ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

О ДИССЕРТАЦИИ А.В. ШАПОШНИКОВА

«НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ НА ВИНЕРОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»,

представленной на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Рассматриваемая диссертационная работа А.В. Шапошникова посвящена различным вопросам анализа на абстрактном винеровском пространстве, в частности, приближению векторных полей, продолжению соболевских функций с некоторого множества на все пространство и изучению дифференцируемости мер вдоль подпространств.

Диссертация состоит из введения, трех глав, поделенных на параграфы, и списка литературы. Во введении представлен обзор по теме работы и сформулированы основные результаты.

В главе 1 изучаются вопросы приближения векторных полей на абстрактном винеровском пространстве со значениями в пространстве Камерона–Мартина градиентами функций. Большое внимание уделяется свойству локальности. Основным результатом этой главы является следующая теорема.

• (Теорема 1.2.1) *Пусть $v : X \to H$ — борелевское векторное поле. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\theta > 0$ найдется H-липшицева функция f, обладающая следующими свойствами:*
(1) $\gamma\{x : \nabla f(x) \neq v(x)\} \leq \varepsilon$,
(2) $\sup_{x\in X} |f(x)| < \theta$,
(3) *для каждого $p \in [1, \infty]$ справедливо неравенство*

$$\|\nabla f\| \leq C\varepsilon^{1/p-1}\|v\|_p,$$

где C — некоторая универсальная константа и $\|v\|_p = \infty$, если соответствующий интеграл бесконечен.

Кроме того, в этой главе рассматривается связь между независимостью двух соболевских функций на пространстве Винера и ортогональностью их градиентов и приведен пример двух бесконечно дифференцируемых рациональных функций ξ и η на пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартной гауссовской мерой γ, для которых γ-почти всюду $\langle \nabla\xi, \nabla\eta \rangle > 0$.

Во второй главе рассматриваются вопросы существования продолжений функций, принадлежащих соболевским классам на подмножествах абстрактного винеровского пространства, на все пространство с сохранением соболевского класса. Основным результатом главы является следующая теорема.

- (Теорема 2.2.1) *В пространстве $\mathbb{R}^\infty$ существует выпуклое борелевское H-открытое множество K положительной γ-меры со следующим свойством: для каждого $p \in [1, +\infty)$ в классе $W^{p,1}(K, \gamma)$ существует функция, не имеющая продолжений до функции из класса $W^{p,1}(\gamma)$. Также можно найти выпуклый компакт положительной меры с тем же свойством.*

Она дает отрицательный ответ на вопрос, долгое время остававшийся открытым. Эта теорема является чистой теоремой существования и не дает явного примера функции без продолжения.

Третья глава посвящена изучению дифференцируемости мер вдоль направления h в смысле Скорохода и ее связи со свойствами функций $t \to \mu(A + th)$ для всех множеств $A \in \mathcal{B}(X)$.

Первым результатом этой главы является контрпример, показывающий, что существует такая вероятностная борелевская мера μ на прямой, что для всякого борелевского множества A числовая функция $\varphi_A(t) = \mu(A+t)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0, 1]$, но при этом мера μ не является дифференцируемой по Скороходу. Затем получена характеризация дифференцируемости меры по Скороходу вдоль направления h в терминах отображения $t \mapsto \mu_{th}$.

Все вынесенные на защиту результаты получены автором самостоятельно, своевременно опубликованы и снабжены детальными доказательствами. Автореферат правильно отражает содержание диссертации, а список литературы учитывает основные имеющиеся публикации в данной области.

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы при исследовании различных проблем нелинейного анализа, теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории меры и математической физики. Конкретные результаты диссертации и ее общие методы могут найти применения в исследованиях, ведущихся в целом ряде отечественных университетов и математических институтов, в том числе в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Математическом институте РАН им. В.А. Стеклова, С.-Петербургском государственном университете, Российском университете Дружбы Народов, Техническом университете им. Н.Э. Баумана.

На основании сказанного следует заключить, что в диссертации А.В. Шапошникова решены актуальные проблемы нелинейного функционального анализа. Эта работа удовлетворяет всем требованиям о порядке присуждения ученых степеней ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор А.В. Шапошников заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

к.ф.-м.н. Е.П. Кругова

27.05.2014 г.

подпись ст.н.с. ОНИ ФПМ ОНИ ПФМНиИТ Круговой Е.П. заверяю
Ученый секретарь ВИНИТИ РАН к.г.н. Ю.Н. Щуко