МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.988

Волков Борис Олегович

ЛАПЛАСИАНЫ ЛЕВИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ КОНСТРУКЦИИ

Специальность 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2014

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Смолянов Олег Георгиевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, доцент Сакбаев Всеволод Жанович МФТИ (ГУ), доцент кафедры высшей математики
	кандидат физико-математических наук, Обрезков Олег Олегович Представительство компании «ВРГ Инвестментс Лимитед», финансовый аналитик
Ведущая организация:	Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Защита диссертации состоится 30 мая 2014 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан 28 апреля 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации рассматривается связь операторов Лапласа-Леви (лапласианов Леви) различных типов с уравнениями Янга-Миллса и с квантовыми случайными процессами.

Для функционалов, определенных на $L_2(0,1)$, Полем Леви были сформулированы несколько определений оператора Лапласа-Леви (см. например [1]). Одно из определений состоит в следующем. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис $\{e_n\}$ в $L_2(0,1)$ и F — функция на $L_2(0,1)$; тогда значение лапласиана Леви Δ_L на F определяется равенством

$$\Delta_L F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\langle F''(x)e_k, e_k\rangle,$$

(т.е. значение лапласиана Леви на функции F — это среднее Чезаро вторых производных этой функции по направлениям векторов из $\{e_n\}$.) Конечно, значение $\Delta_L F$ зависит от выбора ортонормированного базиса, но для некоторых базисов такое определение эквивалентно другому определению оператора Лапласа-Леви, которое заключается в следующем. Если для всех $x, f_1, f_2 \in L_2(0,1)$ выполняется соотношение

$$\langle F''(x)f_1, f_2\rangle = \int_0^1\int_0^1 K_V(x)(t_1,t_2)f_1(t_1)f_2(t_2)dt_1dt_2 + \int_0^1 K_L(x)(t)f_1(t)f_2(t)dt,$$

где $K_V(x) \in L_2([0,1]\times[0,1])$ и $K_L(x) \in L_\infty([0,1])$, то значение лапласиана Леви на функции F определяется равенством

$$\Delta_L F(x) = \int_0^1 K_L(x)(t)dt.$$

В диссертации используется аналог первого определения (см. [2]). Соответствующий оператор, который обозначается тем же символом Δ_L, действует на пространстве функционалов, определенных на множестве кусочно-гладких

[1] P. Lévy, "Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle" , Paris, Gautier-Villars, 1951, [Москва, Наука, 1967].

[2] Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, "Формулы Фейнмана для эволюционных уравнений с лапласианом Леви на бесконечномерных многообразиях" , Доклады Академии наук, 2006, **407**, № 5, с. 583–588.

функций действительного переменного, принимающих значение в римановом многообразии. При этом доказывается, что связность (отождествляемая в теории калибровочных полей с вектором-потенциалом) в векторном расслоении, базой которого является риманово многообразие, является решением уравнений Янга-Миллса тогда и только тогда, когда порожденный этой связностью параллельный перенос U удовлетворяет уравнению $\Delta_L U = 0$, т.е. является леви-гармоническим. Кроме того, в диссертации введен даламбертиан типа Леви (ср. [3]), и рассмотрена его связь с уравнениями Янга-Миллса-Хиггса, а также с уравнениями квантовой хромодинамики.

Стоит отметить, что интерес к работам, посвященным лапласианам Леви, значительно возрос после того, как в работах [4,3] Л. Аккарди, П. Джибилиско и И. В. Волович доказали в евклидовом случае теорему о связи уравнений Янга-Миллса и лапласиана Леви, используя аналог второго определения лапласиана Леви (см. также [5]). Этот результат был обобщен на случай риманова многообразия Р. Леандром и И. В. Воловичем в работе [6]. Стоит подчеркнуть, что используемая в диссертации техника отличается от техники, используемой в упоминаемых выше работах.

Другим источником интереса к лапласиану Леви является обнаруженная в [7] и [8] его связь с квантовыми стохастическими процессами. Подход, предложенный в последней работе, был применен в [9] и [10] к обобщениям лапласиана

[3] L. Accardi, P. Gibilisco, I. V. Volovich, "Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Lévy Laplacian" , Russian Journal of Mathematical Physics, 1994, **2** № 2, pp. 235–250.

[4] L. Accardi, P. Gibilisco, I. V. Volovich, "The Lévy Laplacian and the Yang-Mills equation" , Rendiconti Lincei, 1993, **4**, №3, pp. 201–206.

[5] И. Я. Арефьева, И. В. Волович, "Функциональные высшие законы сохранения в калибровочных теориях" , в сб.: Тр. Междунар. конф. "Обобщенные функции и их применения в математической физике М.: ВЦ АН СССР, 1981.

[6] R. Leandre, I. V. Volovich, "The Stochastic Levy Laplacian and Yang-Mills equation on manifolds" , Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2001, **4**, № 2, pp. 151–172.

[7] L. Accardi, Y.-G. Lu, I. V. Volovich, "Nonlinear extensions of classical and quantum stochastic calculus and essentially infinite dimensional analysis" , in: Probability Towards 2000, Ed by L. Accardi, C. C. Heyde, Lecture Notes in Statistics **128**, pp. 1-33 (1998).

[8] Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, "Представления лапласианов Леви и связанных с ними полугрупп и гармонических функций" , Доклады Академии наук, 2002, **384**, № 3, с. 295-301.

[9] F. Gomez, O. G. Smolyanov, "Modified Lévy Laplacians" , Russian Journal of Mathematical Physics, 2008, **15**, № 1, pp. 45–50.

[10] Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, "Обобщенные лапласианы Леви и чезаровские средние" , Доклады Академии наук, 2009, **424**, № 5, с. 583–587.

Леви: к так называемым экзотическим лапласианам Леви, введеным в работе Л. Аккарди и О. Г. Смолянова [11].

Все сказанное и определяет актуальность темы диссертации.

Напомним общую схему определения линейного дифференциального оператора второго порядка из статьи [12], которая включает в себя лапласианы Гросса-Вольтерры и Леви. Пусть E — вещественное локально выпуклое пространство и E^* — его сопряженное пространство, наделенное *-слабой топологией. Пусть $L(E, E^*)$ — пространство непрерывных линейных функционалов из E в E^* и пусть S — линейный вещественный функционал, определенный на пространстве $domS \subset L(E, E^*)$. Областью определения $domD_S$ дифференциального оператора второго порядка D_S, порожденного линейным функционалом S, является пространство всех дважды дифференцируемых по Гато действительных функций на пространстве E, для которых $f''(x) \in domS$ для каждого $x \in E$. Оператор $domD_S$ действует следующим образом: $D_S f(x) = S(f''(x))$ для $x \in E,\ f \in domD_S$. Пусть E непрерывно вложено в действительное сепарабельное гильбертово пространство H так, что образ E при вложении плотен в H. Тогда $E \subset H \subset E^*$ — оснащенное гильбертово пространство. Зафиксируем в H ортонормированный базис $\{e_n\}$, состоящий из векторов пространства E. Обобщенный лапласиан Леви (или экзотический лапласиан Леви) Δ_L^l порядка $l \geq 0$ — это дифференциальный оператор второго порядка, порожденный функционалом S_l, который определяется следующим образом: $S_l(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^l} \sum_{k=1}^n (Fe_k, e_k)$ для $F \in L(E, E^*)$. Определение экзотического лапласиана Леви при $l = 0$ совпадает с определением лапласиана Гросса-Вольтерры, а при $l = 1$ совпадает с определением классического лапласиана Леви. Свойства лапласиана Леви, действующего на пространстве функций на оснащенном гильбертовом пространстве, изучались в работах Л. Аккарди, П. Розелли и О. Г. Смолянова [13],

[11] L. Accardi, O. G. Smolyanov, "On Laplacians and traces" , Conf. Semin. Univ. Bari, 1993, **250**, pp. 1–25.

[12] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, С. В. Фомин, "Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. II. Дифференциальные операторы и их преобразования Фурье" , Труды Моск. Мат. Общества, 1972, **27**,с. 249–262.

[13] Л. Аккарди, П. Розелли, О. Г. Смолянов, "Броуновское движение, порождаемое лапласианом Леви" , Математические заметки, 1993, **54**, № 5, с. 144–148.

Л. Аккарди и О. Г. Смолянова [14,15], О. О. Обрезкова [16], Х.-Х. Куо, Н. Обаты, К. Сайто [17] и многих других. Метод преобразования Фурье был впервые применен при изучении лапласиана Леви Л. Аккарди и О. Г. Смоляновым (см. например [11]).

В диссертации наряду с экзотическими лапласианами Леви рассматриваются неклассические лапласианы Леви Δ_R^L, порожденные линейным оператором $R\colon span\{e_n\colon n \in \mathbb{N}\} \to E$, т.е. дифференциальные операторы второго порядка D_{S_R}, где функционал S_R определяется следующим образом: $S_R(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(FRe_n, Re_n)$ для $F \in L(E, E^*)$. Такие лапласианы были введены в работе [18]. В диссертации доказывается, что экзотические лапласианы Δ_L^l при $l > 0$ можно представить как неклассические лапласианы, при этом используется метод работы [10].

В 1970-е годы Т. Хидой были заложены основы белошумного анализа (white noise analysis) — бесконечномерного анализа, построенного с помощью фиксированной гауссовской меры на вещественном (сепарабельном) гильбертовом пространстве. В книге [19] был введен лапласиан Леви на обобщенных белошумных функционалах. Свойства такого лапласиана Леви рассматривались в работах Т. Хиды, Х.-Х. Куо, Н. Обаты, К. Сайто и многих других. Свойства экзотических лапласианов Леви в белошумном анализе рассматривались в статьях [20,21,22] Л. Аккарди, У. С. Джи и К. Сайто, а также в

[14] Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, "Расширения пространств с цилиндрическими мерами и носители мер, порождаемых лапласианом Леви" , Математические заметки, 1998, **64**, № 4, с. 483–492.

[15] Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, "Операторы Лапласа-Леви в пространствах функций на оснащенных гильбертовых пространствах" , Математические заметки, 2002, **72**, № 1, с. 145–150.

[16] O. O. Obrezkov, "Non-Self-Adjoint extensions of the Lévy-Laplacian and the Lévy-Laplacian Equation" , Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2006, **9**, № 1, pp. 67–76.

[17] H.-H. Kuo, N. Obata, K. Saitô, Lévy-Laplacian of Generalized Functions on a Nuclear Space, Journal of Functional Analysis, 1990, **94**, pp. 74–92.

[18] Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, "Классические и неклассические лапласианы Леви" , Доклады Академии наук, 2007, **417**, № 1, с. 7–11.

[19] T. Hida, Analysis of Brownian Functionals, Carleton Math. Lecture Notes 13, Carleton University, Ottawa, 1975.

[20] L. Accardi, U. C. Ji, K. Saitô, "Exotic Laplacians and Associated Stochastic Processes" , Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2009, **12**, № 1, pp. 1–19.

[21] L. Accardi, U. C. Ji, K. Saitô, "Exotic Laplacians and Derivatives of White Noise" , Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2011, **14**, № 1, pp. 1–14.

[22] L. Accardi, U. C. Ji, K. Saitô, "The Exotic (Higher Order Lévy) Laplacians Generate the Markov Processes Given by Distribution Derivatives of White Noise" , Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2013, **16**, № 3, 1350020–1/26.

работе К. Сайто [23]. В диссертации методы работ [21,23] и работы [18] используются, чтобы получить формулы, связывающие различные неклассические лапласианы Леви. Кроме того, в диссертации доказывается, что неклассические лапласианы Леви выражаются как квадратичные функции от квантовых стохастических процессов, которые определяются как непрерывные отображения отрезка в пространство непрерывных линейных операторов из пространства пробных белошумных функционалов $\mathcal{E}$ в пространство обобщенных белошумных функционалов $\mathcal{E}^*$ (см. например [24] и имеющиеся там ссылки). Процесс уничтожения определяется как отображение $t \mapsto b_t$, где b_t — оператор дифференцирования по направлению δ_t в пространстве $\mathcal{E}$. Известно, что лапласиан Гросса-Вольтерры, который, в отличии от лапласиана Леви, является непрерывным оператором на пространстве $\mathcal{E}$, выражается в виде $\Delta_V = \int b_t^2 dt$ (см. например [25,26]). Для классического лапласиана Леви в диссертации доказывается формула $\Delta_L = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\|s-t\|<\varepsilon} b_s b_t ds dt$, которая обобщается для неклассических лапласианов Леви. В частности, доказывается, что

$$\Delta^L_{d^l} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\|s-t\|<\varepsilon} b_s^{(l)} b_t^{(l)} ds dt,$$

где d — оператор дифференцирования и $l \in \mathbb{N}$. Первое выражение приводится без доказательства в работе [7] со ссылкой на Х.-Х. Куо и в работе [8], а вторая формула впервые приводится без доказательства в работе [18].

Цель работы. Цель работы — доказать равносильность уравнения Лапласа для лапласиана Леви, определенного с помощью среднего Чезаро, и уравнений Янга-Миллса для калибровочных полей, исследовать связи лапласианов Леви и квантовых стохастических процессов, исследовать связи между лапласианами Леви.

---

[23]K. Saitô, "Infinite Dimensional Laplacians Associated with Derivatives of White Noise", Quantum Probability and Related Topics, 2013, pp. 233-248.

[24]N. Obata, "Quadratic Quantum White Noises and Lévy Laplacian", Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications, 2001, **47**, № 4, pp. 2437–2448.

[25]I. Kubo, S. Takenaka, "Calculus on Gaussian white noise, IV", Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 1982, **58**, № 5, 186–189

[26]N. Obata, "White Noise Calculus and Fock Space", Lect. Notes in Math. Vol. 1577, Springer(Verlag), 1994.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Доказано, что связность в векторном расслоении, базой которого является риманово многообразие, удовлетворяет уравнениям Янга-Миллса тогда и только тогда, когда порожденный связностью параллельный перенос является решением уравнения Лапласа для лапласиана Леви, определенного с помощью среднего Чезаро.
2. Получены представления лапласианов Леви как квадратичных функций от квантовых стохастических процессов.
3. Доказаны формулы, связывающие лапласианы Леви различных типов.

Основные методы исследования. При получении результатов диссертационной работы были использованы методы бесконечномерного анализа и ряд специальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность работы. Диссертация носит теоретический характер. Кроме того, результаты диссертации могут быть использованы в математической физике при изучении калибровочных полей.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях:

- Семинар механико-математического факультета МГУ «Бесконечномерный анализ и математическая физика» под руководством д.ф.-м.н. проф. О. Г. Смолянова и д.ф.-м.н. проф. Е. Т. Шавгулидзе (2007–2013 гг., неоднократно)
- XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (2010 г.)
- XIX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (2012 г.)
- XX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (2013 г.)

- Семинар «Динамические системы в задачах современной математической и теоретической физики» в МИАН им. В. А. Стеклова под руководством академика В. В. Козлова, член-корр. РАН И. В. Воловича, д.ф.-м.н. С. В. Козырева, к.ф.-м.н. А. С. Трушечкина (2013 г.)
- Международная конференция «QP 34 — Quantum Probability and Related Topics» (Москва, МИАН им. В. А. Стеклова, 2013 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах, из которых 3 опубликованы в журналах из перечня ВАК. Список работ приведен в конце автореферата. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Поддержка. Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для господдержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых, в ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова» по договору №11.G34.31.0054.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав и списка литературы из 50 наименований. Общий объем диссертации — 94 страницы.

Содержание работы.

Во **введении** проводится обзор работ, связанных с темой диссертации, и кратко излагается основное содержание диссертации.

В **первой главе** даются определения лапласианов Леви и доказываются формулы, связывающие различные лапласианы Леви. Обобщенным средним Чезаро порядка $l \geq 0$ числовой последовательности $g \in \mathbb{C}^\infty$ будем называть число $C_l(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^l}(\sum_{k=1}^n g(k))$, если этот предел существует. Пусть E — вещественное локально выпуклое пространство, непрерывно вложенное в вещественное сепарабельное гильбертово пространство H так, что образ E при вложении плотен в H. $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H, состоящий из векторов пространства E. $C^2(E,\mathbb{R})$ — пространство дважды дифференцируемых по Гато действительных функций на E. Пусть при $l \geq 0$ пространство

$dom\Delta_L^l$ — это подпространство $C^2(E,\mathbb{R})$, состоящее из функций f, для которых при каждом $x\in E$ существует обобщенное среднее $C_l(\langle f''(x)e_k,e_k\rangle)$.

Определение. *Экзотический (или обобщенный) лапласиан Леви порядка $l\geq 0$ — это линейное отображение из $dom\Delta_L^l$ в пространство функций на E, определенное так: $\Delta_L^l f(x)=C_l(\langle f''(x)e_k,e_k\rangle)$.*

При $l=1$ определение совпадает с определением классического лапласиана Леви, который мы будем обозначать символом Δ_L, при $l=0$ определение совпадает с определением лапласиана Гросса-Вольтерры.

Пусть R — линейный оператор, действующий из $span\{e_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ в E. Пусть $dom\Delta_R^L$ — это подпространство $C^2(E,\mathbb{R})$, состоящее из функций f, для которых существует $C_1((\langle f''(x)Re_n,Re_n\rangle))$ при каждом $x\in E$.

Определение. *Неклассический лапласиан Леви, порожденный оператором R, — это линейное отображение из $Dom\Delta_R^L$ в пространство функций на E, определенное так: $\Delta_R^L f(x)=C_1((\langle f''(x)Re_n,Re_n\rangle))$.*

Тогда $\Delta_L=\Delta_I^L$, где I — тождественный оператор. Пусть для любого $l\in\mathbb{R}$ оператор N^l на $span\{e_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ определен следующим образом: $N^l e_n=n^l e_n$. Выполняется

Теорема. *Если $l\in\mathbb{R}$ и $l>-1$, то $\Delta^L_{N^{-\frac{l}{2}}}=(l+1)\Delta_L^{l+1}$.*

Пусть $H_{\mathbb{C}}=L_2([0,1],\mathbb{C})$. Обозначим скалярное произведение на этом пространстве символом $(\cdot,\cdot)_0$ и соответствующую гильбертову норму символом $|\cdot|_0$. Зафиксируем в $H_{\mathbb{C}}$ ортонормированный базис $\{e_n\}$, состоящий из тригонометрических функций: $e_1=1$, $e_{2k}(t)=\sqrt{2}\sin 2k\pi t$ и $e_{2k+1}(t)=\sqrt{2}\cos 2k\pi t$ при $k\in\mathbb{N}$. Пусть A — самосопряженный оператор в $H_{\mathbb{C}}$, определенный следующим образом: $A\xi=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k(\xi,e_k)_0e_k,\ \xi\in domA$, где $1<\lambda_1\leq\lambda_2\dots$ и $\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^{-2}<\infty$, а $domA=\{\xi\in H_{\mathbb{C}}\colon \sum_{k=1}^\infty\lambda_k^2(\xi,e_k)_0(e_k,\xi)_0<\infty\}$. При $p\geq 0$ область определения $E_p=\{\xi\in H_{\mathbb{C}}\colon \sum_{k=1}^\infty\lambda_k^{2p}(\xi,e_k)_0(e_k,\xi)_0<\infty\}$ оператора A^p является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_p=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^{2p}(\cdot,e_k)_0(e_k,\cdot)_0$ и соответствующей гильбертовой нормой $|\cdot|_p$. При $p\geq 0$ пусть E_{-p} — пополнение $H_{\mathbb{C}}$ по гильбертовой норме $|\cdot|_{-p}=|A^{-p}\cdot|_0$, порожденной скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{-p}=(A^{-p}\cdot,A^{-p}\cdot)_0$. Мы получаем оснащенное гильбертово пространство: $E_{\mathbb{C}} = \operatorname{proj}\lim_{p\to+\infty} E_p \subset H_{\mathbb{C}} \subset \operatorname{ind}\lim_{p\to+\infty} E_{-p} = E_{\mathbb{C}}^*$.

Бозонное фоковское пространство над гильбертовым пространством E_p определяется так:

$$\Gamma(E_p) = \{\phi = (f_n)_{n=0}^{\infty};\ f_n \in E_p^{\widehat{\otimes} n}, \|\phi\|_p^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n!|f_n|_p^2 < \infty\}.$$

Мы получаем оснащенное гильбертово пространство:

$$\mathcal{E} = \operatorname*{proj\,lim}_{p\to+\infty} \Gamma(E_p) \subset \Gamma(H) \subset \operatorname*{ind\,lim}_{p\to+\infty} \Gamma(E_{-p}) = \mathcal{E}^*.$$

Двойственность между пространствами $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$ обозначим символом $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$.

Аналогично с помощью сужения оператора A на $H_{\mathbb{R}} = L_2([0,1],\mathbb{R})$ получается оснащенное гильбертово пространство: $E_{\mathbb{R}} \subset H_{\mathbb{R}} = L_2([0,1],\mathbb{R}) \subset E_{\mathbb{R}}^*$. По теореме Минлоса существует вероятностная мера μ_I на σ-алгебре $E_{\mathbb{R}}$-цилиндрических подмножеств $E_{\mathbb{R}}^*$ такая, что $\widetilde{\mu_I}(\xi) = e^{-\frac{(\xi,\xi)_0}{2}}$ (мера μ_I является гауссовской). Существует унитарный изоморфизм Винера-Ито-Сигала между $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ и $L_2(E_{\mathbb{R}}^*, \mu_I, \mathbb{C})$, однозначно задающийся значением изоморфизма на когерентных состояниях:

$$\psi_\xi = (1, \xi, \frac{\xi^{\otimes 2}}{2}, \ldots, \frac{\xi^{\otimes n}}{n!}, \ldots) \longleftrightarrow \psi_\xi = e^{\langle x,\xi\rangle - \langle \xi,\xi\rangle/2}, \xi \in E_{\mathbb{C}}.$$

Тогда $\mathcal{E} \subset L_2(E_{\mathbb{R}}^*, \mu_I, \mathbb{C}) \subset \mathcal{E}^*$ называется пространством Хиды-Кубо-Такенаки, изоморфным пространству Фока над $E_{\mathbb{C}} \subset H_{\mathbb{C}} \subset E_{\mathbb{C}}^*$. $\mathcal{E}$ — пространство белошумных пробных функционалов и $\mathcal{E}^*$ — пространство белошумных обобщенных функционалов.

S-преобразование обобщенного функционала $\Phi \in \mathcal{E}^*$ — это функция $S\Phi\colon E_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, определенная так: $S\Phi(\xi) = \langle\langle \Phi, \psi_\xi \rangle\rangle$, $\xi \in E_{\mathbb{C}}$. Комплекснозначную функцию, определенную на пространстве $E_{\mathbb{C}}$ и являющуюся S-преобразованием некоторого белошумного обобщенного функционала, называют U-функционалом.

С помощью S-преобразования определяются неклассические и экзотические лапласианы Леви и экзотические лапласианы Леви на пространстве обобщенных функционалов $\mathcal{E}^*$.

Определение. *Обобщенный функционал* $\Phi \in \mathcal{E}^*$ *лежит в области определения* $Dom\Delta_R^L$ *неклассического лапласиана Леви* Δ_R^L*, порожденного линейным оператором* $R\colon span\{e_n\colon n \in \mathbb{N}\} \to E_{\mathbb{C}}$*, тогда и только тогда, когда для всех* $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ *существует* $C_1(((\langle S\Phi''(\xi), Re_n \otimes Re_n\rangle))$ *и функция* $E_{\mathbb{C}} \ni \xi \mapsto C_1(((\langle S\Phi''(\xi), Re_n \otimes Re_n\rangle))$ *является* U*-функционалом. Если* $\Phi \in Dom\Delta_R^L$*, то* $\Delta_R^L\Phi$ *— это такой обобщенный функционал из* $\mathcal{E}^*$*, что для всех* $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ *выполняется* $S\Delta_R^L\Phi(\xi) = C_1(((\langle S\Phi''(\xi), Re_n \otimes Re_n\rangle)))$.

Аналогично определяются экзотические лапласианы Леви Δ_L^l $(l \geq 0)$ на пространстве обобщенных функционалов $\mathcal{E}^*$.

Пусть оператор дифференцирования d — непрерывный оператор на $E_{\mathbb{C}}$. Обозначим символом E_d замыкание $span\{e_n\colon n \in \mathbb{N}, n > 1\}$ в $E_{\mathbb{C}}$. Пусть τ_0' — оператор, обратный оператору d на пространстве E_d. Пусть $\tau_\lambda \in L(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}})$ такой, что $\tau_\lambda(e_1) = \lambda e_1$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ и ограничение τ_λ на E_d совпадает с τ_0'. Будем обозначать $\Delta_L^{d,l} = \Delta_{d^l}^L$ и $\Delta_L^{d,-l} = \Delta_{\tau_\lambda^l}^L$ при $l \in \mathbb{Z}_+$.

Предложение. *Если* $l \in \mathbb{N}$*, то* $\pi^{2l}\Delta_L^{d,-l} = (2l+1)\Delta_L^{2l+1}$.

Пусть $T \in L(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}})$, тогда его второе квантование — это оператор $\Gamma(T) \in L(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, однозначно определяемый так: $\Gamma(T)\psi_\xi = \psi_{T\xi}$. Выполняется следующая теорема о связи между неклассическими лапласианами Леви:

Теорема. *Пусть* $l \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$. *Пусть* $\Phi \in Dom\Delta_L^{d,l}$*, тогда* $\Delta_L^{d,(l-k)}\Gamma(d^k)^*\Phi = \Gamma(d^k)^*\Delta_L^{d,l}\Phi$*, и* $\Delta_L^{d,(l+k)}\Gamma(\tau_\lambda^k)^*\Phi = \Gamma(\tau_\lambda^k)^*\Delta_L^{d,l}\Phi$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Во **второй главе** рассматриваются связи между семейством неклассических лапласианов Леви и квантовыми случайными процессами. Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, символом $L^b(X, Y)$ обозначается пространство линейных непрерывных операторов из X в Y, наделенное топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах. Будем называть непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в пространство $\mathcal{E}^*$ стохастическим процессом (в смысле белошумного анализа), а непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в $L^b(\mathcal{E}, \mathcal{E}^*)$ квантовым стохастическим процессом.

Символом $b(\zeta)$ обозначается оператор дифференцирования в $\mathcal{E}$ по направлению $\zeta \in E_{\mathbb{R}}^*$:

$$b(\zeta)\phi(\xi) = \lim_{t\to 0}(\phi(\xi + t\zeta) - \phi(\xi))/t, \xi \in E_{\mathbb{R}}^*, \phi \in \mathcal{E}.$$

Отображение $t \mapsto b_t = b(\delta_t)$ — квантовый случайный процесс, который называется процессом уничтожения.

Известно, если $\phi, \varphi \in \mathcal{E}$, то $\eta_{\phi,\varphi}(s,t) = \langle\langle b_s b_t \phi, \varphi\rangle\rangle \in E_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}$. Если $\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes 2})^*$, то существует единственный непрерывный линейный оператор $\Xi_{0,2}(\kappa)$ из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}^*$ такой, что $\langle\langle \Xi_{0,2}(\kappa)\phi, \varphi\rangle\rangle = \langle \kappa, \eta_{\phi,\varphi}\rangle$. Если $\kappa \in E_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}$, то $\Xi_{0,2}(\kappa)$ продолжается до непрерывного оператора из $\mathcal{E}^*$ в $\mathcal{E}^*$. Это продолжение мы будем обозначать символом $\widetilde{\Xi}_{0,2}(\kappa)$.

Если оператор дифференцирования d — непрерывный оператор на $E_{\mathbb{C}}$, то отображения $t \mapsto b_t^{(l)}$ и $t \mapsto b((\tau_0^*)^l \delta_t)$ являются квантовыми стохастическими процессами.

Пусть $\theta(\varepsilon) \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes 2})^*$ такой, что для $f, g \in E_{\mathbb{C}}$ выполняется $\langle \theta(\varepsilon), f \otimes g\rangle = \int_{\|s-t\|_T<\varepsilon} f(s)g(t)dsdt$, где $\|t\|_T = \min_{k\in\mathbb{Z}} |t-k|$. Пусть $\theta^l(\varepsilon) = (d^* \otimes d^*)^l \theta(\varepsilon)$ при $l \in \mathbb{Z}_+$. При $l \in \mathbb{Z}_+$ для всех $\phi, \varphi \in \mathcal{E}$ выполняется

$$\langle\langle \Xi_{0,2}(\theta^l(\varepsilon))\phi, \varphi\rangle\rangle = \int\limits_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \langle\langle b_s^{(l)} b_t^{(l)} \phi, \varphi\rangle\rangle dsdt.$$

Пусть $\theta^l(\varepsilon) = (\tau_0^* \otimes \tau_0^*)^{-l}\theta(\varepsilon)$ при $l \in \mathbb{Z}_-$. При $l \in \mathbb{Z}_-$ для всех $\phi, \varphi \in \mathcal{E}$

$$\langle\langle \Xi_{0,2}(\theta^l(\varepsilon))\phi, \varphi\rangle\rangle = \int\limits_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \langle\langle b((\tau_0^*)^{-l}\delta_t) b((\tau_0^*)^{-l}\delta_s)\phi, \varphi\rangle\rangle dsdt.$$

Для всех $l \in \mathbb{Z}$ пусть $\theta_n^l(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \theta^l(\varepsilon), e_i \otimes e_j\rangle e_i \otimes e_j$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \Xi_{0,2}(\theta_n^l(\varepsilon)) = \Xi_{0,2}(\theta^l(\varepsilon))$ в $L^b(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, причем каждый $\Xi_{0,2}(\theta_n^l(\varepsilon))$ продолжается до непрерывного оператора $\widetilde{\Xi}_{0,2}(\theta_n^l(\varepsilon))$ в $\mathcal{E}^*$.

Рассмотрим на пространстве $\mathcal{E}^*$ топологию σ_1, порожденную семейством норм $\|\cdot\|_\xi = |S(\cdot)(\xi)|$. Пусть $\widetilde{(\mathcal{E}^*, \sigma_1)}$ — пополнение $(\mathcal{E}^*, \sigma_1)$. Пусть $\mathcal{G}$ — секвенциальное замыкание $\mathcal{E}^*$ в $\widetilde{(\mathcal{E}^*, \sigma_1)}$.

Теорема. *Для $l \in \mathbb{Z}$ пусть $\Phi \in \mathcal{E}^*$ такое, что для каждого $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ ограничение $S\Phi''(\xi)$ на $E_d \otimes E_d$ представляется в виде*

$$\langle S\Phi''(\xi), \zeta_1 \otimes \eta_1 \rangle = \int\limits_{[0,1]\times[0,1]} (\tau_0')^l \zeta_1(t) (\tau_0')^l \eta_1(s) d\mu_\xi(s,t),$$

где $\zeta_1, \eta_1 \in E_d$ и μ_ξ — борелевская комплекснозначная мера на $[0,1]\times[0,1]$. Пусть $\Phi \in Dom\Delta_L^{d,l}$, тогда $\Delta_L^{d,l}\Phi = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \widetilde{\widetilde{\Xi}}_{0,2}(\theta_n^l(\varepsilon))\Phi$, где сходимость понимается как сходимость в $\mathcal{G}$.

Третья глава посвящена связи лапласиана Леви с калибровочными полями. Пусть (M,g) — это C^3-гладкое связное риманово многообразие размерности d с C^3-гладкой метрикой g. Зафиксируем точку x на M. Пусть $PC^1_x([0,1],M)$ — множество кусочно C^1-гладких функций из отрезка $[0,1]$ в M, значение которых в точке 0 совпадает с x (множество кривых с началом в точке x). Для фиксированной кривой $\gamma \in PC^1_x([0,1],M)$ и касательного вектора T в точке x и любого $t \in [0,1]$, пусть T_t обозначает параллельный перенос с помощью связности Леви-Чивиты вектора T вдоль кривой $\gamma_{[0,t]}$ (символом $\gamma_{[s,t]}$ мы будем обозначать ограничение кривой γ на отрезок $[s,t] \subset [0,1]$).

Пусть символ $\varphi(\tau, y, Y)$ обозначает геодезическую, параметризованную τ, чья начальная точка совпадает с $y \in M$, а направление в начальной точке совпадает с $Y \in T_yM$. Для $\tau < 0$ мы считаем, что $\varphi(\tau,y,Y) = \varphi(-\tau, y, -Y)$. Если Y — нормированный вектор, то τ — натуральный параметр.

Символом $PC^1_{x,W}([0,1],M)$ будем обозначать множество кусочно C^1-гладких кривых с началом в точке x и концом, принадлежащим открытому множеству $W \subset M$. Для фиксированной кривой $\gamma \in PC^1_{x,W}([0,1],M)$, для касательного вектора T в точке x, для кусочно C^1-гладкой действительной функции f на $[0,1]$ такой, что $f(0) = 0$, и для каждого $\alpha \in (-\delta,\delta)$ для некоторого $\delta > 0$ кривая $\gamma_\alpha^{T,f} \in PC^1_{x,W}([0,1],M)$ определяется следующим образом: $\gamma_\alpha^{T,f}(t) = \varphi(\alpha f(t), \gamma_t, T_t)$. Тогда для каждой функции F с областью определения $PC^1_{x,W}([0,1],M)$ и подходящей областью значений символ $F^\gamma_{T,f}(\alpha)$ обозначает функцию действительного аргумента $\alpha \in (-\delta,\delta)$, определенную так: $F^\gamma_{T,f}(\alpha) = F(\gamma_\alpha^{T,f})$.

Зафиксируем ортонормированный базис $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_d\}$ для касательного пространства к M в точке x. Зафиксируем в $L_2(0,1)$ ортонормированный базис $\{e_n\}$. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $e_n \in PC^1([0,1],\mathbb{R})$ и $e_n(0) = 0$. Будем обозначать $F^{\gamma}_{Z_i,e_n}$ символом $F^{\gamma}_{i,n}$.

Символом M_N будем обозначать пространство комплексных $N \times N$ матриц. Пусть $\mathfrak{F}(PC^1_{x,W}([0,1],M), M_N)$ — пространство всех M_N-значных функций на $PC^1_{x,W}([0,1],M)$.

Определение. *Лапласиан Леви — это линейное отображение*

$$\Delta_L : dom\Delta_L \to \mathfrak{F}(PC^1_{x,W}([0,1],M), M_N),$$

определенное формулой

$$\Delta_L F(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{dn} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} (F^{\gamma}_{i,k})''(0), \tag{1}$$

где $dom\Delta_L$ — векторное пространство всех функций из $\mathfrak{F}(PC^1_{x,W}([0,1],M), M_N)$, для которых правая часть (1) существует.

Определение (П. Леви). *Ортонормированный базис $\{e_n\}$ в $L_2(0,1)$ называется слабо равномерно плотным, если $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 h(t)(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e_k^2(t)-1)dt = 0$ для любой функции $h \in L_\infty[0,1]$.*

Примером слабо равномерно плотного базиса в $L_2(0,1)$ является последовательность $e_n(t) = \sqrt{2}\sin n\pi t$.

Пусть V — комплексное векторное пространство размерности N, G — группа Ли, реализованная как замкнутая подгруппа $GL(V)$. Пусть $\{W_a\}_{a\in\Lambda}$ — открытое покрытие M и $\psi_{ab}\colon W_a \cap W_b \to G$ — C^3-гладкие функции перехода такие, что

$$\psi_{ac}(y) = \psi_{ab}(y)\psi_{bc}(y),$$

где $y \in W_a \cap W_b \cap W_c$. Функции перехода задают главное расслоение $P(M,G)$ и векторное расслоение $E(M,V,P,G)$ с базой M, слоем V и структурной группой Ли G, ассоциированное с главным расслоением $P(M,G)$.

Мы можем определить связность на $E(M,V,P,G)$ как семейство $Lie(G)$-значных 1-форм $\{A^a(y)\}_{a\in\Lambda}$ на M таких, что $A^a(y) = A^a_\mu(y)dy^\mu$ определены на W_a, причем для $y \in W_a \cap W_b$ выполняется

$$A^a_\mu(y) = \psi_{ab}(y) A^b_\mu(y) \psi^{-1}_{ab}(y) - \frac{\partial \psi_{ab}(y)}{\partial y^\mu} \psi^{-1}_{ab}(y).$$

Тогда тензор кривизны определяется как семейство $Lie(G)$-значных 2-форм $\{F^a(y)\}_{a\in\Lambda}$ таких, что $F^a(y) = \sum_{\mu<\nu} F^a_{\mu\nu}(y) dy^\mu \wedge dy^\nu$ определена на W_a и $F^a_{\mu\nu}(y) = \partial_\mu A^a_\nu(y) - \partial_\nu A^a_\mu(y) + [A^a_\mu(y), A^a_\nu(y)]$.

Для кривой $\gamma \in PC^1([0,1], M)$ пусть $\gamma([p,r]) \subset W_a$. Тогда мы можем определить G-значную функцию $U^{a,a}_{t,s}(\gamma)$ на $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : r \geq t \geq s \geq p\}$ как сумму ряда

$$U^{a,a}_{t,s}(\gamma) = I_N + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta^k_{s,t}} d\tau_1 \dots d\tau_k \left(-A^a_\mu(\gamma_{\tau_k})\gamma'^\mu_{\tau_k}\right) \dots \left(-A^a_\mu(\gamma_{\tau_1}))\gamma'^\mu_{\tau_1}\right),$$

где $\Delta^k_{s,t} := \{(\tau_1, \dots, \tau_k) \in \mathbb{R}^k : s \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_k \leq t\}$. Для кривой $\gamma \in PC^1([0,1], M)$ рассмотрим разбиение $s = t_1 < t_2 < \dots < t_m = t$ отрезка $[s,t]$ такое, что $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset W_{a_i}$ для всех $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Параллельный перенос $U^{a_{m-1},a_1}_{t,s}(\gamma)$ вдоль $\gamma_{[s,t]}$ определяется следующим образом:

$$U^{a_{m-1},a_1}_{t,s}(\gamma) = U^{a_{m-1},a_{m-1}}_{t_m,t_{m-1}}(\gamma) \psi_{a_{m-1}a_{m-2}}(\gamma_{t_{m-1}}) \dots U^{a_2,a_2}_{t_3,t_2}(\gamma) \psi_{a_2 a_1}(\gamma_{t_2}) U^{a_1,a_1}_{t_2,t_1}(\gamma).$$

Значение $U^{a_{m-1},a_1}_{t,s}(\gamma)$ не зависит от выбора разбиения. Пусть $a_x \in \Lambda$ такой, что $x \in W_{a_x}$. Тогда $\gamma \mapsto U^{a,a_x}_{1,0}(\gamma)$ — корректно определенный функционал на $PC^1_{x,W_a}([0,1], M)$.

В локальных координатах ковариантные производные тензора кривизны ∇F определяются следующим образом:

$$\nabla_\lambda F_{\mu\nu} = \partial_\lambda F_{\mu\nu} + [A_\lambda, F_{\mu\nu}] - F_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - F_{\kappa\nu}\Gamma^\kappa_{\lambda\mu},$$

где $\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}$ — символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты на (M, g).

Теорема. *Пусть все A_μ — C^2-гладкие функции. Пусть $\{e_n\}$ — слабо равномерно плотный базис в $L_2(0,1)$ такой, что все элементы $\{e_n\}$ принадлежат пространству $PC^1([0,1], \mathbb{R})$, причем для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $e_n(0) = e_n(1) = 0$. Следующие два утверждения равносильны:*

1. *связность A на M является решением уравнений Янга-Миллса:*

$$\nabla_\mu F^\mu_\nu = 0;$$

2. для каждого $a \in \Lambda$ функция $PC^1_{x,W_a}([0,1],M) \ni \gamma \mapsto U^{a,a_x}_{1,0}(\gamma)$ (параллельный перенос вдоль кривых из $PC^1_{x,W_a}([0,1],M)$) является решением уравнения Лапласа-Леви:

$$\Delta_L U^{a,a_x}_{1,0} = 0.$$

Пусть $W^1_2([0,1],\mathbb{R}^d)$ — пространство абсолютно непрерывных функций, принимающих значение в $\mathbb{R}^d$ и обладающих квадратично интегрируемой производной. Пусть $H = \{\gamma \in W^1_2([0,1],\mathbb{R}^d)\colon \gamma(0) = 0\}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением: $(g_1,g_2)_H = \int_0^1 (g_1'(r), g_2'(r))_{\mathbb{R}^d} dr$. Пусть $\{p_i\}_{i=1}^d$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. Выберем в H следующий ортонормированный базис:

$$e_n(r) = p_{n-d\lfloor\frac{n-1}{d}\rfloor} f_{\lfloor\frac{n-1}{d}\rfloor}(r),$$

где $f_0(r) = r$, $f_j(r) = \frac{\sqrt{2}}{\pi j}\sin(\pi j r)$ для $j \in \mathbb{N}$. Ниже считается, что связность задана на $\mathbb{R}^d$ как $gl(N)$-значная C^2-гладкая 1-форма $A_\mu(x)dx^\mu$, определенная на всем $\mathbb{R}^d$. Определение параллельного переноса $U_{t,s}(\gamma)$ вдоль $\gamma_{[s,t]}$ естественным образом переносится на случай $\gamma \in H$.

Пусть оператор $N_1\colon span\{e_n\colon n \in \mathbb{N}\} \to H$ определен следующим образом: $N_1 e_n = \pi\lfloor\frac{n-1}{d}\rfloor e_n$.

Теорема. *Функция $H \ni \gamma \mapsto U_{1,0}(\gamma)$ (параллельный перенос вдоль кривых из H) лежит в области определения оператора $\Delta^L_{N^1}$. При этом выполняется:*

$$d\Delta^L_{N_1} U_{1,0}(\gamma) = \frac{\pi^2}{d}\Delta^L_{N^1} U_{1,0}(\gamma) = \int_0^1 U_{1,r}(\gamma)(-\nabla_\mu F^\mu_\nu(\gamma_r)\gamma_r'^\nu)U_{r,0}(\gamma)dr.$$

В параграфе 3.4 диссертации вводится неклассический даламбертиан Леви, соответствующий лапласиану $d\Delta^L_{N_1}$, и выводится система бесконечномерных уравнений, содержащая такой даламбертиан, эквивалентная уравнениям квантовой хромодинамики. В параграфе 3.5 выводится система бесконечномерных уравнений, содержащая такой даламбертиан, эквивалентная уравнениям Янга-Миллса-Хиггса.

В заключении выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Олегу Георгиевичу Смолянову за постановку задач, постоянное внимание к работе и поддержку.

Работы автора по теме диссертации

[1] B. O. Volkov, *Lévy-Laplacian and the Gauge Fields*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2012, **15**, № 4, 1250027-1/19.

[2] B. O. Volkov, *Quantum Probability and Lévy-Laplacians*, Russian Journal of Mathematical Physics, 2013, **20**, № 2, pp. 254–256.

[3] B. O. Volkov, *Hierarchy of Lévy-Laplacians and Quantum Stochastic Processes*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2013, **16**, № 4, 1350027-1/20.

[4] Б. О. Волков, *Лапласианы Леви и калибровочные поля*, XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Тезисы докладов, 1–4, МАКС Пресс, Москва, 2010.

[5] Б. О. Волков, *Квантовая вероятность и иерархия лапласианов Леви*, XIX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Тезисы докладов, 1, МАКС Пресс, Москва, 2012.

[6] Б. О. Волков, *Неклассический лапласиан Леви и калибровочные поля*, XX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Тезисы докладов, 1, МАКС Пресс, Москва, 2013.