Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. В.А. Стеклова
Российской академии наук
(МИАН)

119991, Москва, ул. Губкина, д. 8
Тел.: (499) 135-22-91. Факс: (499) 135-05-55. Для телеграмм: Москва, 119333, математика
E-mail: steklov@mi.ras.ru http://www.mi.ras.ru

05.06.14 №-2171/113
На № ____________ от ______________

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК (МИАН)

"ОТЗЫВ УТВЕРЖДАЮ"
Директор МИАН
академик
В.В. Козлов

Отзыв ведущей организации на диссертацию А.В. Шапошникова "НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ НА ВИНЕРОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертационной работе А.В. Шапошникова изучаются свойства функций из классов Соболева на бесконечномерных пространствах, а также ряд идейно связанных с этими классами вопросов, относящихся к мерам, дифференцируемым в смысле С.В. Фомина и А.В. Скорохода.

Классы Соболева функций на бесконечномерных пространствах с мерами являются естественным аналогом весовых классов Соболева на $\mathbb{R}^n$. Для приложений оказался особо важным случай гауссовских мер. Впервые такие классы стали изучаться в конце 60-х – начале 70-х годов прошлого века в работах Н.Н. Фролова, Ю.Л. Далецкого, Л. Гросса и П. Маллявэна. Работы последнего оказали особенно заметное влияние на развитие данного направления и привели к созданию исчисления Маллявэна, которое можно рассматривать именно как применение соболевских классов по мере Винера к широкому кругу проблем стохастического анализа. В настоящее время это направление активно развивается во всем мире. Близко примыкает к нему теория дифференцируемых мер, предложенная около полувека назад С.В. Фоминым и развивавшаяся позже многими исследователями разных стран, в том числе А.В. Скороходом, О.Г. Смоляновым, Ю.Л.Далецким, А.В. Углановым, В.И. Богачевым, Х. Шимомурой и другими. Дифференцируемые по Фомину меры представляют собой точный аналог мер на $\mathbb{R}^n$ с плотностями из класса Соболева $W^{1,1}$, а дифференцируемые по Скороходу меры — аналог мер с плотностями из класса BV функций ограниченной вариации. Принципиальная особенность бесконечномерного случая состоит в том, что здесь нет аналога меры Лебега, поэтому даже меры с очень хорошими дифференциальными свойствами не описываются посредством плотностей относительно каких-либо канонических мер. Тем самым меры и функции оказываются существенно разными объектами.

Диссертация состоит из введения и трех глав. Во введении, почти совпадающем с авторефератом, дан обзор по теме работы и сформулированы основные результаты. Глава 1 посвящена обобщению известной теоремы Альберти о приближение векторных полей градиентами на случай винеровского пространства. Для целей данной работы винеровское пространство можно отождествить со счетной степенью прямой $\mathbb{R}^\infty$, наделенной счетной степенью γ стандартной гауссовской меры на прямой. Пространство Камерона–Мартина H этой меры есть обычное гильбертово пространство l^2. Основной результат главы (теорема 1.2.1) утверждает, что каждое борелевское векторное поле со значениями в пространстве H может быть приближено в смысле Лузина градиентом некоторой H-липшицевой функции. Точная формулировка такова.

Теорема. *Пусть $v\colon X \to H$ — борелевское векторное поле. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\theta > 0$ найдется H-липшицева функция f, обладающая следующими свойствами:*

(1) $\gamma\big(x\colon \nabla f(x) \neq v(x)\big) < \varepsilon$, (2) $\sup_{x\in X} |f(x)| < \theta$,

(3) *для каждого $p \in [1,\infty]$ справедливо неравенство*

$$\|\nabla f\|_p \le C\varepsilon^{1/p-1}\|v\|_p,$$

где C — некоторая универсальная константа, мы полагаем $\|v\|_p = \infty$, если соответствующий интеграл бесконечен.

В главе 2 изучаются соболевские классы на подмножествах винеровского пространства. Построен пример выпуклого H-открытого подмножества положительной меры и соболевской функции на нем, не допускающей продолжения на все пространство. Основная теорема 2.2.1 состоит в следующем.

Теорема. *В пространстве $\mathbb{R}^\infty$ существует выпуклое борелевское H-открытое множество K положительной γ-меры со следующим свойством: для каждого $p \in [1, +\infty)$ в классе $W^{p,1}(K, \gamma)$ есть функция, не имеющая продолжений до функции класса $W^{p,1}(\gamma)$. Можно также найти выпуклый компакт K положительной меры с этим же свойством.*

Глава 3 посвящена исследованию такого свойства меры μ на локально выпуклом пространстве, как абсолютная непрерывность всех функций $t \mapsto \mu(A+th)$. Здесь решена давно стоявшая задача о дифференцируемости мер на прямой по Скороходу: построен пример такой вероятностной меры μ на прямой, что она не дифференцируема по Скороходу, хотя функции $t \mapsto \mu(A+t)$ для всех борелевских множеств A абсолютно непрерывны на $[0, 1]$. В этом же направлении установлен следующий положительный результат (теорема 3.2.1), показывающий, что дифференцируемость Скорохода имеет место при небольшом усилении условия абсолютной непрерывности.

Теорема. *Радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве X дифференцируема по Скороходу вдоль вектора h тогда и только тогда, когда отображение $t \mapsto \mu_{th}$ на $[0, 1]$ абсолютно непрерывно по вариационной норме.*

Результаты, приведенные в диссертации А.В. Шапошникова, новы, интересны и вносят важный вклад в теорию классов Соболева на бесконечномерных пространствах. В частности, в работе решен ряд долго стоявших проблем из этой области. Сами результаты с достаточной полнотой опубликованы в 4 статьях в журналах из списка, рекомендованного ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Представленная работа удовлетворяет всем требованиям „Положения о порядке присуждения ученых степеней" ВАК, а ее автор А.В. Шапошников безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании отдела теории функций Математического института им. В.А. Стеклова РАН 29 мая 2014 г.

Зав. отделом теории функций МИАН,
член-корр. РАН /О.В. Бесов/