

ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации А.В. Шапошникова
„Некоторые свойства соболевских функций на винеровском пространстве
и их приложения”,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Тематика диссертации относится к анализу на классическом винеровском пространстве, а фактически к более широкой области анализа на бесконечномерных пространствах с мерами, в частности к теории дифференцируемых мер. Дифференцируемые меры были введены почти полвека назад С.В. Фоминым и исследовались затем многими авторами, в том числе О.Г. Смоляновым, А.В. Скороходом, Ю.Л. Далецким, А.В. Углановым, Е.Т. Шавгулидзе, а также зарубежными математиками. В значительной степени понятие дифференцируемой меры представляет собой аналог меры с плотностью из класса Соболева на конечномерном пространстве. Появившееся несколько позже понятие меры, дифференцируемой по Скороходу, дает аналог меры с плотностью ограниченной вариации. Эти понятия тесно связаны с дифференциальным исчислением на пространствах с гауссовскими мерами, развитым около 40 лет назад крупным французским математиком П. Маллявэном и получившим название «исчисления Маллявэна». В последнем важную роль играют пространства Соболева на бесконечномерных пространствах с мерами, которые изучаются и применяются уже более сорока лет. Принципиальным отличием этого случая является отсутствие аналогов меры Лебега, так что рассматриваемые здесь классы соответствуют скорее весовым классам Соболева. Пионером в этой области был Н.Н. Фролов, который ввел аналоги классов Соболева по гауссовским мерам в конце 60-х – начале 70-х годов прошлого века, еще до работ Маллявэна, но интерес к таким пространствам значительно возрос после появления в середине 70-х годов исчисления Маллявэна. В последующие годы эта тематика выросла в весьма популярную ныне область на стыке нелинейного функционального анализа, стохастического анализа и бесконечномерного анализа. По ней опубликованы сотни работ, в том числе более 10 монографий. Среди известных специалистов, работающих или работавших по близким вопросам, можно назвать П. Маллявэна, Л. Гросса, Ю.Л. Далецкого, А.В. Скорохода, М. Закаю, И. Шигекаву, С. Ваганабе, Дж. Да Прато, М. Рёкнера, Д. Нуаларта, Л. Амброзио, А.С. Устюнеля, П.-А. Мейера, А. Талмайера, Я.И. Белопольскую, Ю.А. Давыдова, М.А. Лифшица, Н.В. Смородину, активные группы исследователей развивают это направление в университетах США, Англии, Франции, Германии, Италии, Испании, Португалии, Японии, Австралии, Китая. Анализ в классах Соболева на бесконечномерных пространствах можно рассматривать, с одной стороны, как подобласть теории дифференцируемых мер, но, с другой стороны, как подобласть с весьма выраженной спецификой, выделяющей ее в особое направление.

Представленная работа является исследованием в области теории меры, функционального анализа и теории вероятностей. Ее цель – изучение некоторых свойств соболевских функций на пространстве с гауссовскими мерами и дифференцируемых мер и решение связанных с этими объектами открытых проблем. Диссертация

состоит из введения и 3 глав. Во введении дан исторический обзор по теме работы и сформулированы ее основные результаты. Глава 1 посвящена обобщению теоремы Альберти на случай вилеровского пространства. Основным результатом этой главы является теорема лузинского типа для измеримых векторных полей со значениями в пространстве Камерона–Мартина. В главе 2 изучаются соболевские классы на подмножествах вилеровского пространства. Построен пример выпуклого H -открытого подмножества положительной меры и соболевской функции на нем, не допускающей продолжения на все пространство. Глава 3 посвящена исследованию такого свойства меры μ на локально выпуклом пространстве, как абсолютная непрерывность всех функций $t \mapsto \mu(A + th)$. Такие свойства в идейном отношении тесно связаны со свойствами соболевских функций, ибо последние обладают версиями, локально абсолютно непрерывными вдоль направлений из подпространства Камерона–Мартина. Однако меры, рассматриваемые в этой главе в бесконечномерном случае уже могут быть взаимно сингулярными с гауссовскими. Тем самым здесь речь идет о развитии и приложении методов и идей первых двух глав. Построен пример, показывающий, что это свойство слабее дифференцируемости в смысле Скорохода, а также найдены новые характеристики дифференцируемости в смысле Скорохода в терминах абсолютной непрерывности отображения $t \mapsto \mu_{th}$ и глобальной абсолютной непрерывности функций $t \mapsto \mu(A + th)$.

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

1. Доказано, что каждое борелевское векторное поле со значениями в пространстве Камерона–Мартина H может быть приближено в смысле Лузина градиентом некоторой H -липшицевой функции.

2. Построен пример открытого центрально симметричного выпуклого множества в гильбертовом пространстве с гауссовской мерой и соболевской функции на нем, не допускающей соболевских продолжений на все пространство.

3. Построен пример меры μ , показывающий, что абсолютная непрерывность всех функций $t \mapsto \mu(A + th)$ не влечет дифференцируемость меры μ в смысле Скорохода.

4. Получены новые характеристики дифференцируемости меры μ в смысле Скорохода через абсолютную непрерывность отображения $t \mapsto \mu_{th}$ и глобальную абсолютную непрерывность функций $t \mapsto \mu(A + th)$.

Первый из этих результатов дает весьма нетривиальное бесконечномерное обобщение теоремы известного итальянского аналитика Дж. Альберти, полученной в конечномерном случае, причем диссертант существенно усилил и конечномерный случай, получив важные оценки, не зависящие от размерности. Второй результат дает отрицательное решение долго стоявшей проблемы, изучавшейся рядом известных специалистов. Последние два результата также дают решения проблем, стоявших в теории дифференцируемых мер около 30 лет. При этом они обладают новизной и в конечномерном случае. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и обоснованы в виде строгих математических доказательств.

По теме диссертации имеются 4 публикации в журналах из списка ВАК.

Апробация диссертации: содержащиеся в диссертации результаты докладывались на научно-исследовательском семинаре „Бесконечномерный анализ и стохастика” под руководством В.И. Богачева, Н.А. Толмачева и С.В. Шапошникова

(2009–2014 гг.), на семинаре „Бесконечномерный стохастический анализ” в университете г. Билефельда (2010 г.), на научно-исследовательском семинаре „Статистика, теория вероятностей и их приложения” в Институте математики университета Бургундии (2013 г.), на российско-японском симпозиуме „Стохастический анализ сложных статистических моделей” в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН (2009 г.).

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах бесконечномерного анализа, теории меры, теории вероятностей и стохастического анализа. Результаты и методы работы А.В. Шапошникова будут востребованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете, Дальневосточном федеральном университете, Техническом университете им. Н.Э. Баумана, Высшей школе экономики.

Таким образом, в диссертационной работе А.В. Шапошникова „Некоторые свойства соболевских функций на вилеровском пространстве и их приложения” решен ряд важных и трудных задач теории меры и функционального анализа. Эта работа удовлетворяет всем требованиям „Положения о порядке присуждения ученых степеней” ВАК, а ее автор А.В. Шапошников заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Доктор физико-математических наук,
профессор



В.И. Богачев

Согласен профессор В.И. Богачев
удостоверен

12.12.2014г.

