

«УТВЕРЖДАЮ»
директор Института
математики НАН Беларуси
академик
И.В. Гайшун



О Т З Ы В

ведущей организации о диссертации Ветохина Александра Николаевича «Метод неординарных семейств в теории бэровских классов показателей Ляпунова», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация А.Н. Ветохина посвящена изучению топологических свойств показателей Ляпунова, а также других характеристик асимптотического поведения решений линейных однородных систем дифференциальных уравнений как функций от коэффициентов системы. Тематика исследований данной работы находится на стыке теории показателей Ляпунова и теории разрывных функций Бэра.

Характеристические показатели были введены Ляпуновым как инструмент для исследования устойчивости движения (в частности, для исследования условной устойчивости). Теория этих и других, подобных им, показателей значительно развита в работах его последователей: О. Перрона, Р.Э. Винограда, Б.Ф. Былова, В.М. Миллионщикова, М.И. Рахимбердиева, И.Н. Сергеева, Е.К. Макарова, Е.А. Барабанова, О.Г. Илларионовой, А.С. Фурсова, Ю.И. Дементьева, автора настоящего отзыва и многих других.

О. Перрон построил такую линейную однородную систему, что показатели Ляпунова этой системы неустойчивы при равномерно малых (более того экспоненциально убывающих) на положительной полуоси возмущениях коэффициентов исходной системы. Поэтому для изучения точных границ подвижности показателей Ляпунова при равномерно малых возмущениях исходной системы Р.Э. Виноградом и В.М. Миллионщиковым были введены минимальные полунепрерывные сверху мажоранты и максимальные полунепрерывные снизу миноранты показателей Ляпунова, а для изучения точных границ подвижности показателей Ляпунова при экспоненциально убывающих возмущениях автором настоящего отзыва были введены сигма-показатели и экспоненциальные показатели.

Нередко приходится рассматривать не одну фиксированную линейную однородную систему дифференциальных уравнений, а целое семейство систем, коэффициенты которых непрерывно (возможно, равномерно по независимой переменной) зависят от параметра из некоторого метрического пространства. В этом случае показатели такого семейства однородных систем можно рассматривать как функционалы, определенные на этом метрическом пространстве. Для изучения топологических свойств таких функционалов В.М. Миллионщиков предложил применить бэровскую классификацию разрывных функций. Такая классификация предполагает, прежде всего, анализ формулы для вычисления какого-либо показателя на предмет количества содержащихся в ней поточечных пределов от непрерывных функций.

В.М. Миллионщиков, в частности, доказал, что показатели Ляпунова семейства систем, коэффициенты которых непрерывно зависят от параметра из метрического пространства, рассматриваемые как функционалы, определенные на этом метрическом пространстве, принадлежат второму классу Бэра. М.И. Рахимбердиев построил такое семейство систем, коэффициенты которых непрерывно зависят от вещественного параметра, что показатели Ляпунова не являются функциями первого класса. В дальнейшем сам В.М. Миллионщиков, а также представители его школы, в частности, О.И. Морозов, В.Г. Агафонов, К.Е. Ширяев, В.Г. Феклин, В.В. Быков и Е.Е. Салов получили оценки сверху для номеров бэровских классов целого ряда ляпуновских показателей, а используя рассуждения работы М.И. Рахимбердиева, доказали непринадлежность некоторых из них первому классу Бэра.

В диссертации А. Н. Ветохина получены следующие результаты:

1) во второй главе построено такое семейство линейных однородных систем, непрерывно зависящих от параметра из некоторого полного метрического пространства, что минимальные полунепрерывные сверху мажоранты показателей Ляпунова не принадлежат первому классу Бэра;

2) во второй и третьей главах построены такие семейства линейных однородных систем, непрерывно зависящих от параметра из некоторого полного метрического пространства, что максимальные полунепрерывные снизу миноранты показателей Ляпунова, экспоненциальный показатель Изобова, а также нижние вспомогательные показатели Миллионщикова (кроме старшего) не принадлежат второму классу Бэра;

3) во второй главе построено такое семейство линейных систем, непрерывно зависящих от вещественного параметра, что множество точек полунепрерывности максимальной полунепрерывной снизу миноранты показателя Ляпунова, рассматриваемой как функционал от этого параметра, пусто;

4) в третьей главе построено такое семейство линейных однородных систем, непрерывно зависящих от параметра из некоторого полного метрического пространства, что промежуточные верхние вспомогательные показатели Миллионщикова не принадлежат третьему классу Бэра;

5) в четвертой главе доказано, что для любого семейства систем, непрерывно зависящих от параметра из некоторого метрического пространства, множество неправильности является множеством типа $G_{\delta\sigma}$, а также существуют такие полное метрическое пространство и семейство систем, непрерывно зависящих от параметра, что множество неправильности не является множеством типа $F_{\sigma\delta}$;

6) в четвертой главе доказано несовпадение двух естественных довольно тонких расширений множества правильных систем, предложенных В.М. Миллионщиковым,

7) в пятой главе доказано, что для любого семейства липшицевых отображений, непрерывно зависящих от параметра из метрического пространства, топологическая энтропия, рассматриваемая как функция на этом метрическом пространстве принадлежит второму классу Бэра, и предьявлен пример такого семейства, для которого топологическая энтропия не принадлежит первому классу Бэра.

Таким образом, в диссертации получили окончательное решение многие задачи, поставленные В.М. Миллионщиковым на Семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете, о нахождении точных классов Бэра целого ряда показателей линейных систем, непрерывно зависящих от параметра (мажоранта k -го показателя Ляпунова, миноранта k -го показателя Ляпунова, экспоненциальный показатель Изобова, нижние вспомогательные показатели Миллионщикова), а кроме того, решены поставленные еще в прошлом веке задачи о топологической энтропии и расширениях класса правильных систем.

Диссертация А.Н. Ветохина посвящена актуальным проблемам качественной теории дифференциальных систем. В ней получены новые результаты, относящиеся к теории бэровских классов ляпуновских показателей. Работа является законченным систематическим исследованием, вносящим весомый вклад в теорию ляпуновских показателей.

В диссертации используется математический аппарат качественной теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, топологии и дескриптивной теории множеств. Основной применяемый диссертантом метод — построение специальных семейств линейных однородных систем, непрерывно зависящих от параметра из некоторого полного метрического пространства, с неординарным поведением показателей, рассматриваемых как функционалы на этом пространстве.

Текст диссертации написан достаточно подробно и ясно. Все полученные в ней результаты четко сформулированы и снабжены строгими математическими доказательствами.

Основное содержание диссертации опубликовано в ведущих рецензируемых математических журналах из перечня ВАК. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации являются новыми и могут быть использованы специалистами по дифференциальным уравнениям, работающими в МГУ, МИ РАН, СПбГУ, УдГУ, КазНУ, Институте математики НАН Беларуси, БГУ, а также в других российских и зарубежных научных и педагогических центрах. Они прошли апробацию на различных международных конференциях и научных семинарах, в частности, на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

В диссертации А.Н. Ветохина «Метод неординарных семейств в теории бэровских классов показателей Ляпунова» разработан метод построения неординарных параметрических семейств, с помощью которого решена крупная математическая проблема об установлении точных бэровских классов ляпуновских показателей.

Считаю, что диссертация А.Н. Ветохина удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор, Ветохин Александр Николаевич, несомненно, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв заслушан и одобрен на заседании Отдела дифференциальных уравнений Института математики НАН Беларуси 16 апреля 2014 г.

Главный научный сотрудник
Института математики НАН Беларуси
академик НАН Беларуси

Н. А. Изобов

Н.А. Изобов

Подпись Н.А. Изобова заверяю

Зав. отделом кадров
Института математики
НАН Беларуси



Т.М. Лисовик