Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.2

Шапошников Александр Валерьевич

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ НА ВИНЕРОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор В.И. Богачев.

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2014

Содержание

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Анализ на классическом пространстве Винера и его абстрактном аналоге — абстрактном винеровском пространстве, фактически представляющем собой гауссовскую меру на сепарабельном банаховом пространстве с выбранным в качестве «касательного пространства» подпространством Камерона–Мартина, стал популярен после появления известной работы Л. Гросса[1]. Подробную библиографию можно найти в книгах[2,3,4]. Соболевские классы для бесконечномерных пространств с гауссовской мерой были введены в начале 70-х годов прошлого века в работах Н.Н. Фролова[5], позже они рассматривались в работах Л. Гросса[6], Б. Ласкара[7], но особую популярность приобрели после появления исчисления Маллявена[8]. Изучению различных свойств соболевских функций на бесконечномерных пространствах посвящено большое количество работ. В бесконечномерном случае появляется много новых трудностей и особенностей. В частности, многие классические результаты и конструкции, такие как теоремы вложения, теоремы о покрытии, максимальные функции, гладкие разбиения единицы, широко используемые при исследовании соболевских функций на конечномерных пространствах, оказываются неприменимы. Важной особенностью соболевских классов по гауссовской мере

---

[1] L. Gross *Potential theory on Hilbert space.* J. Funct. Anal. 1967. V. 1, №2. P. 123–181.

[2] В.И. Богачев *Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна.* НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва – Ижевск, 2008.

[3] В.И. Богачев *Гауссовские меры.* Наука, М., 1997.

[4] A.S. Üstünel *An introduction to analysis on Wiener space.* Springer, 1995.

[5] Н.Н. Фролов *Теоремы вложения для пространств функций счетного числа переменных I.* Тр. Ин-та матем. Воронеж. ун-та. Изд-во Воронеж. ун-та. 1970. Вып. 1. С. 205–218.

[6] L. Gross *Logarithmic Sobolev inequalities.* Amer. J. Math. 1975. V. 97, №4. P. 1061–1083.

[7] B. Lascar *Propriétés locales d'espaces de type Sobolev en dimension infinie.* Comm. Partial Dif. Equat. 1976. V. 1, №6. P. 561–584.

[8] P. Malliavin *Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators.* Proc. Intern. Symp. on Stoch. Diff. Eq. (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976). P. 195–263.

является их инвариантность относительно измеримых линейных изоморфизмов, в связи с чем пространства с весьма различными геометрическими свойствами обладают одинаковым запасом соболевских функций, подробное обсуждение этого вопроса можно найти в книге[3]. В идейном отношении анализ на винеровском пространстве весьма близок к возникшей несколько ранее теории дифференцируемых мер, которая была предложена С.В. Фоминым[9], а затем развивалась многими авторами (первые обзоры см. в работах[10,11], а современное состояние этой теории представлено в книге[2]). Дифференцируемые по Фомину меры можно рассматривать как бесконечномерный аналог мер с плотностями из класса Соболева. Аналогом же мер с плотностями ограниченной вариации оказываются несколько позже введенные меры, дифференцируемые по Скороходу[12]. Последние также рассматриваются в этой диссертации. Отметим, что ряд важных результатов по дифференцируемости Скорохода получен Е.П. Круговой[13,14].

Еще одним важным объектом анализа на винеровском пространстве оказывается оператор дивергенции. Определение дивергенции векторного поля со значениями в пространстве Камерона–Мартина гауссовской меры естественным образом обобщает понятие дивергенции в смысле обобщенных функций в конечномерном случае. В работах М. и П. Кре[15] и Б. Гаво[16] было доказано существование дивергенции для соболевских

---

[9]С.В. Фомин *Дифференцируемые меры в линейных пространствах.* Успехи матем. наук, 1968, Т. 23, №1, С. 221–222.

[10]В.И. Авербух, О.Г. Смолянов, С.В. Фомин *Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры.* Тр. Моск. матем. об-ва. 1971, Т. 24. С. 133–174.

[11]Ю.Л. Далецкий, С.В. Фомин *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.* Наука, М., 1983.

[12]А.В. Скороход *Интегрирование в гильбертовом пространстве.* Наука, М., 1975.

[13]Е.П. Кругова *О дифференцируемости выпуклых мер.* Матем. заметки. 1995. Т. 57, №6. С. 862–871.

[14]Е.П. Кругова *О сдвигах выпуклых мер.* Матем. сб. 1997. Т. 188, №2. С. 57–66.

[15]M. Krée, P. Krée *Continuité de la divergence dans les espaces de Sobolev relatifs à l'espace de Wiener.* C. R. Acad. Sci. 1983. T. 296, №20. P. 833–834.

[16]B. Gaveau, P. Trauber *L'intégral stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel.* J. Funct. Anal. 1982. V. 46, №2, P. 230–238.

векторных полей и исследованы некоторые ее свойства. В виде обобщенного стохастического интеграла понятие дивергенции были введено примерно тогда же А.В. Скороходом. Важной особенностью оператора дивергенции относительно гауссовской меры является его свойство локальности, которое имеет место при достаточно широких предположениях относительно векторного поля:

$$\mathrm{div}_\mu v = 0 \ \ \mu\text{-п.в. на множестве } \{v = 0\}.$$

Данное свойство изучалось в работах Д. Нуаларта и Е. Парду [17], А.М. Гомилко и А.А. Дороговцева[18], А.С. Устюнеля[4], где были найдены некоторые достаточные условия на векторное поле и подмножество винеровского пространства, при которых указанное свойство выполняется; тем не менее в общем случае оно может нарушаться. Данный эффект оказывается тесно связан с результатом Дж. Альберти[19] о приближении векторных полей градиентами гладких функций, обобщение которого на случай винеровского пространства приводится в диссертации.

Соболевские пространства на подмножествах бесконечномерного винеровского пространства изучались в работах М. Хино[20], М. Фукушимы[21] и ряда других авторов. В статье[20] было доказано, что множество функций, допускающих продолжение на все пространство, всюду плотно в соболевском пространстве над H-выпуклым подмножеством винеровского пространства. Данное утверждение позволяет распространить многие результаты, известные для гладких функций, на более широкий класс функций с соболевской регулярностью. В качестве примера можно привести одну из версий логарифмического неравенства Соболева, дока-

[17]D. Nualart, E. Pardoux *Stochastic calculus with anticipating integrands.* Probab. Theory Related Fields. 1988. V. 78, №4. P. 535–581.

[18]А.М. Гомилко, А.А. Дороговцев *О локализации расширенного стохастического интеграла.* Матем. сб. 2006. Т. 197, №9. С. 19–42.

[19]G. Alberti *A Lusin type theorem for gradients.* J. Funct. Anal. 1991. V. 100, №1. P. 110–118.

[20]M. Hino *Dirichlet spaces on H-convex sets in Wiener space.* Bull. Sci. Math. 2011. V. 135, №6. P. 667–683.

[21]M. Fukushima *BV functions and distorted Ornstein–Uhlenbeck processes over the abstract Wiener space.* J. Funct. Anal. 2000. V. 174, №1. P. 227–249.

занную для гладких функций в работе Д. Фейеля и А.С. Устюнеля[22] и обобщенную на случай соболевских функций в работе М. Хино[20].

С весьма близкой проблематикой имеет дело и упомянутая выше теория дифференцируемых мер. С одной стороны, гауссовские меры и меры, заданные в том или ином смысле гладкими плотностями относительно гауссовских мер, дают большой запас примеров дифференцируемых распределений на бесконечномерных пространствах. С другой стороны, существует множество вероятностных мер на данном бесконечномерном пространстве, дифференцируемых вдоль плотно вложенных подпространств, но при этом взаимно сингулярных со всеми гауссовскими мерами на этом пространстве. В качестве примера можно привести меру ν на гильбертовом пространстве l^2, заданную как счетное произведение мер с плотностями $p_n(x) = 2^n p(2^n x)$, где p — бесконечно дифференцируемая вероятностная плотность на прямой с ограниченным носителем и конечной информацией Фишера (т.е. функция $|p'|^2/p$ интегрируема). Особый интерес представляют необходимые и достаточные условия для дифференцируемости меры вдоль направления h, допускающие естественные обобщения на бесконечномерный случай. Возникает вопрос о характеризации различных классов дифференцируемых мер в терминах регулярности функций $t \mapsto \mu(A + th)$. Скажем, дифференцируемость этих функций есть дифференцируемость Фомина. Случаи липшицевости, непрерывности или аналитичности изучались соответственно в работах В.И. Богачева[23], В.А. Романова[24], С. Альбеверио и Р. Хёг-Крона[25] и В.Ю. Бенткуса[26]. В частности, В.И. Богачевым была установ-

---

[22]D. Feyel, A. S. Üstünel *The notion of convexity and concavity on Wiener space.* J. Funct. Anal. 2000. V. 176, №2. P. 400–428.

[23]В.И. Богачев *О дифференцируемости мер по Скороходу.* Теория вероятн. и ее примен. 1988. Т. 33, №2. С. 349–354.

[24]В.А. Романов *Непрерывные и вполне разрывные меры в линейных пространствах.* Докл. АН СССР, 1976, Т. 227, №3, С. 569–570.

[25]S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn *Dirichlet forms and diffusion processes on rigged Hilbert spaces.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1977. B. 40, №1, S. 1–57.

[26]В.Ю. Бенткус *Аналитичность гауссовских мер.* Теория вероятн. и ее примен. 1982. Т. 27, №1. С. 147–154.

лена равносильность липшицевости таких функций при всех A дифференцируемости меры μ по направлению h в смысле Скорохода, определяемой как дифференцируемость отображения $t \mapsto \mu_{th}$, $\mu_{th}(A) = \mu(A+th)$, в слабой топологии на пространстве мер.

Цель работы. Получить аналог теоремы Альберти для приближения измеримых векторных полей со значениями в пространстве Камерона–Мартина градиентами соболевских функций. Исследовать продолжаемость соболевских функций, заданных на открытых выпуклых множествах в пространстве с гауссовской мерой. Изучить такое свойство меры μ вдоль направления h, как абсолютная непрерывность всех функций $t \mapsto \mu(A + th)$, где A — борелевское множество.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказано, что каждое борелевское векторное поле на винеровском пространстве со значениями в пространстве Камерона–Мартина H может быть приближено в смысле Лузина градиентом некоторой H-липшицевой функции.

2. Построен пример открытого центрально симметричного выпуклого множества в гильбертовом пространстве с гауссовской мерой и соболевской функции на этом множестве, не допускающей соболевских продолжений на все пространство.

3. Построен пример меры μ, показывающий, что абсолютная непрерывность функций $t \mapsto \mu(A + th)$ для всех борелевских множеств A не влечет дифференцируемость меры μ в смысле Скорохода.

4. Получены новые описания дифференцируемости меры μ в смысле Скорохода через абсолютную непрерывность отображения $t \mapsto \mu_{th}$ и «глобальную» абсолютную непрерывность функций $t \mapsto \mu(A + th)$.

   Последние три результата дают решения проблем, долго остававшихся открытыми.

Методы исследования. В работе используются методы теории меры, функционального анализа и теории вероятностей, а также ряд оригинальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в теории меры, функциональном анализе, теории вероятностей и теории случайных процессов.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на

- семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В.И. Богачева, Н.А. Толмачева, 2009–2014 гг.,
- российско-японском симпозиуме «Стохастический анализ сложных статистических моделей», Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2009 г.,
- научно-исследовательском семинаре по стохастическому анализу, университет Билефельда (Германия), 2010 г.,
- научно-исследовательском семинаре «Статистика, теория вероятностей и их приложения», Институт математики университета Бургундии (Франция), 2013 г.
- научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений и математической физики Российского университета дружбы народов по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора А.Л. Скубачевского, 2014 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях автора в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 45 наименований. Общий объем диссертации составляет 52 страницы.

Краткое содержание диссертации

Глава 1.

В работе Дж. Альберти[19] было доказано, что всякое борелевское векторное поле на конечномерном евклидовом пространстве совпадает с градиентом некоторой гладкой функции вне множества сколь угодно малой меры, т.е. верно следующее утверждение:

Теорема. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\lambda(\Omega) < \infty$, где λ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, и пусть $v\colon\ \Omega \to \mathbb{R}^n$ — борелевское отображение. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся открытое множество $A \subset \Omega$ и функция $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ со следующими свойствами:*

$$\lambda(A) \le \varepsilon\lambda(\Omega),$$

$$v(x) = \nabla\varphi(x) \quad \text{для каждого } x \in \Omega \setminus A,$$

$$\|\nabla\varphi\|_p \le C_n\varepsilon^{1/p-1}\|v\|_p \quad \text{для каждого } p \in [1, \infty],$$

где константа C_n зависит только от n, а $\|\cdot\|_p$ обозначает норму в пространстве $L^p(\Omega)$.

Данная теорема позволяет построить простой пример векторного поля, для которого нарушается упомянутое выше свойство локальности. Следующая конструкция была предложена Л. Амброзио: из теоремы Альберти следует, что найдется функция $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ такая, что векторное поле $\nabla\varphi$ совпадает с полем $(y, -x)$ на множестве A положительной меры; положим $v(x, y) := (x, y) - (-\partial_y\varphi, \partial_x\varphi)$, тогда векторное поле v равно нулю на множестве A, однако $\operatorname{div} v \equiv 2$.

Интерес к свойству локальности обусловлен тем, что в случае классического винеровского пространства (W, H, μ^W), т.е.

$$W = \{w : w \in C[0, 1], \quad w(0) = 0, \|w\| = \|w\|_\infty\},$$

$$H = \{h : h \in AC[0, 1], \quad h(0) = 0, \quad \|h\|_H = \|h'\|_{L^2[0,1]} < \infty\}$$

$$\mu = \mu^W \text{— мера Винера},$$

существует широкий класс негладких векторных полей, для которых дивергенция обладает свойством локальности. Обозначим через $\left(\mathcal{F}_t^W\right)_{t\in[0,1]}$ фильтрацию, порожденную «координатным» винеровским процессом

$$\{W_t\}_{t\in[0,1]},\ \text{где } W_t(w)=w(t).$$

Пусть ξ_t — случайный процесс, прогрессивно измеримый относительно фильтрации $\left(\mathcal{F}_t^W\right)_{t\in[0,1]}$, для которого выполнено условие

$$\mathbb{E}\int_{[0,1]}\xi_t^2\,dt<\infty.$$

Хорошо известно, что для векторного поля v, определяемого равенством

$$v(w)(t)=-\int_0^t\xi_s(w)\,ds,$$

дивергенция $\mathrm{div}_\mu v$ относительно меры Винера μ^W совпадает со стохастическим интегралом Ито от процесса ξ_t, т.е.

$$\mathrm{div}_\mu v=\int_{[0,1]}\xi_s\,dW_s.$$

Локальность $\mathrm{div}_\mu v$ вытекает из возможности представления стохастического интеграла в виде предела сходящейся почти всюду относительно меры μ^W последовательности интегральных сумм.

Данная глава посвящена обобщению теоремы Альберти на случай векторных полей со значениями в пространстве Камерона–Мартина. Пусть X — локально выпуклое пространство, γ — центрированная радоновская гауссовская мера на X. Напомним, что меры, заданные на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ пространства X, называются борелевскими. Неотрицательная борелевская мера μ называется радоновской, если для каждого борелевского множества B и каждого $\varepsilon>0$ найдется такой компакт $K\subset B$, что $\mu(B\backslash K)<\varepsilon$; знакопеременная борелевская мера μ называется радоновской, если такова ее полная вариация $|\mu|$. Напомним также, что вероятностная борелевская мера γ называется гауссовской, если каждый непрерывный линейный функционал $l\in X^*$ имеет нормальное распределение относительно γ. Пространство Камерона–Мартина H такой меры определяется как множество векторов, сдвиги на которые приводят к эквивалентным мерам; оно оказывается сепарабельным гильбертовым пространством с нормой

$$|h|_H = \sup\{l(h)\colon\ l \in X^*, \|l\|_{L^2(\gamma)} \le 1\}.$$

Обозначим через $\mathcal{FC}^\infty$ совокупность всех функций f на X вида

$$f(x) = \varphi(l_1(x), \dots, l_n(x)), \quad \varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n), \quad l_i \in X^*, n \in \mathbb{N}.$$

Пространство Соболева $W^{p,r}(\gamma)$ определяется как пополнение $\mathcal{FC}^\infty$ относительно нормы

$$\|f\|_{p,r} = \sum_{k \le r} \Bigl(\int \Bigl[\sum_{i_1,\dots,i_k \ge 1} (\partial_{i_1 \dots \partial_{i_k}} f(x))^2\Bigr]^{p/2} \gamma(\,dx)\Bigr)^{1/p},$$

где через ∂_i обозначена частная производная вдоль вектора e_i из произвольного фиксированного ортонормированного базиса $\{e_i\}$ в H. Норму f в $L^p(\gamma)$ будем обозначать через $\|f\|_p$. Будем называть γ-измеримую функцию H-липшицевой, если она удовлетворяет следующему условию:

$$|f(x+h) - f(x)| \le C|h|_H \quad \text{для всех } h \in H \ \gamma\text{-п.в.}$$

Функции с указанным свойством лежат в каждом $W^{p,1}(\gamma)$.

Основной результат главы заключается в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $v\colon\ X \to H$ — борелевское векторное поле. Тогда для всяких $\varepsilon > 0$ и $\theta > 0$ найдется H-липшицева функция f, обладающая следующими свойствами:

(1) $\gamma\bigl(x\colon\ \nabla f(x) \ne v(x)\bigr) < \varepsilon$,

(2) $\sup_{x \in X} |f(x)| < \theta$,

(3) для каждого $p \in [1, \infty]$ справедливо неравенство

$$\|\nabla f\|_p \le C\varepsilon^{1/p-1}\|v\|_p,$$

где C — некоторая универсальная константа.

Указанная оценка является новой и в конечномерном случае. Доказательство основано на дополнительной локализации конструкции Альберти, позволяющей в конечномерном случае получить оценку на градиент функции f, не зависящую от размерности, а затем с помощью подходящих аппроксимаций доказать ее в случае бесконечномерного пространства.

Глава 2.

Во второй главе изучается существование продолжений функций из соболевских классов на подмножествах винеровского пространства на все пространство с сохранением соболевского класса. Пусть U — H-открытое подмножество конечномерного или бесконечномерного пространства X с гауссовской мерой γ с пространством Камерона–Мартина H. Это означает по определению, что все «сечения» $(U-x)\cap H$ открыты по норме H. Если же все эти сечения выпуклы, то U называют H-выпуклым.

Обозначим через $W^{p,1}(U,\gamma)$ замыкание множества сужений на U гладких цилиндрических функций из $\mathcal{FC}^\infty$ по соболевской норме $\|\cdot\|_{1,p,U}$, где

$$\|\varphi\|_{1,p,U} = \|\varphi\|_{p,U} + \|\nabla_H\varphi\|_{p,U},$$

причем $\|\cdot\|_{p,U}$ — норма в $L^p(U,\gamma)$, вычисляемая относительно сужения $\gamma|_U$ меры γ на U.

Другой естественный подход приводит к пространству $H^{p,1}(U,\gamma)$, которое состоит из функций f, лежащих в $L^p(U,\gamma)$ и обладающих градиентом $\widetilde{\nabla_H f}$ из пространства $L^p(U,H,\gamma)$ H-значных отображений на U в следующем смысле: для каждого $h\in H$ функция f абсолютно непрерывна на почти всех прямых параллельных h, причем почти всюду имеет место равенство $\partial_h f = (\widetilde{\nabla_H f},h)_H$. В случае, когда U — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, аналогичные конструкции приводят к весовым соболевским пространствам. Хорошо известно, что даже в конечномерном случае существуют меры μ, для которых оба пространства корректно определены, но при этом пространство $H^{p,1}(U,\mu)$ оказывается шире пространства $W^{p,1}(U,\mu)$, данный вопрос подробно обсуждается, например, в работе В.В. Жикова[27]. В недавней работе М. Хино[20] было доказано,

[27]В.В. Жиков *О весовых соболевских пространствах.* Матем. сб., 1998, Т. 189, №8, С. 27–58.

что для каждого H-выпуклого H-открытого подмножества U указанные пространства совпадают. Результат Хино также показывает, что множество функций, допускающих продолжение на все пространство, всюду плотно в $H^{p,1}(U,\gamma)$. Хорошо известно, что всякая функция из класса Соболева на ограниченном выпуклом множестве в $\mathbb{R}^n$ продолжается до функции на всем пространстве из того же класса Соболева. Аналогичное утверждение верно и для весовых классов Соболева с достаточно регулярными весами, например гауссовскими. В случае бесконечномерного пространства с гауссовской мерой существование продолжения для H-липшицевых функций было доказано в работе А.С. Устюнеля и М. Закая[28], а для H-липшицевых отображений со значениями в гильбертовом пространстве в работе В.И. Богачева[29]. Тем не менее, как оказалось, в случае соболевских пространств $H^{p,1}(U,\gamma)$ на H-выпуклых H-открытых подмножествах бесконечномерного пространства ситуация меняется. Основным результатом этой главы является следующая теорема, дающая отрицательный ответ на вопрос, долго остававшийся открытым.

Теорема 2. В пространстве $\mathbb{R}^\infty$ есть выпуклое борелевское H-открытое множество K положительной γ-меры со следующим свойством: для каждого $p \in [1,+\infty)$ в классе $W^{p,1}(K,\gamma)$ есть функция, не имеющая продолжений до функции класса $W^{p,1}(\gamma)$. Можно также найти выпуклый компакт K положительной меры с этим же свойством.

Доказательство основано на оригинальной конструкции, использующей некоторые идеи из работы Ю.Д. Бураго и В.Г. Мазьи[30] для оценки снизу нормы продолжения в пространстве $W^{1,1}(\gamma)$ и следующей лемме.

Лемма. Если множество борелевское V таково, что для каждой функции f из $W^{p,1}(V,\gamma)$ при некотором $p > 1$ есть продолжение $g \in W^{p,1}(\gamma)$,

[28]A.S. Üstünel, M. Zakai *Extension of Lipschitz functions on Wiener space.* New Trends in Stochastic Analysis, Proc. of the Taniguchi Int. Symp., eds. D.Elworthy, World Scientific, 1996, P. 465–470.

[29]V.I. Bogachev *Extensions of H-Lipschitzian mappings with infinite-dimensional range.* Inf. Dim. Anal., Quantum Probab. Related Topics, 1999, V. 2, №3, P. 461–474.

[30]Ю.Д. Бураго, В.Г. Мазья *Некоторые вопросы теории потенциала и теории функций для областей с нерегулярными границами.* Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1967, Т. 3, С. 3–152.

то найдется такое продолжение $g_f \in W^{p,1}(\gamma)$, что $\|g_f\|_{p,1} \le C\|f\|_{p,1,V}$ с некоторой общей постоянной C.

Отметим, что остается открытым вопрос о существовании соболевских продолжений на все пространство соболевских функций на шаре гильбертова пространства.

Глава 3.

Третья глава посвящена изучению дифференцируемости меры μ в смысле Скорохода вдоль направления h и такого свойства меры μ, как абсолютная непрерывность всех функций $t \mapsto \mu(A+th)$, $A \in \mathcal{B}(X)$. В работе С.В. Фомина[9] было введено следующее определение: борелевская мера μ на локально выпуклом пространстве X называется дифференцируемой вдоль вектора h, если для каждого множества $A \in \mathcal{B}(X)$ существует конечный предел

$$d_h\mu(A) = \lim_{t\to 0} \frac{\mu(A+th) - \mu(A)}{t}.$$

Другой вид дифференцируемости мер был предложен А.В. Скороходом[12], который ввел следующее определение: борелевская мера μ на локально выпуклом пространстве X называется дифференцируемой вдоль вектора h, если для каждой ограниченной непрерывной функции f на X функция $t \mapsto \int_X f(x+th)\,d\mu$ дифференцируема. Такие свойства в идейном отношении тесно связаны со свойствами соболевских функций, ибо последние обладают версиями, локально абсолютно непрерывными вдоль направлений из подпространства Камерона–Мартина. Однако меры, рассматриваемые в этой главе, в бесконечномерном случае уже могут быть взаимно сингулярными с гауссовскими. Тем самым здесь речь идет о развитии и приложении методов и идей первых двух глав. Другие приложения связаны с рассмотрением классов функций ограниченной вариации на бесконечномерных пространствах с мерами.

В случае конечномерного пространства $\mathbb{R}^n$ мера μ с плотностью ϱ дифференцируема в смысле Фомина в точности тогда, когда ϱ входит в класс Соболева $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$; в свою очередь, дифференцируемость в смысле Скорохода эквивалентна включению ϱ в класс $BV(\mathbb{R}^n)$ функций ограниченной вариации. В работе[23] было доказано, что дифференцируемость в смысле Скорохода также допускает характеризацию через свойства функций $t \mapsto \mu(A + th)$, а именно, мера μ дифференцируема в смысле Скорохода вдоль вектора h тогда и только тогда, когда все функции $t \mapsto \mu(A + th)$ липшицевы. В статье В.И. Богачева и О.Г. Смолянова[31] был поставлен вопрос об изучении такого свойства меры μ, как абсолютная непрерывность всех функций $t \mapsto \mu(A + th)$, где A — борелевское множество. В частности, с тех пор было неизвестно, можно ли в определении дифференцируемости в смысле Скорохода заменить условие липшицевости функций $t \mapsto \mu(A + th)$ на их абсолютную непрерывность. Основной отрицательный результат этой главы заключается в следующей теореме.

Теорема 3. Существует такая вероятностная борелевская мера μ на прямой, что для всякого борелевского множества A числовая функция $\varphi_A(t) = \mu(A + t)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0, 1]$, но при этом мера μ не является дифференцируемой в смысле Скорохода.

Доказательство основано на результатах работы В.И. Богачева[23] и построении искомой вероятностной меры с плотностью, заданной конструктивно, для которой удается проверить абсолютную непрерывность функций $t \mapsto \mu(A + t)$. Также в этой главе получены следующие характеризации дифференцируемости в смысле Скорохода.

Теорема 4. Радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве X дифференцируема по Скороходу вдоль вектора h тогда и только тогда, когда отображение $t \mapsto \mu_{th}$ со значениями в банаховом пространстве борелевских мер с вариационной нормой абсолютно непрерывно на отрезке $[0, 1]$.

[31] В.И. Богачев, О.Г. Смолянов *Аналитические свойства бесконечномерных распределений.* Успехи матем. наук, 1990, Т. 45, №3, С. 3–83.

Теорема 5. Радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве X дифференцируема по Скороходу вдоль вектора h тогда и только тогда, когда для каждого борелевского множества A функция $\mu_{th}(A)$ абсолютно непрерывна на всей прямой в следующем смысле: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого конечного набора дизъюнктных отрезков $[s_1, t_1], \ldots, [s_k, t_k]$ с общей длиной $\sum_{i=1}^k |t_i - s_i| < \delta$ выполняется неравенство $\sum_{i=1}^k |\mu_{t_i h}(A) - \mu_{s_i h}(A)| < \varepsilon$.

Из теоремы 3 явствует, что это свойство строго сильнее абсолютной непрерывности на каждом отрезке. Разумеется, для функций не такого специального вида неэквивалентность глобальной и локальной абсолютной непрерывности очевидно.

Вопросы продолжения соболевских функций и функций ограниченной вариации с бесконечномерных областей, тесно связанные с дифференцируемостью мер по Скороходу, весьма актуальны для исследования бесконечномерных краевых задач.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.И. Богачеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Глава 1

Приближение векторных полей

1.1 Определения и примеры

Напомним некоторые основные определения. Пусть X – локально выпуклое пространство, а X^* – двойственное ему пространство линейных функционалов. Радоновская мера γ на X называется центрированной гауссовской мерой если для каждого $l \in X^*$ случайная величина $x \mapsto l(x)$ на (X, γ) является центрированной гауссовской, т.е.

$$\int_X \exp(i\lambda l)\, d\gamma = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2 \int_X l^2\, d\gamma\right).$$

Мы будем иметь дело с гауссовской мерой γ на счетном произведении прямых $X = \mathbb{R}^\infty$, равной счетному произведению стандартных гауссовских мер на прямой. Рассматриваемые далее объекты и вопросы инвариантны относительно измеримых линейных изоморфизмов локально выпуклых пространств с центрированными радоновскими гауссовскими мерами (см. [4], [6]), поэтому ввиду известного результата Цирельсона об изоморфизме все доказанное ниже остается в силе для радоновских гауссовских мер на локально выпуклых пространствах, не сосредоточенных на конечномерных пространствах. Тем самым аналогичные результаты верны для классического пространства Винера или для бесконечномерной гауссовской меры на гильбертовом пространстве.

Напомним, что пространством Камерона–Мартина меры γ служит гильбертово пространство $H = l^2$ с его обычной нормой $h \mapsto |h|_H$, где

$|h|_H = \left(\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2\right)^{1/2}$, $h = (h_i)$; по определению пространство Камерона–Мартина состоит из всех векторов, сдвиги на которые приводят к эквивалентным мерам. Пусть $\{e_n\}$ — стандартный ортонормированный базис в H. Обозначим через $\mathcal{FC}_b^{\infty}$ класс всех функций на $\mathbb{R}^{\infty}$ вида

$$f(x) = f_0(x_1, \ldots, x_n), \quad f_0 \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Градиент f вдоль H задается равенством $\nabla f = (\partial_{x_n} f)_{n=1}^{\infty}$ и представляет собой отображение со значениями в H. Обозначим через $\|\cdot\|_p$ стандартную норму в $L^p(\gamma)$; такое же обозначение используется для нормы в пространстве $L^p(\gamma, H)$ измеримых отображений v со значениями в H, для которых $|v|_H \in L^p(\gamma)$. Для $p \in [1, +\infty)$ класс Соболева $W^{p,1}(\gamma)$ определяется как пополнение $\mathcal{FC}_b^{\infty}$ по соболевской норме

$$\|f\|_{p,1} = \|f\|_p + \|\nabla f\|_p.$$

Всякая функция f из $W^{p,1}(\gamma)$ имеет соболевский градиент $\nabla f \in L^p(\gamma, H)$, компоненты $\partial_{x_n} f$ которого удовлетворяют тождеству

$$\int \varphi(x) \partial_{x_n} f(x)\, \gamma(dx) = -\int [f(x) \partial_{x_n} \varphi(x) - x_n f(x) \varphi(x)]\, \gamma(dx)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{FC}_b^{\infty}$. Приведенное определение класса $W^{p,1}(\gamma)$ равносильно следующему (см. [4], [6]): $f \in W^{p,1}(\gamma)$ в точности тогда, когда $f \in L^p(\gamma)$ и для каждого фиксированного n функция f имеет версию (т.е. почти всюду равную функцию) $\widetilde{f}$, для которой функции $t \mapsto \widetilde{f}(x + te_n)$, где $x \in X$, абсолютно непрерывны на отрезках, причем отображение ∇f, у которого компонента с номером n есть $\partial_{x_n} \widetilde{f}$, входит в $L^p(\gamma, H)$; здесь $\partial_{x_n} \widetilde{f}(x)$ задается как производная в нуле функции $t \mapsto \widetilde{f}(x + te_n)$ (можно показать, что она существует γ-п.в.). На самом деле определение соболевского класса не зависит от выбора ортонормированного базиса в пространстве Камерона–Мартина, см. [4], [6].

Под измеримым векторным полем на (X, γ) мы будем понимать борелевское отображение $X \to H$, где, как и выше, H – пространство

Камерона–Мартина меры γ. Для отображений со значениями в гильбертовом пространстве и, в частности, для векторных полей на X, соболевские пространства определяются совершенно аналогично.

Будем называть γ–измеримую функцию f H-липшицевой, если она удовлетворяет следующему условию:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|_H \quad \text{для всех } h \in H \ \gamma\text{-п.в.}$$

Хорошо известно, что функции с указанным свойством лежат в каждом $W^{p,1}(\gamma)$, см. [4], [6], [39]. В качестве естественного нетривиального примера H-лишицевой функции можно привести, так называемую, функцию расстояния до множества положительной меры A:

$$d_H(x) = \inf\bigl\{|x-y|_H,\ y \in A\bigr\},\ \text{где } |x-y|_H := \infty,\ \text{если } x - y \notin H.$$

1.2 Теорема Альберти для винеровского пространства

Основной результат данной главы заключается в следующей теореме.

Теорема 1.2.1. *Пусть $v\colon\ X \to H$ – борелевское векторное поле. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\theta > 0$ найдется H-липшицева функция f, обладающая следующими свойствами:*

(1) $\gamma\bigl(x\colon\ \nabla f(x) \neq v(x)\bigr) < \varepsilon$,

(2) $\sup_{x\in X} |f(x)| < \theta$,

(3) *для каждого $p \in [1,\infty]$ справедливо неравенство*

$$\|\nabla f\|_p \leq C\varepsilon^{1/p-1}\|v\|_p,$$

где C– некоторая универсальная константа, мы полагаем $\|v\|_p = \infty$, если соответствующий интеграл бесконечен.

Доказательство. Ввиду теоремы об изоморфизме пространств с радоновскими гауссовскими мерами и инвариантности определения H-липшицевых функций (см. [4]) достаточно рассмотреть случай $X = \mathbb{R}^\infty$,

$\gamma = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \gamma_n^1$, где γ_n^1 – стандартные гауссовские меры на $\mathbb{R}^1$. Некоторые из дальнейших рассуждений сходны с теми, которые применяются в конечномерном случае в [21], но основное отличие состоит в том, что построение функции f с требуемыми свойствами основано на использовании некоторых вспомогательных оценок из приводимой ниже леммы, в которых константы не зависят от размерности. Как будет видно из дальнейшего, многомерный случай в некотором смысле сводится к одномерному.

Лемма 1.2.1. *Пусть γ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$, v – борелевское векторное поле на $\mathbb{R}^n$, η, θ и ε – положительные числа. Тогда найдется липшицева функция f со следующими свойствами:*

(1) $\gamma\bigl(x\colon |\nabla f(x) - v(x)| > \eta\bigr) < \varepsilon$,

(2) $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| < \theta$,

(3) *для каждого $p \in [1,\infty]$ справедливо неравенство*

$$\|\nabla f\|_p \le K\varepsilon^{1/p-1}\|v\|_p,$$

где K – некоторая универсальная константа, не зависящая от n, при этом, как и выше, $\|v\|_p = \infty$, если соответствующий интеграл бесконечен.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать далее, что $\varepsilon < 1/4$. Для заданного положительного ε можно найти число $r \ge 0$, для которого $\gamma(B_0) < \varepsilon/8$, $\gamma(B_1) > 0$, где $B_0 = \{x\colon |v(x)| > r\}$, $B_1 = \{x\colon |v(x)| \ge r\}$. По теореме Лузина существует непрерывное векторное поле с компактным носителем v_1, для которого

$$\gamma(C) < \min\{\gamma(B_1), \varepsilon/8\}, \quad \text{где} \quad C = \{x\colon v_1(x) \ne v(x)\}.$$

Определим поле v_0 следующим образом:

$$v_0(x) = \begin{cases} v_1(x), & \text{если } |v_1(x)| \le r \\ rv_1(x)/|v_1(x)|, & \text{если } |v_1(x)| > r. \end{cases}$$

Векторное поле v_0 непрерывно, обращается в нуль вне некоторого компакта и совпадает с исходным векторным полем v вне множества $C \cup B_0$, γ-мера которого не превышает $\gamma(B_0) + \gamma(C) < \varepsilon/4$. Для каждого числа $p \in [1, \infty)$ выполняется следующая цепочка неравенств:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v_0(x)|^p \, \gamma(dx) \le \int_{\mathbb{R}^n \setminus (B_0 \cup C)} |v(x)|^p \, \gamma(dx) + \int_{(B_0 \cup C)} r^p \, \gamma(dx) \le$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^n \setminus (B_0 \cup C)} |v(x)|^p \, \gamma(dx) + 2\gamma(B_1) r^p \le$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^n \setminus (B_0 \cup C)} |v(x)|^p \, \gamma(dx) + 2 \int_{B_1} |v(x)|^p \, \gamma(dx) \le 3 \int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^p \, \gamma(dx).$$

Нетрудно заметить, что аналогичная оценка выполняется и для $\| \quad \|_\infty$. Обозначим плотность меры γ через ϱ. Выберем замкнутый куб K, для которого $\gamma(\mathbb{R}^n \setminus K) < \varepsilon/16$, и найдем $\delta > 0$ такое, что для всех $x, y \in K$ таких, что $|x - y| < \delta$, выполняется неравенство $|v_0(x) - v_0(y)| < \eta/2$. Пусть $\{Q_i\}_{i \in I}$ — такой конечный набор попарно непересекающихся замкнутых кубов, лежащих внутри K, что выполняются неравенства:

$$\operatorname{diam}(Q_i) < \delta, \quad \gamma\Big(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i \in I} Q_i\Big) < \varepsilon/8.$$

Наконец, для каждого $i \in I$ выберем замкнутый куб $Q_i^0 \subset \operatorname{int}(Q_i)$ так, чтобы

$$\gamma(Q_i \setminus Q_i^0) \le (\varepsilon/8)\gamma(Q_i).$$

Следовательно,

$$\gamma\Big(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i \in I} Q_i^0\Big) < \varepsilon/4.$$

Теперь для каждого $i \in I$ зафиксируем функцию $\varphi_i \in C_0^\infty(\operatorname{int}(Q_i))$ со следующими свойствами: $0 \le \varphi_i \le 1$, $\varphi_i = 1$ на Q_i^0. Далее, для каждого куба Q_i найдем такую точку x_i, что $|v_0(x_i)| = \inf_{x \in Q_i} |v_0(x)|$, и положим $w_i := v_0(x_i)$. Для сокращения записи введем также вектор $z_i = w_i/|w_i|$ (если $|w_i| = 0$, то $z_i := 0$); длину ребра куба Q_i^0 обозначим через d_i.

Определим вспомогательное семейство функций ψ_ε на $\mathbb{R}^1$ следующим образом: на отрезке $[0, 1+\varepsilon)$ положим

$$\psi_\varepsilon(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0,1) \\ 1-(t-1)/\varepsilon, & \text{если } t \in [1, 1+\varepsilon), \end{cases}$$

а затем продолжим ψ_ε на $\mathbb{R}^1$ с периодом $1+\varepsilon$. Далее будем предполагать, что $|w_i| > 0$ (как будет видно из приводимых ниже рассуждений, случай $|w_i| = 0$ тривиален). Теперь выберем числа $m_i \in \mathbb{N}$, для которого выполняется следующее условие: для всяких двух точек $x, y \in Q_i$ таких, что $|x-y| \le 2/m_i$, справедливо неравенство $\varrho(x) \le 2\varrho(y)$. При необходимости увеличивая m_i, мы можем также считать, что выполняются неравенства

$$m_i^{-1}\|\nabla\varphi_i\|_\infty \le \gamma(Q_i), \quad m_i^{-1} \le \min\Bigl\{\frac{\varepsilon d_i}{2}, \frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2|w_i|+1}\Bigr\}.$$

Для каждого $i \in I$ определим функцию f_i, следующим образом:

$$f_i(x) = |w_i| m_i^{-1}\varphi_i(x)\psi_\varepsilon(m_i\langle z_i, x\rangle).$$

По построению для модуля функции f_i справедливо неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f_i(x)| \le \theta/2.$$

Для градиента функции f_i мы получаем следующее выражение:

$$\nabla f_i(x) = |w_i| m_i^{-1}\psi_\varepsilon(m_i\langle z_i, x\rangle)\nabla\varphi_i(x) + \varphi_i(x)\psi_\varepsilon'(m_i\langle z_i, x\rangle)w_i.$$

Поскольку $\varphi_i = 1$ на Q_i^0, то нетрудно заметить, что в силу выбора m_i будут выполняться следующие цепочки неравенств:

$$\gamma\bigl(x\in Q_i\colon \nabla f_i(x) = w_i\bigr) \ge \gamma(Q_i^0) - \gamma\bigl(x\in Q_i^0\colon \nabla f_i(x) \ne w_i\bigr) \ge (1-4\varepsilon)\gamma(Q_i^0),$$

$$\biggl(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_i(x)|^p\,\gamma(dx)\biggr)^{1/p} \le A_1 + A_2,$$

где

$$A_1 := |w_i| m_i^{-1}\biggl(\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_\varepsilon(m_i\langle z_i, x\rangle)\nabla\varphi_i(x)|^p\gamma(dx)\biggr)^{1/p},$$

а также

$$A_2 := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_i(x)\psi'_\varepsilon(m_i\langle z_i, x\rangle)w_i|^p \gamma(dx)\right)^{1/p}.$$

В свою очередь, для A_1 и A_2 справедливы следующие оценки:

$$A_1 \le |w_i| m_i^{-1} \|\nabla\varphi_i\|_\infty \le |w_i|\gamma(Q_i) \le \varepsilon^{1/p-1}\left(\int_{Q_i} |v_0(x)|^p\,\gamma(dx)\right)^{1/p},$$

$$A_2 \le \Big(\int_{Q_i^0} \mathrm{I}_{\{\psi'_\varepsilon(m_i\langle z_i,x\rangle)=1\}} |\varphi_i(x)\psi'_\varepsilon(m_i\langle z_i, x\rangle)w_i|^p \gamma(dx)\Big)^{1/p} +$$

$$+\left(\int_{Q_i^0} \mathrm{I}_{\{\psi'_\varepsilon(m_i\langle z_i,x\rangle)=1/\varepsilon\}} |\varphi_i(x)\psi'_\varepsilon(m_i\langle z_i, x\rangle)w_i|^p \gamma(dx)\right)^{1/p} + \gamma(Q_i \backslash Q_i^0)^{1/p}|w_i|\varepsilon^{-1} \le$$

$$\le \gamma(Q_i)^{1/p}|w_i| + (2\varepsilon\gamma(Q_i))^{1/p}|w_i|\varepsilon^{-1} + \gamma(Q_i)^{1/p}|w_i|\varepsilon^{1/p-1} \le$$

$$\le 4\varepsilon^{1/p-1}\left(\int_{Q_i} |v_0(x)|^p\,\gamma(dx)\right)^{1/p}.$$

Положим $f := \sum_{i\in I} f_i$. Тогда с учетом оценок, полученных для v_0, мы имеем

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p\,\gamma(dx)\right)^{1/p} \le 15\varepsilon^{1/p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^p\,\gamma(dx)\right)^{1/p},$$

$$\gamma\big(x\colon\ |\nabla f(x) - v(x)| > \eta\big) \le \varepsilon/4 + 3\varepsilon\sum_{i\in I}\gamma(Q_i^0) < 4\varepsilon,$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| < \theta,$$

что в силу произвольности $\eta, \theta, \varepsilon$ доказывает утверждение леммы. □

Перейдем к доказательству основной теоремы. Заметим, что найдется такое $r > 0$, что $\gamma(A_0) < \varepsilon/2$, где $A_0 = \big(x\colon\ |v(x)| > r\big)$. Поэтому ниже мы будем предполагать, что для всех x справедливо неравенство $|v(x)| \le r$ (в противном случае заменим v на $I_{X\backslash A_0}v$). Кроме того, можно считать также, что $\|v\|_1 > 0$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – стандартный базис в пространстве l^2, скалярное произведение двух векторов a и b из этого пространства будем обозначать через $\langle a, b\rangle$. Далее по индукции построим последовательность функций $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ и последовательность ограниченных векторных полей

$\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$. Пусть $f_0 = 0$, $v_0 = v$. Предположим, что функции $f_0, \ldots, f_{n-1}$ и векторные поля $v_0, \ldots, v_{n-1}$ уже построены. Пусть

$$\eta_n = \min\{\|v\|_1/4^{n+3}, 1/4^{n+3}\}, \quad \theta_n = \theta/4^n.$$

Найдем $m_1(n) \in \mathbb{N}$, для которого $\gamma(A_n) < \varepsilon/2^{n+3}$, где

$$A_n := \Bigl(x\colon \ \Bigl|v_{n-1}(x) - \sum_{i=1}^{m_1(n)} \langle v_{n-1}(x), e_i\rangle e_i\Bigr| > \eta_n/4\Bigr).$$

Пусть $\mathcal{F}_n$ – σ-алгебра, порожденная первыми n координатными функциями, условное математическое ожидание интегрируемой функции f относительно этой σ-алгебры будем обозначать через $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{F}_n]$. Теперь выберем $m_2(n) \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\gamma(B_n) < \varepsilon/2^{n+3}$, где

$$B_n := \Bigl(x\colon \ \Bigl|\sum_{i=1}^{m_2(n)} \Bigl(\langle v_{n-1}, e_i\rangle - \mathbb{E}[\langle v_{n-1}, e_i\rangle \mid \mathcal{F}_{m_2(n)}]\Bigr)e_i\Bigr| > \eta_n/4\Bigr).$$

Пусть $m(n) = \max\{m_1(n), m_2(n)\}$. Имеется такое ограниченное борелевское векторное поле $v_{n-1,0}$ на $\mathbb{R}^{m(n)}$, что γ-п.в.

$$\sum_{i=1}^{m_1(n)} \mathbb{E}[\langle v_{n-1}, e_i\rangle \mid \mathcal{F}_{m_2(n)}]e_i = v_{n-1,0}(x_1, \ldots, x_{m(n)}).$$

Воспользовавшись леммой, найдем такую липшицеву функцию $f_{n,0}$, что

$$\gamma(C_n) < \varepsilon/2^{n+3},$$

$$\|\nabla f_{n,0}\|_p < K(\varepsilon/2^{n+3})^{1/p-1}\|v_{n-1}\|_p, \quad p \in [1, \infty],$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{m(n)}} |f_{n,0}(x)| < \theta_n,$$

где

$$C_n := \Bigl(x \in \mathbb{R}^{\infty}\colon (x_1, \ldots, x_{m_n}) \in C_{n,0}\Bigr),$$

$$C_{n,0} := \Bigl(x \in \mathbb{R}^{m(n)}\colon \ |\nabla f_{n,0}(x) - v_{n-1,0}(x)| > \eta_n/2\Bigr).$$

Положим

$$f_n(x) := f_{n,0}(x_1, \ldots, x_{m(n)}), \quad v_n := (v_{n-1} - \nabla f_n)I_{X \setminus (A_n \cup B_n \cup C_n)}.$$

Заметим, что по построению выполняются следующие неравенства:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} |f_n(x)| < \theta_n, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} |v_n(x)| < \eta_n, \quad n \geq 1,$$

$$\gamma(A_0) + \sum_{n=1}^{\infty}(\gamma(A_n) + \gamma(B_n) + \gamma(C_n)) < 2\varepsilon,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\nabla f_n\|_p \leq 8K\varepsilon^{1/p-1}\|v\|_p + 8K\varepsilon^{1/p-1}\sum_{n=1}^{\infty}\|v\|_1/2^n \leq 16K\varepsilon^{1/p-1}\|v\|_p,$$

причем для γ-п.в. $x \in \mathbb{R}^\infty \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_0 \cup A_n \cup B_n \cup C_n)$ справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \nabla f_n(x) = v(x).$$

Положим $f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Из приведенных выше оценок вытекает (напомним, что мы рассматриваем ограниченное v), что данный ряд сходится в каждом $W^{p,1}(\gamma)$, $p \in [0, \infty)$, а так как выполняется условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\nabla f_n\|_\infty \leq 16K\varepsilon^{-1}\|v\|_\infty < \infty,$$

то функция f является H-липшицевой, что в силу произвольности ε и θ доказывает исходное утверждение теоремы. □

В заключение остановимся еще на одном вопросе, относящемся к классам $W^{p,1}(\gamma)$. В работах [40] и [38] рассматривались различные связи между независимостью двух соболевских функций на винеровском пространстве и ортогональностью их градиентов, при этом в [40], [38] доказывается, что для некоторых специальных классов функций эти два свойства эквивалентны. В работе [40] приводится пример, показывающий, что из ортогональности градиентов двух функций X и Y γ-п.в. общем случае не следует их независимость, при этом ставится вопрос, верно ли обратное утверждение, т.е. влечет ли независимость двух функций из $W^{p,r}(\gamma)$ ортогональность их градиентов. Частичный ответ был дан в работе [38], где приведен пример двух функций X, Y для которых данная импликация неверна, однако в указанной работе функции X, Y лежат в $W^{2,1}_{loc}$

(см. [38]), но не лежат в $W^{2,1}$. Ниже мы приводим простой пример двух бесконечно дифференцируемых рациональных функций ξ и η на пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартной гауссовской мерой γ с плотностью p, для которых γ-п.в. выполнено неравенство $\langle \nabla\xi, \nabla\eta\rangle > 0$. Пусть

$$\xi_0(x, y, z) = (x + yz)/\sqrt{1 + z^2},$$

$$\eta_0(x, y, z) = (-xz + y)/\sqrt{1 + z^2}.$$

Можно заметить, что ξ_0 и η_0 имеют стандартное нормальное распределение и независимы. Это утверждение вытекает из следующей цепочки равенств, в которой используется сферическая инвариантность стандартной гауссовской меры на плоскости:

$$\int_{\mathbb{R}^3} I_{\{\xi_0\in A, \eta_0\in B\}}\, d\gamma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} p(z) \int_{\mathbb{R}^2} I_{\{(x+yz)/\sqrt{1+z^2}\in A, (-xz+y)/\sqrt{1+z^2}\in B\}} p(x)p(y)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \gamma^1(A)\gamma^1(B)p(z)\, dz = \gamma^1(A)\gamma^1(B).$$

Непосредственным вычислением проверяется, что

$$\nabla\xi_0 = (1/\sqrt{1 + z^2}, z/\sqrt{1 + z^2}, \eta_0/(1 + z^2)),$$

$$\nabla\eta_0 = (-z/\sqrt{1 + z^2}, 1/\sqrt{1 + z^2}, -\xi_0/(1 + z^2)).$$

Положим $\xi := \xi_0^2$, $\eta := -\eta_0^2$. Тогда

(1) функции ξ и η независимы как случайные величины на $(\mathbb{R}^3, \gamma)$, бесконечно дифференцируемы, причем их производные любого порядка имеют не более чем полиномиальный рост и задаются рациональными функциями,

(2) выполнено равенство $(\nabla\xi, \nabla\eta) = 4\xi_0^2\eta_0^2/(1 + z^2)^2$.

Следовательно, функции ξ и η обладают всеми требуемыми свойствами.

Глава 2

Продолжение соболевских функций

2.1 Основные определения

Пусть (X, γ) – локально выпуклое пространство с радоновской гауссовской мерой. Как и выше, обозначим через H пространство Камерона–Мартина меры γ. Если множества $(V - x) \cap H$ для всех $x \in V$ открыты в H, то V называют H-открытым (это свойство равносильно тому, что $V - x$ содержит шар из H для всякого $x \in V$, и слабее открытости V в X), а если все такие множества выпуклы, то V называют H-выпуклым. Последнее свойство слабее обычной выпуклости. Ниже мы будем предполагать, что множество V H-выпукло и H-открыто.

Имеется несколько естественных способов ввести класс Соболева на V. Первый способ состоит в рассмотрении класса $W^{p,1}(V, \gamma)$, равного пополнению $\mathcal{FC}_b^\infty$ относительно соболевской нормы $\|\cdot\|_{p,1,V}$ с показателем интегрируемости p, вычисленной по сужению γ на V. Этот класс лежит в классе $H^{p,1}(V, \gamma)$, состоящем из функций f на V, входящих в $L^p(V, \gamma)$ и обладающих градиентом $\widetilde{\nabla_H f}$ из пространства $L^p(V, H, \gamma|_V)$ в следующем смысле: для каждого $h \in H$ функция f абсолютно непрерывна на почти всех прямых параллельных h, при этом почти всюду имеет место равенство $\partial_h f = (\widetilde{\nabla_H f}, h)_H$. На классе $H^{p,1}(V, \gamma)$ естественным образом вводится соболевская норма $\|\cdot\|_{p,1,V}$, задаваемая ограничением γ на V:

$$\|f\|_{p,1,V} = \left(\int_V |f|^p\, d\gamma\right)^{1/p} + \left(\int_V |\widetilde{\nabla_H f}|^p\, d\gamma\right)^{1/p}.$$

В работе М. Хино [31] было показано, что для для H-выпуклого H-открытого множества V указанные подходы приводят к одному и тому же классу функций. Отметим, что в работе [31] для класса $H^{2,1}(V,\gamma)$ использовалось обозначение $W^{1,2}(V)$, а утверждение о совпадении указанных пространств было сформулировано в терминах плотности гладких цилиндрических функций в классе $H^{2,1}(V,\gamma)$. Результат Хино также показывает, что множество функций, допускающих соболевское продолжение на все пространство, всюду плотно в $H^{p,1}(V,\gamma)$. Известно, что функции, удовлетворяющие условию Липшица вдоль пространства H также допускают продолжение на все пространство с тем же свойством (см. [23], [41]). Из этого факта можно получить, что функции из $H^{p,1}(V,\gamma)$ с существенно ограниченным градиентом допускают продолжение до функции, лежащей во всех пространствах $W^{p,1}(\gamma)$ (доказательство сообщено В.И. Богачевым). Здесь важно отметить, что данное утверждение не является непосредственным следствием соответствующего утверждения о продолжении H-липшицевых функций, основная трудность состоит в том, что существование H-липшицевой модификации, к которой можно было бы применить результаты статьи [23], известно для соболевских функций с существенно ограниченным градиентом, определенных на всем пространстве, см. [25], но не для функций из $H^{p,1}(V)$. Конструкция H-липшицевой модификации из работы [25] существенно опирается на приближение исходной функции с помощью условных математических ожиданий относительно σ-алгебр, порожденных конечными наборами координатных функций, поэтому непосредственно не переносится на случай функций, определенных лишь на подмножестве пространства X.

Доказательство. Пусть $\|\widetilde{\nabla_H f}\|_\infty = C$. Предположим, что $|f(x)| \leq N$ для некоторого $N > 0$. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H. Обозначим через H_n линейную оболочку векторов $e_1, \ldots, e_n$. Используя условные меры, нетрудно показать, что для каждого n существует версия f_n такая, что

$$|f_n(x+h)-f_n(x)| \leq C|h|_H \text{ для всех} h \in H_n \text{ и } x \in V \text{ таких, что } x+h \in V$$

Далее, легко построить измеримую функцию g_n, продолжающую f_n на все пространство X такую, что $|g_n(x)| \leq N$ и

$$|g_n(x+h)-g_n(x)| \leq C|h|_H \text{ для всех } x \in X, h \in H_n.$$

Переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что последовательность средних арифметических $(g_1+\cdots+g_n)/n$ сходится в $L^2(\gamma)$ к некоторой функции $g \in L^2(\gamma)$. Нетрудно убедиться, что $g \in W^{2,1}(\gamma)$ и $|\nabla_H g| \leq C$, следовательно, g лежит во всех $W^{p,1}(\gamma)$. Теперь покажем, как избавиться от дополнительного условия $|f| \leq N$. Определим вспомогательные функции ψ_N следующим образом: $\psi_N(t) = t$ если $|t| < N$ и $\psi_N(t) = N \operatorname{sgn} t$ для $|t| \geq N$. Для каждой функции $\psi_N(f)$ мы можем найти продолжение g_N такое, что

$$g_N|_V = \psi_N(f)|_V, \ \|\nabla_H g_N\|_\infty \leq C, \quad \|g_N\|_\infty \leq N.$$

Ниже через $I(g)$ мы будем интеграл от функции g по мере γ. Предположим, что $|I(g_N)| \to \infty$. Тогда из сходимости $g_N(x) \to f(x)$ на V мы получаем, что $|g_N - I(g_N)| \to \infty$ почти всюду на V, однако из неравенства Пуанкаре (см. [4]) вытекает, что интегралы от функций $|g_N - I(g_N)|$ равномерно ограничены и, следовательно, мы пришли к противоречию. Следовательно, величины $I(g_N)$ ограничены некоторой константой и снова применяя неравенство Пуанкаре получаем ограниченность последовательности $\{g_N\}$ в $L^2(\gamma)$. Для завершения доказательства достаточно еще раз перейти к средним арифметическим и повторить рассуждения предыдущего шага.

2.2 Конструкция H-открытого H-выпуклого множества и соболевской функции без продолжения на все пространство

Ниже строится пример множества V и функции f из $W^{p,1}(V,\gamma)$, не имеющей соболевского продолжения на все пространство. Отметим, что можно ввести более узкие классы Соболева на V, допускающие продолжения. Например, в пространстве $W^{p,1}(V,\gamma)$ можно взять замыкание $W_0^{p,1}(V,\gamma)$ множества функций из $W^{p,1}(\gamma)$ с компактным носителем в V; функции из $W_0^{p,1}(V,\gamma)$, продолженные нулем вне V, входят в $W^{p,1}(\gamma)$. Для некоторых очень простых множеств V (скажем, для полупространств) легко явно задать оператор продолжения. Неясно, бывают ли существенно бесконечномерные области V, для которых продолжения имеют все соболевские функции.

Нам понадобится следующий простой факт, который верен в значительно более общей ситуации, как показано Е.А. Ребровой, см. [7].

Лемма 2.2.1. *Если множество V таково, что для каждой функции f из $W^{p,1}(V,\gamma)$ при некотором $p>1$ есть продолжение $g\in W^{p,1}(\gamma)$, то найдется такое продолжение $g_f\in W^{p,1}(\gamma)$, что $\|g_f\|_{p,1}\le C\|f\|_{p,1,V}$ с некоторой общей постоянной C. Если это условие выполнено при $p=1$, то заключение верно с $g_f\in BV(\gamma)$.*

Доказательство. Для каждого $f\in W^{p,1}(V,\gamma)$ обозначим через $C(f)$ точную нижнюю грань чисел $C\ge 0$, для которых f имеет продолжение g с оценкой $\|g\|_{p,1}\le C\|f\|_{p,1,V}$. Заметим, что найдется продолжение с $C=C(f)$. Действительно, возьмем продолжения g_n, для которых

$$\|g_n\|_{p,1}\le (C(f)+n^{-1})\|f\|_{p,1,V}.$$

Если $p>1$, то пространство $W^{p,1}(\gamma)$ рефлексивно, поэтому можно перейти к подпоследовательности в $\{g_n\}$ со средними арифметическими, сходящимися в $W^{p,1}(\gamma)$, что и даст нужное продолжение.

Если $p = 1$, то по теореме Комлоша (см. [5]) можно найти подпоследовательность со средними арифметическими, сходящимися почти всюду. Это дает продолжение класса $BV(\gamma)$, ибо можно показать, что если функции f_j равномерно ограничены в $BV(\gamma)$ и сходятся п.в. к функции f, то $f \in BV(\gamma)$.

Итак, для каждого $f \in W^{p,1}(V, \gamma)$ имеется множество $E(f)$ всех продолжений с минимальной возможной нормой. Ясно, что это множество выпукло и замкнуто в $W^{p,1}(\gamma)$. При $p > 1$ оно состоит из одной точки из-за строгой выпуклости нормы в L^p. По теореме Бэра при некотором натуральном M имеет непустую внутренность в $W^{p,1}(V, \gamma)$ множество S_M таких $f \in W^{p,1}(V, \gamma)$, что $C(f) \le M$. Легко видеть, что за счет увеличения M можно найти такой шар с центром в нуле, откуда следует утверждение леммы. $\square$

Основной отрицательный результат данной главы состоит в следующем.

Теорема 2.2.1. *В пространстве $\mathbb{R}^\infty$ существует выпуклое борелевское H-открытое множество K положительной γ-меры со следующим свойством: для каждого $p \in [1, +\infty)$ в классе $W^{p,1}(K, \gamma)$ есть функция, не имеющая продолжений до функции класса $W^{p,1}(\gamma)$. Можно также найти выпуклый компакт K положительной меры с этим же свойством.*

Доказательство. Зафиксируем натуральное число m и рассмотрим в плоскости открытый ромб K_m с вершинами в точках $a = (m^2, 0)$, $b = (0, m)$, $c = -a$ и $d = -b$. Функция $f_m(x) = \max(1 - m^2|x - a|, 0)$, где $|z|$ — обычная норма на плоскости, липшицева. Оценим ее норму в пространстве $W^{p,1}(K_m, \gamma)$, где γ — стандартная гауссовская мера на плоскости с плотностью ϱ. Для этого заметим, что при $|x - y| \le \min(1, 1/|x|)$ выполнено неравенство

$$c_1 \le \varrho(x)/\varrho(y) \le c_2, \quad c_1 = e^{-1}, c_2 = e^{3/2}. \tag{2.2.1}$$

Мы имеем

$$|\nabla f_m(x)| = m^2 \quad \text{при } |x-a| < m^{-2}, \quad |\nabla f_m(x)| = 0 \quad \text{при } |x-a| > m^{-2}.$$

Область в K_m, где f_m отличается от нуля, представляет собой сектор, у которого угол при вершине в a имеет тангенс $1/m$. Поэтому в силу (2.2.1) выполнено неравенство

$$\|f_m\|_{p,1,K_m} \le c_3 \varrho(a)^{1/p} m^{2-5/p}, \tag{2.2.2}$$

где c_3 — некоторая универсальная постоянная. Теперь заметим, что если локально соболевская функция g является продолжением f_m на плоскость (или в случае $p=1$ продолжение входит в $BV(\gamma)$), то уже для открытого круга U с центром в a и радиусом $2m^{-2}$ выполняется оценка

$$\|g\|_{1,1,U} \ge c_4 m \|f\|_{1,1,K_m} \ge c_5 \varrho(a) m^{-2}, \tag{2.2.3}$$

где c_4 и c_5 — некоторые универсальные постоянные. В самом деле, ввиду неравенства (2.2.1) достаточно получить такого рода оценку для обычных соболевских норм относительно меры Лебега без гауссовского веса. Известно (см. [5]), что для всякой соболевской функции g в U имеет место равенство

$$\|\nabla g\|_{L^1(U)} = \int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t)\, dt,$$

где $E_t = \{x \in U\colon\ g(x) > t\}$, $P(E_t)$ — периметр множества E_t, при почти всех t равный $H_1(U \cap \partial E_t)$, где H_1 — одномерная мера Хаусдорфа (длина) и ∂E_t — граница множества E_t. Аналогичное равенство верно для функции f в K_m. Для функции $g \in BV(U)$ указанное равенство имеет вид

$$\|Dg\|(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t)\, dt,$$

где $\|Dg\|(U)$ — значение полной вариации векторной меры Dg (обобщенного градиента g) на множестве U. Можно заменить g функцией $\min(1, \max(g, 0))$ со значениями в $[0, 1]$, имеющей не большую соболевскую норму и продолжающей f. Поэтому можно рассматривать лишь значения $t \in [0,1]$. Теперь достаточно проверить, что для множеств $S_t = \{x \in K_m\colon\ f(x) > t\}$ имеется оценка

$$H_1(U \cap \partial E_t) \geq cmH_1(K_m \partial S_t)$$

с универсальной постоянной c. Множество $K_m \cap \partial S_t$ — дуга окружности радиуса $m^{-2}(1-t)$ с центром в a. Если множество ∂E_t выходит за пределы U, то длина $U \cap \partial E_t$ не меньше m^{-2}, а длина дуги $K_m \cap \partial S_t$ не больше cm^{-3}. Если же множество ∂E_t полностью лежит в U, то его длина также не меньше $cmH_1(K_m \cap \partial S_t)$, ибо E_t содержит весь сектор S_t.

Из оценок (2.2.2) и (2.2.3) мы получаем

$$\frac{\|g\|_{1,1,U}}{\|f_m\|_{p,1,K_m}} \geq c_6 \varrho(a)^{1-1/p} m^{5/p-4}$$

с универсальной постоянной c_6. В силу неравенства Гёльдера имеем

$$\frac{\|g\|_{p,1,U}}{\|g\|_{1,1,U}} \geq c_7 \varrho(a)^{1/p-1} m^{4/q}, \quad q = p/(p-1),$$

где c_7 также некоторая постоянная. Поэтому мы окончательно получаем

$$\frac{\|g\|_{p,1,U}}{\|f_m\|_{p,1,K_m}} \geq cm^{1/p}$$

с некоторой постоянной $c > 0$.

Теперь в бесконечномерном случае в качестве K возьмем пересечение произведения $\prod_{m=1}^{\infty} K_m$ с линейным подпространством L, состоящим из всех таких элементов $x = (x_m)$, что $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2}|x_m|^2 < \infty$, и имеющим полную меру; равенство $\gamma(L) = 1$ следует из того, что интеграл от x_m^2 равен 1. Это подпространство гильбертово относительно естественной нормы $\|x\|_L = \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2}|x_m|^2\right)^{1/2}$.

Для проверки H-открытости K достаточно установить открытость K в гильбертовом пространстве L, что делается так. Пусть $x = (x_m) \in K$. Предположим, что при каждом n найдется элемент $h^n = (h^n_m) \in L$, для которого $\|h^n\|_L < 1/n$ и $x + h^n \notin K$. Поскольку $x \in L$, то $|x_m| \leq m/4$ для всех m, начиная с некоторого номера m_1. Тогда $x_m + z \in K_m$, если $m \geq m_1$ и $|z| \leq m/4$, ибо K_m содержит шар радиуса m. Поэтому $x_m + h^n_m \in K_m$

при всех m и достаточно больших n, откуда $x+h^n \in K$ — противоречие. Ясно, что $\gamma(K) > 0$, так как гауссовские меры множеств K_m быстро стремятся к единице.

Каждая построенная выше функция f_m на плоскости порождает обозначаемую тем же символом функцию на пространстве $\mathbb{R}^\infty$, отождествляемом со счетной степенью плоскости, действующую по формуле

$$f_m(x) = f_m(x_m).$$

Мера γ на $\mathbb{R}^\infty$ также рассматривается как счетная степень стандартной гауссовской меры на плоскости. В силу леммы достаточно установить, что $C(f_m) \geq cm^{1/p}$. Остается заметить, что если функция $g \in W^{p,1}(\gamma)$ продолжает f_m, то при почти каждом фиксированном $y = (y_j)_{j\neq m}$ функция g_m оставшейся переменной x_m дает продолжение функции f_m и потому имеет место оценка

$$\int |\nabla g|^p \, d\gamma \geq c_0 m \int |\nabla f_m|^p \, d\gamma$$

с некоторой постоянной c_0, что дает требуемое. Если вместо H-открытости нужна компактность K, то можно взять выпуклый компакт $\prod_{m=1}^\infty \overline{K_m}$, где $\overline{K_m}$ — замыкание K_m. Отметим, что наше построение не дает явного примера функции без продолжения. $\square$

Замечание 2.2.1. Перейдя к сужению меры γ на гильбертово пространство L, мы получаем открытое в L выпуклое множество K положительной меры, на котором при каждом $p \in [1, +\infty)$ есть функция из класса $W^{p,1}(K,\gamma)$ без продолжений до функции из $W^{p,1}(\gamma)$. Ясно, что этот же пример можно реализовать и на подходящем большем весовом гильбертовом пространстве последовательностей, в котором K будет предкомпактно. При этом можно скомбинировать H-открытость K с относительной компактностью.

Для произвольной центрированной радоновской гауссовской меры γ на локально выпуклом пространстве X, имеющей бесконечномерное пространство Камерона–Мартина H, из доказанного следует существование

H-открытого выпуклого борелевского множества V положительной γ-меры и при всяком $p \in [1, +\infty)$ функции $f \in W^{p,1}(V, \gamma)$ без продолжений до функций класса $W^{p,1}(\gamma)$. Интересно было бы построить пример функции из пересечения всех $W^{p,1}(V, \gamma)$, не имеющей продолжения класса $W^{1,1}(\gamma)$.

Глава 3

Дифференцируемость в смысле Скорохода

3.1 Определения и примеры

Пусть X – локально выпуклое пространство, $\mathcal{B}(X)$ — его борелевская σ-алгебра и $\mathcal{M}(X)$ – пространство всех вещественных радоновских мер на X. Основные понятия, связанные с радоновскими мерами, можно найти в [5], а сведения о дифференцируемых мерах изложены в [6]. Напомним лишь, что радоновость меры μ означает, что для каждого $B \in \mathcal{B}(X)$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт K, что $|\mu|(B\backslash K) < \varepsilon$, где $|\mu|$ обозначает полную вариацию μ, т.е. $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, где μ^+ и μ^- – положительная и отрицательная части μ. Положим $\|\mu\| := |\mu|(X)$. Вариационная норма на $\mathcal{M}(X)$ задается формулой $\mu \mapsto \|\mu\|$. Сдвиг меры μ на вектор $h \in X$ обозначается символом μ_h и задается формулой $\mu_h(A) = \mu(A+h)$. Мера μ называется дифференцируемой вдоль вектора h по Скороходу [18], если отображение $t \mapsto \mu_{th}$ из $\mathbb{R}^1$ в $\mathcal{M}(X)$ дифференцируемо при наделении пространства мер $\mathcal{M}(X)$ слабой топологией. Это равносильно дифференцируемости в нуле функций

$$t \mapsto \int_X f(x - th)\, \mu(dx)$$

для всех ограниченных непрерывных функций f на X. Если же отображение $t \mapsto \mu_{th}$ дифференцируемо при наделении $\mathcal{M}(X)$ вариационной нормой, то μ называется дифференцируемой вдоль h по Фомину [19]. В случае $X = \mathbb{R}^1$ дифференцируемость Скорохода равносильна тому, что μ имеет плотность ϱ ограниченной вариации, а дифференцируемость Фомина равносильна существованию абсолютно непрерывной плотности ϱ с $\varrho' \in L^1(\mathbb{R}^1)$.

3.2 Характеризации дифференцируемости в смысле Скорохода

В работе [3] показано, что для общих локально выпуклых пространств дифференцируемость Скорохода равносильна липшицевости всех функций $t \mapsto \mu(A + th)$ при $A \in \mathcal{B}(X)$, а также равносильна липшицевости отображения $t \mapsto \mu_{th}$ со значениями в пространстве мер $\mathcal{M}(X)$. Как оказалось, в данном случае липшицевость можно заменить на абсолютную непрерывность, а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2.1. *Радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве X дифференцируема по Скороходу вдоль вектора h тогда и только тогда, когда отображение $t \mapsto \mu_{th}$ абсолютно непрерывно на отрезке* $[0, 1]$.

Доказательство. По определению абсолютной непрерывности мы получаем, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого конечного набора дизъюнктных отрезков $[s_1, t_1], \ldots, [s_k, t_k]$, лежащих в отрезке $[0, 1]$ и имеющих общую длину $\sum_{i=1}^k |t_i - s_i| < \delta$, выполняется неравенство $\sum_{i=1}^k \|\mu_{t_i h} - \mu_{s_i h}\| \leq \varepsilon$. Докажем, что тогда для каждого множества $A \in \mathcal{B}(X)$ функция $t \mapsto \mu(A + th)$ липшицева на отрезке $[0, 1]$. В самом деле, рассмотрим произвольное борелевское множество A, возьмем число $\varepsilon > 0$ и соответствующее ему $\delta > 0$, причем мы можем считать, что $\delta < 1$. Тогда для всякого конечного набора отрезков $[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k]$ (которые могут пересекаться), лежащих в отрезке $[0, 1]$ и имеющих общую длину $\sum_{i=1}^k |a_i - b_i| < \delta < 1$, мы можем выбрать числа

$c_1, c_2, \dots, c_k$ так, чтобы отрезки

$$[a_1 + c_1, b_1 + c_1], [a_2 + c_2, b_2 + c_2], \dots, [a_k + c_k, b_k + c_k]$$

также лежали в отрезке $[0, 1]$, но не пересекались. Тогда выполняются следующие неравенства:

$$\sum_{i=1}^{k} |\mu(A + a_i h) - \mu(A + b_i h)| \leq \sum_{i=1}^{k} \|\mu_{a_i h + c_i h} - \mu_{b_i h + c_i h}\| \leq \varepsilon.$$

По известной теореме Фихтенгольца (см., например, [16], с. 255) функция $t \mapsto \mu(A+th)$ на отрезке $[0, 1]$ является липшицевой. Следовательно, мера μ дифференцируема вдоль вектора h по Скороходу. Обратное утверждение легко выводится из того, что дифференцируемость радоновской меры по Скороходу равносильна липшицевости функций $t \mapsto \mu(A + th)$ для всех $A \in \mathcal{B}(X)$ с константой Липшица, не зависящей от A, см. [3]. $\square$

Следующий результат показывает, что дифференцируемость в смысле Скорохода вдоль вектора h также эквивалентна «глобальной» абсолютной непрерывности функций $t \mapsto \mu(A + th)$. Отметим, что в силу результата следующего параграфа, обычной абсолютной непрерывности в данном случае недостаточно.

Теорема 3.2.2. *Пусть h – фиксированный вектор локально выпуклого пространства X. Если радоновская мера μ на X обладает тем свойством, что для каждого множества $A \in \mathcal{B}(X)$ функция $\mu_{th}(A)$ абсолютно непрерывна на всей прямой, то есть для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого конечного набора дизъюнктных отрезков $[s_1, t_1], \dots, [s_k, t_k]$ с общей длиной $\sum_{i=1}^{k} |t_i - s_i| < \delta$ выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{k} |\mu_{t_i h}(A) - \mu_{s_i h}(A)| < \varepsilon$, то μ дифференцируема по Скороходу вдоль h.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную меру η, заданную соотношением

$$\eta(A) = \int_{\mathbb{R}} |\mu|(A + th)\gamma(\,dt),$$

где γ — стандартная гауссовская мера на прямой. Нетрудно заметить, что из указанного условия следует непрерывность мер $|\mu|$ и μ вдоль вектора h, откуда легко получить, что для каждого вещественного t мера μ_{th} абсолютно непрерывна относительно η. Из рассматриваемого условия также следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого конечного набора дизъюнктных отрезков $[s_1, t_1], \dots, [s_k, t_k]$ с общей длиной $\sum_{i=1}^{k} |t_i - s_i| < \delta$ и всякого борелевского множества A меры $\eta(A) < \delta$ выполняется неравенство

$$\Bigl|\sum_{i=1}^{k} \mu_{t_i h}(A) - \mu_{s_i h}(A)\Bigr| < \varepsilon.$$

В самом деле, рассуждая от противного, найдем соответствующую последовательность множеств и наборов отрезков, для которых указанное неравенство не выполняется. Пусть последовательность мер ν_n соответствует выбранной нами последовательности наборов отрезков. Нетрудно заметить, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ мера ν_n абсолютно непрерывна относительно η, а так как на каждом фиксированном множестве последовательность мер ν_n сходится к нулю, то мы получаем противоречие с уже ранее упоминавшимся утверждением о том, что

$$\lim_{t\to 0} \sup\{|\nu_n(B)|\colon\ B \in \mathcal{B}(X), \eta(B) \le t, n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Теперь продолжим линейный функционал, заданный на прямой, натянутой на вектор h, координатой t, до непрерывного линейного функционала l на всем пространстве. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ мы можем найти натуральные числа m, N такие, что для каждого борелевского множества

$$C \subset \{x \in X\colon\ l(x) \in \mathbb{R} \setminus [-N, N]\}$$

и всякого конечного набора дизъюнктных отрезков $[s_1, t_1], \dots, [s_k, t_k]$ с общей длиной $\sum_{i=1}^{k} |t_i - s_i| < 1/m$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} |\mu_{t_i h}(C) - \mu_{s_i h}(C)| < \varepsilon.$$

Теперь рассмотрим произвольное борелевское множество A, на котором функционал l ограничен, и произвольный набор отрезков

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_k, b_k],$$

лежащих в отрезке $[0, 1]$, с общей длиной меньше $1/m$, причем разные отрезки могут пересекаться. Тогда мы можем индуктивно построить возрастающую последовательность натуральных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_k$, такую, что все множества $A - c_i h$ попарно не пересекаются и лежат во множестве

$$\Big\{x \in X : \ l(x) \in \mathbb{R} \setminus [-N, N]\Big\},$$

в свою очередь, отрезки

$$[a_1 + c_1, b_1 + c_1], [a_2 + c_2, b_2 + c_2], \ldots, [a_k + c_k, b_k + c_k]$$

также попарно не пересекаются и при этом каждое следующее число c_r мы можем выбирать таким образом, чтобы выполнялось следующее условие: для каждого $q \leq r - 1$

$$|\mu_{c_q h + b_q h}(A - c_r h) - \mu_{c_q h + a_q h}(A - c_r h)| < \varepsilon/100k$$

и

$$|\mu_{c_r h + b_r h}(A - c_q h) - \mu_{c_r h + a_r h}(A - c_q h)| < \varepsilon/100k.$$

Теперь рассмотрим множество $E = \bigcup\limits_{n=1}^{k} (A - c_n h)$. Тогда по построению для множества E выполняется следующее условие: для каждого конечного набора дизъюнктных отрезков $[s_1, t_1], \ldots, [s_k, t_k]$ с общей длиной $\sum_{i=1}^{k} |t_i - s_i| < 1/m$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} |\mu_{t_i h}(E) - \mu_{s_i h}(E)| < 1/m.$$

Откуда уже легко получить, что

$$\sum_{i=1}^{k} |\mu(A + a_i h) - \mu(A + b_i h)| \leq 2/m.$$

Далее можно воспользоваться произвольностью множества A с указанным выше свойством и предельным переходом получить, что указанные неравенства верны для всякого борелевского множества, тогда по теореме Фихтенгольца мы получаем липшицевость функций вида $\mu(A+th)$, а следовательно и дифференцируемость по Скорходу меры μ вдоль h. $\square$

3.3 Конструкция недифференцируемой в смысле Скорохода вероятностной меры, для которой все функции $t \mapsto \mu(A+t)$ абсолютно непрерывны

В данном разделе изучается такое свойство меры μ, как абсолютная непрерывность всех функций вида $t \mapsto \mu(A+th)$. Данное свойство допускает несколько эквивалентных переформулировок, которые собраны в следующей теореме.

Теорема 3.3.1. *Пусть X — локально выпуклое пространство, $h \in X$, μ — конечная мера на $\mathcal{B}(X)$ (необязательно радоновская). Тогда следующие условиям равносильны:*

(1) *для каждого борелевского множества A функция $t \mapsto \mu(A+th)$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$;*

(2) *для всякого открытого множества $U \subset X$ функция $t \mapsto \mu(U+th)$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$;*

(3) *для всякой ограниченной борелевской функции f функция*

$$\varphi_f(t) = \int_X f(x)\,\mu_{th}(dx)$$

абсолютно непрерывна на $[0,1]$.

Доказательство. Ясно, что из (1) следует (2). Предположим, что выполнено (2), но для некоторого множества $B \in \mathcal{B}(X)$ функция $t \mapsto \mu(B+th)$ не является абсолютно непрерывной на $[0,1]$. Тогда найдутся последовательность конечных наборов отрезков

$$\big\{[a_1(n), b_1(n)], \ldots, [a_{m_n}(n), b_{m_n}(n)]\big\}_{n=1}^{\infty}$$

и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\Big|\sum_{i=1}^{m_n}[\mu(B + b_i(n)h) - \mu(B + a_i(n)h)]\Big| > \varepsilon$$

для каждого n и $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} |b_i(n) - a_i(n)| = 0$. В силу нашего предположения последовательность мер $\mu_n := \sum_{i=1}^{m_n}(\mu_{b_i(n)h} - \mu_{a_i(n)h})$ сходится к нулю на каждом открытом множестве. Тогда в силу теоремы Фихтенгольца–Дьедонне–Гротендика (см. [5], т. 2, с. 306) эта последовательность мер должна сходиться к нулю и на каждом борелевском множестве, что противоречит указанному выше неравенству. Итак, (1) и (2) равносильны.

Покажем, что из (1) следует (3) (обратная импликация тривиальна, ибо в качестве f можно брать индикаторы множеств). Если (3) не выполнено, то, рассуждая как и выше, находим ограниченную борелевскую функцию f, число $\varepsilon > 0$ и последовательность наборов отрезков

$$\big\{[a_1(n), b_1(n)], \ldots, [a_{m_n}(n), b_{m_n}(n)]\big\}_{n=1}^{\infty}$$

такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} |b_i(n) - a_i(n)| = 0$, но

$$\sum_{i=1}^{m_n} |\varphi_f(b_i(n)) - \varphi_f(a_i(n))| \geq \varepsilon.$$

В силу нашего предположения на каждом борелевском множестве последовательность мер

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{m_n}(\mu_{b_i(n)h} - \mu_{a_i(n)h})$$

сходится к нулю, а тогда из теоремы Никодима (см. [5], т. 1, с. 336) мы получаем, что все эти меры равномерно ограничены по вариации некоторой постоянной $C > 0$. Теперь найдем такую конечную линейную комбинацию g индикаторов борелевских множеств, что $|f(x) - g(x)| < \varepsilon(3C)^{-1}$ для всякого $x \in \mathbb{R}$. Ясно, что функция φ_g абсолютно непрерывна на $[0, 1]$. Тогда можно найти такое n_0, что

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} g(x)\, \mu_{n_0}(dx)\Big| < \varepsilon/3.$$

Так как
$$\Big|\int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x))\, \mu_{n_0}(dx)\Big| < C\varepsilon(3C)^{-1} = \varepsilon/3,$$
то получаем неравенство
$$\Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mu_{n_0}(dx)\Big| < \varepsilon,$$
которое противоречит выбору функции f. □

Замечание 3.3.1. Нетрудно показать, что если мера μ радонова и имеет компактный носитель, то указанные свойства равносильны также абсолютной непрерывности функций $t \mapsto \mu(K + th)$ для всех компактов K.

Перейдем к изложению основного отрицательного результата данной главы. Ниже мы построим пример неотрицательной конечной меры μ на на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, показывающий, что из абсолютной непрерывности функций $t \mapsto \mu(A + t)$ на отрезке $[0, 1]$ для всех $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ не следует их липшицевость. Положим $\varrho_m(x) = \sin^2 mx$. Тогда мы получаем, что $\varrho'_m(x) = m \sin 2mx$, вариация ϱ_m на отрезке $[0, 2\pi]$ равна $4m$,
$$\int_0^{2\pi} \sin^2 mx\, dx = \pi.$$
Пусть $\gamma = 2/3$, $N_m = 2^m$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ положим
$$\varrho(x) := (m^{\gamma+1} N_m)^{-1} \varrho_m(x), \quad x \in [2\pi a_m, 2\pi(a_m + N_m)],$$
где натуральные числа $\{a_m\}$ выбраны так, чтобы расстояния между указанными отрезками были больше 100π. В остальных точках прямой положим $\varrho(x) := 0$. Тогда
$$\int_{\mathbb{R}} \varrho(x)\, dx = \sum_{m=1}^{\infty} N_m \Big((m^{\gamma+1} N_m)^{-1} \int_0^{2\pi} \sin^2 mx\, dx \Big) = \sum_{m=1}^{\infty} (m^{\gamma+1})^{-1} \pi < \infty,$$
а вариация ϱ на всей прямой равна
$$\sum_{m=1}^{\infty} N_m \big((m^{\gamma+1} N_m)^{-1}\, 4m \big) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\gamma} = \infty.$$
Рассмотрим меру μ на прямой с плотностью ϱ. Поскольку плотность меры μ непрерывна и имеет неограниченную вариацию на всей прямой,

то найдется множество $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, для которого функция $t \mapsto \mu(B+t)$ не является липшицевой на отрезке $[0,1]$, ибо липшицевость на отрезке $[0,1]$ функций $t \mapsto \mu(B+t)$ для всех борелевских множеств B равносильна дифференцируемости меры μ по Скороходу, т.е. тому, что μ задается плотностью, имеющей ограниченную на всей прямой вариацию.

Теорема 3.3.2. *Для всякого множества $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ функция $\varphi(t) = \mu(A+t)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,1]$. При этом мера μ не является дифференцируемой по Скороходу.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Пусть

$$C_m = A \cap ([2\pi(a_m-1), 2\pi(a_m+1)] \sqcup [2\pi(a_m+N_m-1), 2\pi(a_m+N_m+1)]),$$

$$D_{mk} = A \cap [2\pi(a_m+k), 2\pi(a_m+k+1)], k = 1, 2, \ldots, N_m-2,$$

$$D_m = A \cap [2\pi(a_m+1), 2\pi(a_m+N_m-1)].$$

Заметим, что для всякого $h \in [0, 2\pi]$ верно равенство

$$\mu(A+h) = \sum_{m=1}^{\infty}(\mu(C_m+h)+\mu(D_m+h)) = \sum_{m=1}^{\infty}\mu(C_m+h)+\sum_{m=1}^{\infty}\mu(D_m+h).$$

Поскольку функция ϱ непрерывно дифференцируема, то для всякого m функция $\mu(C_m+h)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,2\pi]$, а так как ряд из L^1-норм производных этих функций на отрезке $[0,2\pi]$ сходится в силу оценок

$$\int_0^{2\pi}\Big|\int_{C_m}\varrho'(x+h)\,dx\Big|\,dh \le \int_0^{2\pi}\int_{C_m}|\varrho'(x+h)|\,dx\,dh \le$$
$$\le \int_0^{2\pi}\int_{C_m}(m^{\gamma+1}N_m)^{-1}m\,dx\,dh \le 2\pi 8\pi/N_m,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}16\pi^2/N_m < \infty,$$

то сумма ряда $\sum_{m=1}^{\infty}\mu(C_m+h)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,2\pi]$. Рассмотрим произвольное множество $B \in \mathcal{B}([0,2\pi])$. Для всякого числа

$M \in \mathbb{N}$ имеют место соотношения

$$\sum_{m=1}^{M}\Big|\int_B\int_{D_m}\varrho'(x+h)\,dx\,dh\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N_m-2}(m^{\gamma+1}N_m)^{-1}m\Big|\int_B\int_{D_{m\,k}}\big(\sin 2mx\cos 2mh+$$

$$+\cos 2mx\sin 2mh\big)\,dx\,dh\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N_m-2}(m^{\gamma}N_m)^{-1}\Big|\int_B\cos 2mh\,dh\Big|\Big|\int_{D_{m\,k}}\sin 2mx\,dx\Big|+$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N_m-2}(m^{\gamma}N_m)^{-1}\Big|\int_B\sin 2mh\,dh\Big|\Big|\int_{D_{m\,k}}\cos 2mx\,dx\Big| \leq$$

$$\leq 2\pi\sum_{m=1}^{M}m^{-\gamma}\Big|\int_B\cos 2mh\,dh\Big| + 2\pi\sum_{m=1}^{M}m^{-\gamma}\Big|\int_B\sin 2mh\,dh\Big|.$$

Каждую из двух получившихся сумм мы можем теперь оценить с помощью неравенства Коши–Буняковского и неравенства Бесселя числом

$$2\pi(2\pi)^{1/2}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}m^{-2\gamma}\Big)^{1/2} < \infty.$$

Для каждого натурального n определим борелевскую знакопеременную конечную меру ν_n на $[0,2\pi]$ соотношением

$$\nu_n(B) = \sum_{i=1}^{n}\int_B\int_{D_i}\varrho'(x+h)\,dx\,dh.$$

Заметим, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ мера ν_n абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ, а из предыдущего неравенства мы получаем, что для каждого $B \in \mathcal{B}([0,2\pi])$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\nu_n(B)$. Применив к этой последовательности мер теорему Никодима, получаем, что

$$\lim_{t\to 0}\ \sup\{|\nu_n(B)|\colon\ B \in \mathcal{B}([0,2\pi]), \lambda(B) \leq t, n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого конечного набора дизъюнктных отрезков $[s_1,t_1],\ldots,[s_k,t_k]$, лежащих в отрезке

$[0, 2\pi]$ и имеющих общую длину $\sum_{i=1}^{k} |t_i - s_i| < \delta$, и каждого $M \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\Big|\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{m=1}^{M}\int_{D_m}\varrho(x+t_i)\,dx - \sum_{m=1}^{M}\int_{D_m}\varrho(x+s_i)\,dx\Big)\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{k}\Big(\int_{D_m}\varrho(x+t_i)\,dx - \int_{D_m}\varrho(x+s_i)\,dx\Big)\Big| \le \varepsilon.$$

Значит,

$$\Big|\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{m=1}^{M}\mu(D_m+t_i) - \sum_{m=1}^{M}\mu(D_m+s_i)\Big)\Big| \le \varepsilon.$$

В последнем неравенстве мы можем перейти к пределу при $M \to \infty$. В итоге получаем

$$\Big|\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\mu(D_m+t_i) - \sum_{m=1}^{\infty}\mu(D_m+s_i)\Big)\Big| \le \varepsilon.$$

В силу произвольности набора $[s_i, t_i]$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^{k}\Big|\sum_{m=1}^{\infty}\mu(D_m+t_i) - \sum_{m=1}^{\infty}\mu(D_m+s_i)\Big| \le 2\varepsilon.$$

Это доказывает абсолютную непрерывность функции

$$h \mapsto \sum_{m=1}^{\infty}\mu(D_m+h)$$

на отрезке $[0, 2\pi]$. $\square$

Литература

[1] Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры. Тр. Моск. матем. об-ва. 1971, Т. 24. С. 133–174.

[2] Бенткуса В.Ю. Аналитичность гауссовских мер. Теория вероятн. и ее примен. 1982. Т. 27, №1. С. 147–154.

[3] Богачев В.И. О дифференцируемости мер по Скороходу. Теория вероятн. и ее примен., 1988, Т. 38, №2, С. 349–354.

[4] Богачев В.И. Гауссовские меры. Наука, М., 1997.

[5] Богачев В.И. Основы теории меры. Т. 1, 2. 2-е изд., НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва – Ижевск, 2006.

[6] Богачев В.И. Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва – Ижевск, 2008.

[7] Богачев В.И., Пилипенко А.Ю., Реброва Е.А. Классы функций ограниченной вариации на бесконечномерных областях. Докл. РАН, 2013, Т. 451, №2

[8] Богачев В.И., Смолянов О.Г. Аналитические свойства бесконечномерных распределений. Успехи матем. наук, 1990, Т. 45, №3, С. 3–83.

[9] Бураго Ю.Д., Мазья В.Г. Некоторые вопросы теории потенциала и теории функций для областей с нерегулярными границами. Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1967, Т. 3, С. 3–152.

[10] Гомилко А.М., Дороговцев А.А. О локализации расширенного стохастического интеграла. Матем. сб., 2006, Т. 197, №9, С. 19–42.

[11] Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. Наука, М., 1983.

[12] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 1. ИЛ, М., 1962.

[13] Жиков В.В. О весовых соболевских пространствах. Матем. сб., 1998, Т. 189, №8, С. 27–58.

[14] Кругова Е.П. О дифференцируемости выпуклых мер. Матем. заметки. 1995. Т. 57, №6. С. 862–871.

[15] Кругова Е.П. О сдвигах выпуклых мер. Матем. сб. 1997. Т. 188, №2. С. 57–66.

[16] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. 3-е изд., Наука, М., 1974.

[17] Романов В.А. Непрерывные и вполне разрывные меры в линейных пространствах. Докл. АН СССР, 1976, Т. 227, №3, С. 569–570.

[18] Скороход А.В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. Наука, М., 1975.

[19] Фомин С.В. Дифференцируемые меры в линейных пространствах. Успехи матем. наук, 1968, Т. 23, №1, С. 221–222.

[20] Фролов Н.Н. *Теоремы вложения для пространств функций счетного числа переменных I.* Тр. Ин-та матем. Воронеж. ун-та. Изд-во Воронеж. ун-та. 1970. Вып. 1. С. 205–218.

[21] Alberti G. A Lusin type theorem for gradients. J. Funct. Anal., 1991, V. 100, №1, P. 110–118.

[22] Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Dirichlet forms and diffusion processes on rigged Hilbert spaces. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1977. B. 40, №1, S. 1–57.

[23] Bogachev V.I. Extensions of H-Lipschitzian mappings with infinite-dimensional range. Inf. Dim. Anal., Quantum Probab. Related Topics, 1999, V. 2, №3, P. 461–474.

[24] Caselles V., Lunardi A., Miranda M. (jun.), Novaga M. Perimeter of sublevel sets in infinite dimensional spaces. Adv. Calc. Var. 2012. V. 5, N 1. P. 59–76.

[25] Enchev O., Stroock D. On Rademacher theorem on Wiener space. Ann. Probab., 1993, V. 21, №1, P. 25—33.

[26] Evans C., Gariepy R.F. Measure theory and fine properties of functions. CRC Press, Boca Raton – London, 1992.

[27] Feyel D., Üstünel A.S. t The notion of convexity and concavity on Wiener space. J. Funct. Anal. 2000. V. 176, №2. P. 400–428.

[28] Fukushima M. BV functions and distorted Ornstein–Uhlenbeck processes over the abstract Wiener space. J. Funct. Anal. 2000. V. 174. P. 227–249.

[29] Gross L. Potential theory on Hilbert space. J. Funct. Anal. 1967. V. 1, №2. P. 123–181.

[30] Gross L. Logarithmic Sobolev inequalities. Amer. J. Math. 1975. V. 97, №4. P. 1061–1083.

[31] Hino M. Dirichlet spaces on H-convex sets in Wiener space. Bull. Sci. Math., 2011, V. 135, №6. P. 667–683

[32] Krée M., Krée P. Continuité de la divergence dans les espaces de Sobolev relatifs à l'espace de Wiener. C. R. Acad. Sci. 1983. T. 296, №20. P. 833–834.

[33] Gaveau B., Trauber P. L'intégral stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel. J. Funct. Anal. 1982. V. 46, №2, P. 230–238.

[34] Lascar B. Propriétés locales d'espaces de type Sobolev en dimension infinie. Comm. Partial Diff. Equat. 1976. V. 1, №6. P. 561–584.

[35] Malliavin P. Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators. Proc. Intern. Symp. on Stoch. Diff. Eq. (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976). P. 195–263.

[36] Nualart D. The Malliavin calculus and related topics. 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[37] Nualart D., Pardoux P. Stochastic calculus with anticipating integrands. Probab. Theory Related Fields. 1988. V. 78, №4. P. 535–581.

[38] Nualart D., Üstünel A.S., Zakai M. Some remarks on independence and conditioning on Wiener space. Lecture Notes in Math, 1990, V. 1444, P. 122–127.

[39] Üstünel A.S. An introduction to analysis on Wiener space. Springer, 1995.

[40] Üstünel A.S., Zakai M. On independence and conditioning on Wiener space. Ann. Probab., 1989, V. 17, №4, P. 141–154.

[41] Üstünel A.S., Zakai M. Extension of Lipschitz functions on Wiener space. New Trends in Stochastic Analysis, Proc. of the Taniguchi Int. Symp., eds. D.Elworthy, World Scientific, 1996, P. 465–470.

Работы автора по теме диссертации:

[42] В.И. Богачев, А.В. Шапошников, О продолжении соболевских функций на винеровском пространстве, Докл. РАН, 2013, Т. 448, №4, С. 379–384.

[43] Шапошников А.В. Теорема лузинского типа для векторных полей на винеровском пространстве. Докл. РАН, 2010, Т. 434, №6, С. 744–748.

[44] Шапошников А.В. О дифференцируемости мер по Скороходу и близких свойствах. Докл. РАН, 2009, Т. 429, №2, С. 163–167.

[45] Шапошников А.В. О дифференцируемости мер по Скороходу. Теория вероятн. и ее примен. 2010, Т. 55, №3, С. 618–619.