Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.2

Шапошников Александр Валерьевич

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ НА ВИНЕРОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2014

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Богачев Владимир Игоревич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
Степанов Евгений Олегович, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН,
старший научный сотрудник,

кандидат физико-математических наук
Кругова Елена Павловна, ВИНИТИ РАН,
старший научный сотрудник ОНИ ПФМНиИТ.

Ведущая организация: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 20 июня 2014 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, 27).

Автореферат разослан 20 мая 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор

В.Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Анализ на классическом пространстве Винера и его абстрактном аналоге — абстрактном винеровском пространстве, фактически представляющем собой гауссовскую меру на сепарабельном банаховом пространстве с выделенным в качестве «касательного пространства» подпространством Камерона–Мартина, стал популярен после появления известной работы Л. Гросса[1]. Подробную библиографию можно найти в книгах[2,3,4]. Соболевские классы для бесконечномерных пространств с гауссовской мерой были введены в начале 70-х годов прошлого века в работах Н.Н. Фролова[5], позже они рассматривались в работах Л. Гросса[6], Б. Ласкара[7], но особую популярность приобрели после появления исчисления Маллявена[8]. Изучению различных свойств соболевских функций на бесконечномерных пространствах посвящено большое количество работ. В бесконечномерном случае появляется много новых трудностей и особенностей. В частности, многие классические результаты и конструкции, такие как теоремы вложения, теоремы о покрытии, максимальные функции, гладкие разбиения единицы, широко используемые при исследовании соболевских функций на конечномерных пространствах, оказываются неприменимы. Важной особенностью соболевских классов по гауссовской мере является их инвариантность относительно измеримых линейных изоморфизмов, в связи с чем пространства с весьма различными геометрическими свойствами обладают одинаковым запасом соболевских функций,

[1]L. Gross *Potential theory on Hilbert space.* J. Funct. Anal. 1967. V. 1, №2. P. 123–181.

[2]В.И. Богачев *Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна.* НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва – Ижевск, 2008.

[3]В.И. Богачев *Гауссовские меры.* Наука, М., 1997.

[4]A.S. Üstünel *An introduction to analysis on Wiener space.* Springer, 1995.

[5]Н.Н. Фролов *Теоремы вложения для пространств функций счетного числа переменных I.* Тр. Ин-та матем. Воронеж. ун-та. Изд-во Воронеж. ун-та. 1970. Вып. 1. С. 205–218.

[6]L. Gross *Logarithmic Sobolev inequalities.* Amer. J. Math. 1975. V. 97, №4. P. 1061–1083.

[7]B. Lascar *Propriétés locales d'espaces de type Sobolev en dimension infinie.* Comm. Partial Dif. Equat. 1976. V. 1, №6. P. 561–584.

[8]P. Malliavin *Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators.* Proc. Intern. Symp. on Stoch. Diff. Eq. (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976). P. 195–263.

подробное обсуждение этого вопроса можно найти в книге[3]. В идейном отношении анализ на винеровском пространстве весьма близок к возникшей несколько ранее теории дифференцируемых мер, которая была предложена С.В. Фоминым[9], а затем развивалась многими авторами (первые обзоры см. в работах[10,11], а современное состояние этой теории представлено в книге[2]). Дифференцируемые по Фомину меры можно рассматривать как бесконечномерный аналог мер с плотностями из класса Соболева. Аналогом же мер с плотностями ограниченной вариации оказываются несколько позже введенные меры, дифференцируемые по Скороходу[12]. Последние также рассматриваются в этой диссертации. Отметим, что ряд важных результатов по дифференцируемости Скорохода получен Е.П. Круговой[13,14].

Еще одним важным объектом анализа на винеровском пространстве оказывается оператор дивергенции. Определение дивергенции векторного поля со значениями в пространстве Камерона–Мартина гауссовской меры естественным образом обобщает понятие дивергенции в смысле обобщенных функций в конечномерном случае. В работах М. и П. Кре[15] и Б. Гаво[16] было доказано существование дивергенции для соболевских векторных полей и исследованы некоторые ее свойства. В виде обобщенного стохастического интеграла понятие дивергенции были введено примерно тогда же А.В. Скороходом. Важной особенностью оператора дивергенции относительно гауссовской меры является его свойство локаль-

---

[9] С.В. Фомин *Дифференцируемые меры в линейных пространствах.* Успехи матем. наук, 1968, Т. 23, №1, С. 221–222.

[10] В.И. Авербух, О.Г. Смолянов, С.В. Фомин *Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры.* Тр. Моск. матем. об-ва. 1971, Т. 24. С. 133–174.

[11] Ю.Л. Далецкий, С.В. Фомин *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.* Наука, М., 1983.

[12] А.В. Скороход *Интегрирование в гильбертовом пространстве.* Наука, М., 1975.

[13] Е.П. Кругова *О дифференцируемости выпуклых мер.* Матем. заметки. 1995. Т. 57, №6. С. 862–871.

[14] Е.П. Кругова *О сдвигах выпуклых мер.* Матем. сб. 1997. Т. 188, №2. С. 57–66.

[15] M. Krée, P. Krée *Continuité de la divergence dans les espaces de Sobolev relatifs à l'espace de Wiener.* C. R. Acad. Sci. 1983. T. 296, №20. P. 833–834.

[16] B. Gaveau, P. Trauber *L'intégral stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel.* J. Funct. Anal. 1982. V. 46, №2, P. 230–238.

ности, которое имеет место при достаточно широких предположениях относительно векторного поля:

$$\mathrm{div}_\mu v = 0 \ \ \mu\text{-п.в. на множестве } \{v = 0\}.$$

Данное свойство изучалось в работах Д. Нуаларта и Е. Парду [17], А.М. Гомилко и А.А. Дороговцева[18], А.С. Устюнеля[4], где были найдены некоторые достаточные условия на векторное поле и подмножество винеровского пространства, при которых указанное свойство выполняется; тем не менее в общем случае оно может нарушаться. Данный эффект оказывается тесно связан с результатом Дж. Альберти[19] о приближении векторных полей градиентами гладких функций, обобщение которого на случай винеровского пространства приводится в диссертации.

Соболевские пространства на подмножествах бесконечномерного винеровского пространства изучались в работах М. Хино[20], М. Фукушимы[21] и ряда других авторов. В статье[20] было доказано, что множество функций, допускающих продолжение на все пространство, всюду плотно в соболевском пространстве над H-выпуклым подмножеством винеровского пространства. Данное утверждение позволяет распространить многие результаты, известные для гладких функций, на более широкий класс функций с соболевской регулярностью. В качестве примера можно привести одну из версий логарифмического неравенства Соболева, доказанную для гладких функций в работе Д. Фейеля и А.С. Устюнеля[22] и обобщенную на случай соболевских функций в работе М. Хино[20].

С весьма близкой проблематикой имеет дело и упомянутая выше теория дифференцируемых мер. С одной стороны, гауссовские меры и

[17] D. Nualart, E. Pardoux *Stochastic calculus with anticipating integrands.* Probab. Theory Related Fields. 1988. V. 78, №4. P. 535–581.

[18] А.М. Гомилко, А.А. Дороговцев *О локализации расширенного стохастического интеграла.* Матем. сб. 2006. Т. 197, №9. С. 19–42.

[19] G. Alberti *A Lusin type theorem for gradients.* J. Funct. Anal. 1991. V. 100, №1. P. 110–118.

[20] M. Hino *Dirichlet spaces on H-convex sets in Wiener space.* Bull. Sci. Math. 2011. V. 135, №6. P. 667–683.

[21] M. Fukushima *BV functions and distorted Ornstein–Uhlenbeck processes over the abstract Wiener space.* J. Funct. Anal. 2000. V. 174, №1. P. 227–249.

[22] D. Feyel, A. S. Üstünel *The notion of convexity and concavity on Wiener space.* J. Funct. Anal. 2000. V. 176, №2. P. 400–428.

меры, заданные в том или ином смысле гладкими плотностями относительно гауссовских мер, дают большой запас примеров дифференцируемых распределений на бесконечномерных пространствах. С другой стороны, существует множество вероятностных мер на данном бесконечномерном пространстве, дифференцируемых вдоль плотно вложенных подпространств, но при этом взаимно сингулярных со всеми гауссовскими мерами на этом пространстве. В качестве примера можно привести меру ν на гильбертовом пространстве l^2, заданную как счетное произведение мер с плотностями $p_n(x) = 2^n p(2^n x)$, где p — бесконечно дифференцируемая вероятностная плотность на прямой с ограниченным носителем и конечной информацией Фишера (т.е. функция $|p'|^2/p$ интегрируема). Особый интерес представляют необходимые и достаточные условия для дифференцируемости меры вдоль направления h, допускающие естественные обобщения на бесконечномерный случай. Возникает вопрос о характеризации различных классов дифференцируемых мер в терминах регулярности функций $t \mapsto \mu(A + th)$. Скажем, дифференцируемость этих функций есть дифференцируемость Фомина. Случаи липшицевости, непрерывности или аналитичности изучались соответственно в работах В.И. Богачева[23], В.А. Романова[24], С. Альбеверио и Р. Хёг-Крона[25] и В.Ю. Бенткуса[26]. В частности, В.И. Богачевым была установлена равносильность липшицевости таких функций при всех A дифференцируемости меры μ по направлению h в смысле Скорохода, определяемой как дифференцируемость отображения $t \mapsto \mu_{th}$, $\mu_{th}(A) = \mu(A+th)$, в слабой топологии на пространстве мер.

Цель работы. Получить аналог теоремы Альберти для приближения измеримых векторных полей со значениями в пространстве Камерона–

[23]В.И. Богачев *О дифференцируемости мер по Скороходу.* Теория вероятн. и ее примен. 1988. Т. 33, №2. С. 349–354.

[24]В.А. Романов *Непрерывные и вполне разрывные меры в линейных пространствах.* Докл. АН СССР, 1976, Т. 227, №3, С. 569–570.

[25]S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn *Dirichlet forms and diffusion processes on rigged Hilbert spaces.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1977. B. 40, №1, S. 1–57.

[26]В.Ю. Бенткус *Аналитичность гауссовских мер.* Теория вероятн. и ее примен. 1982. Т. 27, №1. С. 147–154.

Мартина градиентами соболевских функций. Исследовать продолжаемость соболевских функций, заданных на открытых выпуклых множествах в пространстве с гауссовской мерой. Изучить такое свойство меры μ вдоль направления h, как абсолютная непрерывность всех функций $t \mapsto \mu(A + th)$, где A — борелевское множество.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказано, что каждое борелевское векторное поле на винеровском пространстве со значениями в пространстве Камерона–Мартина H может быть приближено в смысле Лузина градиентом некоторой H-липшицевой функции.

2. Построен пример открытого центрально симметричного выпуклого множества в гильбертовом пространстве с гауссовской мерой и соболевской функции на этом множестве, не допускающей соболевских продолжений на все пространство.

3. Построен пример меры μ, показывающий, что абсолютная непрерывность функций $t \mapsto \mu(A + th)$ для всех борелевских множеств A не влечет дифференцируемость меры μ в смысле Скорохода.

4. Получены новые характеризации дифференцируемости меры μ в смысле Скорохода через абсолютную непрерывность отображения $t \mapsto \mu_{th}$ и «глобальную» абсолютную непрерывность функций $t \mapsto \mu(A + th)$.

   Последние три результата дают решения проблем, долго остававшихся открытыми.

Методы исследования. В работе используются методы теории меры, функционального анализа и теории вероятностей, а также ряд оригинальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в теории меры, функциональном анализе, теории вероятностей и теории случайных процессов.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на

- семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В.И. Богачева, Н.А. Толмачева, 2009–2014 гг.,
- российско-японском симпозиуме «Стохастический анализ сложных статистических моделей», Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2009 г.,
- научно-исследовательском семинаре по стохастическому анализу, университет Билефельда (Германия), 2010 г.,
- научно-исследовательском семинаре «Статистика, теория вероятностей и их приложения», Институт математики университета Бургундии (Франция), 2013 г.
- научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений и математической физики Российского университета дружбы народов по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора А.Л. Скубачевского, 2014 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях автора в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 45 наименований. Общий объем диссертации составляет 52 страницы.

Краткое содержание диссертации

Глава 1.

В работе Дж. Альберти[19] было доказано, что всякое борелевское векторное поле на конечномерном евклидовом пространстве совпадает с градиентом некоторой гладкой функции вне множества сколь угодно малой меры, т.е. верно следующее утверждение:

Теорема. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\lambda(\Omega) < \infty$, где λ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, и пусть $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — борелевское отображение. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся открытое множество $A \subset \Omega$ и функция $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ со следующими свойствами:*

$$\lambda(A) \leq \varepsilon \lambda(\Omega),$$

$$v(x) = \nabla\varphi(x) \quad \textit{для каждого } x \in \Omega \setminus A,$$

$$\|\nabla\varphi\|_p \leq C_n \varepsilon^{1/p-1} \|v\|_p \quad \textit{для каждого } p \in [1, \infty],$$

где константа C_n зависит только от n, а $\|\cdot\|_p$ обозначает норму в пространстве $L^p(\Omega)$.

Данная теорема позволяет построить простой пример векторного поля, для которого нарушается упомянутое выше свойство локальности. Следующая конструкция была предложена Л. Амброзио: из теоремы Альберти следует, что найдется функция $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ такая, что векторное поле $\nabla\varphi$ совпадает с полем $(y, -x)$ на множестве A положительной меры; положим $v(x, y) := (x, y) - (-\partial_y\varphi, \partial_x\varphi)$, тогда векторное поле v равно нулю на множестве A, однако $\operatorname{div} v \equiv 2$.

Интерес к свойству локальности обусловлен тем, что в случае классического винеровского пространства (W, H, μ^W), т.е.

$$W = \{w : w \in C[0,1], \quad w(0) = 0, \|w\| = \|w\|_\infty\},$$

$$H = \{h : h \in AC[0,1], \quad h(0) = 0, \quad \|h\|_H = \|h'\|_{L^2[0,1]} < \infty\}$$

$$\mu = \mu^W \text{— мера Винера},$$

существует широкий класс негладких векторных полей, для которых дивергенция обладает свойством локальности. Обозначим через $\left(\mathcal{F}_t^W\right)_{t\in[0,1]}$ фильтрацию, порожденную «координатным» винеровским процессом

$$\{W_t\}_{t\in[0,1]},\ \text{где}\ W_t(w) = w(t).$$

Пусть ξ_t — случайный процесс, прогрессивно измеримый относительно фильтрации $\left(\mathcal{F}_t^W\right)_{t\in[0,1]}$, для которого выполнено условие

$$\mathbb{E}\int_{[0,1]} \xi_t^2\, dt < \infty.$$

Хорошо известно, что для векторного поля v, определяемого равенством

$$v(w)(t) = -\int_0^t \xi_s(w)\, ds,$$

дивергенция $\mathrm{div}_\mu v$ относительно меры Винера μ^W совпадает со стохастическим интегралом Ито от процесса ξ_t, т.е.

$$\mathrm{div}_\mu v = \int_{[0,1]} \xi_s\, dW_s.$$

Локальность $\mathrm{div}_\mu v$ вытекает из возможности представления стохастического интеграла в виде предела сходящейся почти всюду относительно меры μ^W последовательности интегральных сумм.

Данная глава посвящена обобщению теоремы Альберти на случай векторных полей со значениями в пространстве Камерона–Мартина. Пусть X — локально выпуклое пространство, γ — центрированная радоновская гауссовская мера на X. Напомним, что меры, заданные на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ пространства X, называются борелевскими. Неотрицательная борелевская мера μ называется радоновской, если для каждого борелевского множества B и каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset B$, что $\mu(B\backslash K) < \varepsilon$; знакопеременная борелевская мера μ называется радоновской, если такова ее полная вариация $|\mu|$. Напомним также, что вероятностная борелевская мера γ называется гауссовской, если каждый непрерывный линейный функционал $l \in X^*$ имеет нормальное распределение относительно γ. Пространство Камерона–Мартина H такой меры определяется как множество векторов, сдвиги на которые приводят к эквивалентным мерам; оно оказывается сепарабельным гильбертовым пространством с нормой

$$|h|_H = \sup\{l(h)\colon\ l \in X^*, \|l\|_{L^2(\gamma)} \le 1\}.$$

Обозначим через $\mathcal{FC}^\infty$ совокупность всех функций f на X вида

$$f(x) = \varphi(l_1(x), \ldots, l_n(x)), \quad \varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n), \quad l_i \in X^*, n \in \mathbb{N}.$$

Пространство Соболева $W^{p,r}(\gamma)$ определяется как пополнение $\mathcal{FC}^\infty$ относительно нормы

$$\|f\|_{p,r} = \sum_{k \le r} \Bigl(\int \Bigl[\sum_{i_1,\ldots,i_k \ge 1} (\partial_{i_1 \ldots \partial_{i_k}} f(x))^2 \Bigr]^{p/2} \gamma(\,dx) \Bigr)^{1/p},$$

где через ∂_i обозначена частная производная вдоль вектора e_i из произвольного фиксированного ортонормированного базиса $\{e_i\}$ в H. Норму f в $L^p(\gamma)$ будем обозначать через $\|f\|_p$. Будем называть γ-измеримую функцию H-липшицевой, если она удовлетворяет следующему условию:

$$|f(x+h) - f(x)| \le C|h|_H \quad \text{для всех } h \in H \ \gamma\text{-п.в.}$$

Функции с указанным свойством лежат в каждом $W^{p,1}(\gamma)$.

Основной результат главы заключается в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $v\colon\ X \to H$ — борелевское векторное поле. Тогда для всяких $\varepsilon > 0$ и $\theta > 0$ найдется H-липшицева функция f, обладающая следующими свойствами:

(1) $\gamma\bigl(x\colon\ \nabla f(x) \ne v(x)\bigr) < \varepsilon$,

(2) $\sup_{x \in X} |f(x)| < \theta$,

(3) для каждого $p \in [1, \infty]$ справедливо неравенство

$$\|\nabla f\|_p \le C\varepsilon^{1/p-1} \|v\|_p,$$

где C — некоторая универсальная константа.

Указанная оценка является новой и в конечномерном случае. Доказательство основано на дополнительной локализации конструкции Альберти, позволяющей в конечномерном случае получить оценку на градиент функции f, не зависящую от размерности, а затем с помощью подходящих аппроксимаций доказать ее в случае бесконечномерного пространства.

Глава 2.

Во второй главе изучается существование продолжений функций из соболевских классов на подмножествах винеровского пространства на все пространство с сохранением соболевского класса. Пусть U — H-открытое подмножество конечномерного или бесконечномерного пространства X с гауссовской мерой γ с пространством Камерона–Мартина H. Это означает по определению, что все «сечения» $(U-x)\cap H$ открыты по норме H. Если же все эти сечения выпуклы, то U называют H-выпуклым.

Обозначим через $W^{p,1}(U,\gamma)$ замыкание множества сужений на U гладких цилиндрических функций из $\mathcal{FC}^\infty$ по соболевской норме $\|\cdot\|_{1,p,U}$, где

$$\|\varphi\|_{1,p,U} = \|\varphi\|_{p,U} + \|\nabla_H\varphi\|_{p,U},$$

причем $\|\cdot\|_{p,U}$ — норма в $L^p(U,\gamma)$, вычисляемая относительно сужения $\gamma|_U$ меры γ на U.

Другой естественный подход приводит к пространству $H^{p,1}(U,\gamma)$, которое состоит из функций f, лежащих в $L^p(U,\gamma)$ и обладающих градиентом $\widetilde{\nabla_H f}$ из пространства $L^p(U,H,\gamma)$ H-значных отображений на U в следующем смысле: для каждого $h\in H$ функция f абсолютно непрерывна на почти всех прямых параллельных h, причем почти всюду имеет место равенство $\partial_h f = (\widetilde{\nabla_H f}, h)_H$. В случае, когда U — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, аналогичные конструкции приводят к весовым соболевским пространствам. Хорошо известно, что даже в конечномерном случае существуют меры μ, для которых оба пространства корректно определены, но при этом пространство $H^{p,1}(U,\mu)$ оказывается шире пространства $W^{p,1}(U,\mu)$, данный вопрос подробно обсуждается, например, в работе В.В. Жикова[27]. В недавней работе М. Хино[20] было доказано, что для каждого H-выпуклого H-открытого подмножества U указанные

[27]В.В. Жиков *О весовых соболевских пространствах.* Матем. сб., 1998, Т. 189, №8, С. 27–58.

пространства совпадают. Результат Хино также показывает, что множество функций, допускающих продолжение на все пространство, всюду плотно в $H^{p,1}(U,\gamma)$. Хорошо известно, что всякая функция из класса Соболева на ограниченном выпуклом множестве в $\mathbb{R}^n$ продолжается до функции на всем пространстве из того же класса Соболева. Аналогичное утверждение верно и для весовых классов Соболева с достаточно регулярными весами, например гауссовскими. В случае бесконечномерного пространства с гауссовской мерой существование продолжения для H-липшицевых функций было доказано в работе А.С. Устюнеля и М. Закая[28], а для H-липшицевых отображений со значениями в гильбертовом пространстве в работе В.И. Богачева[29]. Тем не менее, как оказалось, в случае соболевских пространств $H^{p,1}(U,\gamma)$ на H-выпуклых H-открытых подмножествах бесконечномерного пространства ситуация меняется. Основным результатом этой главы является следующая теорема, дающая отрицательный ответ на вопрос, долго остававшийся открытым.

Теорема 2. В пространстве $\mathbb{R}^\infty$ есть выпуклое борелевское H-открытое множество K положительной γ-меры со следующим свойством: для каждого $p \in [1,+\infty)$ в классе $W^{p,1}(K,\gamma)$ есть функция, не имеющая продолжений до функции класса $W^{p,1}(\gamma)$. Можно также найти выпуклый компакт K положительной меры с этим же свойством.

Доказательство основано на оригинальной конструкции, использующей некоторые идеи из работы Ю.Д. Бураго и В.Г. Мазьи[30] для оценки снизу нормы продолжения в пространстве $W^{1,1}(\gamma)$ и следующей лемме.

Лемма. Если множество борелевское V таково, что для каждой функции f из $W^{p,1}(V,\gamma)$ при некотором $p>1$ есть продолжение $g \in W^{p,1}(\gamma)$, то найдется такое продолжение $g_f \in W^{p,1}(\gamma)$, что $\|g_f\|_{p,1} \le C\|f\|_{p,1,V}$ с некоторой общей постоянной C.

[28]A.S. Üstünel, M. Zakai *Extension of Lipschitz functions on Wiener space.* New Trends in Stochastic Analysis, Proc. of the Taniguchi Int. Symp., eds. D.Elworthy, World Scientific, 1996, P. 465–470.

[29]V.I. Bogachev *Extensions of H-Lipschitzian mappings with infinite-dimensional range.* Inf. Dim. Anal., Quantum Probab. Related Topics, 1999, V. 2, №3, P. 461–474.

[30]Ю.Д. Бураго, В.Г. Мазья *Некоторые вопросы теории потенциала и теории функций для областей с нерегулярными границами.* Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1967, Т. 3, С. 3–152.

Отметим, что остается открытым вопрос о существовании соболевских продолжений на все пространство соболевских функций на шаре гильбертова пространства.

Глава 3.

Третья глава посвящена изучению дифференцируемости меры μ в смысле Скорохода вдоль направления h и такого свойства меры μ, как абсолютная непрерывность всех функций $t \mapsto \mu(A+th)$, $A \in \mathcal{B}(X)$. В работе С.В. Фомина[9] было введено следующее определение: борелевская мера μ на локально выпуклом пространстве X называется дифференцируемой вдоль вектора h, если для каждого множества $A \in \mathcal{B}(X)$ существует конечный предел

$$d_h\mu(A) = \lim_{t\to 0} \frac{\mu(A+th) - \mu(A)}{t}.$$

Другой вид дифференцируемости мер был предложен А.В. Скороходом[12], который ввел следующее определение: борелевская мера μ на локально выпуклом пространстве X называется дифференцируемой вдоль вектора h, если для каждой ограниченной непрерывной функции f на X функция $t \mapsto \int_X f(x+th)\,d\mu$ дифференцируема. Такие свойства в идейном отношении тесно связаны со свойствами соболевских функций, ибо последние обладают версиями, локально абсолютно непрерывными вдоль направлений из подпространства Камерона–Мартина. Однако меры, рассматриваемые в этой главе, в бесконечномерном случае уже могут быть взаимно сингулярными с гауссовскими. Тем самым здесь речь идет о развитии и приложении методов и идей первых двух глав. Другие приложения связаны с рассмотрением классов функций ограниченной вариации на бесконечномерных пространствах с мерами.

В случае конечномерного пространства $\mathbb{R}^n$ мера μ с плотностью ϱ дифференцируема в смысле Фомина в точности тогда, когда ϱ входит в класс Соболева $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$; в свою очередь, дифференцируемость в смысле Скорохода эквивалентна включению ϱ в класс $BV(\mathbb{R}^n)$ функций ограниченной вариации. В работе[23] было доказано, что дифференцируемость в смысле Скорохода также допускает характеризацию через свойства функций $t \mapsto \mu(A + th)$, а именно, мера μ дифференцируема в смысле Скорохода вдоль вектора h тогда и только тогда, когда все функции $t \mapsto \mu(A + th)$ липшицевы. В статье В.И. Богачева и О.Г. Смолянова[31] был поставлен вопрос об изучении такого свойства меры μ, как абсолютная непрерывность всех функций $t \mapsto \mu(A + th)$, где A — борелевское множество. В частности, с тех пор было неизвестно, можно ли в определении дифференцируемости в смысле Скорохода заменить условие липшицевости функций $t \mapsto \mu(A + th)$ на их абсолютную непрерывность. Основной отрицательный результат этой главы заключается в следующей теореме.

Теорема 3. Существует такая вероятностная борелевская мера μ на прямой, что для всякого борелевского множества A числовая функция $\varphi_A(t) = \mu(A + t)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0, 1]$, но при этом мера μ не является дифференцируемой в смысле Скорохода.

Доказательство основано на результатах работы В.И. Богачева[23] и построении искомой вероятностной меры с плотностью, заданной конструктивно, для которой удается проверить абсолютную непрерывность функций $t \mapsto \mu(A + t)$. Также в этой главе получены следующие характеризации дифференцируемости в смысле Скорохода.

Теорема 4. Радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве X дифференцируема по Скороходу вдоль вектора h тогда и только тогда, когда отображение $t \mapsto \mu_{th}$ со значениями в банаховом пространстве борелевских мер с вариационной нормой абсолютно непрерывно на отрезке $[0, 1]$.

Теорема 5. Радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве X дифференцируема по Скороходу вдоль вектора h тогда и только тогда, когда для каждого борелевского множества A функция $\mu_{th}(A)$ абсолютно непрерывна на всей прямой в следующем смысле: для всякого

[31] В.И. Богачев, О.Г. Смолянов *Аналитические свойства бесконечномерных распределений.* Успехи матем. наук, 1990, Т. 45, №3, С. 3–83.

$\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого конечного набора дизъюнктных отрезков $[s_1, t_1], \ldots, [s_k, t_k]$ с общей длиной $\sum_{i=1}^{k} |t_i - s_i| < \delta$ выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{k} |\mu_{t_i h}(A) - \mu_{s_i h}(A)| < \varepsilon$.

Из теоремы 3 явствует, что это свойство строго сильнее абсолютной непрерывности на каждом отрезке. Разумеется, для функций не такого специального вида неэквивалентность глобальной и локальной абсолютной непрерывности очевидно.

Вопросы продолжения соболевских функций и функций ограниченной вариации с бесконечномерных областей, тесно связанные с дифференцируемостью мер по Скороходу, весьма актуальны для исследования бесконечномерных краевых задач.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.И. Богачеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] А.В. Шапошников, Теорема лузинского типа для векторных полей на винеровском пространстве, Докл. РАН, 2010, Т. 434, №6, С. 744–748.

[2] В.И. Богачев, А.В. Шапошников, О продолжении соболевских функций на винеровском пространстве, Докл. РАН, 2013, Т. 448, №4, С. 379–384.

В работе [2] диссертанту принадлежат лемма 1 и теорема 1; В.И. Богачеву принадлежит общая постановка задачи и замечание 1.

[3] А.В. Шапошников, О дифференцируемости мер по Скороходу и близких свойствах, Докл. РАН, 2009, Т. 429, №2, С. 163–167.

[4] А.В. Шапошников, О дифференцируемости мер по Скороходу, Теория вероятностей и ее применения, 2010, Т. 55, №3, С. 618–619.