu,\tau)\;d\tau\geqslant\\ \geqslant\lim_{k\to\infty}\tfrac{1}{m_k!}[(-1)((m_k-1)!+1)+\\ +(1-\tfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(\mu_1+\ldots+\mu_{m_k-1}+1))(m_k!-(m_k-1)!-1)]=0.\end{gathered}\tag{16}$$

Для произвольного элемента $\mu\in\mathcal{B}$. Построим последовательность $\{\mu^{(s)}\}\subset\mathcal{K}_0$

$$\mu^{(s)}=(\mu_1,\ldots,\mu_s,\underbrace{1,\ldots,1}_{s},0,\ldots),\quad\lim_{n\to\infty}d(\mu,\mu^{(s)})\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s}=0,$$

для которой выполнено свойство

$$\varliminf_{s\to\infty}\overline{a}(\mu^{(s)},\cdot)\leqslant\lim_{s\to\infty}-\frac{2}{\pi}\arctan(s+1)=-1.\tag{17}$$

Таким образом, из (15)—(17) имеем

$$\varliminf_{s\to\infty}\overline{a}(\mu^{(s)},\cdot)<\overline{a}(\mu,\cdot),$$

следовательно точка μ не является точкой полунепрерывности снизу функции $\mu\mapsto\overline{a}(\mu,\cdot)$. В силу произвольности точки μ, получаем, что множество точек полунепрерывности снизу функции $\mu\mapsto\overline{a}(\mu,\cdot)$ пусто.

Для отображения $(\mu,t)\mapsto a(\mu,t)$, существует такое отображение

$$q:\mathcal{B}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$$

непрерывное по совокупности переменных и ограниченное по t при всяком фиксированном μ, что для любого $\mu\in\mathcal{B}$ выполнено равенство $\overline{a}(\mu,\cdot)=\overline{q}(\mu,\cdot)$ (см. лемму 12 § 6 гл. I). Лемма 1 доказана.

Теорема VII [49]. *Для любого $n\in\mathbb{N}$ существует непрерывное отображение $A:\mathcal{B}\times\mathbb{R}^+\to[-1,1]$ такое, что для любого $k\in\{1,\ldots,n\}$ и для каждой функции $\mu\mapsto\lambda_k(A(\mu,\cdot))$, $\mu\mapsto\underline{\lambda}_k(A(\mu,\cdot))$, $\mu\mapsto\overline{\lambda}_k(A(\mu,\cdot))$ множество точек полунепрерывности снизу пусто.*

Доказательство. Определим отображение $A:\mathcal{B}\times\mathbb{R}^+\to\mathrm{End}\mathbb{R}^n$ формулой

$$A(\mu,t)=q(\mu,t)E,\quad\mu\in\mathcal{B},\quad t\in\mathbb{R}^+,\tag{18}$$

где q — функция, существование которой утверждается в лемме 1, а E — единичная матрица. Непрерывность отображения Q вытекает из непрерывности функции q. Показатели Ляпунова, их миноранты и мажоранты системы (1) для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ удовлетворяют неравенствам [14, стр. 164]

$$\omega(A) \leqslant \underline{\lambda}_k(A) \leqslant \lambda_k(A) \leqslant \overline{\lambda}_k(A) \leqslant \Omega(A),$$

где

$$\omega(A) = \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|X_A(jT, (j+1)T)\|^{-1}$$

нижний центральный показатель,

$$\Omega(A) = \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|X_A((j+1)T, jT)\|$$

верхний центральный показатель, где $X_A(t, s)$ — оператор Коши системы (1). Так как для системы (1) с матрицей (18) справедливы равенства

$$\|X_{A(\mu,\cdot)}(jT, (j+1)T)\|^{-1} = \|X_{A(\mu,\cdot)}((j+1)T, jT)\| = e^{\int\limits_{jT}^{(j+1)T} q(\mu,\tau)\, d\tau},$$

то получаем для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\omega(A(\mu, \cdot)) = \underline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot)) = \lambda_k(A(\mu, \cdot)) = \overline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot)) = \Omega(A(\mu, \cdot)) = \overline{q}(\mu, \cdot).$$

Теорема VII доказана.

Оказывается, для случая, когда пространство $\mathfrak{M}$ является отрезком вещественной прямой, может быть построено отображение (14), для которого множество точек полунепрерывности снизу функций $\mu \mapsto \lambda_k(A(\mu, \cdot))$, $\mu \mapsto \underline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot))$, $\mu \mapsto \overline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot))$ пусто.

Теорема VIII [51]. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует непрерывное отображение $A : [0; 1] \times \mathbb{R}^+ \to [-1, 1]$ такое, что для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ и для каждой функции $\mu \mapsto \lambda_k(A(\mu, \cdot))$, $\mu \mapsto \underline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot))$, $\mu \mapsto \overline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot))$ множество точек полунепрерывности снизу пусто.*

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма 2. *Существует непрерывная функция $q : [0; \frac{2}{3}] \times \mathbb{R}^+ \to [-1, 1]$ такая, что множество полунепрерывности снизу функции, определенной формулой $\mu \mapsto \overline{q(\mu, \cdot)}$ пусто.*

Доказательство. Определим функцию $a : [0; \frac{2}{3}] \times [0; +\infty) \to [-1, 1]$ следующим образом: положим

$$a(\mu, t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in [0, 2]; \\ |\sin(\pi\mu 2^k)| - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(1 + \sum\limits_{l=1}^{k} |\sin(2^l \pi\mu)|), & \text{при } t \in [k!, (k+1)!), \end{cases}$$

$$k = 2, 3, 4, \ldots .$$

Пусть μ — двоично рациональное число, т. е. существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\mu = \sum_{s=1}^{k_0} \frac{m_s}{2^s}, \quad m_s \in \{0;\, 1\}.$$

При $k > k_0$ и $t \in [k! + 1, (k+1)!]$ получаем

$$a(\mu, t) = |\sin(\pi 2^k \sum_{s=1}^{k_0} \tfrac{m_s}{2^s})| - \tfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(1 + \sum_{l=1}^{k} |\sin(2^l \pi \sum_{s=1}^{k_0} \tfrac{m_s}{2^s})|) =$$
$$= -\tfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(1 + \sum_{l=1}^{k_0 - 1} |\sin(2^l \pi \sum_{s=1}^{k_0} \tfrac{m_s}{2^s})|).$$

Следовательно, имеем

$$\begin{gathered} \overline{a}(\mu, \cdot) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \tfrac{1}{t} \int_0^t a(\tau)\, d\tau \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \tfrac{1}{(k+1)!} \left(\int_{k!+1}^{(k+1)!} a(\tau)\, d\tau - (k! + 1) \right) \geqslant \\ \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \tfrac{1}{(k+1)!} (-\tfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(1 + \sum_{l=1}^{k_0-1} |\sin(2^l \pi \sum_{s=1}^{k_0} \tfrac{m_s}{2^s})|) \times \\ \times ((k+1)! - k! - 1) - (k! + 1)) > -1. \end{gathered} \quad (19)$$

Пусть μ — двоично иррациональное число, т. е.

$$\mu = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m_s}{2^s}, \quad m_s \in \{0;\, 1\},$$

и существует такая бесконечная последовательность номеров $\{s'\}$, что $m_{s'+2} = 1$, $m_{s'+1} = 0$. Так как

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{m_{s'+2}}{4} + \frac{m_{s'+3}}{8} \ldots \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2},$$

получаем

$$|\sin(2^{s'} \pi\mu)| = |\sin(2^{s'} \pi \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m_s}{2^s})| = |\sin(\pi \sum_{s=s'}^{\infty} \frac{m_s}{2^{s-s'+2}})| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2},$$

следовательно, $a(\mu,t) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ при $t \in [s'!+1, (s'+1)!]$. Таким образом,

$$
\begin{aligned}
\overline{a}(\mu,\cdot) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \tfrac{1}{t} \int\limits_0^t a(\mu,\tau)\,d\tau \geqslant \\
\geqslant \overline{\lim_{s'\to\infty}} \tfrac{1}{(s'+1)!} \left(\int\limits_{s'!+1}^{(s'+1)!} a(\mu,\tau)\,d\tau - (s'!+1) \right) \geqslant \\
\geqslant \overline{\lim_{s'\to\infty}} \tfrac{1}{(s'+1)!} (\tfrac{\sqrt{2}}{2} - 1)((s'+1)! - (s'!+1)) - (s'!+1) = \\
= \tfrac{\sqrt{2}}{2} - 1.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Для каждого $\mu = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{m_s}{2^s} \in [0;\, \frac{2}{3}]$ построим последовательность чисел

$$
\mu^{(n)} = \sum_{s=1}^{n} \frac{m_s}{2^s} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+4}} + \ldots + \frac{1}{2^{3n}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{m_s}{2^s} + \frac{1}{3\cdot 2^n}(1 - \frac{1}{4^n}).
$$

Пусть $k > 3n > 12$, тогда

$$
|\sin(2^k \pi \mu^{(n)})| = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{k} |\sin(2^l \pi \mu^{(n)})| \geqslant \sum_{l=n+2}^{2n+2} |\sin(2^l \pi (\sum_{s=1}^{n} \tfrac{m_s}{2^s} + \tfrac{1}{3\cdot 2^n}(1 - \tfrac{1}{4^n})))| = \\
= |\sin(\tfrac{4\pi}{3}(1 - \tfrac{1}{4^n}))| + \ldots + |\sin(\tfrac{2^{n+2}\pi}{3}(1 - \tfrac{1}{4^n}))| \geqslant \tfrac{\sqrt{2}n}{2}
\end{aligned}
$$

следовательно,

$$
a(\mu^{(n)},t) \leqslant -\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(\frac{\sqrt{2}n}{2} + 1), \quad \text{при}\, t \in [k!+1,\ (k+1)!].
$$

Таким образом,

$$
\overline{a}(\mu^{(n)},\cdot) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau \leqslant
$$

$$
\leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \left(-\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(\frac{\sqrt{2}n}{2} + 1)(t - (3n-1)!) + (3n+1)! \right) =
$$

$$
= -\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(\frac{\sqrt{2}n}{2} + 1).
$$

Итак, для произвольного числа $\mu \in [0;\, \frac{2}{3}]$ построили такую последовательность $(\mu^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, что

$$
\lim_{n\to\infty} |\mu - \mu^{(n)}| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0,
$$

$$\varliminf_{n\to\infty}\overline{a}(\mu^{(n)},\cdot)\leqslant\lim_{n\to\infty}-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{2}n}{2}+1)=-1. \qquad (21)$$

Таким образом, из (19)—(21) имеем

$$\varliminf_{n\to\infty}\overline{a}(\mu^{(n)},\cdot)<\overline{a}(\mu,\cdot).$$

Следовательно, точка μ не является точкой полунепрерывности снизу функции $\mu\mapsto\overline{a}(\mu,\cdot)$. В силу произвольности точки μ получаем, что множество точек полунепрерывности снизу функции $\mu\mapsto\overline{a}(\mu,\cdot)$ пусто.

По кусочно-непрерывной функции $a(\mu,\cdot)$ и последовательности положительных чисел $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ такой, что

$$\sum_{m=2}^{\infty}e^{(m!+\varepsilon_m)^2}\varepsilon_m\leqslant 1.$$

построим функцию $q(\mu,\cdot)$ следующим образом

$$q(\mu,t)=\begin{cases} k_m(t-m!-\varepsilon_m)+a(\mu,m!+\varepsilon_m), & \text{при } t\in[m!-\varepsilon_m;m!+\varepsilon_m];\\ a(\mu,t), & \text{при остальных } t,\end{cases}$$

$$k_m=\frac{a(\mu,m!+\varepsilon_m)-a(\mu,m!-\varepsilon_m)}{2\varepsilon_m}.$$

Эта функция непрерывна $t\in\mathbb{R}^+$. Действительно, в точках непрерывности функции $a(\mu,\cdot)$, которые не принадлежат объединению отрезков $\bigcup\limits_m[m!-\varepsilon_m,m!+\varepsilon_m]$ функция $q(\mu,\cdot)$ совпадает с функцией $a(\mu,\cdot)$, а на любом из отрезков $[m!-\varepsilon_m,m!+\varepsilon_m]$ график функции $q(\mu,\cdot)$ представляет собой отрезок прямой, который соединяет точку с координатами $(m!-\varepsilon_m,a(\mu,m!-\varepsilon_m))$ и точку с координатами $(m!+\varepsilon_m,a(\mu,m!+\varepsilon_m))$. Так как

$$\int\limits_0^{\infty}e^{t^2}|q(\mu,t)-a(\mu,t)|\,dt=$$

$$=\sum_{m=2}^{\infty}\int\limits_{m!-\varepsilon_m}^{m!+\varepsilon_m}e^{t^2}|q(\mu,t)-a(\mu,t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{t\geqslant 0}|q(\mu,t)-a(\mu,t)|\sum_{m=1}^{\infty}e^{(m!+\varepsilon_m)^2}\varepsilon_m\leqslant 4,$$

в силу леммы 11 § 6 гл. I, система $\dot{y} = q(\mu, t)y$ ляпуновски эквивалентна системе $\dot{x} = a(\mu, t)x$, следовательно для любого $\mu \in [0;\, \frac{2}{3}]$ верно равенство $\overline{a}(\mu, \cdot) = \overline{q}(\mu, \cdot)$.

Рассмотрим отображение $q \;:\; [0;\, \frac{2}{3}] \times \mathbb{R}^+ \;\to\; \mathbb{R}$. Это отображение непрерывно по совокупности переменных. Действительно, пусть $(\mu^*, t^*) \in [0;\, \frac{2}{3}] \times \mathbb{R}^+$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем натуральное m настолько большим, чтобы $t^* \in [0, m! - 1]$, а $\delta_1 \in (0, 1)$ такое, что для любого $t \in (t^* - \delta_1, t^* + \delta_1)$ выполнено неравенство

$$|q(\mu^*, t) - q(\mu^*, t^*)| < \varepsilon.$$

В силу непрерывности функций

$$|\sin(\pi\mu 2^k)| - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(1 + \sum_{l=1}^{k} |\sin(2^l \pi\mu)|), \quad k \in \{2, \ldots, m\}$$

на отрезке $[0;\, \frac{2}{3}]$ найдется $\delta_2 \in (0, 1)$ такое, что для любого $\mu \in (\mu^* - \delta_2, \mu^* + \delta_2)$ и каждого $k \in \{2, \ldots, m\}$ выполнено неравенство

$$||\sin(\pi\mu^* 2^k)| - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(1 + \sum_{l=1}^{k} |\sin(2^l \pi\mu^*)|) -$$

$$-|\sin(\pi\mu 2^k)| + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(1 + \sum_{l=1}^{k} |\sin(2^l \pi\mu)|)| < \varepsilon,$$

следовательно

$$\sup_{t \in [0, m! - 1]} |q(\mu^*, t) - q(\mu, t)| < \varepsilon.$$

Тогда для любой точки (μ, t) такой, что $|t - t^*| < \delta_1$ и $|\mu^* - \mu| < \delta_2$ выполнено

$$|q(\mu^*, t^*) - q(\mu, t)| \leqslant |q(\mu^*, t^*) - q(\mu*, t)| + |q(\mu^*, t) - q(\mu, t)| < 2\varepsilon.$$

Лемма 2 доказана.

Завершение доказательства теоремы VIII. Определим отображение $A : [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$ формулой

$$A(\mu, t) = q(\frac{3}{2}\mu, t)E, \quad \mu \in \mathcal{B}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{22}$$

где q — функция, существование которой утверждается в лемме, а E — единичная матрица. Непрерывность отображения A вытекает из непрерывности функции q. Показатели Ляпунова, их миноранты и мажоранты системы (1) для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ удовлетворяют неравенствам [14, стр. 164]

$$\omega(A) \leqslant \underline{\lambda}_k(A) \leqslant \lambda_k(A) \leqslant \overline{\lambda}_k(A) \leqslant \Omega(A),$$

где

$$\omega(A) = \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|X_A(jT, (j+1)T)\|^{-1}$$

нижний центральный показатель,

$$\Omega(A) = \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|X_A((j+1)T, jT)\|$$

верхний центральный показатель, где $X_A(t,s)$ — оператор Коши системы (1). Так как для системы (1) с матрицей (22) справедливы равенства

$$\|X_{A(\mu,\cdot)}(jT, (j+1)T)\|^{-1} = \|X_{A(\mu,\cdot)}((j+1)T, jT)\| = e^{\int\limits_{jT}^{(j+1)T} q(\mu,\tau)\, d\tau}$$

получаем для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\omega(A(\mu,\cdot)) = \underline{\lambda}_k(A(\mu,\cdot)) = \lambda_k(A(\mu,\cdot)) = \overline{\lambda}_k(A(\mu,\cdot)) = \Omega(A(\mu,\cdot)) = \overline{q(\mu,\cdot)}.$$

Теорема VIII доказана.

§ 6 Минимальная мажоранта показателя Ляпунова среди всех его мажорант первого класса Бэра на пространстве линейных систем с равномерной топологией

В [81] доказано, что показатели Ляпунова $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$, рассматриваемые как функции на пространстве M_n^u, принадлежат второму классу Бэра, а в [111] доказано, что они могут не принадлежат первому классу Бэра. Найдем минимальную функцию первого класса Бэра на пространстве M_n^u, оценивающую k-й показатель Ляпунова сверху.

Теорема IX [38]. *Пусть $\varphi(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ — остаточный функционал первого класса Бэра на M_n^u и для любой системы $A \in M_n$ выполнены неравенства*

$$\lambda_k(A) \leqslant \varphi(A) \leqslant \overline{\lambda}_k(A),$$

тогда $\varphi(A) \equiv \overline{\lambda}_k(A)$.

Доказательство. В силу определения функционал $\overline{\lambda}_k$ является остаточным и принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. В [113] доказана справедливость следующих равенств

$$\overline{\lambda}_k(A) = \widetilde{\lambda}_k(A), \text{ где } \widetilde{\lambda}_k(A) = \sup_{B \in \overline{X}(A)} \lambda_k(B),$$

из которых вытекает, что функционал $\widetilde{\lambda}_k$ является остаточным и принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u.

Пусть остаточный функционал $\varphi(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u и для произвольной системы A выполнены неравенства

$$\lambda_k(A) \leqslant \varphi(A) \leqslant \widetilde{\lambda}_k(A).$$

Докажем, что $\varphi(A) \equiv \widetilde{\lambda}_k(A)$. Допустим, что существуют система A и число $\delta > 0$, такие, что выполнено равенство $\varphi(A) = \widetilde{\lambda}_k(A) - \delta$. В силу определения функционала $\widetilde{\lambda}_k$ существует система $B \in \overline{X}(A)$, такая, что

$$\lambda_k(B) \geqslant \widetilde{\lambda}_k(A) - \frac{\delta}{2},$$

следовательно,

$$\varphi(B) \geqslant \lambda_k(B) > \widetilde{\lambda}_k(A) - \delta = \varphi(A).$$

Согласно теореме II § 3 9 гл. I, функционал φ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Получили противоречие, следовательно $\varphi(A) \equiv \widetilde{\lambda}_k(A)$. Теорема IX доказана.

Для двух младших минорант показателей Ляпунова справедлива следующая

Теорема X [34]. *Пусть $k \in \{1, 2\}$, $\varphi(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ — остаточный функционал первого класса Бэра на M_n^u и для любой системы $A \in M_n$*

выполнены неравенства

$$\lambda_k(A) \geqslant \varphi(A) \geqslant \underline{\lambda}_k(A),$$

тогда $\varphi(A) \equiv \underline{\lambda}_k(A)$.

Доказательство. В силу определения функционал $\underline{\lambda}_k$ является остаточным и принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. В [117] доказана справедливость следующих равенств:

$$\underline{\lambda}_k(A) = \widehat{\lambda}_k(A), \text{ где} \widehat{\lambda}_k(A) = \inf_{B \in \overline{X}(A)} \lambda_k(B), \quad k \in \{1, 2\},$$

из которых вытекает, что функционал $\widehat{\lambda}_k$ является остаточным и принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u.

Пусть остаточный функционал $\varphi(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u и для произвольной системы A выполнены неравенства

$$\lambda_k(A) \geqslant \varphi(A) \geqslant \widehat{\lambda}_k(A).$$

Докажем, что $\varphi(A) \equiv \widehat{\lambda}_k(A)$. Допустим, что существуют система A и число $\delta > 0$, такие, что выполнено равенство $\varphi(A) = \widehat{\lambda}_k(A) + \delta$. В силу определения функционала $\widehat{\lambda}_k$ существует система $B \in \overline{X}(A)$, такая, что

$$\lambda_k(B) \leqslant \widehat{\lambda}_k(A) + \frac{\delta}{2},$$

следовательно,

$$\varphi(B) \leqslant \lambda_k(B) < \widehat{\lambda}_k(A) + \delta = \varphi(A).$$

Согласно теореме II § 3 гл. I, функционал φ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Получили противоречие, следовательно $\varphi(A) \equiv \widehat{\lambda}_k(A)$. Теорема X доказана.

Глава III Бэровская классификация некоторых вспомогательных показателей

§ 1 Точный класс Бэра δ-показателей на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Наряду с показателями Ляпунова линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывной ограниченной оператор-функцией $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$, часто рассматривают следующие величины. Пусть D — единичный шар в пространстве $\mathbb{R}^n$. Этот шар под действием оператора Коши $X_A(t, 0)$ системы (1) переходит в эллипсоид. Пусть

$$\delta_1(X_A(t, 0)) \leqslant \ldots \leqslant \delta_n(X_A(t, 0))$$

полуоси этого эллипсоида, которые совпадают с сингулярными числами оператора Коши $X_A(t,\, 0)$ [10, стр. 24]). В [108] введены следующие величины

$$\delta_k(A) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \ln \delta_k(X_A(t,\, 0)). \tag{2}$$

Для произвольной системы (1) показатели Ляпунова и показатели (2) удовлетворяют соотношениям

$$\delta_1(A) \leqslant \lambda_1(A), \ldots, \delta_{n-1}(A) \leqslant \lambda_{n-1}(A), \quad \delta_n(A) = \lambda_n(A).$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По функции

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{3}$$

непрерывной по совокупности переменных и ограниченной по t при всяком фиксированном значении μ, построим функцию

$$\mu \mapsto \delta_k(A(\mu, \cdot)). \tag{4}$$

Изучим свойства функции (4) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема I. *Для любого отображения (3) функция (4) принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$. Если же $\mathfrak{M}$ полно, то в типичной по Бэру точке эта функция полунепрерывна сверху.*

Доказательство. Формулу (2) перепишем в виде

$$\begin{gathered}\delta_k(A)=\lim_{m\to\infty}\psi_k^m(A),\ \text{где}\\ \psi_k^m(A)=\lim_{s\to\infty}\max_{j\in\{m,\dots,s\}}\tfrac{1}{j}\ln\delta_k(X_A(j,0)).\end{gathered}\tag{5}$$

Из леммы 10 § 5 гл. I следует, что функция

$$\mu\mapsto\delta_k(X_{A(\mu,\cdot)}(j,0))$$

является непрерывной на пространстве $\mathfrak{M}$. Таким образом, в силу формулы (5), функция (4) принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$.

Из формулы (5) следует, что функция (4) является поточечным пределом невозрастающей последовательности функций $(\psi_k^m)_{m=1}^{\infty}$ первого класса Бэра. Следовательно, в силу леммы 1 § 2 гл. I, функция (4) в типичной по Бэру точке полунепрерывна сверху. Теорема I доказана.

В силу теоремы I и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 1 [28]. *Для любого $k\in\{1,\dots,n\}$ функция $\delta_k:M_n\to\mathbb{R}$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из принадлежности функции δ_k второму классу Бэра на пространстве M_n^c следует ее принадлежность тому же классу Бэра на пространстве M_n^u.

Теорема II [28]. *Если $n\geqslant 2$, то функция $\delta_k:M_n\to\mathbb{R}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{при } t\in[2^{2k-2},2^{2k-1});\\ -1, & \text{при } t\in[2^{2k-1},2^{2k}),\end{cases}\qquad k=1,2,3,\dots,$$

и функцию

$$g(t)=\frac{1}{l},\ \text{при } t\in[2^{l-1},2^{l}),\quad l=1,2,3,\dots,$$

значения f и g на $[0,\,1)$ не играют роли: для простоты считаем здесь $f(t)=g(t)=0$. Для функции f имеем

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{s=1}^{k}(-1)^s(2^s-2^{s-1})=$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{(-2)^{k+1}-1}{-6\cdot 2^k} = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{2^{2m+1}-1}{6\cdot 2^{2m}} = \frac{1}{3}$$

Рассмотрим две системы $\dot{x} = U_1(t)x$ и $\dot{y} = U_2(t)y$, где

$$U_1(t) = \begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_2(t) = \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор Коши первой системы имеет вид

$$X(t,0) = \begin{pmatrix} e^{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а второй

$$Y(t,0) = \begin{pmatrix} e^{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau} & e^{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau} \int\limits_0^t g(s) e^{-\int\limits_0^s f(s)\,d\tau}\,ds \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для сингулярных чисел линейного оператора X справедливы равенства [10, стр. 24]

$$\delta_k(X) = \min_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \|X_L\|, \qquad (6)$$

где $G_k(\mathbb{R}^n)$ — множество всех векторных подпространств $L \subseteq R^n$ размерности k, X_L — его сужение на подпространство L. Из формулы (6) для системы $\dot{x} = U_1(t)x$ имеем

$$\delta_1(U_1) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \min_{x\neq 0} \|X(t,0)x\| = 0,$$

$$\delta_2(U_1) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|X(t,0)\| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \max\{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau,\, 0\} = \frac{1}{3}.$$

Пусть $t_m = 2^{2m}$ и $T_m = 2^{2m+1}$. Тогда, согласно и определению $f(t)$, имеем

$$\int\limits_0^{T_m} f(\tau)\,d\tau = (\frac{1}{3} + \varepsilon_m)T_m, \quad \varepsilon_m \to 0, \qquad (7)$$

а для $s \in [t_m, T_m]$

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^s f(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^{t_m} f(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_m}^s f(\tau)\,d\tau = \\ &= (-\tfrac{1}{3} - \beta_m)t_m + (s - t_m), \quad \beta_m \to 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Далее

$$\delta_2(U_2) \geqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln(e^{\int\limits_0^t f(s)\,ds} \int\limits_0^t g(s) e^{-\int\limits_0^s f(\tau)\,d\tau}\,ds) \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{T_m} \ln(e^{\int\limits_0^{T_m} f(s)\,ds} \int\limits_{t_m}^{T_m} g(s) e^{-\int\limits_0^s f(\tau)\,d\tau}\,ds).$$

Оценим последнее выражение снизу с помощью (7) и (8). Так как

$$\int\limits_{t_m}^{T_m} g(\tau) e^{-\int\limits_0^s f(\tau)\,ds}\,d\tau = \frac{1}{2m+1} e^{(\frac{1}{3}+\beta_m)t_m}(1 - e^{t_m - T_m}) \geqslant \frac{1}{2(2m+1)} e^{(\frac{1}{3}+\beta_m)t_m}.$$

Таким образом, для системы $\dot{x} = U_2(t)x$ получаем

$$\delta_1(U_2) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \min_{x\neq 0} \|Y(t,0)x\| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{3},$$

$$\delta_2(U_2) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Y(t,0)\| \geqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \int\limits_0^t g(\tau) e^{\int\limits_\tau^t f(s)}\,ds \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{T_m}((\frac{1}{3} + \varepsilon_m)T_m + (\frac{1}{3} + \beta_m)t_m) - \ln((2m+1)2) = \frac{1}{2}.$$

По кусочно-непрерывным функциям $U_k(\cdot)$, $k = 1, 2$ и последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ таких, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{(2^m+\varepsilon_m)^2} \varepsilon_m \leqslant 1,$$

построим функции $A_k(\cdot)$, $k = 1, 2$, следующим образом

$$A_k(t) = \begin{cases} R_m^k \cdot (2^m - \varepsilon_m) + U_k(2^m + \varepsilon_m), \text{ при } t \in [2^m - \varepsilon_m; 2^m + \varepsilon_m]; \\ U_k(t), \text{ при остальных } t, \end{cases}$$

$$R_m^k = \frac{U_k(2^m+\varepsilon_m) - U_k(2^m-\varepsilon_m)}{2\varepsilon_m}.$$

Эти функции непрерывны по $t \in \mathbb{R}^+$. Действительно, в точках непрерывности функции $U_k(\cdot)$, которые не принадлежат объединению отрезков $\bigcup\limits_m [2^m-\varepsilon_m, 2^m+\varepsilon_m]$, функция $A_k(\cdot)$ совпадает с функцией $U_k(\cdot)$, а на любом из отрезков $[2^m-\varepsilon_m, 2^m+\varepsilon_m]$ график функции $A_k(\cdot)$ представляет собой отрезок прямой, который соединяет точку с координатами $(2^m-\varepsilon_m, U_k(2^m-\varepsilon_m))$ и точку с координатами $(2^m+\varepsilon_m, U_k(2^m+\varepsilon_m))$. Так как

$$\int\limits_0^\infty e^{t^2}\|A_k(t)-U_k(t)\|\,dt = \sum_{m=1}^\infty \int\limits_{2^m-\varepsilon_m}^{2^m+\varepsilon_m} \|A_k(t)-U_k(t)\|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\|A_k(t)-U_k(t)\| \sum_{m=1}^\infty 2e^{(2^m+\varepsilon_m)^2}\varepsilon_m \leqslant 4,$$

то в силу леммы 11 § 6 гл. I, система $\dot y = A_k(t)y$ ляпуновски эквивалентна системе $\dot x = U_k(t)x$, следовательно

$$\delta_1(A_1) = \delta_1(U_1),\ \delta_2(A_1) = \delta_2(U_1),$$

$$\delta_1(A_2) = \delta_1(U_2),\ \delta_2(A_2) = \delta_2(U_2).$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty}\|U_1(t)-U_2(t)\| = 0,$$

то

$$\lim_{t\to\infty}\|A_1(t)-A_2(t)\| = 0.$$

Докажем, что функция $\delta_k : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Рассмотрим две блочно-диагональные системы

$$\dot x = \operatorname{diag}\{\underbrace{-1,\ldots,-1}_{k-1}, A_1(t), 1,\ldots,1\}x,$$

$$\dot y = \operatorname{diag}\{\underbrace{-1,\ldots,-1}_{k-1}, A_2(t), 1,\ldots,1\}y.$$

Из формулы (2) получаем для первой системы

$$\delta_k(A_1) = 0, \quad \delta_{k+1}(A_1) = \frac{1}{3},$$

а для второй системы

$$\delta_k(A_2) = \frac{1}{3}, \quad \delta_{k+1}(A_2) \geqslant \frac{1}{2}.$$

В силу теоремы II § 3 гл. I, функции $\delta_k : M_n \to \mathbb{R}$, $\delta_{k+1} : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежат первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Теорема II доказана.

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из теоремы II, в случае $n \geqslant 2$, следует непринадлежность функции $\delta_k(\cdot)$ первому классу Бэра на пространстве M_n^c. При $n = 1$ для любой системы (1) справедливо равенство $\lambda_1(A) = \delta_1(A)$, следовательно функция $\delta_k(\cdot)$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_1^c и является непрерывной на пространстве M_1^u.

§ 2 Точный класс Бэра конструктивного показателя на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Наряду с линейной системой (1), для фиксированного $m > 1$, рассмотрим возмущенную нелинейную систему

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{9}$$

с непрерывной по $t \geqslant 0$ и непрерывной по

$$y \in U_\rho(f) = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| < \rho(f) < +\infty\}$$

вектор-функцией $f : \mathbb{R}^+ \times U_\rho(f) \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию

$$\|f(t, y)\| \leqslant N_f \|y\|^m, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times U_\rho(f). \tag{10}$$

Введем обозначения: F_m — множество всех вектор функций, удовлетворяющих условию (10),

$$\chi(y(\cdot, y_0)) = \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|y(t, y_0)\|$$

— характеристический показатель решения $y(t, y_0)$ системы (9) с начальным условием $y(0) = y_0$.

Рассмотрим величину

$$\sup_{f\in F_m}\varlimsup_{y_0\to 0}\chi(y(\cdot,y_0)), \tag{11}$$

которая оценивает сверху характеристические показатели всех решений системы (9) [56]. В работе [63] доказано, что в случае отрицательности величины (11), она совпадает с конструктивным показателем системы (1), который вычисляется по формуле

$$\begin{gathered}\xi_0^\alpha(A)=\alpha, \quad \xi_k^\alpha(A)=\max_{0\leqslant i<k}\{\ln\|X_A(k,i)\|+m\xi_i^\alpha\},\\ \Omega_m(A)=\lim_{\alpha\to-\infty}\varlimsup_{k\to+\infty}\tfrac{1}{k}\xi_k^\alpha(A).\end{gathered} \tag{12}$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По функции

$$A:\mathfrak{M}\times\mathbb{R}^+\to\operatorname{End}\mathbb{R}^n \tag{13}$$

непрерывной по совокупности переменных и ограниченной по t при всяком фиксированном значении μ, построим функцию

$$\mu\mapsto\Omega_m(A(\mu,\cdot)) \tag{14}$$

Изучим свойства функции (14) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема III. *Для любого отображения (13) функция (14) принадлежит второму классу Бэра. Если $\mathfrak{M}$ метризуемо полной метрикой, то в типичной по Бэру точке эта функция полунепрерывна сверху.*

Доказательство. Докажем, что последовательность функций

$$\Psi^\alpha(A)=\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\xi_k^\alpha(A)$$

является неубывающей. Пусть $\alpha\leqslant\beta$ и $k\in\mathbb{N}$, тогда

$$\xi_0^\alpha(A)=\alpha\leqslant\beta=\xi_0^\beta(A),$$

$$\ln\|X_A(1,0)\|+m\xi_0^\alpha(A)\leqslant\ln\|X_A(1,0)\|+m\xi_0^\beta(A)\Rightarrow\xi_0^\alpha(A)\leqslant\xi_0^\beta(A),$$

$$\left.\begin{aligned}\ln\|X_A(2,0)\|+m\xi_0^\alpha(A)\leqslant\ln\|X_A(2,0)\|+m\xi_0^\beta(A)\\ \ln\|X_A(2,1)\|+m\xi_1^\alpha(A)\leqslant\ln\|X_A(2,1)\|+m\xi_1^\beta(A)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\xi_2^\alpha(A)\leqslant\xi_2^\beta,$$

. . . .

$$\left.\begin{array}{l}\ln\|X_A(k,0)\|+m\xi_0^\alpha(A)\leqslant\ln\|X_A(k,0)\|+m\xi_0^\beta(A)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \ln\|X_A(k,k-1)\|+m\xi_{k-1}^\alpha(A)\leqslant\ln\|X_A(k,k-1)\|+m\xi_{k-1}^\beta(A)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\xi_k^\alpha(A)\leqslant\xi_k^\beta.$$

Таким образом, получаем $\Psi^\alpha(A)\leqslant\Psi^\beta(A)$. Следовательно, формулу (12) можно переписать в виде

$$\Omega_m(A)=\lim_{\alpha\to-\infty}\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{1}{k}\xi_k^\alpha(A)=\lim_{m\to\infty}\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{1}{k}\xi_k^{(-m)}(A)=$$

$$=\inf_{m\in\mathbb{N}}\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{1}{k}\xi_k^{(-m)}(A)=\inf_{m\in\mathbb{N}}\inf_{s\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant s}\frac{1}{k}\xi_k^{(-m)}(A)=$$

$$=\lim_{p\to\infty}\min_{1\leqslant m\leqslant p}\min_{1\leqslant s\leqslant p}\lim_{j\to\infty}\max_{s\leqslant k\leqslant j}\frac{1}{k}\xi_k^{(-m)}(A).$$

Из леммы 10 § 5 гл. I следует, что функция

$$\mu\mapsto\xi_k^{(-m)}(A(\mu,\cdot))$$

является непрерывной на пространстве $\mathfrak{M}$. Таким образом, функция (14) принадлежит второму классу Бэра на этом пространстве.

Пусть

$$\psi_p(\mu)=\min_{1\leqslant m\leqslant p}\min_{1\leqslant s\leqslant p}\lim_{j\to\infty}\max_{s\leqslant k\leqslant j}\frac{1}{k}\xi_k^{(-m)}(A(\mu,\cdot)).$$

Так как последовательность функций $(\psi_p)_{p=1}^\infty$ первого класса Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$ является невозрастающей, то в случае полноты пространства $\mathfrak{M}$, в силу леммы 1 § 2 гл. I, функция (14) является полунепрерывной сверху в типичной по Бэру точке. Теорема III доказана.

В силу теоремы III и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 2 [33]. *Для любого $k\in\{1,\dots,n\}$ функция $\Omega_m(\cdot):M_n\to\mathbb{R}$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из принадлежности функции $\Omega_m(\cdot)$ второму классу Бэра на пространстве M_n^c следует ее принадлежность тому же классу Бэра на пространстве M_n^u.

Теорема IV [33]. *Если $n>1$, то функция $\Omega_m:M_n\to\mathbb{R}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u.*

Доказательство. Докажем, что для любой правильной по Ляпунову системы

$$\dot{x} = A(t)x \tag{15}$$

с отрицательным старшим показателем Ляпунова выполнено равенство $\Omega_m(A) = \lambda_n(A)$. Так как система (15) правильная, то существует (см. [8] или [61, стр. 77]) оператор-функция $Q(\cdot)$ такая, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Q(t)\| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Q^{-1}(t)\| = 0,$$

и оператор Коши системы (15) имеет вид

$$X_A(t, 0) = Q(t)\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1(A)t}, \ldots, e^{\lambda_n(A)t}\}.$$

Можно считать, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|Q^{-1}(t)\| = 0,$$

так как, в силу неравенства

$$\|Q^{-1}(t)\| \geqslant \|Q(t)\|^{-1},$$

имеем

$$0 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Q^{-1}(t)\| \geqslant \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|Q^{-1}(t)\| \geqslant - \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Q(t)\| = 0.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C_\varepsilon > 1$, что для любого $t \geqslant 0$ выполнены неравенства

$$\|Q^{-1}(t)\| \leqslant \sqrt{C_\varepsilon} e^{\varepsilon t}, \quad \|Q(t)\| \leqslant \sqrt{C_\varepsilon} e^{\varepsilon t}.$$

Таким образом, для для оператора Коши системы (15) имеем

$$\|X_A(t, \tau)\| = \|X_A(t, 0)X_A^{-1}(\tau, 0)\| =$$
$$= \|Q(t)\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1(A)(t-\tau)}, \ldots, e^{\lambda_n(A)(t-\tau)}\}Q^{-1}(\tau)\| \leqslant$$
$$\leqslant C_\varepsilon e^{\lambda_n(A)(t-\tau)+\varepsilon t+\varepsilon\tau} = C_\varepsilon e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(t-\tau)+\varepsilon\tau}.$$

При помощи метода вариации произвольной постоянной для решения $y(t, \cdot)$ системы (9) получаем

$$y(t, y_0) = X_A(t, 0)y_0 + \int_0^t X_A(t, \tau)f(\tau, y(\tau, y_0))\, d\tau.$$

Отсюда

$$\|y(t,y_0)\| \leqslant \|X_A(t,0)\|\|y_0\| + \int\limits_0^t \|X_A(t,\tau)\|\|f(\tau,y(\tau,y_0))\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_\varepsilon e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)t}\|y_0\| + C_\varepsilon N_f \int\limits_0^t e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(t-\tau)+\varepsilon\tau}\|y(\tau,y_0)\|^m\,d\tau,$$

а следовательно, для

$$u(t) = \|y(t,y_0)\|e^{-(\lambda_n(A)+\varepsilon)t},$$

получаем неравенство

$$u(t) \leqslant C_\varepsilon\|y_0\| + C_\varepsilon N_f \int\limits_0^t e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(m-1)\tau+\varepsilon\tau}u^m(\tau)\,d\tau.$$

В силу леммы Бихари [9, стр. 198], при $\varepsilon < \frac{-\lambda_n(A)(m-1)}{m}$ и y_0, удовлетворяющем неравенству

$$(m-1)\|y_0\|^{m-1}C_\varepsilon^m N_f \int\limits_0^{+\infty} e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(m-1)\tau+\varepsilon\tau}\,d\tau < 1,$$

для нормы решения $y(t,y_0)$ получаем

$$\|y(t,y_0)\| = u(t)e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_\varepsilon\|y_0\|e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)t}}{\left(1-(m-1)\|y_0\|^{m-1}C_\varepsilon^m N_f \int\limits_0^{+\infty} e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(m-1)\tau+\varepsilon\tau}\,d\tau\right)^{\frac{1}{m-1}}}.$$

Следовательно, получаем

$$\chi(y(\cdot,y_0)) = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\|y(t,y_0)\| \leqslant \lambda_n(A)+\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем $\lambda_n(A) = \Omega_m(A)$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x,$$

$$A(t) = \operatorname{diag}\{\begin{pmatrix} \pi\sin(\pi\sqrt{t})-2 & 0 \\ 0 & -\pi\sin(\pi\sqrt{t})-2 \end{pmatrix}, \underbrace{-3,\ldots,-3}_{n-2}\}.$$

Установлено [14, стр. 187], что показатели Ляпунова системы A удовлетворяют равенствам

$$\lambda_1(A) = \ldots = \lambda_{n-2}(A) = -3,$$

$$\lambda_{n-1}(A) = \lambda_n(A) = -2,$$

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp} A(\tau) d\tau = (-3)(n-2) - 4.$$

Следовательно, система A является правильной. Верхний центральный показатель этой системы удовлетворяет равенству $\Omega(A) = -1$, а нижний центральный показатель — равенству $\omega(A) = -3$. Установлено [68, стр. 85], что существует система $\dot{y} = B(t)y$ такая, что

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0,\ \lambda_{n-1}(B) = \omega(A) = -3.$$

В силу неравенства Ляпунова получаем

$$-1 = \Omega(A) \geqslant \lambda_n(B) \geqslant \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp} B(\tau) d\tau + 3(n-2) - \lambda_1(B) = -1,$$

следовательно, система $\dot{y} = B(t)y$ является правильной. Допустим, что функция $\Omega_m : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра на пространствах M_n^u. Тогда, в силу теоремы II § 3 гл. I, получаем $\Omega_m(A) = \Omega_m(B)$. С другой стороны, $\Omega_m(A) = \lambda_n(A) = -2$ и $\Omega_m(B) = \lambda_n(B) = -1$. Полученное противоречие доказывает теорему IV.

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из теоремы II, в случае $n \geqslant 2$, следует непринадлежность функции $\Omega_m(\cdot)$ первому классу Бэра на пространстве M_n^c. При $n = 1$ для любой системы (1) справедливо равенство $\lambda_1(A) = \Omega_m(A)$, следовательно функция $\Omega_m(\cdot)$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_1^c и является непрерывной на пространстве M_1^u.

§ 3 Точный класс Бэра сигма-показателей Изобова на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Пусть $\lambda_n(A)$ — старший показатель Ляпунова линейной системы (1). Для заданного $\sigma > 0$, сигма-показатель [60]

$$\nabla_\sigma(A) = \sup_{Q \in K_\sigma} \lambda_n(A + Q),$$

отвечает за подвижность вверх старшего показателя Ляпунова при непрерывных возмущениях системы (1), принадлежащих множеству

$$K_\sigma = \{Q(\cdot) : \sup_{t \geqslant 0} \|Q(t)\| e^{\sigma t} < \infty\}.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По функции

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{16}$$

непрерывной по совокупности переменных и ограниченной по t при всяком фиксированном значении μ, построим функцию

$$\mu \mapsto \nabla_\sigma(A(\mu, \cdot)). \tag{17}$$

Изучим свойства функции (17) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема V [50]. *Для любого отображения (16) и $\sigma > 0$ функция (17) принадлежит второму классу Бэра. Если $\mathfrak{M}$ метризуемо полной метрикой, то в типичной по Бэру точке эта функция полунепрерывна сверху.*

Доказательство. В работе [60] приведен алгоритм вычисления сигма-показателя через оператор Коши $X_A(t, s)$ системы (1)

$$\xi_1^\sigma(A) = 0, \quad \xi_k^\sigma = \max_{1 \leqslant i < k} \{\ln \|X_A(k, i)\| + \xi_i^\sigma(A) - \sigma i\},$$
$$\nabla_\sigma(A) = \varlimsup_{k \to +\infty} \tfrac{1}{k} \xi_k^\sigma(A).$$

Последнюю формулу можно представить в виде

$$\nabla_\sigma(A) = \lim_{m \to +\infty} \lim_{l \to +\infty} \max_{k \in [m; l]} \tfrac{1}{k} \xi_k^\sigma(A). \tag{18}$$

Из леммы 10 § 5 гл. I следует, что функция

$$\mu \mapsto \xi_k^\sigma(A(\mu, \cdot))$$

является непрерывной на пространстве $\mathfrak{M}$. Таким образом, в силу формулы (18) функция (17) принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$.

Пусть

$$\psi_m(\mu) = \lim_{l\to+\infty} \max_{k\in[m;l]} \frac{1}{k}\xi_k^\sigma(A(\mu,\cdot)).$$

Так как последовательность функций первого класса Бэра $(\psi)_{m=1}^{\infty}$ на пространстве $\mathfrak{M}$ является невозрастающей, то, в случае полноты пространства $\mathfrak{M}$, в силу леммы 1 § 2 гл. I, функция (17) является полунепрерывной сверху в типичной по Бэру точке. Теорема V доказана.

В силу теоремы V и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 3 [27]. *Для любого $n \geqslant 1$ функция $\nabla_\sigma(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из принадлежности функции $\nabla_\sigma(\cdot)$ второму классу Бэра на пространстве M_n^c следует ее принадлежность тому же классу Бэра на пространстве M_n^u.

Теорема VI [32]. *Если $n > 1$, то функция $\nabla_\sigma : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u.*

Доказательство. Показатель любого нетривиального решения диагональной системы

$$V(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2}(\sin(\ln t) + \cos(\ln t)) & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{2}(\sin(\ln t) + \cos(\ln t)) \end{pmatrix}$$

равен

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t) = \frac{\sigma}{2}.$$

Напомним, что коэффициент неправильности Гробмана [14, стр. 67] системы (1) определяется формулой

$$\gamma(A) = \inf_{X\in\mathfrak{X}(A)} \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\chi_i[X] + \chi_i[(X^{-1})^T]\},$$

где $\mathfrak{X}(A)$ — совокупность фундаментальных матриц системы (1), $\chi_i[X]$ — характеристический показатель Ляпунова ее i-ого столбца. Любая фундаментальная матрица системы $\dot{x} = V(t)x$ имеет вид

$$X(t) = C\begin{pmatrix} e^{-\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t)} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t)} \end{pmatrix}, \quad \det C \neq 0,$$

следовательно характеристический показатель Ляпунова любого ее столбца равен $\frac{\sigma}{2}$. Так как

$$(X^{-1})^T(t) = (C^{-1})^T \begin{pmatrix} e^{\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t)} \end{pmatrix},$$

то характеристический показатель Ляпунова любого столбца матрицы $(X^{-1})^T$ равен $\frac{\sigma}{2}$, а следовательно $\gamma(V) = \sigma$. Таким образом, в силу [66], сигма-показатель системы совпадает со старшим показателем Ляпунова $\nabla_\sigma(V) = \lambda_n(V) = \frac{\sigma}{2}$.

Пусть положительное $\sigma_1 < \sigma$. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = U(t)x \tag{19}$$

с непрерывной функцией

$$U(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2}(\sin(\ln t) + \cos(\ln t)) & 0 \\ e^{-\sigma_1 t} & \frac{\sigma}{2}(\sin(\ln t) + \cos(\ln t)) \end{pmatrix}.$$

Докажем, что сигма-показатель системы (19) удовлетворяет неравенству $\nabla_\sigma(U) > \frac{\sigma}{2}$. Произвольное решение системы (19) определяется формулами

$$\begin{gathered} x_1(t) = x_1 e^{-\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t)}, \\ x_2(t) = x_2 e^{\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t)} + x_1 e^{\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t)} \int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t} e^{-\sigma\tau\sin(\ln\tau) - \sigma_1\tau}\, d\tau, \\ x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{20}$$

Рассмотрим две последовательности

$$t_m = e^{2\pi m - \frac{\pi}{2}},$$

$$t'_m = e^{\varepsilon} t_m,$$

где

$$0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}, \text{ и } \cos\varepsilon > \frac{\sigma_1}{\sigma}.$$

При $\tau \in [t'_m, t_m]$ справедливы неравенства

$$2\pi m - \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leqslant \ln\tau \leqslant 2\pi m - \frac{\pi}{2},$$

$$-cos\varepsilon = \sin(-\frac{\pi}{2} - \varepsilon) \geqslant \sin(\ln\tau),$$
$$\sigma cos\varepsilon \leqslant -\sigma\tau\sin(\ln\tau).$$

Поэтому

$$\int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t_m} e^{-\sigma\tau\sin(\ln\tau)-\sigma_1\tau}\,d\tau \geqslant \int\limits_{t'_m}^{t_m} e^{-\sigma\tau\sin(\ln\tau)-\sigma_1\tau}\,d\tau \geqslant \int\limits_{t'_m}^{t_m} e^{(\sigma\cos\varepsilon-\sigma_1)\tau}\,d\tau.$$

Так как при

$$r = \sigma\cos\varepsilon - \sigma_1 > 0$$

имеет место неравенство

$$\int\limits_{t'_m}^{t_m} e^{r\tau}\,d\tau = \frac{1}{r}e^{rt_m}(1 - e^{r(t'_m - t_m)}) > Ce^{rt'_m},$$

где

$$C = \frac{1}{r}(1 - e^{-r}) > 0,$$

то тем более при $t_m \geqslant e^{\frac{3\pi}{2}}$ справедлива оценка

$$\int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t_m} e^{-\sigma\tau\sin(\ln\tau)-\sigma_1\tau}\,d\tau > Ce^{rt'_m}.$$

Если положить $t^*_m = t_m e^{\pi}$, то будет

$$e^{\frac{\sigma}{2}t^*_m\sin(\ln t^*_m)}\int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t^*_m} e^{-\sigma\tau\sin(\ln\tau)-\sigma_1\tau}\,d\tau \geqslant Ce^{(\frac{\sigma}{2}+re^{-\pi})t^*_m}. \tag{21}$$

Рассмотрим решение $x(\cdot)$ системы (19) с начальными условиями

$$x_1(e^{\frac{3\pi}{2}}) = 1, \quad x_2(e^{\frac{3\pi}{2}}) = 0.$$

Из формулы (20) для решений системы (19) и неравенства (21) получаем, что характеристический показатель этого решения не меньше чем $\frac{\sigma}{2} + re^{-\pi}$. Итак, у системы (19) уравнений есть решение с показателем, большим $\frac{\sigma}{2}$, а следовательно, получаем

$$\nabla_\sigma(U) \geqslant \lambda_2(U) > \frac{\sigma}{2}.$$

Для завершения доказательства теоремы VI рассмотрим систему $\dot{x} = A(t)x$, где

$$A(t) = \{V(t), \underbrace{-2, \ldots, -2}_{n-2}\}$$

и систему $\dot{x} = B(t)x$, где

$$B(t) = \{U(t), \underbrace{-2, \ldots, -2}_{n-2}\}.$$

Для этих систем имеем

$$\nabla_\sigma(A) = \nabla_\sigma(V) < \nabla_\sigma(U) = \nabla_\sigma(B).$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = \lim_{t\to\infty} e^{-\sigma_1 t} = 0,$$

то по теореме II § 3 гл. I, получаем, что функция $\nabla_\sigma : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Теорема VI доказана.

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из теоремы VI, в случае $n \geqslant 2$, следует непринадлежность функции $\nabla_\sigma(\cdot)$ первому классу Бэра на пространстве M_n^c. При $n = 1$ для любой системы (1) справедливо равенство $\lambda_1(A) = \nabla_\sigma(A)$, следовательно функция $\nabla_\sigma(\cdot)$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_1^c и является непрерывной на пространстве M_1^u.

§ 4 Точный класс Бэра индекса условной экспоненциальной устойчивости на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Напомним, что система (1), называется условно экспоненциально устойчивой с индексом $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, если существует такое k-мерное подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$, что всякое решение рассматриваемой системы, удовлетворяющее условию $x(0) \in L$ имеет отрицательный характеристический показатель

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\| < 0,$$

считаем, что характеристический показатель нулевого решения равен $-\infty$. Индексом условной экспоненциальной устойчивости $\mathrm{ind}_{es}(A)$ системы (1) назовем максимальное число k, для которого система (1) условно экспоненциально устойчива с индексом k.

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По функции

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\,\mathbb{R}^n \tag{22}$$

непрерывной по совокупности переменных и ограниченной по t при всяком фиксированном значении μ, построим функцию

$$\mu \mapsto \mathrm{ind}_{es}(A(\mu, \cdot)) \tag{23}$$

Изучим свойства функции (23) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема VII. *Для любого отображения (22) функция (23) принадлежит второму классу Бэра.*

Доказательство. Пусть $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Поскольку в формуле (2) для показателей Ляпунова последовательность функций $(a^k_m(\cdot))^\infty_{m=1}$ является невозрастающей на пространстве M_n, то множество

$$\{A \in M_n : \lambda_k(A) \geqslant 0\}$$

можно представить в виде

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \{A \in M_n : a^k_m(A) \geqslant 0\}.$$

Так как функции $a^k_m(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежат первому классу Бэра на пространстве M^c_n, то множества $\{A \in M_n : a^k_m(A) \geqslant 0\}$ являются множествами типа $\mathcal{G}_\delta$ в пространстве M^c_n (см. п. 6 § 1 гл. I), следовательно множество

$$\{A \in M_n : \lambda_k(A) \geqslant 0\}$$

является множеством типа $\mathcal{G}_\delta$ в том же пространстве. Множество $\{A \in M_n : \mathrm{ind}_{es}(A) \geqslant k\}$ совпадает с множеством

$$M_n \setminus \{A \in M_n : \lambda_k(A) \geqslant 0\},$$

которое является множеством F_σ. Следовательно функция $\operatorname{ind}_{es}(\cdot)$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c. Таким образом, в силу теоремы IV § 5 гл. I, функция (23) принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$. Теорема VII доказана.

В силу теоремы VII и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 4 [23]. *Функция $\operatorname{ind}_{es}(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из принадлежности функции $\operatorname{ind}_{es}(\cdot)$ второму классу Бэра на пространстве M_n^c следует ее принадлежность тому же классу Бэра на пространстве M_n^u.

Теорема VIII [20]. *Пусть $n \geqslant 2$, тогда функция $\operatorname{ind}_{es}(\cdot) : M_n \to \{0,\dots,n\}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u.*

Доказательство. Для принадлежности функции первому классу Бэра на пространстве M_n^u, в силу теоремы II § 3 гл. I, необходимо, чтобы для любых систем A и B, удовлетворяющих свойству

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0,$$

было выполнено равенство

$$\operatorname{ind}_{es}(A) = \operatorname{ind}_{es}(B). \tag{24}$$

С другой стороны, как при доказательстве теоремы I § 1 гл. II, рассмотрим исходную систему

$$\dot{x} = \operatorname{diag}\{\underbrace{-1,\dots,-1}_{k-1}, A(t), 3,\dots,3\}x,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin(\ln t) + \cos(\ln t) - 1,02 & 0 \\ 0 & -0{,}51 \end{pmatrix} x, \quad t \geq 1,$$

с показателями Ляпунова

$$\lambda_1(A) =,\dots,\lambda_{k-1}(A) = -1,$$

$$\lambda_k(A) = -0{,}51,$$

$$\lambda_{k+1}(A) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}(t\sin(\ln t) - 1,02t + 1,02) = -0.02,$$

$$\lambda_{k+2}(A) =, \ldots, \lambda_n(A) = 3.$$

и возмущенную систему

$$\dot{y} = \mathrm{diag}\{\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k-1}, B(t), 3, \ldots, 3\}y,$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \sin(\ln t) + \cos(\ln t) - 1,02 & e^{-0,51t} \\ 0 & -0,51 \end{pmatrix},$$

с показателями, удовлетворяющими соотношениям

$$\lambda_1(B) =, \ldots, \lambda_{k-1}(B) = -1,$$

$$\lambda_k(B) = -0{,}02, \quad \lambda_{k+1}(B) \geqslant -0,02 + e^{\ln(\frac{\sqrt{3}}{2})-\pi},$$

$$\lambda_{k+2}(B) =, \ldots, \lambda_n(B) = 3.$$

Следовательно, для первой системы $\mathrm{ind}_{es} = k+1$, а для второй — $\mathrm{ind}_{es} \leqslant k$. Так как

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = \lim_{t\to\infty} e^{-0,51t} = 0,$$

то получаем противоречие с (24). Таким образом, функция $\mathrm{ind}_{es} : M_n^u \to \{0, \ldots, n\}$ не принадлежит первому классу Бэра. Теорема VIII доказана.

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из теоремы II, в случае $n \geqslant 2$, следует непринадлежность функции $\mathrm{ind}_{es}(\cdot)$ первому классу Бэра на пространстве M_n^c.

§ 5 Точный класс Бэра размерности векторных подпространств, определяемых показателями Ляпунова, на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Пусть $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ — показатели Ляпунова системы (1). Обозначим $D_k(A)$ — размерность пространства начальных значений тех решений системы (1), характеристические показатели которых не превосходят $\lambda_k(A)$, считаем, что характеристический показатель нулевого решения равен $-\infty$. Отметим, что имеет место равенство $D_n(A) = n$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По функции

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{25}$$

непрерывной по совокупности переменных и ограниченной по второму аргументу t при всяком фиксированном значении первого μ, построим функцию

$$\mu \mapsto D_k(A(\mu, \cdot)). \tag{26}$$

Изучим свойства функции (26) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема IX. *Для любого отображения (25) и каждого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ функция (26) принадлежит третьему классу Бэра.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\delta(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } \tau \leqslant 0; \\ 0, & \text{при остальных } \tau. \end{cases}$$

Эта функция принадлежит первому классу Бэра на $\mathbb{R}$. Из определения функции D_k получаем $D_k(A) = \delta(\lambda_1(A) - \lambda_k(A)) + \ldots + \delta(\lambda_n(A) - \lambda_k(A))$. Функции

$$\mu \mapsto \lambda_k(A(\mu, \cdot)), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

принадлежат второму классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$ [81], а следовательно, функция (26) принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$ (см. п. 3 § 1 гл. I). Теорема IX доказана.

В силу теоремы IX и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 5 [20]. *Для любого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ функция $D_k(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит третьему классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из принадлежности функции $D_k(\cdot)$ третьему классу Бэра на пространстве M_n^c следует ее принадлежность тому же классу Бэра на пространстве M_n^u.

Теорема X [23]. *Если $n \geqslant 2$, то для любого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ функция $D_k : M_n \to \{0, 1, \ldots, n\}$ не принадлежит второму классу Бэра на M_n^u.*

Доказательство. Допустим, что функция $D_k(\cdot) : M_n^u \to \{1, \ldots, n\}$ принадлежит второму классу Бэра. Тогда для любого непрерывного отображения $\Phi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to M_n^u$ композиция $D_k(\Phi(\cdot)) : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to \{1, \ldots, n\}$ принадлежит второму классу Бэра.

Лемма 1. *Существует непрерывная функция* $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to M_2^u$ *такая, что*

$$\lambda_1(\varphi(\mu)) = \lambda_2(\varphi(\mu)) = 1 \text{ при } \mu \in \mathbf{E},$$
$$1 = \lambda_1(\varphi(\mu)) < \lambda_2(\varphi(\mu)) \text{ при } \mu \notin \mathbf{E}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую последовательность положительных чисел

$$t_m = e^{2\pi m - \frac{\pi}{2}}, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Каждому $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots) \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ поставим в соответствие систему уравнений

$$\dot{x} = U(\mu, t)x \tag{27}$$

с кусочно-непрерывной функцией

$$U(\mu, t) = \begin{pmatrix} -\sin(\ln t) - \cos(\ln t) & 0 \\ e^{-u(\mu,t)} & \sin(\ln t) + \cos(\ln t) \end{pmatrix},$$

где

$$u(\mu, t) = (1 + \frac{\mu_m}{1 + \mu_m})t, \text{ при } t \in [t_m;\, t_{m+1}).$$

Показатель любого нетривиального решения диагональной системы

$$V(\mu, t) = \begin{pmatrix} -\sin(\ln t) - \cos(\ln t) & 0 \\ 0 & \sin(\ln t) + \cos(\ln t) \end{pmatrix}$$

равен

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} t \sin(\ln t) = 1.$$

Напомним, что коэффициент неправильности Гробмана [14, стр. 67] системы (1) определяется формулой

$$\gamma(A) = \inf_{X \in \mathfrak{X}(A)} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\chi_i[X] + \chi_i[(X^{-1})^T]\},$$

где $\mathfrak{X}(A)$ — совокупность фундаментальных матриц системы (1), $\chi_i[X]$ — характеристический показатель Ляпунова ее i-ого столбца. Любая фундаментальная матрицы системы $\dot{x} = V(\mu, t)x$ имеет вид

$$X(t) = C \begin{pmatrix} e^{-t\sin(\ln t)} & 0 \\ 0 & e^{t\sin(\ln t)} \end{pmatrix}, \quad \det C \neq 0,$$

следовательно характеристический показатель Ляпунова любого ее столбца равен 1. Так как

$$(X^{-1})^T(t) = (C^{-1})^T \begin{pmatrix} e^{t\sin(\ln t)} & 0 \\ 0 & e^{-t\sin(\ln t)} \end{pmatrix},$$

то характеристический показатель Ляпунова любого столбца матрицы $(X^{-1})^T$ равен 1, а следовательно $\gamma(V(\mu,\cdot)) = 2$.

Пусть $\mu \in \mathbf{E}$, т. е. $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_m = \infty$, тогда имеет место равенство

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|U(\mu,t) - V(\mu,t)\| = \overline{\lim_{t\to\infty}} -\frac{u(\mu,t)}{t} = \overline{\lim_{m\to\infty}} (-1 - \frac{\mu_m}{1+\mu_m}) = -2$$

а, значит, по [66]

$$\lambda_1(U(\mu,\cdot)) = \lambda_1(\mathrm{diag}\{U(\mu,\cdot)) = 1,$$

$$\lambda_2(U(\mu,\cdot)) = \lambda_2(\mathrm{diag}\{U(\mu,\cdot)) = 1.$$

Пусть $\mu \notin \mathbf{E}$, т. е.

$$\underline{\lim}_{m\to+\infty} \mu_m < \infty,$$

тогда существует бесконечная подпоследовательность $\{\mu_{m'}\} \subset \{\mu_m\}$ и натуральное число q такие, что $\mu_{m'} = q$. Произвольное решение системы (27) определяется формулами

$$\begin{gathered} x_1(t) = x_1 e^{-t\sin(\ln t)} \\ x_2(t) = x_2 e^{t\sin(\ln t)} + x_1 e^{t\sin(\ln t)} \int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t} e^{-2\tau\sin(\ln\tau) - u(\mu,\tau)} d\tau, \\ x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{28}$$

Рассмотрим две последовательности $t_{m'} = e^{2\pi m' - \frac{\pi}{2}}$ и $t^*_{m'} = e^{-\varepsilon} t_{m'}$, где $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$ и

$$\cos\varepsilon > \frac{1}{2}(1 + \frac{q}{1+q}).$$

Из определения функции $u(\mu,\cdot)$ имеем

$$\int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t_{m'}} e^{-2\tau\sin(\ln\tau) - u(\mu,\tau)}\, d\tau \geqslant \int\limits_{t^*_{m'}}^{t_{m'}} e^{-2\tau\sin(\ln\tau) - (1+\frac{q}{1+q})\tau}\, d\tau.$$

При $\tau \in [t^*_{m'}; t_{m'}]$ справедливы неравенства

$$2\pi m' - \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leqslant \ln\tau \leqslant 2\pi m' - \frac{\pi}{2},$$

$$-\cos\varepsilon = \sin(-\frac{\pi}{2} - \varepsilon) \geqslant \sin(\ln\tau),$$

$$2\tau\cos\varepsilon \leqslant -2\tau\sin(\ln\tau).$$

Поэтому

$$\int\limits_{t^*_{m'}}^{t_{m'}} e^{-2\tau\sin(\ln\tau)-(1+\frac{q}{1+q})\tau}\,d\tau. \geqslant \int\limits_{t^*_{m'}}^{t_{m'}} e^{(2\cos\varepsilon-(1+\frac{q}{1+q}))\tau}\,d\tau.$$

Так как при

$$r = 2\cos\varepsilon - (1 - \frac{q}{1+q}) > 0$$

имеет место неравенство

$$\int\limits_{t^*_{m'}}^{t_{m'}} e^{r\tau}\,d\tau = \frac{1}{r}e^{rt_{m'}}(1 - e^{r(t^*_{m'}-t_{m'})}) > Ce^{rt_{m'}},$$

где

$$C = \frac{1}{r}(1 - e^{-re^{\frac{3\pi}{2}}(1-e^{-\varepsilon})}) > 0,$$

то тем более

$$\int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t_{m'}} e^{-2\tau\sin(\ln\tau)-u(\mu,\tau)}\,d\tau > Ce^{rt_{m'}}.$$

Если положить $T_{m'} = t_{m'}e^{\pi}$, то получим

$$e^{T_{m'}\sin(\ln T_{m'})}\int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{T_{m'}} e^{-2\tau\sin(\ln\tau)-u(\mu,\tau)}\,d\tau \geqslant Ce^{(1+re^{-\pi})T_{m'}}. \quad (29)$$

Рассмотрим решение $x(\cdot)$ системы (27) с начальными условиями

$$x_1(t_1) = 1, \quad x_2(t_1) = 0.$$

Из формулы (28) для решений системы и неравенства (29) получаем, что характеристический показатель этого решения не меньше, чем $1 + re^{-\pi}$.

Итак, если $\mu \in \mathbf{E}$, то у системы уравнений $\dot{x} = U(\mu, t)x$ есть решение с показателем большим 1. Таким образом, при $\mu \in \mathbf{E}$ получаем

$$\lambda_1(U(\mu, \cdot) = 1, \quad \lambda_1(U(\mu, \cdot)) < \lambda_2(U(\mu, \cdot)).$$

По кусочно-непрерывной функции $U(\mu, \cdot)$ и последовательности положительных чисел $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ такой, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{(t_m+\varepsilon_m)^2}\varepsilon_m \leqslant 1,$$

построим функцию $A(\mu, \cdot)$ следующим образом

$$A(\mu, t) = \begin{cases} K_m\dot{(}t - t_m - \varepsilon_m) + U(\mu, t_m + \varepsilon_m), \text{ при } t \in [t - \varepsilon_m; t_m + \varepsilon_m]; \\ U(\mu, t), \text{ при остальных } t, \end{cases}$$

$$K_m = \frac{U(\mu, t_m + \varepsilon_m) - U(\mu, t_m - \varepsilon_m)}{2\varepsilon_m}$$

Эта функция непрерывна по $t \in \mathbb{R}^+$. Действительно, в точках непрерывности функции $U(\mu, \cdot)$, которые не принадлежат объединению отрезков $\bigcup\limits_m [t_m - \varepsilon_m, t_m + \varepsilon_m]$, функция $A(\mu, \cdot)$ совпадает с функцией $U(\mu, \cdot)$, а на любом из отрезков $[t_m - \varepsilon_m, t_m + \varepsilon_m]$ график функции $A(\mu, \cdot)$ представляет собой отрезок прямой, который соединяет точку с координатами $(t_m - \varepsilon_m, U(\mu, t_m - \varepsilon_m))$ и точку с координатами $(t_m + \varepsilon_m, U(\mu, t_m + \varepsilon_m))$.

Так как

$$\int\limits_0^t e^{\tau^2}\|A(\mu, \tau) - U(\mu, \tau)\|\,d\tau =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{t_m-\varepsilon_m}^{t_m+\varepsilon_m} e^{\tau^2}\|A(\mu, \tau) - U(\mu, \tau)\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{t\geqslant 0}\|A(\mu, t) - U(\mu, t)\| \sum_{m=1}^{\infty} 2e^{(t_m+\varepsilon_m)^2}\varepsilon_m \leqslant 4,$$

в силу леммы 11 § 6 гл. I, система $\dot{y} = A(\mu, t)y$ ляпуновски эквивалентна системе $\dot{x} = U(\mu, t)x$, следовательно, для любого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ верны равенства

$$\lambda_1(A(\mu, \cdot)) = \lambda_1(U(\mu, \cdot)),\ \lambda_2(A(\mu, \cdot)) = \lambda_2(U(\mu, \cdot)).$$

Получили отображение $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to M_2^u$. Отображение φ является непрерывным. Действительно, пусть $d(\mu, \nu) = \frac{1}{m+1}$, т. е.

$$\mu_1 = \nu_1, \ldots, \mu_m = \nu_m.$$

Тогда получаем $U(\mu, t) = U(\nu, t)$ на отрезке $[0, t_m]$, а следовательно $A(\mu, t) = A(\nu, t)$ на отрезке $[0, t_m - 1]$. Так как

$$\sup_{t \in [t_m - 1, +\infty)} \|A(\mu, t) - \mathrm{diag}\{A(\mu, t)\}\| \leqslant e^{-(t_m - 1)},$$

то

$$\sup_{t \geqslant 0} \|A(\mu, t) - A(\nu, t)\| =$$

$$= \sup_{t \in [t_m - 1, +\infty)} \|A(\mu, t) - \mathrm{diag}\{A(\mu, t)\} - A(\nu, t) + \mathrm{diag}\{A(\nu, t)\}\| \leqslant 2e^{-(t_m - 1)}.$$

Лемма 1 доказана.

Завершение доказательства теоремы X. Рассмотрим отображение $\Phi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to M_n^u$, определяемое формулой

$$\mu \mapsto P(\mu, \cdot),$$

$$P(\mu, t) = \{3, \ldots, 3, A(\mu, t), \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}\},$$

где $A(\mu, \cdot)$ из леммы 1. Это отображение непрерывно и

$$0 = \lambda_1(P(\mu, \cdot)) = \ldots = \lambda_{k-1}(P(\mu, \cdot)) < \lambda_k(P(\mu, \cdot)) =$$

$$= \lambda_{k+1}(P(\mu, \cdot)) < \lambda_{k+2}(P(\mu, \cdot)) = \lambda_n(P(\mu, \cdot)) = 3, \text{ при } \mu \in \mathbf{E};$$

$$0 = \lambda_1(P(\mu, \cdot)) = \ldots = \lambda_{k-1}(P(\mu, \cdot)) <$$

$$< \lambda_k(P(\mu, \cdot)) < \lambda_{k+1}(P(\mu, \cdot)) < \lambda_{k+2}(P(\mu, \cdot)) = \lambda_n(P(\mu, \cdot)) = 3, \text{ при } \mu \notin \mathbf{E}.$$

Следовательно

$$D_k(\varphi(\mu)) = k + 1, \text{при } \mu \in \mathbf{E};$$

$$D_k(\varphi(\mu)) = k, \text{при } \mu \notin \mathbf{E}.$$

Итак, функция $D_k(\varphi(\mu)) - k$ совпадает с характеристической функцией множества $\mathbf{E}$, а следовательно, не принадлежит второму классу Бэра на $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Полученное противоречие доказывает теорему X.

В силу теоремы X и теоремы V § 5 гл. I, получаем

Следствие 6. *Существует такое полное метрическое пространство $\mathfrak{M}$, что для любого $n \geqslant 2$ найдется отображение (25) непрерывное по $\mu \in \mathfrak{M}$ равномерно по $t \in \mathbb{R}^+$, для которого функция (26) не принадлежит второму классу Бэра.*

§ 6 Точный класс Бэра экспоненциального показателя Изобова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией

Старший экспоненциальный показатель [64]

$$\nabla(A) = \sup_{Q \in K_0} \lambda_n(A + Q),$$

отвечает за подвижность вверх старшего показателя Ляпунова при возмущениях системы (1), принадлежащих множеству

$$K_0 = \{Q(\cdot) : \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Q(t)\| < 0\}.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По отображению

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{30}$$

непрерывному по совокупности переменных и ограниченному по t при всяком фиксированном значении μ, построим функцию

$$\mu \mapsto \nabla(A(\mu, \cdot)). \tag{31}$$

Изучим свойства функции (31) с точки зрения бэровской классификации.

В докладе [3] утверждается, что функция (31) принадлежит третьему классу Бэра, а в докладе [2], что существует полное метрическое пространство такое, что эта функция (31) не принадлежит первому классу Бэра.

Теорема XI. *Пусть $\mathfrak{M} = \mathcal{B}(\mathbb{N})$. Тогда для всякого $n \geqslant 2$ найдется такое отображение (30), что функция (31) не принадлежит второму классу Бэра.*

Доказательство. В работе [64] приведен алгоритм вычисления экспоненциального показателя через оператор Коши $X_A(t,s)$ системы (1)

$$\nabla(A) = \lim_{\theta\to 1+0}\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\theta^{-m}\sum_{i=1}^{m}\ln\|X(\theta^i,\theta^{i-1})\|.$$

Каждому $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots)\in\mathcal{B}(\mathbb{N})$ поставим в соответствие последовательность точек

$$t_k^s = 2^{2^k+\frac{s}{2^{\mu_k}}},\quad s=0,\ldots,2^{k+\mu_k}-1,\quad k\geqslant 1.$$

Перенумеруем получившиеся точки в порядке их возрастания $(t_m)_{m=1}^{\infty}$. Построим систему уравнений

$$\dot{x} = U(\mu,t)x$$

с кусочно-непрерывной функцией

$$U(\mu,t)=\begin{pmatrix} -u(\mu,t) & 0\\ 0 & u(\mu,t)\end{pmatrix},$$

где

$$u(\mu,t)=\begin{cases} 0, & \text{при } t\in[0;t_1);\\ -1, & \text{при } t\in[t_{2m-1};t_{2m});\\ 1, & \text{при } t\in[t_{2m};t_{2m+1}),\end{cases}\qquad l=1,2,\ldots.$$

Пусть $\mu\notin\mathbf{E}$, т. е.

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\,\mu_k<\infty,$$

тогда существует бесконечная подпоследовательность $(\mu_{k'})\subset(\mu_k)$ и натуральное число q такие, что $\mu_{k'}=q$. Рассмотрим последовательность $(\theta_r=2^{\frac{1}{r2^q}})_{r=2}^{\infty}$. При

$$2^{k'}r2^q+1\leqslant i\leqslant 2^{k'+1}r2^q,$$

имеем

$$\ln\|X(\theta_r^i,\theta_r^{i-1})\| = \max\{-\int\limits_{2^{\frac{i-1}{r2^q}}}^{2^{\frac{i}{r2^q}}}u(\mu,t)\,dt;\int\limits_{2^{\frac{i-1}{r2^q}}}^{2^{\frac{i}{r2^q}}}u(\mu,t)\,dt\} = 2^{\frac{i}{r2^q}}-2^{\frac{i-1}{r2^q}},$$

следовательно

$$\sum_{i=2^{k'}r2^q+1}^{2^{k'+1}r2^q}\ln\|X(\theta_r^i,\theta_r^{i-1})\| = \sum_{i=2^{k'}r2^q+1}^{2^{k'+1}r2^q}2^{\frac{i}{r2^q}}-2^{\frac{i-1}{r2^q}} = 2^{2^{k'+1}}-2^{2^{k'}}.$$

Таким образом, получаем

$$1 \geqslant \nabla(U(\mu,\cdot)) = \lim_{r\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}}\, \theta_r^{-m} \sum_{i=1}^{m} \ln \|X(\theta_r^i, \theta_r^{i-1})\| \geqslant$$
$$\geqslant \lim_{k'\to\infty} \frac{2^{2^{k'+1}} - 2\cdot 2^{2^{k'}}}{2^{2^{k'+1}}} = 1.$$

Пусть $\mu \in \mathbf{E}$, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k = \infty$. Рассмотрим последовательность $\theta_r = 2^{\frac{1}{2^r}}$. Зафиксируем $r \in \mathbb{N}$. Пусть $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $k > k_0$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{2^r} > \frac{1}{2^{\mu_k}}, \tag{32}$$

$$\frac{(1 - 2^{-\frac{1}{\mu_k}})2^{\frac{1}{2^r}}}{2^{\frac{1}{2^r}} - 1} < \frac{1}{r}, \tag{33}$$

$$2^{2^k - 2^{k+1}} < \frac{1}{r}. \tag{34}$$

Для $m > 2^{k_0+r}$ введем обозначения

$$k(m) = \max\{k \in \mathbb{N} | 2^{k+r} < m\},$$

$$S_1 = 2^{-\frac{m}{2^r}} \sum_{i=1}^{2^{k(m)+r-1}-1} \ln \|X(\theta_r^i, \theta_r^{i-1})\|,$$

$$S_2 = 2^{-\frac{m}{2^r}} \sum_{i=2^{k(m)+r-1}}^{2^{k(m)+r}-1} \ln \|X(\theta_r^i, \theta_r^{i-1})\|,$$

$$S_3 = 2^{-\frac{m}{2^r}} \sum_{i=2^{k(m)+r}}^{m} \ln \|X(\theta_r^i, \theta_r^{i-1})\|.$$

Оценим сверху каждое слагаемое суммы

$$S_1 + S_2 + S_3 = \theta_r^{-m} \sum_{i=1}^{m} \ln \|X(\theta_r^i, \theta_r^{i-1})\|.$$

Используя (34), для S_1 получаем

$$S_1 = 2^{-\frac{m}{2^r}} \sum_{i=1}^{2^{k(m)+r-1}} \ln \|X(\theta_r^i, \theta_r^{i-1})\| \leqslant 2^{2^{k(m)-1} - \frac{m}{2^r}} \leqslant 2^{2^{k(m)-1} - 2^{k(m)}} < \frac{1}{r}. \tag{35}$$

Пусть $i = 2^{k(m)+r-1}$ и $p = 0, \ldots, (2^{k(m)} - 2^{k(m)-1})2^r - 1$, тогда, в силу (32), получаем

$$\ln \|X(\theta_r^{i+p+1}, \theta_r^{i+p})\| = \max\{-\int\limits_{2^{\frac{i+p}{2^r}}}^{2^{\frac{i+p+1}{2^r}}} u(\mu,t)\,dt; \int\limits_{2^{\frac{i+p}{2^r}}}^{2^{\frac{i+p+1}{2^r}}} u(\mu,t)\,dt\} =$$

$$= \max\{-\int\limits_{2^{2^{k(m)-1}+\frac{p}{2^r}}}^{2^{2^{k(m)-1}+\frac{p+1}{2^r}}} u(\mu,t)\,dt; \int\limits_{2^{2^{k(m)-1}+\frac{p}{2^r}}}^{2^{2^{k(m)-1}+\frac{p+1}{2^r}}} u(\mu,t)\,dt\}.$$

Пусть s и l такие, что

$$2^{\frac{s}{2^{\mu_{k(m)}}}} = 2^{2^{k(m)-1}+\frac{p}{2^r}},$$

$$2^{\frac{s+l}{2^{\mu_{k(m)}}}} = 2^{2^{k(m)-1}+\frac{p+1}{2^r}}.$$

Тогда, в силу (32), имеем

$$\max\{-\int\limits_{2^{2^{k(m)-1}+\frac{p}{2^r}}}^{2^{2^{k(m)-1}+\frac{p+1}{2^r}}} u(\mu,t)\,dt; \int\limits_{2^{2^{k(m)-1}+\frac{p}{2^r}}}^{2^{2^{k(m)-1}+\frac{p+1}{2^r}}} u(\mu,t)\,dt\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^l \left(2^{\frac{j+1}{2^{\mu_{k(m)}}}} - 2^{\frac{j}{2^{\mu_{k(m)}}}}\right) \leqslant 2^{2^{k(m)-1}}(2^{\frac{p+1}{2^r}} - 2^{\frac{p+1}{2^r} - \frac{1}{2^{\mu_k}}}),$$

следовательно, в силу (33) и (34), для S_2 имеем

$$\begin{aligned} S_2 &= 2^{-\frac{m}{2^r}} \sum_{i=2^{k(m)+r-1}}^{2^{k(m)+r}-1} \ln \|X(\theta_r^i, \theta_r^{i-1})\| \leqslant \\ &\leqslant 2^{2^{k(m)-1}-2^{k(m)}}(1 - 2^{-\frac{1}{\mu_k}}) \sum_{p=0}^{(2^{k(m)}-2^{k(m)-1})2^r-1} 2^{\frac{p+1}{2^r}} = \\ &= 2^{2^{k(m)-1}-2^{k(m)}}(1 - 2^{-\frac{1}{\mu_k}}) \frac{2^{\frac{1}{2^r}}(2^{2^{k(m)}-2^{k(m)-1}}-1)}{2^{\frac{1}{2^r}}-1} = \\ &= \frac{(1-2^{-\frac{1}{\mu_k}})2^{\frac{1}{2^r}}}{2^{\frac{1}{2^r}}-1}(1 - 2^{2^{k(m)-1}-2^{k(m)}}) < \frac{1}{r}. \end{aligned} \tag{36}$$

Пусть $i = 2^{k(m)+r}$ и $p = 0, \ldots, m - 2^{k(m)+r} - 1$, тогда для S_3, в силу (33), получаем

$$\begin{aligned} S_3 &= 2^{-\frac{m}{2^r}} \sum_{i=2^{k(m)+r}}^{m} \ln \|X(\theta_r^i, \theta_r^{i-1})\| \le \\ &\le 2^{2^{k(m)}-\frac{m}{2^r}}(1 - 2^{-\frac{1}{\mu_k}}) \sum_{p=0}^{m-2^{k(m)+r}-1} 2^{\frac{p+1}{2^r}} = \\ &= \frac{(1-2^{-\frac{1}{\mu_k}})2^{\frac{1}{2^r}}}{2^{\frac{1}{2^r}}-1}(1 - 2^{2^{k(m)}-m}) < \frac{1}{r}. \end{aligned} \tag{37}$$

Из (35)–(37) получаем

$$\nabla(U(\mu,\cdot)) = \lim_{r\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}}\, \theta_r^{-m} \sum_{i=1}^{m} \ln \|X(\theta_r^i, \theta_r^{i-1})\| \leqslant \lim_{r\to\infty} \frac{3}{r} = 0.$$

С другой стороны из определения системы $\dot{x} = U(\mu, t)x$ имеем

$$\nabla(U(\mu,\cdot)) \geqslant -1.$$

Для отображения $(\mu, t) \mapsto U(\mu, t)$, в силу ляпуновской инвариантности показателя ∇, существует такое отображение

$$Q : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^2$$

непрерывное по совокупности переменных и ограниченное по t при всяком фиксированном μ, что для любого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ выполнено равенство $\nabla(U(\mu,\cdot)) = \nabla(Q(\mu,\cdot))$ (см. лемму 12 § 6 гл. I).

Рассмотрим отображение $A : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$, определяемое формулой

$$(\mu, t) \mapsto \operatorname{diag}\{Q(\mu, t), \underbrace{-2, \ldots, -2}_{n-2,}\}.$$

Допустим, что функция $\mu \mapsto \nabla(A(\mu,\cdot))$ принадлежит второму классу Бэра. Тогда для непрерывного (см. лемму 7 § 5 гл. I) отображения $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to M_n^c$, определяемого формулой $\mu \mapsto A(\mu,\cdot)$, замыкание множеств

$$\nabla(\varphi(\mathbf{E})) \text{ и } \nabla(\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{N})\backslash\mathbf{E}))$$

не пусто. С другой стороны

$$\nabla(\varphi(\mu)) \leqslant 0, \text{ при } \mu \in \mathbf{E};$$

$$\nabla(\varphi(\mu)) = 1, \text{ при } \mu \notin \mathbf{E}.$$

Получили противоречие, следовательно функция $\mu \mapsto \nabla(A(\mu,\cdot))$ не принадлежит второму классу Бэра. Теорема XI доказана.

В силу теоремы XI и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 7 [30]. *При $n \geqslant 2$ функция $\nabla : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

§ 7 Точный класс Бэра нижних вспомогательных показателей Миллионщикова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией

Напомним, что нижний вспомогательный показатель системы (1) определяется при всяком $k \in \{1, \dots, n\}$ формулой [80]

$$\underline{\nu}_k(A) = \varliminf_{T\to\infty} \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln \delta_k(jT, (j-1)T),$$

где $\delta_k(t,\tau)$ — k-е сингулярное число оператора Коши $X_A(t,\tau)$ системы (1). Отметим, что при $k = n$ функция $\underline{\nu}_n(\cdot)$ совпадает с $\overline{\lambda}_n$, а поэтому принадлежит в точности второму классу на M_n^c [35], а при $k \in \{1, \dots, n-1\}$ функция $\underline{\nu}_k(\cdot)$ принадлежит третьему классу Бэра на M_n^c [119].

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По отображению

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{38}$$

непрерывному по совокупности переменных и ограниченному по t при всяком фиксированном значении μ, построим функцию

$$\mu \mapsto \underline{\nu}_k(A(\mu, \cdot)). \tag{39}$$

Изучим свойства функции (39) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема XII . *Пусть* $\mathfrak{M} = \mathcal{B}(\mathbb{N})$. *Тогда для всякого* $n \geqslant 2$ *и* $k \in \{1, \dots, n-1\}$ *найдется такое отображение (38), что функция* $\mu \mapsto \underline{\nu}_k(A(\mu, \cdot))$ *не принадлежит второму классу Бэра.*

Доказательство. Пусть $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Рассмотрим множество блочно-диагональных систем вида

$$\dot{x} = \operatorname{diag}\{2, \dots, 2, U(t), \underbrace{-2, \dots, -2}_{k-1}\}x, \tag{40}$$

где $U(t) : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^2$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\sup_{t\geqslant 0} \|U(t)\| \leqslant 1. \tag{41}$$

Для $k-$го нижнего вспомогательного показателя системы (40) имеем $\underline{\nu}_k = \omega(U)$, где $\omega(U)$ – нижний центральный показатель системы (40). В § 4 гл.

II установлено, что существует непрерывное по совокупности переменных отображение $A : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^2$, удовлетворяющее по второму аргументу условию (41) такое, что функция $\mu \to \omega(A(\mu, \cdot))$ не принадлежит второму классу Бэра, а следовательно функция $\mu \to \underline{\nu}_k(A(\mu, \cdot))$ не принадлежит второму классу Бэра. Теорема XII доказана.

В силу теоремы XII и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 8 [26]. *Для всякого $n \geqslant 2$ и $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ функция $\underline{\nu}_k : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

§ 8 Непринадлежность третьему классу Бэра верхних вспомогательных показателей Миллионщикова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией

Напомним, что верхний вспомогательный показатель системы (1) определяется при всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$ формулой [80]

$$\overline{\nu}_k(A) = \overline{\lim_{T\to\infty}}\,\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\frac{1}{mT}\sum_{j=1}^{m}\ln\delta_k(jT,(j-1)T), \tag{42}$$

где $\delta_k(t, \tau)$ — k-е сингулярное число оператора Коши $X_A(t, \tau)$ системы (1). Отметим, что при $k = n$ функция $\overline{\nu}_n(\cdot)$ совпадает с $\overline{\lambda}_n$, а поэтому принадлежит в точности второму классу на M_n^c [35], функция $\overline{\nu}_1(\cdot)$ совпадает с $\underline{\nu}_1(\cdot)$, а следовательно принадлежит третьему классу Бэра на M_n^c.

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По отображению

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\,\mathbb{R}^n \tag{43}$$

непрерывному по совокупности переменных и ограниченному по t при всяком фиксированном значении μ, построим функцию

$$\mu \mapsto \overline{\nu}_k(A(\mu, \cdot)). \tag{44}$$

Изучим свойства функции (44) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема XIII. *Пусть $\mathfrak{M} = \mathcal{B}(\mathbb{N})$. Тогда для всякого $n \geqslant 3$ и $k \in \{2, \ldots, n-1\}$ найдется такое отображение (43), что функция (44) не принадлежит третьему классу Бэра.*

Доказательство. Пусть $\mu = (\mu_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$. Разделим отрезок $[(3k)!, (3k+3)!]$ на отрезки длины $\min\{k, \mu_k\}$, обозначим концы получившихся отрезков через

$$T_k^i, \quad i = 0, 1, \ldots, \frac{(3k+3)! - (3k)!}{\min\{k, \mu_k\}}.$$

Рассмотрим диагональную систему $\dot{x} = U(\mu, t)x$, где

$$U(\mu, t) = \begin{pmatrix} a(\mu, t) & 0 & 0 \\ 0 & b(\mu, t) & 0 \\ 0 & 0 & c(\mu, t) \end{pmatrix} x, \tag{45}$$

$$a(\mu, t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in [T_k^{3i}, T_k^{3i} + \frac{g_k}{3}]; \\ 1, & \text{при } t \in [T_k^{3i+1}, T_k^{3i+1} + \frac{g_k}{3}]; \\ 0, & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

$$b(\mu, t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in [T_k^{3i} + \frac{g_k}{3}, T_k^{3i} + \frac{2g_k}{3}]; \\ 1, & \text{при } t \in [T_k^{3i+1}, T_k^{3i+1} + \frac{g_k}{3}]; \\ 1, & \text{при } t \in [T_k^{3i+2}, T_k^{3i+2} + \frac{g_k}{3}]; \\ 0, & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

$$c(\mu, t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in [T_k^{3i} + \frac{2g_k}{3}, T_k^{3i+1}]; \\ 1, & \text{при } t \in [T_k^{3i+2}, T_k^{3i+2} + \frac{g_k}{3}]; \\ 0, & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Оператор Коши системы (45) имеет вид

$$X_{U(\mu,\cdot)}(t, \tau) = \begin{pmatrix} e^{\int_\tau^t a(\mu,s)\,ds} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\int_\tau^t b(\mu,s)\,ds} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\int_\tau^t c(\mu,s)\,ds} \end{pmatrix}.$$

Следовательно для логарифма второго сингулярного значения оператора Коши системы (45), имеем

$$\ln \delta_2(t, \tau) = \min(\max\{\int_\tau^t a(\mu, s)\,ds, \int_\tau^t b(\mu, s)\,ds\},$$

$$\max\{\int\limits_{\tau}^{t} b(\mu,s)\,ds, \int\limits_{\tau}^{t} c(\mu,s)\,ds\}, \max\{\int\limits_{\tau}^{t} a(\mu,s)\,ds, \int\limits_{\tau}^{t} c(\mu,s)\,ds\}).$$

Пусть $\mu \in \mathbf{S}$, т. е. существует бесконечно много μ_k, каждое из которых повторяется бесконечное число раз. Обозначим через $\mu(1)$ — первый элемент в последовательности $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$, который повторяется бесконечное число раз, а $(\mu_s(1))_{s=1}^{\infty}$ — первую бесконечную подпоследовательность последовательности $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ каждый член, которой равен $\mu(1)$, через $\mu(2)$ — второй элемент в последовательности $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$, отличный от $\mu(1)$, который повторяется бесконечное число раз, а $(\mu_s(2))_{s=1}^{\infty}$ — вторую бесконечную подпоследовательность последовательности $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ каждый член которой равен $\mu(2)$ и т. д. Так как $\mu \in \mathbf{S}$, то

$$\lim_{k\to\infty} \min\{k, \mu(k)\} = \infty.$$

Из определения функций $a(\mu,t)$, $b(\mu,t)$, $c(\mu,t)$ на отрезке $[T_k^{3i}, T_k^{3i+1}]$, получаем

$$\int\limits_{T_k^{3i}}^{T_k^{3i+1}} a(\mu,t)\,dt = \frac{1}{3}(T_k^{3i+1} - T_k^{3i}) = \frac{1}{3}\min\{k, \mu_k\},$$

$$\int\limits_{T_k^{3i}}^{T_k^{3i+1}} b(\mu,t)\,dt = \frac{1}{3}(T_k^{3i+1} - T_k^{3i}) = \frac{1}{3}\min\{k, \mu_k\},$$

$$\int\limits_{T_k^{3i}}^{T_k^{3i+1}} c(\mu,t)\,dt = \frac{1}{3}(T_k^{3i+1} - T_k^{3i}) = \frac{1}{3}\min\{k, \mu_k\},$$

на отрезке $[T_{k'}^{3i+1}, T_{k'}^{3i+2}]$, имеем

$$\int\limits_{T_k^{3i+1}}^{T_k^{3i+2}} a(\mu,t)\,dt = \frac{1}{3}(T_k^{3i+1} - T_k^{3i}) = \frac{1}{3}\min\{k, \mu_k\},$$

$$\int\limits_{T_k^{3i+1}}^{T_k^{3i+2}} b(\mu,t)\,dt = \frac{1}{3}(T_k^{3i+1} - T_k^{3i}) = \frac{1}{3}\min\{k, \mu_k\},$$

$$\int\limits_{T_k^{3i+1}}^{T_k^{3i+2}} c(\mu,t)\,dt = 0,$$

на отрезке $[T_k^{3i+2}, T_k^{3i+3}]$, имеем

$$\int\limits_{T_k^{3i+2}}^{T_k^{3i+3}} a(\mu,t)\,dt = 0,$$

$$\int\limits_{T_k^{3i+2}}^{T_k^{3i+3}} b(\mu,t)\,dt = \frac{1}{3}(T_k^{3i+1} - T_k^{3i}) = \frac{1}{3}\min\{k,\mu_k\},$$

$$\int\limits_{T_k^{3i+2}}^{T_k^{3i+3}} c(\mu,t)\,dt = \frac{1}{3}(T_k^{3i+1} - T_k^{3i}) = \frac{1}{3}\min\{k,\mu_k\}.$$

Таким образом, для любого натурального

$$j \in \{\frac{(3k)!}{\min\{k,\mu_k\}} + 1, \ldots, \frac{(3k+3)!}{\min\{k,\mu_k\}}\},$$

имеем

$$\ln \delta_2(j\min\{k,\mu_k\}, (j-1)\min\{k,\mu_k\}) = \frac{1}{3}\min\{k,\mu_k\}.$$

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$. Пусть

$$j_s(k) - 1 = \frac{(3k)!}{\min\{k,\mu_s(k)\}},$$

$$m_s(k) = \frac{(3k+3)!}{\min\{k,\mu_s(k)\}},$$

$$S_1 = \frac{1}{m_s(k)\min\{k,\mu(k)\}} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{j_s(k)-1} \ln \delta_2(j\min\{k,\mu(k)\}, (j-1)\min\{k,\mu(k)\}),$$

$$S_2 = \frac{1}{m_s(k)\min\{k,\mu(k)\}} \times$$

$$\times \sum_{j=j_s(k)}^{m_s(k)} \ln \delta_2(j\min\{k,\mu(k)\}, (j-1)\min\{k,\mu(k)\}).$$

Тогда, в силу определения системы (45), получаем

$$S_1 \geqslant -\sup_{t\geqslant 0}\|U(\mu,t)\|\frac{(j_s(k)-1)\min\{k,\mu(k)\}}{m_s(k)\min\{k,\mu(k)\}} = -\frac{(3k)!}{(3k+3)!}, \tag{46}$$

$$\begin{aligned} S_2 = \tfrac{1}{m_s(k)\min\{k,\mu(k)\}}\sum_{j=j_s(k)}^{m_s(k)}\tfrac{1}{3}\min\{k,\mu_s(k)\} = \\ = \tfrac{(3(k+1))!-(3k)!}{3(3(k+1))!}. \end{aligned} \tag{47}$$

Из формулы (42), используя (46) и (47), получаем

$$\overline{\nu}_2(U_\mu)) \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\,\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\frac{1}{m\min\{k,\mu(k)\}}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{m}\ln\delta_2(j\min\{k,\mu(k)\},(j-1)\min\{k,\mu(k)\}) \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\,\overline{\lim_{s\to\infty}}\,\frac{1}{m_s(k)\min\{k,\mu(k)\}}(S_1+S_2) \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{k\to\infty}\frac{(3(k+1))!-(3k)!}{3(3(k+1))!} - \frac{(3k)!}{(3k+3)!} = \frac{1}{3}.$$

Пусть $\mu \notin \mathbf{S}$, т. е. может существовать только конечное число μ_k, каждое из которых встречается бесконечное много раз в последовательности $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_k,\ldots)$. Пусть p наибольшее из этих чисел (если таких чисел нет, то считаем $p=0$). Для любого $T \geqslant \max\{2,100p\}$ существует натуральное $k(T) \geqslant 100T$ такое, что для любого $k \geqslant k(T)$ будет выполнено одно из неравенств $T \geqslant 100\min\{k,\mu_k\}$ (для членов последовательности μ, повторяющихся бесконечное число раз) или $T \leqslant \frac{\min\{k,\mu_k\}}{100}$ (для членов последовательности μ, повторяющихся конечное число раз). Пусть

$$\begin{gathered} T \geqslant \max\{100p,2\}, \\ m > (3k(T)+3)!, \\ k(m,T) = \max\{k\in\mathbb{N}:\ (3k+3)! \leqslant mT\}, \\ r_1 = \min\{r\in\mathbb{N}:\ rT \geqslant (3k(m,T))!\}, \\ r_2 = \max\{r\in\mathbb{N}:\ rT \leqslant (3k(m,T)+3)!\}, \end{gathered}$$

обозначим

$$S_1(T,m) = \frac{1}{mT}\sum_{j=1}^{r_1}\ln\delta_2(jT,(j-1)T),$$

$$S_2(T,m) = \frac{1}{mT} \sum_{j=r_1+1}^{r_2} \ln \delta_2(jT,(j-1)T),$$

$$S_3(T,m) = \frac{1}{mT} \sum_{j=r_2+1}^{m} \ln \delta_2(jT,(j-1)T).$$

Оценим сверху каждую из величин S_1, S_2, S_3.

$$\begin{gathered} S_1(T,m) = \tfrac{1}{mT} \sum_{j=1}^{r_1} \ln \delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{(3k(m,T))!+T}{mT} < \tfrac{(3k(m,T))!+T}{(3k(m,T)+3)!}. \end{gathered} \tag{48}$$

При оценке $S_2(T,m)$ и $S_3(T,m)$ рассмотрим четыре случая.

1. Пусть

$$g(m,T) = \max\{\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}, \min\{k(m,T)+1, \mu_{k(m,T)+1}\}\}$$

и $T \geqslant 100g(m,T)$. Тогда, в силу определения функций $a(\mu,t)$, $b(\mu,t)$, $c(\mu,t)$, получаем

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,\tau)\,d\tau \geqslant \frac{2}{9}(T - 2g(m,T)) > \frac{2}{9}(T - 2\frac{T}{100}) = \frac{49}{225}T,$$

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,\tau)\,d\tau \leqslant \frac{2}{9}(T + 2g(m,T)) < \frac{2}{9}(T + 2\frac{T}{100}) = \frac{51}{225}T,$$

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} b(\mu,\tau)\,d\tau \geqslant \frac{1}{3}(T - 2g(m,T)) > \frac{2}{9}(T - 2\frac{T}{100}) = \frac{49}{150}T,$$

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} b(\mu,\tau)\,d\tau \leqslant \frac{1}{3}(T + 2g(m,T)) < \frac{1}{3}(T + 2\frac{T}{100}) = \frac{51}{150}T,$$

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} c(\mu,\tau)\,d\tau \geqslant \frac{2}{9}(T - 2g(m,T)) > \frac{2}{9}(T - 2\frac{T}{100}) = \frac{49}{225}T,$$

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} c(\mu,\tau)\,d\tau \leqslant \frac{2}{9}(T + 2g(m,T)) < \frac{2}{9}(T + 2\frac{T}{100}) = \frac{51}{225}T.$$

Таким образом, для любого $j \in \{r_1+1, \dots, r_2\}$, получаем

$$\ln \delta_2(jT, (j-1)T) \leqslant \frac{51}{225} T.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} S_2(T,m) = \tfrac{1}{mT} \sum_{j=r_1+1}^{r_2} \ln \delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT} \tfrac{51}{225} T(r_2 - r_1) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{(3k(m,T)+3)!} \tfrac{51}{225}((3k(m,T)+3)! - (3k(m,T))!), \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} S_3(T,m) = \tfrac{1}{mT}(\sum_{j=r_2+1}^{m} \ln \delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT} \tfrac{51}{225} T(m - r_2) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT} \tfrac{51}{225}(mT - (3k(m,T)+3)!). \end{aligned} \tag{50}$$

2. Пусть

$$T < \frac{\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}}{100} \text{ и } T > 100 \min\{(k(m,T)+1), \mu_{k(m,T)+1}\}.$$

Если отрезок $[(j-1)T; jT]$ содержится в

$$[T^{3i}_{k(m,T)}, T^{3i}_{k(m,T)} + \frac{1}{3} \min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}],$$

то в силу определения функций $a(\mu,t)$, $b(\mu,t)$, $c(\mu,t)$, получаем

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = T, \quad \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0, \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0,$$

следовательно $\ln \delta_2(jT,(j-1)T) = 0$.

Если отрезок $[(j-1)T; jT]$ содержится в

$$[T^{3i}_{k(m,T)} + \frac{1}{3} \min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}, T^{3i}_{k(m,T)} + \frac{2}{3} \min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}],$$

то

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0, \quad \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = T, \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0,$$

следовательно $\ln \delta_2(jT,(j-1)T) = 0$.

Если отрезок $[(j-1)T; jT]$ содержится в

$$[T^{3i}_{k(m,T)} + \frac{2}{3}\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}, T^{3i+1}_{k(m,T)}],$$

то

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0, \quad \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0, \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = T,$$

следовательно $\ln\delta_2(jT,(j-1)T) = 0$.

Если отрезок $[(j-1)T; jT]$ содержится в

$$[T^{3i+1}_{k(m,T)}, T^{3i+1}_{k(m,T)} + \frac{1}{3}\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}],$$

то

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = T, \quad \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = T, \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0,$$

следовательно $\ln\delta_2(jT,(j-1)T) = T$.

Если отрезок $[(j-1)T; jT]$ содержится в

$$[T^{3i+1}_{k(m,T)} + \frac{1}{3}\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}, T^{3i+2}_{k(m,T)}],$$

то

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0, \quad \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0, \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0,$$

следовательно $\ln\delta_2(jT,(j-1)T) = 0$.

Если отрезок $[(j-1)T; jT]$ содержится в

$$[T^{3i+2}_{k(m,T)}, T^{3i+2}_{k(m,T)} + \frac{1}{3}\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}],$$

то

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0, \quad \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = T, \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = T,$$

следовательно $\ln\delta_2(jT,(j-1)T)=T$.

Если отрезок $[(j-1)T;jT]$ содержится в

$$[T^{3i+2}_{k(m,T)}+\frac{1}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\},T^{3i+3}_{k(m,T)}],$$

то

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT}a(\mu,t)\,dt=0,\quad\int\limits_{(j-1)T}^{jT}a(\mu,t)\,dt=0,\int\limits_{(j-1)T}^{jT}a(\mu,t)\,dt=0,$$

следовательно $\ln\delta_2(jT,(j-1)T)=0$.

Количество отрезков $[(j-1)T;jT]$, не содержащихся ни в одном из отрезков

$$[T^{3i}_{k(m,T)},T^{3i}_{k(m,T)}+\frac{1}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}],$$

$$[T^{3i}_{k(m,T)}+\frac{1}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\},T^{3i}_{k(m,T)}+\frac{2}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}],$$

$$[T^{3i}_{k(m,T)}+\frac{2}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\},T^{3i+1}_{k(m,T)}],$$

$$[T^{3i+1}_{k(m,T)},T^{3i+1}_{k(m,T)}+\frac{1}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}],$$

$$[T^{3i+1}_{k(m,T)}+\frac{1}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\},T^{3i+2}_{k(m,T)}],$$

$$[T^{3i+2}_{k(m,T)},T^{3i+2}_{k(m,T)}+\frac{1}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}],$$

$$[T^{3i+2}_{k(m,T)}+\frac{1}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\},T^{3i+3}_{k(m,T)}],$$

не превосходит

$$3\frac{((3k(m,T)+3)!-(3k(m,T))!)}{\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}}.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{gathered}S_2(T,m)=\tfrac{1}{mT}\sum_{j=r_1+1}^{r_2}\ln\delta_2(jT,(j-1)T)\leqslant\\ \leqslant\tfrac{1}{mT}(\tfrac{2}{9}T(r_2-r_1)+2T+6T\tfrac{((3k(m,T)+3)!-(3k(m,T))!)}{\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}})\leqslant\\ \leqslant\tfrac{1}{(3k(m,T)+3)!}\tfrac{68}{225}((3k(m,T)+3)!-(3k(m,T))!).\end{gathered}\tag{51}$$

При $j = r_2 + 1, \dots, m$, аналогично (50), получаем

$$\begin{aligned} S_3(T,m) = \tfrac{1}{mT}(\sum_{j=r_2+1}^{m} \ln \delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}\tfrac{51}{225}T(m-r_2) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}\tfrac{51}{225}((mT-(3k(m,T)+3)!). \end{aligned} \tag{52}$$

3. Пусть $T > 100\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}$ и $T < \frac{\min\{(k(m,T)+1),\mu_{k(m,T)+1}\}}{100}$. Тогда аналогично оценке (49), получаем

$$\begin{aligned} S_2(T,m) = \tfrac{1}{mT}\sum_{j=r_1+1}^{r_2} \ln \delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}\tfrac{51}{225}T(r_2-r_1) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{(3k(m,T)+3)!}\tfrac{51}{225}(3k(m,T)+3)!-(3k(m,T))!), \end{aligned} \tag{53}$$

и аналогично оценке (51), получаем

$$\begin{aligned} S_3(T,m) = \tfrac{1}{mT}\sum_{j=r_2+1}^{m} \ln \delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}(\tfrac{2}{9}T(m-r_2)+2T+6T\tfrac{(m-(3k(m,T))!)}{\min\{k(m,T)+1,\mu_{k(m,T)+1}\}}) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}\tfrac{68}{225}(mT-(3k(m,T))!). \end{aligned} \tag{54}$$

4. Пусть $T < \frac{\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}}{100}$ и $T < \frac{\min\{(k(m,T)+1),\mu_{k(m,T)+1}\}}{100}$. Тогда аналогично оценке (51) получаем

$$\begin{aligned} S_2(T,m) = \tfrac{1}{mT}\sum_{j=r_1+1}^{r_2} \delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}(\tfrac{2}{9}T(r_2-r_1)+2T+6T\tfrac{((3k(m,T)+3)!-(3k(m,T))!)}{\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}}) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{(3k(m,T)+3)!}\tfrac{68}{225}((3k(m,T)+3)!-(3k(m,T))!), \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} S_3(T,m) = \tfrac{1}{mT}\sum_{j=r_2+1}^{m} \delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}(\tfrac{2}{9}T(m-r_2)+2T+6T\tfrac{(m-(3k(m,T)+3)!)}{\min\{k(m,T)+1,\mu_{k(m,T)+1}\}}) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}\tfrac{68}{225}(mT-(3k(m,T)+3)!). \end{aligned} \tag{56}$$

Из неравенств (49)—(56), при $\mu \notin \mathbf{S}$, получаем

$$\overline{\nu}_2(U_\mu)) = \overline{\lim_{T\to\infty}}\,\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\frac{1}{mT}\sum_{j=1}^{m} \ln \delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}}\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\,(S_1(T,m)+S_2(T,m)+S_3(T,m)) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}}\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\,(\frac{(3k(m,T))!+T}{(3k(m,T)+3)!}+$$
$$+\frac{1}{mT}\frac{68}{225}((3k(m,T)+3)!-(3k(m,T))!)+$$
$$+\frac{1}{mT}\frac{68}{225}(mT-(3k(m,T)+3)!)) = \frac{68}{225}.$$

Для отображения $(\mu,t)\mapsto U(\mu,t)$, в силу ляпуновской инвариантности показателя $\overline{\nu}_2$, существует такое отображение

$$Q:\mathcal{B}(\mathbb{N})\times\mathbb{R}^+\to \operatorname{End}\mathbb{R}^3$$

непрерывное по совокупности переменных и ограниченное по t при всяком фиксированном μ, что для любого $\mu\in\mathcal{B}(\mathbb{N})$ выполнено равенство $\overline{\nu}_2(U(\mu,\cdot))=\overline{\nu}_2(Q(\mu,\cdot))$ (см. лемму 12 § 6 гл. I).

Рассмотрим отображение $A:\mathcal{B}(\mathbb{N})\times\mathbb{R}^+\to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$, определяемое формулой

$$(\mu,t)\mapsto \operatorname{diag}\{2,\dots,2,Q(\mu,t),\underbrace{-2,\dots,-2}_{k-2}\}.$$

Допустим, что функция $\mu\mapsto\overline{\nu_k}(A(\mu,\cdot))$ принадлежит третьему классу Бэра. Тогда для непрерывного (см. лемму 7 § 5 гл. I) отображения $\varphi:\mathcal{B}(\mathbb{N})\to M_n^c$, определяемого формулой $\mu\mapsto A(\mu,\cdot)$, замыкание множеств

$$\overline{\nu}_k(\varphi(\mathbf{S})) \text{ и } \overline{\nu}_k(\varphi(\mathcal{B}(N)\setminus\mathbf{S})).$$

не пусто. С другой стороны

$$\overline{\nu}_k(\varphi(\mu)\geqslant \tfrac{1}{3},\ \text{при } \mu\in\mathbf{S},$$
$$\overline{\nu}_k(\varphi(\mu)\leqslant \tfrac{68}{225},\ \text{при } \mu\notin\mathbf{S}.$$

Получили противоречие, следовательно функция $\mu\mapsto\overline{\nu}_k(A(\mu,\cdot))$ не принадлежит третьему классу Бэра. Теорема XIII доказана.

В силу теоремы XIII и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 9 [25], [35]. *Для всякого $n\geqslant 2$ и $k\in\{1,\dots,n-1\}$ функция $\overline{\nu}_k:M_n\to\mathbb{R}$ не принадлежит третьему классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Глава IV Некоторые свойства показателей Ляпунова правильных линейных систем

§ 1 Точный бэровский класс показателей Ляпунова на пространстве правильных линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Один из важнейших классов линейных систем образуют правильные системы, которые были введены А.М. Ляпуновым в связи с исследованием экспоненциальной устойчивости неавтономной системы по первому приближению.

Хорошо известно [68, стр. 25], что показатели Ляпунова являются непрерывными функциями на множестве линейных систем, ляпуновскими преобразованиями приводимых к системам с постоянными коэффициентами, наделенном равномерной топологией. Если рассматривать класс систем, обобщенными ляпуновскими преобразованиями приводимых к системам с постоянными коэффициентами, то получим множество правильных по Ляпунову систем. Оказывается показатели Ляпунова на множестве правильных систем с равномерной топологией не являются непрерывными функциями, т. е. не принадлежат нулевому классу Бэра [52]–[54]. Поэтому не лишен смысла вопрос о точном классе Бэра, которому принадлежат показатели Ляпунова на пространстве правильных линейных систем с равномерной топологией.

Напомним, что показатели Ляпунова линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

с непрерывной и ограниченной на полупрямой $t \in \mathbb{R}^+$ оператор-функцией определяются, как известно [81], при любом $k \in \{1, \ldots, n\}$, следующим образом

$$\lambda_k(A) = \inf_{L \in G_k(\mathbb{R}^n)} \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t,0)|_L\|,$$

где $G_k(\mathbb{R}^n)$ — множество k-мерных векторных подпространств прстранства $\mathbb{R}^n$, $X_A(t,0)|_L$ — сужение оператора Коши системы (1) на подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$. Во множестве M_n всех систем вида (1) выделим подмножество правильных систем $\mathcal{R}_n$, которое задается условием

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp} A(\tau) d\,\tau.$$

Докажем некоторые формулы для показателей Ляпунова в случае, когда система (1) является правильной.

Лемма 1 [45]. *Пусть $A \in \mathcal{R}_n$. Тогда для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ справедливы равенства*

$$\lambda_k(A) = \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}_n)} \sup_{\alpha\in L:\|\alpha\|=1} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t,0)\alpha\| =$$

$$= \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}_n)} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t,0)|_L\|.$$

Доказательство. Так как $A \in \mathcal{R}_n$, то для любого $\alpha \in L$ существует предел [59, стр. 182]

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t,0)\alpha\|.$$

Для любых $t \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in L:\ \|\alpha\| = 1$ имеет место неравенство

$$\|X_A(t,0)\alpha\| \leqslant \|X_A(t,0)|_L\|,$$

из которого получаем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t,0)\alpha\| \leqslant \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t,0)|_L\|,$$

следовательно

$$\sup_{\alpha\in L:\|\alpha\|=1} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t,0)\alpha\| \leqslant \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t,0)|_L\|. \tag{2}$$

Пусть $\{e_1, \ldots, e_k\} \subset L$ — ортонормированный базис в пространстве L. Тогда для любого $\alpha \in L:\ \|\alpha\| = 1$ выполнено

$$\|X_A(t,0)\alpha\| = \|X_A(t,0) \sum_{m=1}^{k} \alpha_m e_m\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant m\leqslant k} |\alpha_m| \sum_{m=1}^{k} \|X_A(t,0)e_m\| \leqslant k \max_{1\leqslant m\leqslant k} \|X_A(t,0)e_m\|,$$

из которого получаем

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{t\to\infty}\tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|\leqslant\varlimsup_{t\to\infty}\big(\max_{1\leqslant m\leqslant k}\tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)e_m\|+\tfrac{1}{t}\ln k\big)=\\&=\max_{1\leqslant m\leqslant k}\lim_{t\to\infty}\tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)e_m\|\leqslant\sup_{\alpha\in L:\|\alpha\|=1}\lim_{t\to\infty}\tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\alpha\|.\end{aligned}\tag{3}$$

В силу (2) и (3), имеем

$$\begin{aligned}&\sup_{\alpha\in L:\|\alpha\|=1}\lim_{t\to\infty}\tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\alpha\|\leqslant\varliminf_{t\to\infty}\tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|\leqslant\\&\leqslant\varlimsup_{t\to\infty}\tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|\leqslant\sup_{\alpha\in L:\|\alpha\|=1}\lim_{t\to\infty}\tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\alpha\|.\end{aligned}$$

Получаем равенство

$$\sup_{\alpha\in L:\|\alpha\|=1}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\alpha\|=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|,$$

из которого следует утверждение леммы 1.

Лемма 2 [45]. *Пусть $A\in\mathcal{R}_n$. Тогда для любого $k\in\{1,\ldots,n\}$ справедливо равенство*

$$\lambda_k(A)=\lim_{t\to\infty}\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|.$$

Доказательство. Так как для любого $L\in G_k(\mathbb{R}^n)$ выполнено неравенство

$$\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|\leqslant\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|,$$

в силу леммы 1, получаем

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{t\to\infty}\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}_n)}\tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|\leqslant\\&\leqslant\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)}\lim_{t\to\infty}\tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|=\lambda_k(A).\end{aligned}\tag{4}$$

Докажем, что

$$\varliminf_{t\to\infty}\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|\geqslant\lambda_k(A).$$

Так как $A\in\mathcal{R}_n$, то существует (см. [8] или [61, стр. 77]) такая оператор-функция $Q(\cdot)$, что

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|Q(t)\|=\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|Q^{-1}(t)\|=0,$$

и оператор Коши системы (1) имеет вид

$$X_A(t,0) = Q(t)\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1(A)t}, \dots, e^{\lambda_n(A)t}\}.$$

Можно считать, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|Q^{-1}(t)\| = 0,$$

так как, в силу неравенства

$$\|Q^{-1}(t)\| \geqslant \|Q(t)\|^{-1},$$

имеем

$$0 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Q^{-1}(t)\| \geqslant \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Q^{-1}(t)\| \geqslant - \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Q(t)\| = 0.$$

Из равенства

$$\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \ln \|\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1(A)t}, \dots, e^{\lambda_n(A)t}\}|_L\| = \lambda_k(A)t,$$

получаем

$$\lambda_k(A) \leqslant \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{t} \ln \|Q^{-1}(t) X_A(t,0)|_L\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{t} \ln \|Q^{-1}(t)\| + \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t,0)|_L\|.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \lambda_k(A) \leqslant \underline{\lim_{t\to\infty}} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \tfrac{1}{t} \ln \|X_A(t,0)|_L\| + \lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} \ln \|Q^{-1}(t)\| = \\ = \underline{\lim_{t\to\infty}} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \tfrac{1}{t} \ln \|X_A(t,0)|_L\|. \end{aligned} \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует утверждение леммы 2.

Обозначим $\mathcal{R}_n^u$ — множество $\mathcal{R}_n$ с равномерной топологией, $\mathcal{R}_n^c$ — множество $\mathcal{R}_n$ с компактно-открытой топологией.

Теорема I [45]. *Для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ функция $\lambda_k(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра на пространствах $\mathcal{R}_n^u$ и $\mathcal{R}_n^c$.*

Доказательство. Пусть $a > 0 : \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\| \leqslant a$. Для оператора Коши системы (1) справедливо равенство

$$X_A(t,0) = X_A(t,[t]) X_A([t],0)$$

($[\cdot]$ — целая часть числа), следовательно для любого $L \in G_k(\mathbb{R}^n)$ выполнены неравенства

$$\|X_A(t,0)|_L\| \leqslant \|X_A(t,[t])|_L\| \cdot \|X_A([t],0)|_L\| \leqslant$$

$$\leqslant e^{a(t-[t])}\|X_A([t],0)|_L\| \leqslant e^{a}\|X_A([t],0)|_L\|,$$

$$\|X_A([t],0)|_L\| \leqslant \|X_A([t],t)|_L\| \cdot \|X_A(t,0)|_L\| \leqslant$$

$$\leqslant e^{a(t-[t])}\|X_A(t,0)\| \leqslant e^{a}\|X_A(t,0)|_L\|.$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{t\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{[t]} \ln \|X_A([t],0)|_L\| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{t\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{t-1}(\ln \|X_A(t,0)|_L\| + a) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t,0)|_L\| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{t\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{[t]}(\ln \|X_A([t],0)|_L\| + a) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{[t]} \ln \|X_A([t],0)|_L\|.$$

Следовательно, для любого $k \in \{1,\ldots,n\}$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t,0)|_L\| = \lim_{m\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{m} \ln \|X_A(m,0)|_L\|.$$

В силу леммы 2, получаем

$$\lambda_k(A) = \lim_{m\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{m} \ln \|X_A(m,0)|_L\|.$$

Величины

$$\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \ln \|X_A(m,0)|_L\|,$$

совпадающие с логарифмами сингулярных чисел оператора $X_A(m,0)$ [10, стр. 24], в силу непрерывной зависимости решений системы (1) от коэффициентов системы (см. лемму 10 § 5 гл. I), являются непрерывными функциями на пространстве $\mathcal{R}_n^c$. Следовательно показатели Ляпунова принадлежат первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{R}_n^c$. Так как топология равномерной сходимости мажорирует топологию компактной сходимости, то показатели Ляпунова принадлежат первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{R}_n^u$. Теорема I доказана.

Оказывается в теореме I первый класс Бэра, вообще говоря, нельзя заменить полунепрерывностью. Приведем соответствующее построение.

Теорема II [40]. *Для любого $n \geqslant 2$ и любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_k(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}$ не является ни полунепрерывной снизу, ни полунепрерывной сверху на пространстве $\mathcal{R}_n^u$.*

Доказательство. Рассмотрим систему $\dot{x} = A(t)x$, где

$$A(t) = \operatorname{diag}\{\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k-1}, \begin{pmatrix} \pi\sin(\pi\sqrt{t}) & 0 \\ 0 & -\pi\sin(\pi\sqrt{t}) \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\}.$$

Установлено [14, стр. 187], что показатели Ляпунова системы A удовлетворяют равенствам

$$\lambda_1(A) = \ldots = \lambda_{k-1}(A) = -1,$$

$$= \lambda_k(A) = \lambda_{k+1}(A) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \operatorname{Sp}A(\tau)d\,\tau = 0,$$

$$\lambda_{k+2}(A) = \ldots = \lambda_n(A) = 1,$$

следовательно система A является правильной. Верхний центральный показатель удовлетворяет равенству $\Omega(A) = 1$, а нижний центральный показатель $\omega(A) = -1$ [14, стр. 187]. Установлено [68, стр. 85], что существует система $\dot{y} = B(t)y$ такая, что

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0, \; \lambda_k(B) = \omega(A) = -1.$$

В силу неравенства Ляпунова, получаем

$$1 = \Omega(A) \geqslant \lambda_{k+1}(B) \geqslant \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \operatorname{Sp}B(\tau)d\,\tau - \sum_{s\neq k+1} \lambda_s(B) = 1,$$

следовательно, система $\dot{y} = B(t)y$ является правильной. Рассмотрим последовательность правильных систем $\dot{y} = B_m(t)y$, где

$$B_m(t) = \begin{cases} A(t), & \text{при } 0 \leqslant t < m; \\ A(t)(m+1-t) + B(t)(t-m), & \text{при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ B(t), & \text{при } t > m+1, \end{cases}$$

$$m = 1, 2, 3, \dots .$$

Так как

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|B_m(t) - A(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in[m+1,+\infty)} \|B(t) - A(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|B_m(t) - A(t)\| =$$

$$= \sup_{t\in[m+1,+\infty)} \|B(t) - A(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|A(t)(m+1-t) + B(t)(t-m) - A(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{t\in[m,+\infty)} \|B(t) - A(t)\|,$$

получаем

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0,+\infty)} \|B_m(t) - A(t)\| \leqslant 2 \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[m,+\infty)} \|B(t) - A(t)\| = 0.$$

Следовательно, последовательность функций $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к системе A в пространстве $\mathcal{R}_n^u$ и $\lambda_k(B_m) = -1$, $\lambda_{k+1}(B_m) = 1$. Следовательно функция $\lambda_k(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}$ не является полунепрерывной снизу на пространстве $\mathcal{R}_n^u$, а функция $\lambda_{k+1}(\cdot) : \mathcal{R}^n \to \mathbb{R}$ не является полунепрерывной сверху на пространстве $\mathcal{R}_n^u$.

Рассмотрим последовательность правильных систем $\dot{y} = A_m(t)y$, где

$$A_m(t) = \begin{cases} B(t) \text{ при } 0 \leqslant t < m; \\ B(t)(m+1-t) + A(t)(t-m) \text{ при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ A(t) \text{ при } t > m+1, \end{cases}$$

$$m = 1, 2, 3, \dots .$$

Эта последовательность сходится к системе B в пространстве $\mathcal{R}_n^u$ и $\lambda_k(A_m) = \lambda_{k+1}(A_m) = 0$. Следовательно функция $\lambda_k(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}$ не является полунепрерывной сверху на пространстве $\mathcal{R}_n^u$, а функция $\lambda_{k+1}(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}$ не является полунепрерывной снизу на пространстве $\mathcal{R}_n^u$. Теорема II доказана.

§ 2 Критерий устойчивости всех показателей Ляпунова правильных линейных систем при равномерно малых возмущениях

В предыдущем параграфе доказано, что показатели Ляпунова принадлежат в точности первому классу Бэра на множестве правильных по Ляпунову линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями. При помощи этого результата докажем критерий устойчивости показателей Ляпунова при равномерно малых линейных возмущениях исходной правильной системы.

Для удобства читателя напомним обозначения: M_n^u — множество систем вида (1) с равномерной топологией,

$$\overline{\lambda}_k(A) = \varlimsup_{B \to A} \lambda_k(B)$$

— минимальная полунепрерывная сверху мажоранта k-го показателя Ляпунова на пространстве M_n^u,

$$\overline{X}(A) = \{B \in M_n : \lim_{t \to \infty} \|A(t) - B(t)\| = 0\}$$

множество бесконечно малых (б. м.) возмущений системы (1).

Теорема III [41]. *Пусть $A \in \mathcal{R}_n$, тогда следующие условия равносильны:*

1) для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_k(\cdot) : M_n^u \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке A,

2) выполнено включение $\overline{X}(A) \subset \mathcal{R}_n$,

3) выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k(A) = \varliminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t SpA(\tau)\, d\tau.$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть система $A \in \mathcal{R}_n$ является точкой непрерывности всех показателей Ляпунова в пространстве M_n^u. Допустим, что существует неправильная система $B \in \overline{X}(A)$, тогда в силу неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(B) > \varliminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp}B(\tau)\, d\tau = \varliminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)\, d\tau = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A)$$

существует такое k_0, что $\lambda_{k_0}(A) \neq \lambda_{k_0}(B)$. Построим последовательность систем $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$:

$$B_m(t) = \begin{cases} A(t) \text{ при } 0 \leqslant t < m; \\ A(t)(m+1-t) + B(t)(t-m) \text{ при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ B(t) \text{ при } t > m+1, \end{cases}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Пределом этой последовательности является система A. Так как

$$\lambda_{k_0}(B_m) = \lambda_{k_0}(B) \neq \lambda_{k_0}(A),$$

то система A не является точкой непрерывности функции

$$\lambda_{k_0}(\cdot) : M_n^u \to \mathbb{R}.$$

Получили противоречие.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть все б. м. возмущения системы $A \in \mathcal{R}_n$ являются правильными системами. Допустим, что

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k(A) > \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp} A(\tau)\, d\tau.$$

В силу равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp} A(\tau)\, d\tau,$$

найдется такое $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$, что $\overline{\lambda}_{k_0}(A) > \lambda_{k_0}(A)$. В работе [113] доказано существование б. м. возмущения такого $B \in \overline{X}(A)$, что $\lambda_{k_0}(B) = \overline{\lambda}_{k_0}(A)$. Пусть C — произвольная система из $\overline{X}(A)$. Построим последовательности $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ и $(B_m)_{m=1}^{\infty}$:

$$A_m(t) = \begin{cases} C(t) \text{ при } 0 \leqslant t < m; \\ C(t)(m+1-t) + A(t)(t-m) \text{ при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ A(t) \text{ при } t > m+1, \end{cases}$$

$$B_m(t) = \begin{cases} C(t) \text{ при } 0 \leqslant t < m; \\ C(t)(m+1-t) + B(t)(t-m) \text{ при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ B(t) \text{ при } t > m+1, \end{cases}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Для этих последовательностей выполнены соотношения

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0;\infty)} \|A_m(t) - C(t)\| = 0,\ \lambda_{k_0}(A_m) = \lambda_{k_0}(A),$$
$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0;\infty)} \|B_m(t) - C(t)\| = 0,\ \lambda_{k_0}(B_m) = \lambda_{k_0}(B),$$

из которых следует, что каждая точка множества $\overline{X}(A)$ является точкой разрыва функции $\lambda_{k_0}(\cdot)$. С другой стороны, множество $\overline{X}(A)$ является замкнутым в пространстве $\mathcal{R}_n^u$, следовательно его можно рассматривать как полное метрическое пространство с метрикой, индуцированной метрикой пространства $\mathcal{R}_n^u$. Из теоремы I следует, что функция $\lambda_{k_0}(\cdot) : \overline{X}(A) \to \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра на $\overline{X}(A) \subset \mathcal{R}_n$, следовательно, по теореме Бэра о функциях первого класса (см. теорему I § 2 гл. I), в этом множестве есть точка непрерывности функции $\lambda_{k_0}(\cdot)$. Получили противоречие.

3) $\Rightarrow$ 1). Докажем, что система $A \in \mathcal{R}_n$ является точкой непрерывности всех показателей Ляпунова. Допустим противное, тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого натурального числа m найдется $k(m) \in \{1, \ldots, n\}$ и система

$$B_m : \sup_{t\in\mathbb{R}+} \|A(t) - B_m(t)\| < \frac{1}{m}$$

такие, что

$$|\lambda_{k(m)}(B_m) - \lambda_{k(m)}(A)| > \varepsilon_0,$$

$$|\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)d\tau - \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Sp}B_m(\tau)d\tau| < \frac{1}{3}\varepsilon_0.$$

Так как $k(m)$ принимает конечное число значений, то существуют $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ и бесконечная подпоследовательность $\{B_{m'}\} \subset \{B_m\}$ такие, что

$$|\lambda_{k_0}(B_{m'}) - \lambda_{k_0}(A)| > \varepsilon_0,$$

$$|\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)d\tau - \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Sp}B_{m'}(\tau)d\tau| < \frac{1}{3}\varepsilon_0.$$

Если для бесконечной подпоследовательности $\{B_{m''}\} \subset \{B_{m'}\}$ выполнено

$$\lambda_{k_0}(B_{m''}) < \lambda_{k_0}(A) - \varepsilon_0,$$

то существует такое $k(m'') \in \{1, \dots, n\}$, что

$$\lambda_{k(m'')}(B_{m''}) > \lambda_{k(m'')}(A) + \frac{1}{3(n-1)}\varepsilon_0,$$

так как в противном случае имеем противоречивую цепочку неравенств

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)d\,\tau - \frac{1}{3}\varepsilon_0 \leqslant \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}B_{m''}(\tau)d\,\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1,\, k\neq k_0}^{n} \lambda_k(B_{m''}) + \lambda_{k_0}(B_{m''}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1,\, k\neq k_0}^{n} (\lambda_k(A) + \frac{1}{3(n-1)}\varepsilon_0) + \lambda_{k_0}(A) - \varepsilon_0 =$$

$$= \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)d\,\tau - \frac{2}{3}\varepsilon_0.$$

Так как $k(m'')$ принимает конечное число значений, то существуют $k_1 \in \{1, \dots, n\}$ и бесконечная подпоследовательность $\{B_{m'''}\} \subset \{B_{m''}\}$ такие, что

$$\lambda_{k_1}(B_{m'''}) > \lambda_{k_1}(A) + \frac{1}{3(n-1)}\varepsilon_0.$$

Следовательно

$$\overline{\lambda}_{k_1}(A) = \varlimsup_{B\to A} \lambda_{k_1}(B) \geqslant \varlimsup_{m'''\to\infty} \lambda_{k_1}(B_{m'''}) \geqslant \lambda_{k_1}(A) + \frac{1}{3(n-1)}\varepsilon_0$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) + \frac{1}{3(n-1)}\varepsilon_0 = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)\,d\tau \frac{1}{3(n-1)}\varepsilon_0,$$

получили противоречие.

Если для бесконечной подпоследовательности $\{B_{m''}\} \subset \{B_{m'}\}$ выполнено

$$\lambda_{k_0}(B_{m''}) > \lambda_{k_0}(A) + \varepsilon_0,$$

то

$$\overline{\lambda}_{k_0}(A) \geqslant \lambda_{k_0}(A) + \varepsilon_0$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) + \varepsilon_0 = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)\,d\tau + \varepsilon_0,$$

получили противоречие. Теорема III доказана.

§ 3 Точный дескриптивный тип множества неправильных систем в пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. Для непрерывного по совокупности переменных и ограниченного по t при всяком μ отображения

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\,\mathbb{R}^n \tag{6}$$

обозначим через W_n подмножество тех значений параметра μ, при которых система $\dot{x} = A(\mu, t)x$ является неправильной (в дальнейшем будем называть его множеством неправильности данного отображения).

Рассматривая семейства линейных систем, в которые параметр входит как множитель при матрице коэффициентов системы, а сама эта система правильна по Ляпунову, Ю.С. Богданов в 1980 г. поставил вопрос о пустоте множества неправильности.

Н. А. Изобов и Е. К. Макаров в работах [65, 77] построили такие семейства систем, линейно зависящие от вещественного параметра, множества неправильности которых могут оказаться следующими: множеством значений произвольной бесконечной в обе стороны арифметической прогрессии, не содержащей нуля и единицы; объединением значений таких прогрессий, замыкание которого счетно; дополнение до $\mathbb{R}$ такой арифметической прогрессии; множество $\mathbb{R} \setminus \{0,\ 1\}$.

Теорема IV. *Для любого метрического пространства $\mathfrak{M}$ и каждого отображения (6), подмножество W_n является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $H : \mu \mapsto \sigma(A(\mu, \cdot))$, где

$$\sigma(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) - \varlimsup_{t\to\infty} \int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)\,d\tau.$$

Тогда множество неправильности отображения (6) можно определить как

$$W_n = \{\mu \in \mathfrak{M} : H(\mu) > 0\}.$$

Так как функция, определяемая формулой

$$\mu \mapsto \varlimsup_{t\to\infty} \int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\mu, \tau)\,d\tau,$$

и все функции $\mu \mapsto \lambda_k(A(\mu, \cdot))$ являются функциями второго класса на пространствах $\mathfrak{M}$, то множество W_n является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\mathfrak{M}$. Теорема IV доказана.

Из теоремы IV § 5 гл. I и теоремы IV, получаем

Следствие 1 [21]. *Для любого $n \geqslant 1$ подмножество W_n является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве M_n^c.*

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной топологии, то любое открытое подмножество в M_n^c является открытым в пространстве M_n^u.

Следствие 2 [21]. *Для любого $n \geqslant 1$ подмножество W_n является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве M_n^u.*

Построим отображение (6), для которого множество неправильности не является множеством типа $F_{\sigma\delta}$.

Теорема V. *Пусть $\mathfrak{M} = \mathcal{B}(\mathbb{N})$. Тогда для любого $n \geqslant 1$ найдется отображение (2), для которого подмножество W_n не является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Каждому $\mu = (\mu_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ поставим в соответствие систему уравнений $\dot{x} = U(\mu, t)x$, где

$$U(\mu, t) = \mathrm{diag}\{u(\mu, t), \ldots, u(\mu, t)\},$$

$$u(\mu, t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in [0, 1); \\ 0, & \text{при } t \in [(2k-1)!, (2k)!); \quad k = 1, 2, \ldots. \\ -\frac{1}{\mu_k}, & \text{при } t \in [(2k)!, (2k+1)!), \end{cases}$$

Для любого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$, имеем

$$0 \geqslant \lambda_1(u(\mu,\cdot)E) = \ldots = \lambda_n(u(\mu,\cdot)E) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\int\limits_0^t u(\mu,\tau)\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2k)!}((2k-1)!) = 0.$$

Пусть $\mu \in \mathbf{E}$, тогда получаем

$$0 \geqslant \underline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\int\limits_0^t u(\mu,\tau)\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2k+1)!}(-\frac{1}{\mu_k}(2k+1)! - (2k)!) = 0.$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(u(\mu,\cdot)E) = \underline{\lim_{t\to\infty}}\int\limits_0^t \mathrm{Sp} u(\mu,\tau)E\,d\tau.$$

Пусть $\mu \notin \mathbf{E}$, тогда получаем

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\int\limits_0^t u(\mu,\tau)\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2k+1)!}(-\frac{1}{\mu_k}(2k+1)! - (2k)!) < 0.$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(u(\mu,\cdot)E) > \underline{\lim_{t\to\infty}}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}\; u(\mu,\tau)E\,d\tau.$$

Для отображения $(\mu,t)\mapsto U(\mu,t)$, в силу ляпуновской инвариантности показателей Ляпунова, существует такое отображение

$$A : \mathcal{B}(\mathbb{N})\times\mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\,\mathbb{R}^n \tag{7}$$

непрерывное по совокупности переменных и ограниченное по t при всяком фиксированном μ, что для любого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ верны равенства

$$\lambda_k(A(\mu,\cdot) = \lambda_k(U(\mu,\cdot)),\quad k = 1,\ldots,n,$$

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}U(\mu,\tau)\,d\tau = \underline{\lim}_{t\to\infty}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\mu,\tau)\,d\tau$$

(см. лемму 12 § 6 гл. I). По отображению (7), построим функцию

$$\mu \mapsto I_n(A(\mu,\cdot)), \tag{8}$$

где $I_n : M_n \to \{0,1\}$ — характеристическую функция множества правильных систем.

В силу теоремы IV, множество неправильности W_n является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Допустим, что это множество W_n является еще и множеством типа $F_{\sigma\delta}$, тогда функция (8) принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. С другой стороны, функция (8), в силу равенств

$$I_n(W_n) = I_n(\mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{E}) = 0,$$

$$I_n(\mathfrak{M} \setminus W_n) = I_n(\mathbf{E}) = 1.$$

совпадает с характеристической функцией множества $\mathbf{E}$, а следовательно не принадлежит второму классу Бэра. Полученное противоречие доказывает теорему V.

Из теоремы V и теоремы IV § 5 гл. I вытекает следующий результат

СЛЕДСТВИЕ 3. *Для любого $n \geqslant 1$ множество неправильных линейных систем $M_n \setminus \mathcal{R}_n$ не является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве M_n^c.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что множество неправильных линейных систем является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве M_n^c. Тогда характеристическая функция I_n множества правильных систем принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c. Следовательно, в силу теоремы IV § 5 гл. I, для любого метрического пространства $\mathfrak{M}$ и отображения (6) функция

$$\mu \mapsto I_n(A(\mu,\cdot))$$

принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$, что противоречит теореме V.

Теорема VI. *Если $n \geqslant 2$ и $\mathfrak{M} = \mathcal{B}(\mathbb{N})$, то найдется отображение (6) непрерывное по $\mu \in \mathfrak{M}$ равномерно по $t \in \mathbb{R}^+$, для которого подмножество W_n не является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Введем обозначения. Для любой ограниченной последовательности $(\omega_r)_{r=1}^{\infty}$ построим систему

$$\dot{x} = Q(t)x, \tag{9}$$

где

$$Q(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_r \\ \omega_r & 0 \end{pmatrix}, & \text{при } t \in [2^r - r, 2^r); \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \text{при } t \in [2^r, 2^{r+1} - (r+1)). \end{cases}$$

Пусть

$$s(k) = \sum_{r=1}^{k} \ln|\cos(\omega_r r)|,$$

$$s = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} s(k), \quad S = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k+1}} s(k).$$

В [77] доказана следующая лемма

Лемма 3. *Если для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$|\cos(\omega_{k+1}(k+1))| \geqslant \sin(2arctg(e^{-(2^{k+1}-2^k-(k+1))})), \tag{10}$$

то коэффициент неправильности системы (9) равен $S - s$.

Пусть $I_n : M_n \to \{0, 1\}$ — характеристическая функция множества правильных систем. Используя лемму 3, докажем следующую

Лемма 4. *Путь $n = 2$, тогда существует такое отображение (6) непрерывное по μ равномерно по t, что функция $\mu \mapsto I_2(A(\mu, \cdot))$ совпадает с характеристической функцией множества* $\mathbf{E}$.

Доказательство. Каждому $\mu = (\mu_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ поставим в соответствие систему (9) с

$$\omega_k = \frac{1}{k} \arccos(e^{-\frac{2^{k+1}-2^k-(k+1)}{p_k}}), \quad p_k = \min\{\mu_{[\log_2 k]}, k\},$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа. Для любого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ имеем

$$\sin(2\mathrm{arctg}(e^{-(2^{k+1}-2^k-(k+1))})) = \frac{2e^{-(2^{k+1}-2^k-(k+1)}}{1 + (e^{-(2^{k+1}-2^k-(k+1)})^2} \leqslant 2e^{-(2^{k+1}-2^k-(k+1)} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{2^{k+1}-2^k-(k+1)}{p_k}} = |\cos(\omega_{k+1}(k+1))|,$$

т. е. выполнено условие (10). Для любого $\mu = (\mu_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ имеем

$$s(k) = \sum_{r=1}^{k} \ln|\cos(\omega_r r)| = \sum_{r=1}^{k} -\frac{2^{r+1}-2^r-(r+1)}{p_r} = \sum_{r=1}^{k} \frac{(r+1)}{p_r} - \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r}.$$

Из определения величины s, получаем

$$s = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} s(k) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \left(\sum_{r=1}^{k} \frac{(r+1)}{p_r} - \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{(k+1)^2}{\max\limits_{1\leqslant r\leqslant k} p_r} - \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r} \right) =$$

$$= \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \left((k+1)^2 - \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r} \right) = -\varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r}.$$

С другой стороны, имеем

$$s = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} s(k) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \left(\sum_{r=1}^{k} \frac{(r+1)}{p_r} - \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r} \right) \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \left(1 - \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r} \right) = -\varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r}.$$

Следовательно, получаем

$$s = -\varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r}.$$

Аналогично для величины S, получаем

$$S = -\varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r}.$$

Пусть $\mu \notin \mathbf{E}$, т. е. $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \mu_k < \infty$. Тогда существует бесконечная подпоследовательность $\{\mu_{k'}\} \subset \{\mu_k\}$ и натуральное число q такие, что $\mu_{k'} = q$, следовательно

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r} \geqslant \varlimsup_{k'\to\infty} \frac{1}{2^{2^{k'+1}}} \sum_{r=1}^{2^{k'+1}} \frac{2^r}{p_r} \geqslant$$

$$\geqslant \varlimsup_{k'\to\infty} \frac{1}{2^{2^{k'+1}}} \sum_{r=2^{k'}}^{2^{k'+1}} \frac{2^r}{q} = \lim_{k'\to\infty} \frac{1}{2^{2^{k'+1}}} \frac{2^{2^{k'+1}} - 2^{2^{k'}}}{q} = \frac{1}{q}.$$

Аналогично, получаем

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r} \leqslant \varliminf_{k'\to\infty} \frac{1}{2^{2^{k'+1}+1}} \sum_{r=1}^{2^{k'+1}} \frac{2^r}{p_r} \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{k'\to\infty} \frac{1}{2^{2^{k'+1}+1}} \sum_{r=2^{k'}}^{2^{k'+1}} \frac{2^r}{q} = \lim_{k'\to\infty} \frac{1}{2^{2^{k'+1}+1}} \frac{2^{2^{k'+1}} - 2^{2^{k'}}}{q} = \frac{1}{2q}.$$

Таким образом, имеем

$$S - s = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r} - \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r} \geqslant \frac{1}{q} - \frac{1}{2q} = \frac{1}{q} > 0.$$

Пусть $\mu \in \mathbf{E}$ и $\varepsilon > 0$. Зафиксируем такое натуральное число k_0, что для любого $k > k_0$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{p_k} < \varepsilon, \quad \frac{1}{2^k} \sum_{r=1}^{k_0} \frac{2^r}{p_k} < \varepsilon.$$

Тогда, получаем

$$0 \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \left(\sum_{r=1}^{k_0} \frac{2^r}{p_r} + \sum_{r=k_0+1}^{k} \frac{2^r}{p_r} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \big(2^k \varepsilon + \varepsilon(2^{k+1} - 2^{k_0+1}) \big) < 3\varepsilon.$$

Аналогично, получаем

$$0 \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r} < \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Таким образом, имеем

$$-\frac{3}{2}\varepsilon < \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r} - \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r}{p_r} < 3\varepsilon.$$

В силу произвольности ε, получаем $S - s = 0$. Итак получили: при $\mu \notin \mathbf{E}$ система $\dot{x} = Q(\mu, t)x$ не является правильной, а при $\mu \in \mathbf{E}$ она является правильной.

По точками разрыва $(t_m)_{m=1}^{\infty}$ кусочно-непрерывной функции $Q(\mu,\cdot)$ и последовательности положительных чисел $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ такой, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{(t_m+\varepsilon_m)^2}\varepsilon_m \leqslant 1.$$

построим функцию $A(\mu,\cdot)$ следующим образом:

$$A(\mu,t)=\begin{cases} K_m(t-t_m-\varepsilon_m)+Q(\mu,t_m+\varepsilon_m), \text{ при } t\in[t-\varepsilon_m;t_m+\varepsilon_m];\\ Q(\mu,t), \text{ при остальных } t,\end{cases}$$

$$K_m=\frac{Q(\mu,t_m+\varepsilon_m)-Q(\mu,t_m-\varepsilon_m)}{2\varepsilon_m}$$

Эта функция непрерывна по $t\in\mathbb{R}$. Действительно, в точках непрерывности функции $Q(\mu,\cdot)$, которые не принадлежат объединению отрезков $\bigcup\limits_m[t_m-\varepsilon_m,t_m+\varepsilon_m]$, функция $A(\mu,\cdot)$ совпадает с функцией $Q(\mu,\cdot)$, а на любом из отрезков $[t_m-\varepsilon_m,t_m+\varepsilon_m]$ график функции $A(\mu,\cdot)$ представляет собой отрезок прямой, который соединяет точку с координатами $(t_m-\varepsilon_m,U(\mu,t_m-\varepsilon_m))$ и точку с координатами $(t_m+\varepsilon_m,Q(\mu,t_m+\varepsilon_m))$. Так как

$$\int\limits_0^t e^{\tau^2}\|A(\mu,\tau)-Q(\mu,\tau)\|\,d\tau=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{t_m-\varepsilon_m}^{t_m+\varepsilon_m} e^{\tau^2}\|A(\mu,\tau)-Q(\mu,\tau)\|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{t\geqslant 0}\|A(\mu,t)-Q(\mu,t)\|\sum_{m=1}^{\infty}2e^{(t_m+\varepsilon_m)^2}\varepsilon_m\leqslant 4,$$

в силу леммы 11 § 6 гл. I, система $\dot y=A(\mu,t)y$ ляпуновски эквивалентна системе $\dot x=Q(\mu,t)x$, следовательно, для любого $\mu\in\mathbf{E}$ верны равенства

$$\lambda_1(A(\mu,\cdot))=\lambda_1(Q(\mu,\cdot)),\ \lambda_2(A(\mu,\cdot))=\lambda_2(Q(\mu,\cdot))$$

и

$$\varliminf_{t\to\infty}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}Q(\mu,\tau)\,d\tau=\varliminf_{t\to\infty}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\mu,\tau)\,d\tau.$$

Итак, получили отображение

$$A : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^2 \tag{11}$$

Это отображение непрерывно по совокупности переменных. Действительно, пусть $(\mu^*, t^*) \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем натуральное m настолько большим, чтобы $\frac{1}{m} < \varepsilon$ и $t^* \in [0, t_m - 1]$, а $\delta \in (0, 1)$ такое, что для любого $t \in (t^* - \delta, t^* + \delta)$ выполнено неравенство

$$\|A(\mu^*, t) - A(\mu^*, t^*)\| < \varepsilon.$$

Тогда для любой точки (μ, t) такой, что $d(\mu^*, \mu) < \frac{1}{m}$ и $|t - t^*| < \delta$, в силу равенства $A(\mu^*, t)|_{[0,t_m]} = A(\mu, t)|_{[0,t_m]}$, выполнено

$$\|A(\mu^*, t^*) - A(\mu, t)\| = \|A(\mu^*, t^*) - A(\mu^*, t)\| < \varepsilon.$$

Докажем, что отображение (11) непрерывно по μ равномерно по t. Действительно, пусть

$$d(\mu, \nu) = \frac{1}{m+1},$$

т. е.

$$\mu_1 = \nu_1, \ldots, \mu_m = \nu_m.$$

Тогда получаем $Q(\mu, t) = Q(\nu, t)$ на отрезке $[0, t_m]$, а следовательно $A(\mu, t) = A(\nu, t)$ на отрезке $[0, t_m - 1]$. Так как

$$\sup_{t \in [t_m - 1, +\infty)} \|A(\mu, t) - \mathrm{diag}\{A(\mu, t)\}\| \leqslant \frac{\pi}{m},$$

то

$$\sup_{t \geqslant 0} \|A(\mu, t) - A(\nu, t)\| =$$

$$= \sup_{t \in [t_m - 1, +\infty)} \|A(\mu, t) - \mathrm{diag}\{A(\mu, t)\} - A(\nu, t) + \mathrm{diag}\{A(\nu, t)\}\| \leqslant \frac{\pi}{m}.$$

По отображению (11), построим функцию

$$\mu \mapsto I_2(A(\mu, \cdot)), \tag{12}$$

которая в силу равенств

$$I_2(W_2) = I_2(\mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{E}) = 0,$$

$$I_2(\mathfrak{M} \setminus W_2) = I_2(\mathbf{E}) = 1,$$

совпадает с характеристической функцией множества $\mathbf{E}$. Лемма 4 доказана.

Завершение доказательства теоремы VI. В силу теоремы IV, множество неправильности W_n является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Допустим, что это множество является еще и множеством типа $F_{\sigma\delta}$, тогда для отображения

$$\mu \mapsto P(\mu, \cdot) = \operatorname{diag}\{A(\mu, \cdot), \underbrace{-3, \ldots, -3}_{n-2}\},$$

где $A(\mu, \cdot)$ — отображение из леммы 4, функция

$$\mu \mapsto I_n(P(\mu, \cdot))$$

принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. С другой стороны, эта функция, в силу леммы 4, совпадает с характеристической функцией множества $\mathbf{E}$, а следовательно не принадлежит второму классу Бэра. Полученное противоречие доказывает теорему VI.

Из теоремы 5 § 5 гл. I и теоремы VI получаем.

Следствие 4 [31]. *Если $n > 1$, то множество неправильных систем не является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве M_n^u.*

§ 4 Несовпадение двух подмножеств Миллионщикова

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{13}$$

где $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ — непрерывная ограниченная по $t \in \mathbb{R}^+$ оператор-функция. Пусть

$$\chi(f) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln f(t)$$

характеристический показатель функции $f(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Обозначим через EI_n множество систем вида (13) таких, что для всякой непрерывной оператор-функции $B(\cdot) :\ \chi(\|B\|) < 0$, система $\dot{y} = (A(t) + B(t))y$ имеет те же показатели Ляпунова, что и система (13) [103]. Известно [57], что множество правильных по Ляпунову систем содержится в EI_n. В докладе [105] предложено естественное расширение множества правильных по Ляпунову систем с сохранением свойства инвариантности показателей Ляпунова относительно экспоненциально убывающих возмущений. Это расширение обозначим через GROD_n — множество систем вида (13), которые обобщенным ляпуновским преобразованием приводимы к диагональным системам с упорядоченной диагональю. Напомним, что системы $\dot{x} = A(t)x$ и $\dot{y} = B(t)y$ вида (13) называются обобщенно ляпуновски эквивалентными, если существует линейное преобразование $y = Q(t)x$, с дифференцируемой матрицей Q, удовлетворяющей условиям

$$\chi(\|Q\|) \leqslant 0,\ \chi(\|Q^{-1}\|) \leqslant 0$$

и переводящее систему A в систему B.

Теорема VII [48]. *Пусть система $A \in GROD_n$, тогда для любой непрерывной оператор-функции $Q(\cdot)\ :\ \chi(Q) < 0$ система $A + Q$ обобщенным ляпуновским преобразованием приводима к системе A.*

Доказательство. Пусть $L(t)$ — обобщенное ляпуновское преобразование, приводящее систему $\dot{x} = A(t)x$ к диагональному виду $\dot{y} = P(t)y$ с упорядоченной диагональю $p_1(t) \leqslant \ldots \leqslant p_n(t)$, при $t \in \mathbb{R}^+$. Положим $x = L(t)y$. Из системы $\dot{x} = (A(t) + Q(t))x$, где $\chi(Q) < 0$, получаем

$$\dot{y} = (L^{-1}(t)A(t)L(t) + L^{-1}(t)\dot{L}(t) + L^{-1}(t)Q(t)L(t))y,$$

отсюда

$$\dot{y} = (P(t) + B(t))y, \tag{14}$$

$$P(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) + L^{-1}(t)\dot{L}(t),\ B(t) = L^{-1}(t)Q(t)L(t),$$

$$\chi(B) = \chi(L^{-1}QL) \leqslant \chi(L^{-1}) + \chi(Q) + \chi(L) < 0.$$

Фиксируя $s \in \{1, \ldots, n\}$ в системе (14), произведем замену переменных

$$y(t) = e^{\int\limits_0^t p_s(\tau)d\tau} z(t).$$

Отсюда получаем

$$\dot{z} = (P(t) - p_s(t)E)z(t) + B(t)z(t). \tag{15}$$

Введем обозначение

$$I_{ks}(t_1,t_2) \equiv \int\limits_{t_1}^{t_2} (p_k(r) - p_s(r))d\,r.$$

Установлено ([59], стр. 344), что система (15) имеет ограниченное на $\mathbb{R}^+$ решение $z(t)$: $|z_k(t)| \leqslant C_1$, $k = 1,\ldots,n$, координаты которого удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$z_k(t) = \begin{cases} \int\limits_0^t e^{I_{ks}(\tau,t)} \sum\limits_{l=1}^n b_{kl}(\tau) z_l(\tau) d\,\tau, \text{ если } I_{ks}(0,+\infty) = -\infty; \\ \int\limits_{+\infty}^t e^{I_{ks}(\tau,t)} \sum\limits_{l=1}^n b_{kl}(\tau) z_l(\tau) d\,\tau, \text{ если } I_{ks}(0,+\infty) > -\infty \text{ и } k \neq s; \\ 1 + \int\limits_{+\infty}^t \sum\limits_{l=1}^n b_{kl}(\tau) z_l(\tau) d\,\tau, \text{ если } k = s. \end{cases}$$

Пусть $\alpha = \chi(B) < 0$, $\varepsilon \in (0; \min\{-\alpha; 1\})$, $H = \ln\varepsilon$ и C_2: $|b_{ij}(t)| \leqslant C_2 e^{(\alpha+\varepsilon)t}$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,n$.

Если $I_{ks}(0,+\infty) = -\infty$, то найдутся $t_2(\varepsilon) > t_1(\varepsilon) > 0$ такие, что $I_{ks}(0,t_1(\varepsilon)) = H$ и для любого $t \geqslant t_2(\varepsilon)$ выполнено неравенство $I_{ks}(0,t) \leqslant 2H$. Следовательно, при $t > t_2(\varepsilon)$, получаем

$$e^{I_{ks}(t_1(\varepsilon),t)} = e^{I_{ks}(0,t) - I_{ks}(0,t_1(\varepsilon))} \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда, при $t > t_2(\varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned} |z_k(t)| = |\int\limits_0^{t_1(\varepsilon)} e^{I_{ks}(\tau,t_1(\varepsilon)) + I_{ks}(t_1(\varepsilon),t)} \sum\limits_{l=1}^n b_{kl}(\tau) z_l(\tau) d\,\tau + \\ + \int\limits_{t_1(\varepsilon)}^t e^{I_{ks}(\tau,t)} \sum\limits_{l=1}^n b_{kl}(\tau) z_l(\tau) d\,\tau| = \\ = |e^{I_{ks}(t_1(\varepsilon),t)} z_k(t_1(\varepsilon)) + \int\limits_{t_1(\varepsilon)}^t e^{I_{ks}(\tau,t)} \sum\limits_{l=1}^n b_{kl}(\tau) z_l(\tau) d\,\tau| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon C_1 + nC_1C_2 \int\limits_{t_1(\varepsilon)}^t e^{(\alpha+\varepsilon)\tau} d\,\tau = \varepsilon C_1 + \tfrac{nC_1C_2}{\alpha+\varepsilon}(e^{(\alpha+\varepsilon)t} - e^{(\alpha+\varepsilon)t_1(\varepsilon)}). \end{aligned}$$

Следовательно $\lim\limits_{t\to\infty} |z(t)| = 0$.

Если $I_{ks}(0,+\infty) > -\infty$ и $k \neq s$, получаем

$$|z_k(t)| = |\int\limits_{+\infty}^{t} e^{I_{ks}(\tau,t)} \sum_{l=1}^{n} b_{kl}(\tau) z_l(\tau) d\,\tau| \leqslant$$
$$\leqslant nC_1C_2 \int\limits_{+\infty}^{t} e^{(\alpha+\varepsilon)\tau} d\,\tau = -\tfrac{nC_1C_2}{\alpha+\varepsilon} e^{(\alpha+\varepsilon)t},$$

следовательно $\chi(z_k) < 0$.

Если $k = s$, то

$$|z_k(t)| = |\int\limits_{+\infty}^{t} \sum_{l=1}^{n} b_{kl}(\tau) z_l(\tau) d\,\tau| \leqslant$$
$$\leqslant nC_1C_2 \int\limits_{+\infty}^{t} e^{(\alpha+\varepsilon)\tau} d\,\tau = -\tfrac{nC_1C_2}{\alpha+\varepsilon} e^{(\alpha+\varepsilon)t},$$

следовательно $\chi(z_k - 1) < 0$. Таким образом $z(t) = e_s + \theta_s(t)$, где

$$e_s = (\underbrace{0,\ldots,0}_{s-1}, 1, 0, \ldots, 0), \quad \theta_s(t) = (\theta_{1s}(t), \ldots, \theta_{ns}(t)),$$

$$\begin{gathered} \lim_{t\to\infty} |\theta_{ks}(t)| = 0, \text{ если } I_{ks}(0,+\infty) = -\infty, \\ \varlimsup_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} \ln|\theta_{ks}(t)| < 0, \text{ если } I_{ks}(0,+\infty) > -\infty. \end{gathered} \tag{16}$$

Возвращаясь к переменной y, получаем, что система уравнений (14) имеет систему решений

$$y_s(t) = e^{\int\limits_0^t p_s(\tau) d\,\tau} (e_s + \theta_s(t)), \; s = 1, \ldots, n.$$

Эта система является фундаментальной, так как в силу (16) при достаточно больших t для определителя Вронского выполнено неравенство

$$W[y_1, \ldots, y_n] = e^{\int\limits_0^t \sum\limits_{k=1}^{n} p_k(\tau) d\,\tau} \det(e_1 + \theta_1(t), \ldots, e_n + \theta_n(t)) \neq 0.$$

Рассмотрим нетривиальную линейную комбинацию $c_1y_1(t) + \ldots + c_ny_n(t)$, пусть c_{k_0} — ненулевой коэффициент с наибольшим номером, тогда

$$\chi(c_1y_1 + \ldots + c_ny_n) \leqslant \max_{k \leqslant k_0} \chi(y_k) =$$
$$= \max_{k \leqslant k_0} \varlimsup_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} \int\limits_0^t p_k(\tau) d\,\tau = \varlimsup_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} \int\limits_0^t p_{k_0}(\tau) d\,\tau.$$

С другой стороны

$$
\begin{gathered}
\chi(c_1y_1+\ldots+c_ny_n)=\chi(c_1y_1+\ldots+c_{k_0}y_n)\geqslant\\
\geqslant\overline{\lim_{t\to\infty}}\tfrac{1}{t}\ln|c_1\theta_{k_01}(t)e^{\int\limits_0^t p_1(\tau)d\tau}+\ldots+c_{k_0-1}\theta_{k_0k_0-1}(t)e^{\int\limits_0^t p_{k_0-1}(\tau)d\tau}+\\
+c_{k_0}(1+\theta_{k_0k_0}(t))e^{\int\limits_0^t p_{k_0}(\tau)d\tau}|=\overline{\lim_{t\to\infty}}\tfrac{1}{t}\int\limits_0^t p_{k_0}(\tau)d\tau
\end{gathered}
$$

Таким образом, система решений $Y(t)=(y_1(t),\ldots,y_n(t))$ является нормальной. В системе (2) произведем ляпуновскую замену переменных

$$
y=Y(t)e^{-\int\limits_0^t P(\tau)d\tau}z,
$$

в результате которой система (2) перейдет в систему P. Следовательно система $A+B$ обобщенным ляпуновским преобразованием

$$
L(t)Y(t)e^{-\int\limits_0^t P(\tau)d\tau}
$$

приводима к системе A. Теорема VII доказана.

В докладе [104] утверждается, что имеет место включение $\mathrm{GROD}_n\subset\mathrm{EI}_n$, справедливость, которого также можно установить при помощи теоремы VII.

Теорема VIII [48]. *Для любого $n\geqslant 1$ верно включение $GROD_n\subset EI_n$.*

Доказательство. При обобщенных ляпуновских преобразованиях показатели не изменяются, следовательно, в силу теоремы VII, получаем $\lambda_k(A)=\lambda_k(A+B)$, $k=1,\ldots,n$. Теорема VIII доказана.

В докладе [106] поставлен вопрос о строгости включения $\mathrm{GROD}_n\subset\mathrm{EI}_n$. Докажем, что при $n\geqslant 2$ выполнено неравенство $\mathrm{GROD}_n\neq\mathrm{EI}_n$.

Теорема IX [48]. *Пусть $n\geqslant 2$, тогда $GROD_n\neq EI_n$.*

Доказательство. Доказательство достаточно провести для $n=2$. Рассмотрим систему

$$
\begin{cases}\dot x=a_1(t)x,\\ \dot y=a_2(t)y\end{cases}\tag{17}
$$

$$a_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} t \in [0;6]; \\ 0, & \text{если} t \in ((3k)!;(3k+1)!-1]; \\ -1, & \text{если} t \in [(3k+1)!;(3k+2)!]; \\ 0, & \text{если} t \in [(3k+2)!+1;(3k+3)!], \end{cases} \qquad k = 1,2,3,\ldots,$$

$$a_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} t \in [0;6]; \\ 0, & \text{если} t \in ((3k)!;(3k+1)!]; \\ 0, & \text{если} t \in ((3k+1)!;(3k+2)!-1]; \\ -1, & \text{если} t \in [(3k+2)!;(3k+3)!]. \end{cases} \qquad k = 1,2,3,\ldots .$$

Потребуем, чтобы функция $a_1(t)$ была аффинно линейна по t на отрезках $[(3k+1)!-1;(3k+1)!]$ и $[(3k+2)!;(3k+2)!+1]$, а функция $a_2(t)$ — на отрезках $[(3k+2)!-1;(3k+2)!]$. Из неравенств

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} -\tfrac{(3n)!}{(3n+1)!} \leqslant \lim_{T\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{nT} \sum_{j=1}^{n} \ln ||X((j-1)T;jT)||^{-1} = \omega(A) \leqslant$$
$$\leqslant \Omega(A) = \lim_{T\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{nT} \sum_{j=1}^{n} \ln ||X(jT;(j-1)T)|| \leqslant 0$$

получаем, что центральные показатели системы равны нулю. Следовательно для любой системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_1(t) & 0 \\ 0 & a_2(t) \end{pmatrix} x + B(t)x,\ \chi(B) < 0 \tag{18}$$

выполнены равенства

$$\lambda_1(A) = 0 = \omega(A) = \lambda_1(A+B) = \lambda_2(A+B) = \Omega(A) = 0 = \lambda_2(A).$$

Следовательно, система принадлежит множеству EI_n. Допустим, что система (18) принадлежит множеству GROD_n. Пусть система (18) приводима к диагональной системе

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} b_1(t) & 0 \\ 0 & b_2(t) \end{pmatrix} y$$

с упорядоченной диагональю $b_1(t) \geqslant b_2(t)$, при $t \in \mathbb{R}^+$, тогда для фундаментальных матриц систем (17) и (18)

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{\int_0^t a_1(\tau)d\tau} & 0 \\ 0 & e^{\int_0^t a_2(\tau)d\tau} \end{pmatrix} \text{ и } Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\int_0^t b_1(\tau)d\tau} & 0 \\ 0 & e^{\int_0^t b_2(\tau)d\tau} \end{pmatrix}$$

существует невырожденная матрица $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ такая, что выполнены неравенства

$$\begin{gathered}
\varlimsup_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} \ln \| \begin{pmatrix} c_{11} e^{\int\limits_0^t (a_1(\tau)-b_1(\tau))d\tau} & c_{12} e^{\int\limits_0^t (a_1(\tau)-b_2(\tau))d\tau} \\ c_{21} e^{\int\limits_0^t (a_2(\tau)-b_1(\tau))d\tau} & c_{22} e^{\int\limits_0^t (a_2(\tau)-b_2(\tau))d\tau} \end{pmatrix} \| = \\
= \chi(XCY^{-1}) \leqslant 0, \\
\varlimsup_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} \ln \| \tfrac{1}{\det C} \begin{pmatrix} c_{22} e^{\int\limits_0^t (b_1(\tau)-a_1(\tau))d\tau} & c_{12} e^{\int\limits_0^t (b_1(\tau)-a_2(\tau))d\tau} \\ -c_{21} e^{\int\limits_0^t (b_2(\tau)-a_1(\tau))d\tau} & c_{11} e^{\int\limits_0^t (b_2(\tau)-a_2(\tau))d\tau} \end{pmatrix} \| = \\
= \chi((XCY^{-1})^{-1}) \leqslant 0.
\end{gathered} \tag{19}$$

Из условия $\det C \neq 0$, следует $c_{11}c_{22} \neq 0$ или $c_{21}c_{12} \neq 0$.

Если $c_{11}c_{22} \neq 0$, то, в силу (19), получаем

$$\chi(e^{\int\limits_0^t (b_1(\tau)-a_1(\tau))d\tau}) \leqslant 0,$$

$$\chi(e^{\int\limits_0^t (a_2(\tau)-b_2(\tau))d\tau}) \leqslant 0,$$

отсюда для некоторого $t_0 > 0$ и любого $t \geqslant t_0$ получаем

$$\int\limits_0^t (b_1(\tau) - a_1(\tau))d\tau \leqslant \frac{1}{4}t,$$

$$\int\limits_0^t (a_2(\tau) - b_2(\tau))d\tau \leqslant \frac{1}{4}t.$$

Следовательно

$$\int\limits_0^t (a_2(\tau) - a_1(\tau))d\tau = \int\limits_0^t (a_2(\tau) - b_2(\tau))d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t (b_2(\tau) - b_1(\tau))d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t (b_1(\tau)-a_1(\tau))d\,\tau \leqslant \frac{1}{2}t.$$

С другой стороны, при $t=(3k+2)!:\ t\geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$\frac{(3k+2)!-2((3k+1)!)}{(3k+2)!} \leqslant \frac{1}{(3k+2)!}\int\limits_0^{(3k+2)!}(a_2(\tau)-a_1(\tau))d\,\tau \leqslant \frac{1}{2}$$

получили противоречие.

Если $c_{21}c_{12}\neq 0$, то

$$\chi(e^{\int\limits_0^t (a_1(\tau)-b_2(\tau))d\,\tau}) \leqslant 0,$$

$$\chi(e^{\int\limits_0^t (b_1(\tau)-a_2(\tau))d\,\tau}) \leqslant 0,$$

отсюда для некоторого $t_0>0$ и любого $t\geqslant t_0$ получаем

$$\int\limits_0^t (a_1(\tau)-b_2(\tau))d\,\tau \leqslant \frac{1}{4}t,$$

$$\int\limits_0^t (b_1(\tau)-a_2(\tau))d\,\tau \leqslant \frac{1}{4}t.$$

Следовательно

$$\int\limits_0^t (a_1(\tau)-a_2(\tau))d\,\tau = \int\limits_0^t (a_1(\tau)-b_2(\tau))d\,\tau$$

$$+\int\limits_0^t (b_2(\tau)-b_1(\tau))d\,\tau+$$

$$+\int\limits_0^t (b_1(\tau)-a_2(\tau))d\,\tau \leqslant \frac{1}{2}t.$$

С другой стороны при $t=(3k+3)!:\ t\geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$\frac{(3k+3)!-2((3k+2)!)}{(3k+3)!}) \leqslant \frac{1}{(3k+3)!}\int\limits_0^{(3k+3)!}(a_1(\tau)-a_2(\tau))d\,\tau \leqslant \frac{1}{2}$$

получили противоречие. Теорема IX доказана.

Глава V Некоторые свойства топологической энтропии липшицевых отображений компактных метрических пространств

§ 1 Определение топологической энтропии непрерывного отображения компактного метрического пространства

Функционалы, представимые в виде нескольких поточечных предельных переходов от непрерывных функций, встречаются не только в теории показателей Ляпунова, но и в теории динамических систем. Примером такого функционала является топологическая энтропия [127].

Топологическая энтропия динамической системы, порожденной непрерывным отображением компактного метрического пространства в себя, представляет собой скорость экспоненциального роста числа отрезков орбит, различимых с произвольно хорошей, но конечной точностью. Можно сказать, что топологическая энтропия описывает полную экспоненциальную сложность орбитальной структуры динамической системы единственным числом. Изучению свойств топологической энтропии, рассматриваемой как функционал на множествах отображений компактных метрических пространств и гладкий многообразий с различными топологиями посвящено много работ (см., например, книгу [70] или обзор [71]). В данной главе изучим свойства топологической энтропии липшицевых отображений с точки зрения бэровской классификации функций.

Напомним определение топологической энтропии динамической системы [70, стр. 120]. Пусть $(X,\, d)$— компактное метрическое пространство и $f : X \to X$— непрерывное отображение. На X определим систему метрик

$$d_n^f(x,y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $B_f(x,\varepsilon,n)$ открытый шар $\{y \in X : d_n^f(x,y) < \varepsilon\}$. Множество $E \subset X$ называется (f,ε,n)–покрытием, если

$$X \subset \bigcup_{x \in E} B_f(x,\varepsilon,n).$$

Пусть $S_d(f,\varepsilon,n)$ обозначает минимальное количество элементов (f,ε,n)-покрытия. Топологической энтропией динамической системы, порожденной непрерывным отображением f, называется следующая величина

$$h_{top}^d(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f,\varepsilon,n).$$

Отметим, что если метрика d' задает ту же топологию на X, что и d, то $h^d_{top}(f) = h^{d'}_{top}(f)$ [70, стр. 121], поэтому в дальнейшем будем опускать индекс d.

Установлено [70, стр. 501], что топологическая энтропия, рассматриваемая как функционал на пространстве непрерывных отображений из $[0;1]$ в $[0;1]$ с равномерной топологией, является всюду полунепрерывной снизу функцией. Вообще говоря, топологическая энтропия непрерывных отображений, непрерывно зависящих от параметра, может и не быть полунепрерывной снизу функцией этого параметра. Приведем соответствующий пример [47].

Рассмотрим, зависящую от параметра $\mu \in [0;\ 1]$ динамическую систему (X, f_μ), где

$$X = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqslant 1\}, \quad f_\mu(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z = 0; \\ \mu\frac{z^2}{|z|}, & \text{если } z \neq 0. \end{cases}$$

Пусть $\mu \in [0;\ 1)$ и $\varepsilon > 0$, тогда найдется такое натуральное число $n(\mu, \varepsilon)$, что для любого $i \geqslant n(\mu, \varepsilon)$ и любых точек $z,\ w \in X$ выполнено

$$d(f^i_\mu(z), f^i_\mu(w)) \leqslant d(f^i_\mu(z), 0) + d(0, f^i_\mu(w)) \leqslant 2\mu^i < \varepsilon,$$

следовательно для любого натурального числа $n \geqslant n(\mu, \varepsilon)$ имеем

$$d^{f_\mu}_n(z, w) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d(f^i_\mu(z), f^i_\mu(w)) < \max\{d^{f_\mu}_{n(\mu,\varepsilon)}(z, w), \varepsilon\}.$$

Следовательно, при $n \geqslant n(\mu, \varepsilon)$ выполнено неравенство

$$S_d(f_\mu, \varepsilon, n) \leqslant S_d(f_\mu, \varepsilon, n(\mu, \varepsilon)),$$

отсюда

$$0 \leqslant h_{top}(f_\mu) = \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f_\mu, \varepsilon, n) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f_\mu, \varepsilon, n(\mu, \varepsilon)) = 0.$$

Таким образом, при $\mu \in [0;\ 1)$ выполнено равенство $h_{top}(f_\mu) = 0$.

Пусть $\mu = 1$ и натуральное число $k \geqslant 4$, положив

$$\varepsilon = \sqrt{2(1 - \cos(\frac{2\pi}{2^k}))},$$

для натурального числа $n \geqslant 4$ рассмотрим множество точек

$$\mathcal{Z} = \{z_m = \exp(\frac{2\pi m i}{2^{k+n}})\}, \quad m = 0, \ldots, 2^{k+n} - 1.$$

Если расстояние между двумя точками z_p и z_q множества $\mathcal{Z}$ удовлетворяет неравенству

$$d(z_p, z_q) \geqslant \sqrt{2(1 - \cos(\frac{2\pi}{2^k}))},$$

то

$$d_n^{f_1}(z_p, z_q) \geqslant \sqrt{2(1 - \cos(\frac{2\pi}{2^k}))}.$$

Если расстояние между двумя точками z_p и z_q этого множества удовлетворяет неравенству

$$d(z_p, z_q) < \sqrt{2(1 - \cos(\frac{2\pi}{2^k}))},$$

то найдется такое $l \leqslant n - 1$, что

$$d_n^{f_1}(z_p, z_q) \geqslant d(f_1^l(z_p), f_1^l(z_q)) \geqslant \sqrt{2(1 - \cos(\frac{2\pi}{2^k}))}.$$

Таким образом, для любых двух точек выполнено неравенство

$$d_n^{f_1}(z_p, z_q) \geqslant \sqrt{2(1 - \cos(\frac{2\pi}{2^k}))}.$$

Отсюда получаем

$$S_d(f_1, \sqrt{2(1 - \cos(\frac{2\pi}{2^k}))}, n) \geqslant 2^{k+n},$$

следовательно

$$h_{top}(f_1) \geqslant \lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f_1, \sqrt{2(1 - \cos(\frac{2\pi}{2^k}))}, n) \geqslant \ln 2.$$

Таким образом, функция

$$\mu \mapsto h_{top}(f_\mu) \tag{1}$$

разрывна в точке $\mu = 1$. Более того, функция (1) не является полунепрерывной снизу в точке $\mu = 1$.

§ 2 Точный бэровский класс топологической энтропии на пространстве липшицевых отображений с равномерной топологией

Как уже отмечалось выше, топологическая энтропия, рассматриваемая как функционал на пространстве непрерывных отображений из $[0; 1]$ в $[0; 1]$ с равномерной топологией, является всюду полунепрерывной снизу функцией. Следовательно, в силу теоремы Бэра о функциях первого класса (см. теорему I § 2 гл. I), в типичной по Бэру точке топологическая энтропия непрерывна. Для компактных пространств X отличных от отрезка, топологическая энтропия может быть всюду разрывной даже на пространстве липшицевых отображений с равномерной топологией. Проведем соответствующее построение .

Пусть $Lip_K(X)$— множество непрерывных функций $f : X \to X$, удовлетворяющих условию Липшица с константой $K > 1$. На множестве

$$Lip(X) = \bigcup_{K>1} Lip_K(X).$$

определим топологию равномерной сходимости, введя метрику

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} d(f(x), g(y)).$$

На множестве последовательностей

$$\{x = (x_1, x_2, \ldots) : \, x_k \in \{0,\, 1\}\}$$

введем метрику

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ \frac{1}{\min\{k\colon x_k \neq y_k\}}, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

полученное компактное метрическое пространство обозначим через $\mathcal{B}$.

Теорема I [43]. *Пусть $K > 1$. Тогда функция $h_{top} : Lip_K(\mathcal{B}) \to \mathbb{R}^+$ всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра на пространстве $Lip_K(\mathcal{B})$.*

Доказательство теоремы I будет разбито на ряд лемм.

Лемма 1. *Для любого* $f \in Lip_K(\mathcal{B})$ *выполнено равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{\rho(f,g)<\varepsilon} h_{top}(g) = 0.$$

Доказательство. Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$ и

$$f(x_1, x_2, \ldots) = (u_1, u_2, \ldots).$$

Рассмотрим отображение

$$g_{n_0}(x_1, x_2, \ldots) = (u_1, u_2, \ldots, u_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots).$$

В силу определения, для отображения g_{n_0} выполнено неравенство

$$\rho(f, g_{n_0}) = \max_{x\in\mathcal{B}} d(f(x), g_{n_0}(x)) \leqslant \frac{1}{n_0},$$

из которого получаем

$$\lim_{n_0\to\infty} \rho(f, g_{n_0}) = 0. \tag{2}$$

Докажем, что $g_{n_0} \in Lip_K(\mathcal{B})$. Пусть x, $y \in \mathcal{B}$.

1. Если $d(f(x), f(y)) \geqslant \frac{1}{n_0}$, то

$$d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) = d(f(x), f(y)) \leqslant Kd(x, y).$$

2. Если $d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{1}{n_0+1}$, то

$$d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) \leqslant d(x, y) \leqslant Kd(x, y).$$

Вычислим топологическую энтропию отображения g_{n_0}. Пусть

$$k_0 : \frac{1}{n_0} > \frac{K}{k_0}.$$

Если $d(x, y) < \frac{1}{k_0}$, то $d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) < \frac{1}{n_0}$. В противном случае, из включения $g_{n_0} \in Lip_K(\mathcal{B})$, имеем

$$\frac{1}{n_0} \leqslant d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) < Kd(x, y) < K\frac{1}{k_0}.$$

Следовательно, для любого n выполнено равенство

$$B_{g_{n_0}}(x, \frac{1}{k_0}, 0) = B_{g_{n_0}}(x, \frac{1}{k_0}, n).$$

Таким образом, для любого n получаем

$$S_d(g_{n_0}, \frac{1}{k_0}, n) \leqslant 2^{k_0},$$

откуда

$$h_{top}(g_{n_0}) = \lim_{k_0\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln S_d(g_{n_0}, \frac{1}{k_0}, n) = \lim_{k_0\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{k_0}{n} = 0.$$

В силу (2), получаем

$$0 \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{\rho(f,g)<\varepsilon} h_{top}(g) \leq \lim_{n_0\to\infty} h_{top}(g_{n_0}) = 0.$$

Лемма 1 доказана.

На пространстве $\mathcal{B}$ определим отображение $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ (сдвиг на один элемент влево) по формуле

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

Оценим снизу топологическую энтропию этого отображения. Для $\varepsilon = \frac{1}{k}$, рассмотрим множество точек

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{B} : d(x, 0) \geqslant \frac{1}{n+k}\}.$$

Для любых двух точек $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ из $\mathcal{N}$ имеем $d^n_\sigma(x^{(1)}, x^{(2)}) > \frac{1}{k}$. Мощность множества $\mathcal{N}$ равна 2^{n+k}, следовательно

$$S_d(\sigma, \frac{1}{k}, n) \geqslant 2^{k+n}.$$

Таким образом, получаем

$$h_{top}(\sigma) = \lim_{k\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln S_d(\sigma, \frac{1}{k}, n) \geqslant \ln 2.$$

Лемма 2. *Для любого $f \in Lip_K(\mathcal{B})$ выполнено неравенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\rho(f,g)<\varepsilon} h_{top}(g) \geqslant \ln 2.$$

Доказательство. Пусть $f \in Lip_K(\mathcal{B})$ и $n_0 : 1 + \frac{1}{n_0} < K$,

$$f(x_1, x_2, \ldots) = (u_1, u_2, \ldots).$$

Рассмотрим отображение

$$\sigma_{n_0}(x_1, x_2, \ldots) = (u_1, u_2, \ldots, u_{n_0}, x_{n_0+2}, \ldots).$$

В силу определения σ_{n_0} выполнено неравенство

$$\rho(f, \sigma_{n_0}) = \max_{x \in \mathcal{B}} d(f(x), \sigma_{n_0}(x)) \leqslant \frac{1}{n_0},$$

из которого получаем

$$\lim_{n_0 \to \infty} \rho(f, \sigma_{n_0}) = 0. \tag{3}$$

Докажем, что $\sigma_{n_0} \in Lip_K(\mathcal{B})$.

1. Пусть

$$d(p_{n_0}(x), \sigma_{n_0}(y)) = \frac{1}{l}, \quad l = 1, 2, \ldots, n_0,$$

тогда

$$d(\sigma_{n_0}(x), \sigma_{n_0}(y)) = d(f(x), f(y)) \leqslant K \cdot d(x, y).$$

2. Пусть

$$d(\sigma_{n_0}(x), \sigma_{n_0}(y)) = \frac{1}{n_0 + 1}$$

и

$$d(x, y) = \frac{1}{l}, \quad l = 1, 2, \ldots, n_0 + 1,$$

тогда

$$d(\sigma_{n_0}(x), \sigma_{n_0}(y)) \leqslant \frac{1}{n_0 + 1} \leqslant K \cdot d(x, y).$$

3. Пусть

$$d(x, y) = \frac{1}{n_0 + 1 + l}, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

тогда

$$d(\sigma_{n_0}(x), \sigma_{n_0}(y)) = \frac{1}{n_0 + l} = \frac{1}{n_0 + l} \cdot \frac{n_0 + 1 + l}{n_0 + 1 + l} = \frac{n_0 + 1 + l}{n_0 + l} \cdot \frac{1}{n_0 + 1 + l} =$$

$$= (1 + \frac{1}{n_0 + l}) \cdot d(x, y) \leqslant K \cdot d(x, y).$$

Оценим снизу топологическую энтропию отображения σ_{n_0}. Это отображение, начиная с n_0, совпадает с отображением σ. Топологическая энтропия отображения σ не менее $\ln 2$, следовательно топологическая энтропия отображения σ_{n_0} не менее $\ln 2$. В силу (3), получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\rho(f,p)<\varepsilon} h_{top}(p) \geqslant \lim_{n_0 \to \infty} h_{top}(\sigma_{n_0}) \geqslant \ln 2.$$

Лемма 2 доказана.

Завершение доказательства теоремы I.

В силу лемм 1 и 2, каждая точка пространства $Lip_K(\mathcal{B})$ является точкой разрыва топологической энтропии. Следовательно, в силу теоремы Бэра о функциях первого класса (см. теорему I § 2 гл. I), функция $h_{top} : Lip_K(\mathcal{B}) \to \mathbb{R}^+$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве $Lip_K(\mathcal{B})$. Теорема I доказана.

Определим бэровский класс функции $h_{top} : Lip(X) \to \mathbb{R}^+$ на пространстве $(Lip(X), \rho)$.

Теорема II [43]. *Функция $h_{top} : Lip(X) \to \mathbb{R}^+$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве $(Lip(X), \rho)$.*

Доказательство теоремы II будет разбито на ряд лемм.

Лемма 3. *Пусть $f \in Lip(X)$, тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ пространство (X, d_f^n) является компактным.*

Доказательство. Так как $f \in Lip(X)$, существует такое $K > 1$, что для любых x, $y \in X$ выполнено неравенство

$$d(f(x), f(y)) \leqslant Kd(x, y),$$

из которого получаем

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)) \leq K^{n-1} d(x, y).$$

С другой стороны, $d_n^f(x, y) \leqslant d(x, y)$, следовательно, метрики $d_n^f(x, y)$ и $d(x, y)$ эквивалентны на пространстве X. Пространство (X, d) является компактным, следовательно, пространство (X, d_n^f) является компактным. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $f \in Lip(X)$ и множество $E \subset X$ является (f, ε, n)–покрытием. Тогда существует натуральное число $m : \varepsilon - \frac{1}{m} > 0$ такое, что множество E является $(f, \varepsilon - \frac{1}{m}, n)$– покрытием.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть для любого натурального числа $m: \varepsilon - \frac{1}{m} > 0$ найдется точка $x_m \in X$, такая, что

$$x_m \notin \bigcup_{x\in E} B_f(x, \varepsilon - \frac{1}{m}, n).$$

В силу леммы 3 пространство (X, d_n^f)— компактное, следовательно последовательность $(x_m)_{m=1}^{\infty} \subset X$ имеет предельную точку $x^* \in X$. Из последовательности $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ выделим подпоследовательность

$$(x_{m'})_{m'=1}^{\infty} : \lim_{m'\to\infty} x_{m'} = x^*.$$

Из включения

$$x^* \in X \subset \bigcup_{x\in E} B_f(x,\varepsilon,n) = \bigcup_{x\in E} \bigcup_{m:\,\varepsilon-\frac{1}{m}>0} B_f(x,\varepsilon-\frac{1}{m},n) =$$

$$= \bigcup_{m:\,\varepsilon-\frac{1}{m}>0} \bigcup_{x\in E} B_f(x,\varepsilon-\frac{1}{m},n)$$

следует, что найдется натуральное число m_0 такое, что

$$x^* \in \bigcup_{x\in E} B_f(x,\varepsilon-\frac{1}{m_0},n).$$

В силу открытости множества $B_f(x, \varepsilon - \frac{1}{m_0}, n)$, начиная с некоторого m_0', все члены последовательности $(x_{m'})_{m'=1}^{\infty}$ содержатся в

$$\bigcup_{x\in E} B_f(x,\varepsilon-\frac{1}{m_0},n).$$

Следовательно

$$x_{\max\{m_0,m_0'\}} \in \bigcup_{x\in E} B_f(x,\varepsilon-\frac{1}{m_0},n) \subset \bigcup_{x\in E} B_f(x,\varepsilon-\frac{1}{\max\{m_0,m_0'\}},n)$$

Получили противоречие с выбором элемента $x_{\max\{m_0,m_0'\}}$. Таким образом $x^* \notin X$. Полученное противоречие доказывает лемму 4.

Лемма 5. *Пусть $K > 1$, f, $g \in Lip_K(X)$ и $\rho(f,g) < \delta$. Тогда*

$$d_g^n(x,y) \le 2\frac{K^n-1}{K-1}\delta + d_f^n(x,y).$$

Доказательство. Так как $f,\ g \in Lip_K(X)$ для любого $i \in \{0, \dots, n-1\}$ и любого $x \in X$ получаем

$$d(f^i(x), g^i(x)) \leq d(f(f^{i-1}(x)), f(g^{i-1}(x)) + d(f(g^{i-1}(x)), g(g^{i-1}(x)) \leq$$

$$\leq Kd(f^{i-1}(x)), g^{i-1}(x)) + \delta \leq (K^{i-1} + \ldots + 1)\delta \leq \frac{K^i - 1}{K - 1}\delta$$

из этого неравенства следует

$$d_g^n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(g^i(x), g^i(y)) \leq$$

$$\leq \max_{0 \leq i \leq n-1} (d(g^i(x), f^i(x)) + d(f^i(x), f^i(y)) + d(f^i(y), g^i(y))) \leq$$

$$\leq \frac{K^n - 1}{K - 1}\delta + \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)) + \frac{K^n - 1}{K - 1}\delta =$$

$$= 2\frac{K^n - 1}{K - 1}\delta + d_f^n(x, y)$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для любого натурального n и любого $\varepsilon > 0$ функция $S_d(\cdot, \varepsilon, n) : Lip_K(X) \to \mathbb{N}$ полунепрерывна сверху.*

Доказательство. Пусть множество $E \subset X$ является (f, ε, n)–покрытием т. е.

$$X \subset \bigcup_{x \in E} B_f(x, \varepsilon, n).$$

По лемме 4 существует натуральное число m, удовлетворяющее неравенству $\varepsilon - \frac{1}{m} < \varepsilon$ такое, что множество E является $(f, \varepsilon - \frac{1}{m}, n)$–покрытием. Пусть

$$0 < \delta < \frac{(K-1)}{2m(K^n - 1)}$$

и

$$g \in Lip_K(X) :\ \rho(f, g) < \delta.$$

Тогда, в силу леммы 5, для любого $x \in X$ и любого

$$y \in B_f(x, \varepsilon - \frac{1}{m}, n)$$

получаем

$$d_g^n(x, y) \leq \frac{1}{m} + d_f^n(x, y) < \varepsilon,$$

следовательно, точка y принадлежит шару $B_g(x,\varepsilon,n)$. Таким образом выполнено включение

$$B_f(x,\varepsilon-\frac{1}{m},n)\subset B_g(x,\varepsilon,n),$$

т. е. множество E является (g,ε,n)– покрытием. Следовательно $S_d(g,\varepsilon,n)\leq S_d(f,\varepsilon,n)$ для любого g из некоторой окрестности f. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть $K>1$, тогда функция $h_{top}(\cdot):Lip_K(X)\to\mathbb{R}^+$ представима в виде поточечного предела неубывающей последовательности функций $(\Phi_p(\cdot))$, принадлежащих первому классу Бэра на пространстве $Lip_K(X)$.*

Доказательство. Установлено [70, стр. 122], что верхний предел $\varlimsup\limits_{n\to\infty}$ в определении топологической энтропии можно заменить на нижний предел $\varliminf\limits_{n\to\infty}$, т. е. справедливо равенство

$$h_{top}(f)=\lim_{\varepsilon\to0}\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln S_d(f,\varepsilon,n)$$

По лемме 6 функция $S_d(\cdot,\varepsilon,n)$ полунепрерывна сверху, следовательно [120, стр. 237], существует последовательность непрерывных функций $\varphi_d^m(\cdot,\varepsilon,n)$ на пространстве $(Lip_K(X),\rho)$ такая, что

$$\frac{1}{n}\ln S_d(\cdot,\varepsilon,n)=\inf_{m\in\mathbb{N}}\varphi_d^m(\cdot,\varepsilon,n).$$

Отсюда получаем

$$h_{top}(f)=\lim_{\varepsilon\to0}\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln S_d(f,\varepsilon,n)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\varliminf_{n\to\infty}\inf_{m\in\mathbb{N}}\varphi_d^m(f,\frac{1}{k},n)=$$

$$=\sup_{k\in\mathbb{N}}\sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{l\geq n}\inf_{m\in\mathbb{N}}\varphi_d^m(f,\frac{1}{k},l)=$$

$$=\lim_{p\to\infty}\max_{1\leq k\leq p}\max_{1\leq n\leq p}\lim_{q\to\infty}\min_{n\leq l\leq q}\min_{1\leq m\leq q}\varphi_d^m(f,\frac{1}{k},l).$$

Из непрерывности функций $\varphi_d^m(\cdot,\varepsilon,n)$ следует непрерывность функций

$$\min_{n\leq l\leq q}\min_{1\leq m\leq q}\varphi_d^m(\cdot,\frac{1}{k},l)$$

[120, стр. 224]. Отсюда функции

$$\lim_{q\to\infty}\min_{n\leq l\leq q}\min_{1\leq m\leq q}\varphi_d^m(\cdot,\frac{1}{k},l)$$

принадлежат первому классу Бэра, следовательно функции

$$\Phi_p(f) = \max_{1\leq k\leq p} \max_{1\leq n\leq p} \lim_{q\to\infty} \min_{n\leq l\leq q} \min_{1\leq m\leq q} \varphi_d^m(f, \frac{1}{k}, l).$$

принадлежат первому классу Бэра на пространстве $(Lip_K(X), \rho)$ [120, стр. 224], следовательно функция $h_{top}(\cdot)$ принадлежит второму классу Бэра. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть $K > 1$, тогда пространство $Lip_K(X)$ является замкнутым множеством в пространстве $Lip(X)$.*

Доказательство. Пусть предельная точка множества $Lip_K(X)$. Тогда существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in Lip_K(X)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f_0$. Для любого отображения f_n и любых x, $y \in X$ справедливо неравенство

$$d(f_n(x), f_n(y)) \leq Kd(x, y).$$

В этом неравенстве перейдем к пределу при $n \to \infty$, получим

$$d(f_0(x), f_0(y)) \leq Kd(x, y),$$

следовательно $f_0 \in Lip_K(X)$. Таким образом, множество $Lip_K(X)$ является замкнутым в пространстве $(Lip(X), \rho)$. Лемма 8 доказана.

Завершение доказательства теоремы II.

По лемме 7 для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ сужение функции $h_{top}(\cdot)$ на замкнутое множество $Lip_{n+1}(X)$ принадлежит второму классу Бэра и

$$Lip(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_{n+1},$$

следовательно, в силу п. 4 § 1 гл. I, функция $h_{top}(\cdot)$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве $(Lip(X), \rho)$. Теорема II доказана.

Используя лемму 7, можно вычислить значение топологической энтропии в типичной по Бэру точке пространства $Lip_K(\mathcal{B})$.

Следствие 1 [46]. *Для любого $K > 1$ в типичной по Бэру точке пространства $Lip_K(\mathcal{B})$ топологическая энтропия равна нулю.*

Доказательство. В силу леммы 7 и леммы 2 § 2 гл. I, функция $h_{top} : Lip_K(\mathcal{B}) \to \mathbb{R}^+$ в типичной по Бэру точке пространства $Lip_K(\mathcal{B})$

полунепрерывна снизу. С другой стороны, из леммы 1 имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{\rho(f,g)<\varepsilon} h_{top}(g) = 0.$$

Следовательно, в типичной по Бэру точке пространства $Lip_K(\mathcal{B})$ топологическая энтропия равна нулю. Следствие 1 доказано.

§ 3 Точный бэровский класс топологической энтропии семейства липшицевых отображений

По метрическому пространству $\mathfrak{M}$ и непрерывному (по паре аргументов) отображению

$$f : \mathfrak{M} \times X \to X, \tag{4}$$

удовлетворяющему условию Липшица по x при всяком фиксированном значении μ, образуем функцию

$$\mu \mapsto h_{\mathrm{top}}(f_\mu(\cdot)). \tag{5}$$

Изучим свойства функции (5) с точки зрения бэровской классификации.

Лемма 9. *Если отображение (4) непрерывно по паре аргументов, то функция $\psi : \mathfrak{M} \to Lip(X)$, определяемая формулой $\psi(\mu) = f_\mu(\cdot)$ является непрерывной.*

Доказательство. По метрикам ρ_1 и ρ_2 на пространствах $\mathfrak{M}$ и X определим метрику ρ на $\mathfrak{M} \times X$ формулой

$$\rho((\mu,\nu),(x,y)) = \max\{\rho_1(\mu,\nu), \rho_2(x,y)\}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности отображения (4) для каждой $x \in X$ найдется ее окрестность $\mathcal{V}(x)$ в пространстве X и окрестность $\mathcal{U}_x(\mu_0)$ точки $\mu_0 \in \mathfrak{M}$ такие, что для любой точки $(\mu, y) \in \mathcal{U}_x(\mu_0) \times \mathcal{V}(x)$ выполнено неравенство

$$\rho_2(f_{\mu_0}(x), f_\mu(y)) < \varepsilon.$$

Из компактности пространства X следует существование конечного набора точек $(x_k)_{k=1}^n \subset X$ такого, что

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{V}(x_k).$$

Пусть
$$\mathcal{U}(\mu_0) = \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{U}_{x_k}(\mu_0),$$
тогда для любого $\mu \in \mathcal{U}(\mu_0)$ выполнено неравенство
$$\sup_{x \in X} \rho_2(f_{\mu_0}(x), f_\mu(x)) < \varepsilon.$$
Лемма 9 доказана.

Теорема III [44]. *Функция (5) принадлежит второму классу Бэра, а если $\mathfrak{M}$ метризуемо и полной в некоторой метрике, то в $\mathfrak{M}$ имеется всюду плотное множество P типа G_δ такое, что сужение этой функции на P непрерывно.*

Доказательство. Из леммы 9 и теоремы II получаем, что сложная функция $\mu \mapsto h_{\mathrm{top}}(f_\mu(\cdot))$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$, а следовательно, в силу п. 9 § 1 гл. I, существует всюду плотное множество P типа G_δ такое, что функция $h_{\mathrm{top}}(f_\mu(\cdot))|_P$ непрерывна. Теорема III доказана.

Перейдем к изучению вопроса о том, насколько часто встречаются точки полунепрерывности снизу топологической энтропии.

Теорема IV [44]. *Пусть пространство $\mathfrak{M}$ метризуемо и полно в некоторой метрике. Тогда множество точек, в которых функция (5) полунепрерывна снизу, является типичным по Бэру.*

Доказательство. Из лемм 7 и 9 получаем, что сложная функция $\mu \mapsto h_{\mathrm{top}}(f_\mu(\cdot))$ представима в виде поточечного предела неубывающей последовательности функций, принадлежащих первому классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$, а следовательно, в силу леммы 2 § 2 гл. I, она является полунепрерывной снизу в типичной по Бэру точке. Теорема IV доказана.

Установлено [70, стр. 690], что топологическая энтропия как функция на пространстве диффеоморфизмов компактного двумерного риманова многообразия с C^1-топологией полунепрерывна снизу.

Следствие 2 [42]. *Пусть X — компактное риманово многообразие. Тогда топологическая энтропия, рассматриваемая как функция на пространстве C^1-отображений из X в X с C^1-топологией в типичной по Бэру точке* *полунепрерывна снизу.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — пространство C^1-отображений из X в X наделенное C^1-топологией. Это пространство является полным. Рассмотрим отображение (4), заданное формулой

$$(f(\cdot), x) \mapsto f(x). \tag{6}$$

В силу определения, отображение (6) непрерывно по совокупности переменных. Так как C^1-отображения на компактном римановом многообразии удовлетворяют условию Липшица [70, стр. 135], то отображение (6) удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу при всяком фиксированном значение первого. Следовательно, в силу теоремы IV, функция (5) в типичной по Бэру точке полунепрерывна на пространстве $\mathfrak{M}$. Следствие 2 доказано.

Если в пространстве C^1-отображений, наделенном C^1-топологией, некоторое множество D является всюду плотным типа G_δ, то в силу открытости пространства диффеоморфизмов [121, стр. 54], множество D является всюду плотным типа G_δ в пространстве диффеоморфизмов, наделенном C^1-топологией. Из теоремы IV получаем

Следствие 3 [42]. *Пусть X компактное риманово многообразие. Тогда топологическая энтропия как функция на пространстве диффеоморфизмов из X в X в типичной по Бэру точке полунепрерывна снизу в C^1-топологии.*

Оказывается, в теореме III второй класс Бэра, вообще говоря, нельзя заменить на первый класс Бэра. Приведем соответствующее построение.

Теорема V [44]. *Пусть $\mathfrak{M} = \mathcal{B}$ и $X = \mathcal{B}$. Тогда для любого $K > 1$ найдется такое отображение (4), что функция (5) не принадлежит первому классу Бэра.*

Доказательство. Пусть натуральное число k_0 такое, что для любого $k \geqslant k_0$ выполнено неравенство $\frac{k}{k-1} < K$. Построим отображение $f : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to X$ следующим образом

$$f_\mu(x_1, \ldots, x_{k_0-1}, x_{k_0}, x_{k_0+1}, \ldots) = (x_1, \ldots, x_{k_0-1}, x_{k_0+\mu_1}, x_{k_0+1+\mu_2}, \ldots),$$

где $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots) \in \mathcal{B}$ и $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathcal{B}$. Отображение $f_\mu(x)$ имеет следующие свойства.

Лемма 10. *Для любого $\mu \in \mathcal{B}$ выполнено включение $f_\mu(\cdot) \in Lip_K\mathcal{B}$.*

Доказательство. Пусть x, $y \in \mathcal{B}$ и $x \neq y$. Если $d(x, y) > \frac{1}{k_0}$, то

$$d(f_\mu(x), f_\mu(y)) = d(x, y).$$

Если $d(x, y) \leqslant \frac{1}{k_0}$, то

$$d(f_\mu(x), f_\mu(y)) \leqslant \frac{1}{\min\{k : x_k \neq y_k\} - 1} =$$

$$= \frac{\min\{k : x_k \neq y_k\}}{\min\{k : x_k \neq y_k\} - 1} \cdot \frac{1}{\min\{k : x_k \neq y_k\}} =$$

$$= \frac{\min\{k : x_k \neq y_k\}}{\min\{k : x_k \neq y_k\} - 1} \cdot d(x, y) \leqslant K \cdot d(x, y)$$

Таким образом, получаем $f_\mu(\cdot) \in Lip_K(\mathcal{B})$. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Отображение $f_\mu(x)$ непрерывно по совокупности переменных.*

Доказательство. Пусть μ, $\nu \in \mathcal{B}$ и $\mu \neq \nu$, тогда для любого $x \in \mathcal{B}$ расстояние между образами

$$f_\mu(x) = (x_1, \ldots, x_{k_0-1}, x_{k_0+\mu_1}, x_{k_0+1+\mu_2}, \ldots)$$

$$f_\nu(x) = (x_1, \ldots, x_{k_0-1}, x_{k_0+\nu_1}, x_{k_0+1+\nu_2}, \ldots)$$

удовлетворяет неравенству

$$d(f_\mu(x), f_\nu(x)) \leqslant \frac{1}{k_0 + \min\{k : \mu_k \neq \nu_k\} - 1} =$$

$$= \frac{k_0 + \min\{k : \mu_k \neq \nu_k\}}{k_0 + \min\{k : \mu_k \neq \nu_k\} - 1} \cdot \frac{1}{k_0 + \min\{k : \mu_k \neq \nu_k\}} \leqslant$$

$$\leqslant K \frac{1}{k_0 + \min\{k : \mu_k \neq \nu_k\} - 1} \leqslant K \cdot d(\mu, \nu).$$

Для произвольных $x, y \in \mathcal{B}$ оценим расстояние между расстояние между образами

$$f_\mu(x) = (x_1, \ldots, x_{k_0-1}, x_{k_0+\mu_1}, x_{k_0+1+\mu_2}, \ldots)$$

$$f_\mu(y) = (y_1, \ldots, y_{k_0-1}, y_{k_0+\mu_1}, y_{k_0+1+\mu_2}, \ldots).$$

1. Если $d(x, y) \geqslant \frac{1}{k_0-1}$, то

$$d(f_\mu(x), f_\mu(y)) = d(x, y) \leqslant Kd(x, y).$$

2. Если $d(x,y)=\frac{1}{k_0}$, то

$$d(f_\mu(x),f_\mu(y))\leqslant\frac{1}{k_0-1}=\frac{k_0}{k_0-1}\frac{1}{k_0}\leqslant Kd(x,y).$$

3. Если $d(x,y)=\frac{1}{k_0+l}$, где $l=1,2,\ldots$, то

$$d(f_\mu(x),f_\mu(y))\leqslant\frac{1}{k_0+l-1}=\frac{k_0+l}{k_0+l-1}\frac{1}{k_0+l}\leqslant Kd(x,y).$$

Таким образом получаем неравенство

$$d(f_\mu(x),f_\nu(y))\leqslant d(f_\mu(x),f_\mu(y))+d(f_\mu(y),f_\nu(y))\leqslant K(d(x,y)+d(\mu,\nu)),$$

из которого следует непрерывность отображения $f_\mu(x)$ по совокупности переменных. Лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Пусть $L>0$ такое, что для любых x, $y\in X$ и $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ выполнено неравенство $d_f^n(x,y)\leqslant L\cdot d_g^n(x,y)$. Тогда $h_{top}(f)\leqslant h_{top}(g)$.*

Доказательство. Пусть множество $E\in X$ является $(g,\frac{\varepsilon}{L},n)$–покрытием. Из неравенства

$$d_f^n(x,y)\leqslant L\cdot d_g^n(x,y)$$

получаем включение

$$B_g(x,\frac{\varepsilon}{L},n)\subset B_f(x,\varepsilon,n),$$

следовательно множество E является $(g,\frac{\varepsilon}{L},n)$– покрытием. Таким образом, выполнено неравенство

$$S_d(f,\varepsilon,n)\leqslant S_d(g,\frac{\varepsilon}{L},n),$$

следовательно,

$$h_{top}(f)=\lim_{\varepsilon\to0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\ln S_d(f,\varepsilon,n)\leqslant\lim_{\varepsilon\to0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\ln S_d(g,\frac{\varepsilon}{L},n)=h_{top}(g).$$

Лемма 12 доказана.

Обозначим через $\mathcal{P}_0$ множество последовательностей из $\mathcal{B}$, у которых, начиная с некоторого номера все члены равны нулю, и через $\mathcal{P}_1$ множество последовательностей из $\mathcal{B}$, у которых, начиная с некоторого номера все члены равны единице.

Лемма 13. *Если* $\mu \in \mathcal{P}_0$, *то* $h_{top}(f_\mu) = 0$.

Доказательство. Так как $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots) \in \mathcal{P}_0$ существует k_1 такое, что для любого $k \geqslant k_1$ выполнено равенство $\mu_k = 0$. Следовательно, начиная с номера $k_1 + k_0 - 1$, элементы последовательностей x и $f_\mu(x)$ совпадают. Таким образом,

$$d^n_{f_\mu}(x, y) \leqslant (k_0 + k_1) d(x, y),$$

т. е. $d^n_{f_\mu}(x, y) \leqslant d^n_I(x, y)$, где $I : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$— тождественное отображение. Топологическая энтропия тождественного отображения равна нулю. Следовательно, в силу леммы 12, получаем

$$0 \leqslant h_{top}(f_\mu) \leqslant h_{top}(I) = 0.$$

Лемма 13 доказана.

Лемма 14. *Если* $\mu \in \mathcal{P}_1$, *то* $h_{top}(f_\mu) \geqslant \ln 2$.

Доказательство. Так как $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots) \in \mathcal{P}_1$, существует k_1 такое, что для любого $k \geqslant k_1$ выполнено равенство $\mu_k = 1$. Следовательно, начиная с номера $k_1 + k_0$, элементы последовательностей $\sigma(x)$ и $f_\mu(x)$ совпадают. Таким образом, $d^n_\sigma(x, y) \leqslant (k_0 + k_1) d^n_{f_\mu}(x, y)$. Следовательно, в силу леммы 9, получаем $h_{top}(f_\mu) \geqslant h_{top}(\sigma) \geqslant \ln 2$. Лемма 14 доказана.

Завершение доказательства теоремы V.

Предположим, что сложная функция $h_{top}(f_\mu(\cdot))$ принадлежит первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}$. Тогда, в силу леммы 3 § 2 гл. I, пересечение замыканий образов множеств $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}_1$ при отображении $\mu \mapsto h_{top}(f_\mu(\cdot))$ непусто.

С другой стороны, в силу лемм 13 и 14, пересечение замыканий образов множеств $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}_1$ пусто. Полученное противоречие, доказывает теорему V.

Литература

Список литературы

[1] *Агафонов В. Г.* К бэровской классификации показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1466.

[2] *Агафонов В. Г.* О классе Бэра показателя Изобова // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 6. С. 1092–1093.

[3] *Агафонов В. Г.* О классе Бэра верхнего показателя Изобова // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 6. С. 1089.

[4] *Агафонов В. Г.* О классе Бэра показателей Ляпунова однородных и неоднородных систем // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 6. С. 905–906.

[5] *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.

[6] *Ариньш Е. Г.* Об одном обобщении теоремы Бэра // УМН. 1953. Т. 8, № 3. С. 105–108.

[7] *Барабанов Е. А.* О множествах неправильности семейств линейных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1067–1084.

[8] *Басов В. П.* Исследование устойчивости движения для некоторого класса периодических систем // Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н. ЛГУ, Л. 1949.

[9] *Беккенбах Э., Беллман Э.* Неравенства // М.: Мир. 1965.

[10] *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры // М.: Наука, 1983.

[11] *Быков В. В.* Некоторые свойства минорант показателей Ляпунова // Успехи матем. наук. 1996. Т. 51, вып. 5. С. 186.

[12] *Быков В. В.* О связи классов Бэра функционалов и формул // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 6. С. 852.

[13] *Быков В. В., Салов Е. Е.* О классе Бэра минорант показателей Ляпунова // Вестник МГУ. Серия 1. Математика и механика. 2003. № 1. С. 33–40.

[14] *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости // М.: Наука. 1966.

[15] *Былов Б. Ф., Изобов Н. А.* Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей диагональной системы // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1785–1793.

[16] *Былов Б. Ф., Изобов Н. А.* Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1794–1803.

[17] *Бэр Р.* Теория разрывных функций // М.-Л.: ГТТИ. 1932.

[18] *Ветохин А. Н.* О классах Бэра остаточных функционалов // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 5. С. 909–910.

[19] *Ветохин А. Н.* О классе Бэра нижнего центрального показателя // Дифференциальные уравнения. 1995, Т. 31, № 9. С. 1597.

[20] *Ветохин А. Н.* О характеристиках условной экспоненциальной устойчивости // Дифференциальные уравнения. 1995, Т. 31, № 9. С. 1601.

[21] *Ветохин А. Н.* О топологической структуре множество правильных систем // Дифференциальные уравнения. 1995, Т. 31, № 11. С. 1937.

[22] *Ветохин А. Н.* О классе Бэра минимальных показателей // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 12. С. 2090.

[23] *Ветохин А. Н.* О векторных пространствах, определяемых показателями Ляпунова и характеристиках условной экспоненциальной устойчивости // Дифференциальные уравнения. 1995, Т. 31, № 12, С. 2095.

[24] *Ветохин А. Н.* Бэровская классификация функций и ее приложения к теории показателей Ляпунова // Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н. МГУ им. М. В. Ломоносова, М. 1996.

[25] *Ветохин А. Н.* Класс Бэра верхних вспомогательных показателей // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 852–853.

[26] *Ветохин А. Н.* Класс Бэра нижних вспомогательных показателей // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 853–854.

[27] *Ветохин А. Н.* К классификации Бэра сигма показателей Изобова // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 11. С. 1574.

[28] *Ветохин А. Н.* К бэровской классификации остаточных показателей // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 8. С. 1039–1042.

[29] *Ветохин А. Н.* Класс Бэра максимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1313–1317.

[30] *Ветохин А. Н.* Точный класс экспоненциального показателя Изобова // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 6. С. 856.

[31] *Ветохин А. Н.* Точный дескриптивный тип множества правильных линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1128–1129.

[32] *Ветохин А. Н.* О свойствах сигма-показателя Изобова // Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. 2000. Т. 4. С. 20–24.

[33] *Ветохин А. Н.* Некоторые свойства конструктивного показателя // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 6. С. 853.

[34] *Ветохин А. Н.* Об одном свойстве мажорант и минорант остаточных функционалов // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1573.

[35] *Ветохин А. Н.* Точный класс Бэра вспомогательных показателей // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 10. С. 1424–1426.

[36] *Ветохин А. Н.* Лебеговские множества показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 6. С. 849.

[37] *Ветохин А. Н.* О лебговских множествах показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 11. С. 1567.

[38] *Ветохин А. Н.* Об одном свойстве центральных показателей // Вестник МГУ им. М. В. Ломоносова. Сер. 1. Математика. Механика. 2002. № 1. С. 52–53.

[39] *Ветохин А. Н.* О свойствах топологической энтропии // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы: Материалы Международной конференции, посвященной памяти И. Г. Петровского. Тезисы докладов - М.: Изд-во МГУ. 2007. С. 379.

[40] *Ветохин А. Н.* О точном классе Бэра показателей Ляпунова на множестве правильных линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 6. С. 905.

[41] *Ветохин А. Н.* Об устойчивости показателей Ляпунова правильноых линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 6. С. 1672.

[42] *Ветохин А. Н.* О свойствах топологической энтропии диффеоморфизмов гладких компактных многообразий // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1572.

[43] *Ветохин А. Н.* О свойствах топологической энтропии липшицевых отображений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1566–1567.

[44] *Ветохин А. Н.* О некоторых свойствах топологической энтропии динамических систем // Матем. заметки. 2013. Т. 93. Вып. 3. С. 347–356.

[45] *Ветохин А. Н.* О свойствах показателей Ляпунова правильных линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 4. С. 417–423.

[46] *Ветохин А. Н.* О множестве точек полунепрерывности снизу топологической энтропии на пространстве липшицевых отображений // Fourth International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii. Donetsk, 2013. C. 30–31.

[47] *Ветохин А. Н.* О типичности полунепрерывности снизу топологической энтропии на пространстве липшицевых отображений // Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: Материалы Второй международной конференции молодых ученых. Нальчик, 2013. С. 67–68.

[48] *Ветохин А. Н.* О несовпадении двух множеств линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 6. С. 784–788.

[49] *Ветохин А. Н.* К задаче о минорантах показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 7. С. 950–952.

[50] *Ветохин А. Н.* О множестве точек полунепрерывности сверху некоторых показателей Изобова // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 6. С. 806–807.

[51] *Ветохин А. Н.* О множествах точек полунепрерывности показателей, не принадлежащих второму классу Бэра // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1506–1507.

[52] *Виноград Р. Э.* Неустойчивость характеристических показателей правильных систем // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91, № 5. С. 999–1002.

[53] *Виноград Р. Э.* Отрицательное решение вопроса об устойчивости характеристических показателей правильных систем // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17, № 6. С. 645–650.

[54] *Виноград Р. Э.* Неустойчивость младшего характеристических показателей правильной системы // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103, № 4. С. 541–544.

[55] *Виноград Р. Э.* О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Матем. сборник. 1957. Т. 42, № 2. С. 207–222.

[56] *Виноград Р. Э.* Необходимый и достаточный критерий и точная асимптотика устойчивости по первому приближению // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 5. С. 800–813.

[57] *Гробман Д. М.* Характеристические показателей систем, близких к линейным // Матем. сборник. 1952. Т. 30, № 1. С. 121–166.

[58] *Далецкий Ю. Л. Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // М.: Наука. 1970.

[59] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости // М.: Наука. 1967.

[60] *Изобов Н. А.* О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 7. С. 1186–1192.

[61] *Изобов Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т. 12. С. 71–146.

[62] *Изобов Н. А.* Минимальный показатель двумерной линейной дифференциальной системы // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 5. С. 848–858.

[63] *Изобов Н. А.* О старшем показателе системы с возмущениями порядка выше первого // Вестник Белорусского университета. Серия 1. 1969, № 3. С. 6–9.

[64] *Изобов Н. А.* Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26, № 1. С. 5–8.

[65] *Изобов Н. А., Макаров Е. К.* О неправильных по Ляпунову линейных системах с параметром при производной // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 11. С. 1870–1880.

[66] *Изобов Н. А., Степанович О. П.* Об экспоненциально убывающих возмущениях, сохраняющих характеристические показатели линейной диагональной системы // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 6. С. 934–943.

[67] *Изобов Н. А.* Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 12. С. 2034–2055.

[68] *Изобов Н. А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Мн.: БГУ, 2006.

[69] *Илларионова О. Г.* О вспомогательных показателях линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та прикл. механики им. Векуа. 1988. Т. 31. С. 80–98.

[70] *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М. Факториал, 1999.

[71] *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005.

[72] *Келдыш Л. В.* Структура B-множеств // Тр. МИАН, 1945, Т. 17. С. 1–74.

[73] *Куратовский К.* Топология. Т. 1 // М.: Мир. 1966.

[74] *Лузин Н. Н.* Лекции об аналитических иножествах и их приложениях. М., 1953.

[75] *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // М.-Л.: Гостехиздат. 1950.

[76] *Мазаник С. А.* Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем. Мн.: БГУ, 2008.

[77] *Макаров Е. К.* О множествах неправильности линейных систем с параметром при производной // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 12. С. 2091–2098.

[78] *Миллионщиков В. М.* Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1775–1784.

[79] *Миллионщиков В. М.* Доказательство достижимости центральных показателей // Сибирск. матем. журнал. 1969. Т. 10, № 1. С. 99–104.

[80] *Миллионщиков В. М.* К теории характеристических показателей Ляпунова // Математические заметки. 1970. Т. 7, № 4. С. 503–513.

[81] *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1408–1416.

[82] *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. II // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 9. С. 1587–1598.

[83] *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. III // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 10. С. 1766–1785.

[84] *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. IV // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 3. С. 431–468.

[85] *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. V // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 8. С. 1394–1410.

[86] *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VI // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 5. С. 804–821.

[87] *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VII // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 6. С. 957–978.

[88] *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VIII // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 8. С. 1330–1345.

[89] *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. IX // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 9. С. 1507–1548.

[90] *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. X // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 12. С. 2132–2148.

[91] *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. XI // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 2. С. 196–214.

[92] *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. XII // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 2. С. 215–220.

[93] *Миллионщиков В. М.* Типичное свойство показателей Ляпунова // Математические заметки. 1986. Т. 40, № 2. С. 203–217.

[94] *Миллионщиков В. М.* О классах Бэра центральных показателей // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 12. С. 2190.

[95] *Миллионщиков В. М.* Показатели Ляпунова как функции параметра // Математический сборник. 1988. Т. 137, № 3. С. 364–380.

[96] *Миллионщиков В. М.* Относительные показатели Боля и классы функций Бэра // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 6. С. 1087.

[97] *Миллионщиков В. М.* Классификация по Бэру относительных мажорант показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 6. С. 1088 — 1089.

[98] *Миллионщиков В. М.* Нерешенная задача о мажорантах показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1457.

[99] *Миллионщиков В. М.* О мажорантах показателей Ляпунова линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 6. С. 1090.

[100] *Миллионщиков В. М.* Класс Бэра показателя Изобова // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 11. С. 2009.

[101] *Миллионщиков В. М.* О классе Бэра указателей условной устойчивости // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 6. С. 1085.

[102] *Миллионщиков В. М.* Задачи о минорантах показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 11. С. 2014–2015.

[103] *Миллионщиков В. М.* Экспоненциально-инвариантные системы // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 11. С. 2014.

[104] *Миллионщиков В. М.* Линейные системы, обобщенно приводимые к упорядоченно-диагональному виду // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 11. С. 2020.

[105] *Миллионщиков В. М.* Об одном классе линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 6. С. 1090–1091.

[106] *Миллионщиков В. М.* Нерешенная задача о классах линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 12. С. 2092.

[107] *Морозов О. И.* О бэровском классе показателей Ляпунова неоднородных линейных систем // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1991, № 6. С. 22–30.

[108] *Оселедец В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. ММО, 1968, Т. 19. С. 179–210.

[109] *Попова С. Н., Тонков Е. Л.* Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 226–235.

[110] *Попова С. Н.* Об управлении коэффициентами неправильности линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 50–56.

[111] *Рахимбердиев М. И.* О бэровском классе показателей Ляпунова // Математические заметки. 1982. Т. 31, № 6. С. 925–931.

[112] *Сергеев И. Н.* Инвариантность центральных показателей относительно возмущений, стремящихся к нулю на бесконечности // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 9. С. 1719.

[113] *Сергеев И. Н.* К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.

[114] *Сергеев И. Н.* Критерий полунепрерывности снизу показателей Ляпунова трехмерных линейных систем // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49, вып. 4. С. 142.

[115] *Сергеев И. Н.* К задаче о классе Бэра минорант показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 9. С. 1600–1601.

[116] *Сергеев И. Н.* Бэровские классы формул для показателей линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 12. С. 2092–2093.

[117] *Сергеев И. Н.* О достижимости минимальных показателей в классе бесконечно малых возмущений // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2000, № 3. С. 61–63.

[118] *Сергеев И. Н.* Класс Бэра максимальных показателей линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 11. С. 1574.

[119] *Феклин В. Г.* Классификация нижних вспомогательных показателей по Бэру // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 11. С. 2009.

[120] *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.–Л.: ОНТИ, 1937.

[121] *Хирш М.* Дифференциальная топология М. Мир: 1979.

[122] *Ширяев К. Е.* О классе Бэра некоторых показателей линейных систем в компактно-открытой топологии // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 5. С. 905.

[123] *Ширяев К. Е.* О классе Бэра вспомогательных логарифмических показателей // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 5. С. 906.

[124] *Ширяев К. Е.* О классе Бэра экстраординарных показателей Боля в компактно-открытой топологии // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 5. С. 1598.

[125] *Ширяев К. Е.* О классе Бэра стапенных вспомогательных показателей // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 6. С. 1099.

[126] *Ширяев К. Е.* Вспомогательные показатели Боля в неравномерных шкалах // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 6. С. 1099.

[127] *Adler R. L., Konheim A. G., Mc An drew M. H.* Topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc. 1965. 114, 2. P. 309Ч-319.

[128] *Baire R.* Sur la representation des functions discontinues // Acta. Math. 1906. V. 30. P. 1–48.

[129] *Baire R.* Sur la representation des functions discontinues // Acta. Math. 1909. V. 32. P. 97–176.

[130] *Misiurewicz M.* Diffeomorphism without any measure with maximal entropy // Bull Acad Pol. sci, Math, astron et phys. 1973. 21. 10. P. 903–910.

[131] *Perron O.* Die Ordnungzahlen der Differentialgleichungen // Math. Z. 1930. Bd. 32. S. 703–728.

[132] *Perron O.* Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängige Variable reel ist // J. reine und angew. Math. 1931. Bd. 142. S. 254–270.