Отзыв

официального оппонента на диссертационную работу Волкова Бориса Олеговича "Лапласианы Леви и связанные с ними конструкции" , представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация Б.О. Волкова посвящена изучению таких дифференциальных операторов, действующих в пространствах функций, заданных на бесконечномерных гильбертовых пространствах, как лапласианы Леви и даламбертианы Леви. С помощью определенных в диссертации лапласианов Леви получено представление решений уравнений Янга-Миллса на римановом многообразии, а с помощью даламбертианов Леви – представление решений уравнений калибровочных полей (уравнения Янга-Миллса-Хиггса и уравнений хромодинамики) на пространстве Минковского. В диссертации проведена классификация различных определений лапласиана Леви и исследована связь этой классификации с квантовыми стохастическими процессами. Таким образом, тема исследования актуальна и представляет интерес как для бесконечномерного анализа и теории дифференциальных уравнений в частных производных для функций бесконечномерного аргумента, так и для квантовой теории поля и теории квантовых случайных процессов.

В первой главе диссертации представлен единый подход к определению лапласианов Леви с помощью чезаровских средних от вторых производных функции по направлению базисных векторов некоторого ортонормированного базиса или по системе векторов, полученных из этого базиса посредством некоторых линейных преобразований. Дана классификация различных определений лапласиана Леви с помощью усреднения по Чезаро вторых производных функции по направлениям базисных векторов некоторого фиксированного базиса гильбертова пространства. С помощью анализа асимптотического поведения числовых последовательностей и их чезаровских средних показано, что класс лапласианов Леви, определяемых с помощью обобщенного усреднения по Чезаро порядка $l > 0$, строго вкладывается в класс лапласианов Леви, в которых обычное усреднение по Чезаро вторых производных функции по направлениям базисных векторов сочетается с действием линейного преобразования на систему базисных векторов, по направлению которых вычисляются значения вторых производных. При этом для всех $l > 0$ найдены формулы для линейных преобразований, задающих лапласианы Леви с обобщенным усреднением по Чезаро порядка l. Получены аналоги этих результатов для случай лапласианов Леви на пространстве обобщенных функционалов на оснащенном гильбертовом пространстве, применяемых при исследовании квантового белого шума в работах Аккарди, Смолянова и ряда других специалистов.

Во второй главе диссертации исследуется связь между классом лапласианов Леви, параметризованным множеством линейных преобразований системы базисных векторов, и квантовыми случайными процессами. Тем самым, дается развитие теории квантовых случайных процессов и квантовой теории поля. Получены условия, при которых лапласиан Леви, определенный через чезаровские средние, допускает представление интегралом по мере от квадратичного функционала от квантовых случайных процессов.

В диссертации впервые доказаны формулы, задающие представление лапласиана Леви с помощью предельного перехода для регуляризации сингулярного интегрального квадратичного функционала от квантового случайного процесса. Кроме того, доказаны аналогичные представления для неклассических лапласианов Леви, соответствующих действию степеней оператора дифференцирования на базисные векторы. Последние результаты дают доказательства утверждений, анонсированных в работе Аккарди, Лу и Воловича, а также в статьях Аккарди и Смолянова.

Третья глава посвящена приложениям лапласиана Леви к описанию калибровочных полей на гладком римановом многообразии, а также даламбертиана Леви к описанию динамики калибровочных полей в пространстве Минковского. В диссертации определяется лапласиан Леви на пространстве матричнозначных функций на совокупности непрерывных кусочно непрерывно дифференцируемых кривых на римановом многообразии. Как и в подходе Леви, определен класс базисов гильбертова пространства функций, заданных на многообразии, для которого имеет место независимость лапласиана от выбора базиса из данного класса. Установлено, что связность на римановом многообразии является решением однородных уравнений Янга-Миллса тогда и только тогда, когда матричнозначная функция, сопоставляющая каждой кусочно-гладкой кривой на многообразии оператор параллельного переноса вдоль этой кривой в соответствии со связностью, является решением уравнения Лапласа-Леви с лапласианом, определенным с помощью среднего Чезаро. Аналогичная взаимно однозначная связь установлена между решениями неоднородных уравнений Янга-Милсса с источником и решениями неоднородного уравнения Пуассона-Леви. Ранее подобная связь уравнений Янга-Миллса с уравнением Лапласа-Леви была установлена в работах Аккарди, Воловича, Джибилиско и Леандра, но с использованием представления лапласиана Леви интегральным функционалом, определяемым вторыми производными функции. Таким образом проявляется единство в определении лапласиана Леви посредством среднего Чезаро и с помощью интегрального представления.

Неклассический даламбертиан Леви на дважды дифференцируемых по Гато матричнозначных функциях на гильбертовом пространстве кривых в пространстве Минковского с квадратично интегрируемой скоростью определен с помощью сочетания чезаровского усреднения с линейными преобразованиями псевдоортонормированного базиса гильбертова пространства кривых. Доказана эквивалентность системы уравнений квантовой хромодинамики для полей и источников в пространстве Минковского системе из двух бесконечномерных уравнений (уравнения Дирака и уравнения Даламбера с введенным даламбертианом) для двух матричнозначных функций на гильбертовом пространстве кривых, значения которых на такой кривой определяются оператором параллельного переноса вдоль кривой при заданной связности и полем источников. Подобный результат установлен и для представления решения системы уравнений Янга-Миллса-Хиггса системой из двух бесконечномерных уравнений для двух матричнозначных функций на гильбертовом пространстве кривых – установлена эквивалентность системы уравнений Янга-Миллса-Хиггса системе бесконечномерных уравнений, одной из компонент которой является уравнение с введенным даламбертианом Леви.

Проводимые в диссертации Б.О. Волкова исследования ставят такие интересные

вопросы, как изучение самосопряженности и спектральных свойств лапласиана Леви, применение различных методов обобщенного усреднения к определению лапласианов.

В работе имеются некоторые недостатки, носящие редакционный характер. Имеется незначительная путаница в обозначениях. Например, символ σ_1 в формуле, определяющей функцию Ψ на стр. 86, не определен и его смысл проясняется из контекста. Несколько неудобным обстоятельством является тот факт, что исследуемые объекты не определяются в утверждениях типа "Теорема"или "Лемма" , а распределены по тексту, предшествующему формулировке леммы или теоремы. Так, в теореме 7 на стр. 69 без каких-либо упоминаний используется символ для карт, покрывающих риманово многообразие, определенный на стр. 46.

Такие недостатки легко устранимы и нисколько не снижают ценности полученных в диссертации результатов.

В диссертации развито новое направление в теории дифференциальных уравнений для функций, заданных на бесконечномерном пространстве, получен ряд новых содержательных результатов в теории калибровочных полей и теории квантовых случайных процессов, которые приводят, в свою очередь, к формулировкам новых интересных задач. Изучаемые в диссертации проблемы являются актуальными и будут интересны широкому кругу специалистов по бесконечномерному анализу, теории операторов, теории краевых задач, квантовой теории поля и квантовым стохастическим процессам.

Основные результаты работы своевременно опубликованы и доложены на семинарах и конференциях; автореферат правильно отражает ее содержание.

Считаю, что диссертационная работа Б.О. Волкова удовлетворяет всем требованиям к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.01 - "Вещественный, комплексный и функциональный анализ" , а ее автор заслуживает присвоения учёной степени кандидата физико-математических наук по указанной специальности.

Доцент кафедры высшей математики МФТИ,
Доктор физико-математических наук В.Ж. Сакбаев
12.05.2014

Подпись Сакбаева В.Ж. заверяю
секретарь Ученого Совета МФТИ Ю.И. Скалько.