Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.2

Лукинцова Мария Николаевна

СХОДИМОСТЬ МЕР И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2014

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одним из важнейших направлений современной теории меры является изучение различных классов преобразований мер и различных видов сходимости мер. Это направление восходит к работам классиков: И. Радона [38], А.Н. Колмогорова [29], Дж. фон Неймана [35], П. Леви [30], Н.Н. Боголюбова, Н.М. Крылова [21], А.Д. Александрова [1], Л.В. Канторовича [6, 7], В.А. Рохлина [11], Ю.В. Прохорова [10], А.В. Скорохода [12]. Оно тесно связано постановками задач и приложениями с целом рядов других областей математики, таких как теория вероятностей и случайных процессов, теория динамических систем, математическая физика. При этом несомненно центральным для этих областей видом сходимости мер следует признать слабую сходимость. Такая сходимость, возникшая в теории вероятностей как сходимость по распределению, стала объектом систематического исследования в 40-х годах XX века благодаря идеям А.Д. Александрова, Л.В. Канторовича и А.Н. Колмогорова, а после знаменитой работы Ю.В. Прохорова стало возможным говорить о новом направлении на стыке теории меры и теории вероятностей.

Одновременное параллельное развитие теории топологических пространств естественным образом привело к синтезу направлений: возникла теория слабой сходимости мер на топологических пространствах, плодотворно развивающаяся уже более полувека. К этой тематике относится первая глава настоящей диссертации, посвященная исследованию вполне регулярных топологических пространств, в которых все вероятностные меры Радона обладают равномерно распределенными последовательностями, т.е. последовательностями точек, средние арифметические значения в которых для каждой ограниченной непрерывной функции сходятся к интегралу от этой функции по данной мере. Отметим, что для простых пространств построение таких последовательностей не представляет труда, но даже для простейших пространств и мер нередко бывает весьма нетривиальна задача выяснения того, что заданная последовательность является равномерно распределенной. Скажем, в случае отрезка с классической мерой Лебега с этим вопросом связан ряд трудных теоретико-числовых проблем. Основные результаты диссертации по этой теме состоят в установлении ряда свойств пространств со свойством равномерного распределения.

Построение равномерно распределенных последовательностей можно рассматривать как одно из средств восстановления вероятностных мер (или интегралов по ним) по определенным данным. Поэтому эта задача оказывается близкой задаче восстановления меры по каким-либо ее преобразованиям. Известнейшее из таких преобразований — преобразование Фурье, которое для мер на бесконечномерных пространствах было введено А.Н. Колмогоровым [29]. Родственным является обсуждаемое в главе 2 преобразование Радона, которое за последние полвека стало весьма популярным из-за применений в томографии, появившихся отнюдь не сразу. Выросшая вокруг преобразования Радона обширная область анализа на стыке с дифференциальной геометрией, уравнениями с частными производными уже включает задачи интегральной геометрии на сложных многообразиях, но лишь сравнительно недавно стали рассматриваться преобразования Радона мер на бесконечномерных пространствах. Этому направлению посвящена вторая глава диссертации.

Цель работы. Исследовать вполне регулярные топологические пространства, в которых каждая вероятностная радоновская мера обладает равномерно распределенной последовательностью. Ввести преобразование Радона для функций на бесконечномерных локально выпуклых пространствах с мерами и обобщить теорему Хелгасона о носителе функции для ограниченных борелевских функций в случае общих радоновских мер и для борелевских функций с экспоненциальным ограничением на рост в случае гауссовских мер.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Введено и изучено понятие вполне регулярного топологического пространства со свойством равномерного распределения. Показано, что класс пространств с этим свойством устойчив относительно умножения на пространства, в которых компакты метризуемы, в частности на суслинские пространства.

2. Введено и исследовано преобразование Радона на общем локально выпуклом пространстве с радоновской вероятностной мерой. Доказано, что если преобразование Радона борелевской ограниченной функции равно нулю вне ограниченного выпуклого замкнутого множества, то и сама функция равна нулю почти всюду вне этого множества.

3. Доказано, что если преобразование Радона борелевской функции, заданной на локально выпуклом пространстве с радоновской гауссовской мерой и растущей не быстрее экспоненты квадрата измеримой полунормы, равно нулю вне ограниченного выпуклого замкнутого множества, то и сама функция равна нулю почти всюду вне этого множества.

При этом обобщен и усилен ряд результатов, полученных зарубежными математиками.

Методы исследования. В работе применяются методы теории меры на топологических пространствах, а также методы и результаты функционального анализа и общей топологии.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в области теории меры, функционального анализа, теории вероятностей и общей топологии. Результаты и методы, развитые в диссертации, могут найти применения в исследованиях, проводимых в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, С.-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете, Высшей школе экономики, Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на научно-исследовательском семинаре „Бесконечномерный анализ и стохастика" под руководством В.И. Богачева и Н.А. Толмачева (2006–2014 гг.), на конференции „Ломоносовские чтения" в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова (2011 г.), на семинаре „Бесконечномерный и стохастический анализ" университета Билефельда (Германия) и на научно-исследовательском семинаре кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (2014 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 работах автора (две из них в соавторстве) в Докладах Российской академии наук. Список работ приведен в конце диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, включающих 5 параграфов, и списка литературы из 43 наименований. Общий объем диссертации составляет 51 страницу.

Краткое содержание диссертации

Глава 1.

Еще в начале XX века П. Боль [22], В. Серпинский [39] и Г. Вейль [40] изучали равномерно распределенные последовательности чисел, т. е. такие последовательности $\{x_n\} \subset [0,1]$, что римановский интеграл каждой непрерывной функции f на $[0,1]$ равен пределу арифметических средних

$$\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n},$$

а в 50-х годах было начато изучение их аналогов в топологических пространствах (см. [26]), которое продолжается и в настоящее время (см. [2, 8]).

В настоящей работе вводятся два класса топологических пространств, на которых всякая вероятностная радоновская мера обладает равномерно распределенной последовательностью или равномерно плотной равномерно распределенной последовательностью. Показано, что эти свойства сохраняются при умножении на вполне регулярное суслинское пространство.

Пусть X — вполне регулярное топологическое пространство (все рассматриваемые ниже пространства предполагаются вполне регулярными) и $C_b(X)$ — пространство ограниченных непрерывных функций на X. Напомним (см. [2]), что вероятностная борелевская мера μ на X (т. е. вероятностная мера на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$, порожденной всеми открытыми множествами) называется радоновской, или мерой Радона, если для всякого борелевского множества B и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset B$, что $\mu(B \backslash K) < \varepsilon$. Таковы все борелевские меры на полных метризуемых пространствах, а также на суслинских пространства. Через δ_a обозначим меру Дирака в a, т. е. вероятностную меру, сосредоточенную в точке $a \in X$.

Семейство M радоновских вероятностных мер на X называется равномерно плотным, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт

$K \subset X$, что справедливо неравенство

$$\mu(X \backslash K) < \varepsilon \quad \text{для всех } \mu \in M.$$

Согласно классической теореме Прохорова [10], всякая слабо сходящаяся последовательность борелевских вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве равномерно плотна.

Последовательность точек $x_n \in X$ называется равномерно распределенной относительно вероятностной радоновской меры μ на X, если для всякой ограниченной непрерывной функции f на X имеет место равенство

$$\int_X f(x)\, \mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Определение означает слабую сходимость мер $n^{-1}(\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n})$ к мере μ. Согласно известной теореме Нидеррейтера [36], существование равномерно распределенной последовательности относительно μ равносильно тому, что к μ слабо сходится некоторая последовательность вероятностных мер с конечными носителями. Из этого следует, что если X является вполне регулярным суслинским пространством, то всякая вероятностная мера Радона на X обладает равномерно распределенной последовательностью. В общем случае это не так даже для компактов: примером служит компактификация Стоуна–Чеха натурального ряда.

Определение 1.1. *Будем говорить, что вероятностная радоновская мера μ на X имеет t-равномерно распределенную последовательность, если существует такая последовательность точек $x_n \in X$, что последовательность мер $n^{-1}(\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n})$ равномерно плотна и слабо сходится к μ.*

Определение 1.2. *Будем говорить, что X обладает свойством* (ud)*, если каждая вероятностная мера Радона на X имеет равномерно распределенную последовательность. Если же каждая такая мера имеет t-равномерно распределенную последовательность, то назовем X пространством со свойством* (tud).

Отметим, что указанные свойства не всегда сохраняются при переходе к компактному подмножеству. Например, в предположении гипотезы континуума произведение континуума отрезков обладает свойством (ud), но это произведение содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное компактификации Стоуна–Чеха натурального ряда, которая не имеет свойства (ud). В частности, носители приближающих дискретных мер не всегда можно выбрать в носителе приближаемой меры.

Видимо, свойство (tud) строго сильнее свойства (ud), но доказать это пока не удалось. Разумеется, для компактов оба свойства равносильны. Равносильны они (и имеют место) для полных сепарабельных метрических пространств, что следует из теоремы Прохорова.

Приведем основные результаты о свойствах пространств из указанных классов. Следующее предложение показывает, в частности, что проверку введенных свойств достаточно осуществлять лишь для мер с компактными носителями.

Предложение 1.3. *Пусть для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *подпространство* X_n *в* X *измеримо относительно всех радоновских мер на* X *и обладает свойством* (tud)*. Тогда пространство* $Y := \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ *также обладает этим свойством. Аналогичное утверждение верно для свойства* (ud).

Замечание 1.4. Из этого предложения следует, что всякая вероятностная радоновская мера, сосредоточенная на счетном объединении метризуемых компактов, обладает t-равномерно распределенной последовательностью, принадлежащей этому объединению. Значит, всякое вполне регулярное пространство, в котором все компакты метризуемы, обладает свойством (tud). Например, таковы вполне регулярные суслинские пространства.

Предложение 1.5. *Пусть компакт* X *имеет свойство* (tud)*, а отображение* $f\colon X \to Y$ *непрерывно и сюръективно. Тогда* Y *также обладает свойством* (tud)*. Аналогичное утверждение верно для свойства* (ud).

Предложение 1.6. *Свойства* (ud) *и* (tud) *сохраняются непрерывными сюръективными отображениями, для которых индуцированные отображения пространств вероятностных радоновских мер сюръективны* (*например, таковы непрерывные отображения, для которых прообразы компактов компактны*).

Основным результатом данной главы является следующая теорема.

Теорема 1.7. *Пусть пространство X обладает свойством* (tud). *Тогда этим свойством обладает пространство $X \times Y$ для всякого непустого вполне регулярного пространства Y, в котором компакты метризуемы. Аналогичное утверждение верно для свойства* (ud).

Заключение теоремы верно, если в качестве Y взять вполне регулярное суслинское пространство.

Представляется правдоподобным, что произведение двух неметризуемых компактов со свойством (ud) не всегда обладает этим свойством (т. е. указанное в условии теоремы дополнительное условие на второй сомножитель нельзя отбросить даже для компактов), но установить существование такого примера пока не удается. Отчасти это связано с тем, что в силу полученных выше результатов класс пространств со свойством (ud) весьма широк.

Глава 2.

Преобразование Радона было введено Радоном [38] в 1917 г. в трудах Саксонской академии наук. Оно сопоставляет функции f на плоскости функцию $\widehat{f}$ на множестве всех прямых, задаваемую интегралами f вдоль прямых. Аналоги данного преобразования встречались и ранее, но именно в статье Радона была поставлена общая задача об изучении преобразований типа $f \to \widehat{f}$ на различных пространствах и намечены методы исследования таких преобразований. Преобразование Радона отнюдь не сразу стало популярным объектом исследования. Его прославили применения в томографии, появившиеся почти спустя полвека после открытия Радона. За следующие полвека, благодаря этим применениям, вокруг преобразования Радона и его обобщений выросла целая область на стыке анализа, геометрии многообразий, уравнений с частными производными и вычислительной математики (см. [9,13]). Сравнительно недавно преобразование Радона стало изучаться на бесконечномерных пространствах с гауссовскими мерами, см. [15,16,27,28,34]. В этой главе вводится обобщение преобразования Радона на случай бесконечномерных пространств с общими радоновскими мерами и для него доказывается теорема о носителе в двух случаях: для общих мер и ограниченных функций и гауссовских мер и функций, оцениваемых экспонентой квадрата полунормы.

Ниже мы будем рассматривать вещественное локально выпуклое пространство X с топологическим сопряженным X^* и радоновскую вероятностную меру μ на X. Пусть $l \in X^*$, $l \neq 0$, $L = \operatorname{Ker} l = l^{-1}(0)$. Выберем вектор $v \in X$, для которого $l(v) = 1$. Обозначим через $\mu \circ l^{-1}$ образ меры μ при отображении l, т.е. борелевскую меру на прямой, заданную формулой

$$\mu \circ l^{-1}(B) = \mu(l^{-1}(B)).$$

Известно, что существуют такие вероятностные борелевские меры μ^{L+tv} на множествах $L + tv$, называемые условными, что справедливо равенство

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}} \mu^{L+tv}(B)\, \mu \circ l^{-1}(dt), \quad B \in \mathcal{B}(X).$$

Аффинные подпространства $L + tv$ охватывают все аффинные подпространства вида $L + x$, $x \in X$, поэтому можно считать, что заданы условные меры μ^{L+x} на множествах $L + x$, удовлетворяющие тождеству

$$\mu(B) = \int_X \mu^{L+x}(B)\, \mu(dx), \quad B \in \mathcal{B}(X).$$

При этом $L + x = L + l(x)v$, ибо $x - l(x)v \in L$, откуда

$$\mu^{L+x} = \mu^{L+l(x)v}.$$

Пусть f — ограниченная борелевская функция на X. Тогда преобразование Радона функции f зададим формулой

$$\mathcal{R}^{\mu} f(L + x) = \int_X f(y) \mu^{L+x}(dy). \tag{1}$$

Более общим образом, формулой (1) можно задать преобразование Радона интегрируемой функции f, однако оно может быть определено уже не для всех x.

Отметим, что для гауссовских мер аналогичным образом преобразование Радона можно задавать на необязательно замкнутых гиперплоскостях вида l^{-1}, где l — измеримая линейная функция (или, что равносильно, элемент замыкания X^* в $L^2(\mu)$).

Также заметим, что бесконечномерное преобразование Радона в фиксированной точке можно выразить через некоторое конечномерное преобразование Радона. Пусть $K \subset X$ – конечномерное линейное подпространство, содержащее вектор v. Существует непрерывная линейная проекция $P_K\colon\ X \to K$ с тем свойством, что

$$Z := P_K^{-1}(0) \subset L.$$

Положим $\mu_K := \mu \circ P_K^{-1}$, а порождаемое мерой μ_K преобразование Радона на конечномерном пространстве K обозначим через $\mathcal{R}_K$.

Рассмотрим теперь функцию

$$h(u) = \int_X f(y)\mu^{Z+u}(dy), \quad u \in K.$$

Предложение 2.1. *Пусть $K \subset X$ — конечномерное линейное подпространство, содержащее вектор v, не лежащий в L, и пусть $K_0 = K \cap L$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{R}^\mu f(L + tv) = \mathcal{R}_K h(K_0 + tv)$$

для $\mu \circ l^{-1}$-почти всех t. Иначе говоря,

$$\mathcal{R}^\mu f(L + l(x)v) = \mathcal{R}_K h(K_0 + l(x)v)$$

для μ-почти всех x, что можно записать также в виде

$$\mathcal{R}^\mu f(L + x) = \mathcal{R}_K h(K_0 + P_K x)$$

для μ-почти всех x.

Основными результатами данной главы являются следующие теоремы.

Теорема 2.2. *Предположим, что конечномерные проекции вероятностной меры μ задаются почти всюду положительными плотностями класса B_∞. Пусть ограниченная борелевская функция f такова, что ее преобразование Радона $\mathcal{R}^\mu f$ удовлетворяет следующему условию: существует такое ограниченное выпуклое замкнутое множество $V \subset X$, что $\mathcal{R}^\mu f(L+x) = 0$ для каждой гиперплоскости L при μ-почти всех x, для которых $(L + x) \cap V = \varnothing$. Тогда $f(x) = 0$ для μ-почти всех $x \in X \backslash V$.*

Для формулировки последней теоремы нам понадобится определение гауссовской меры (см. [3, 17]).

Определение 2.3. *Радоновская вероятностная мера γ на локально выпуклом пространстве X называется гауссовской, если всякий функционал $f \in X^*$ является гауссовской случайной величиной на (X, γ),* *т.е. мера $\gamma \circ f^{-1}$ — гауссовская на прямой; последнее означает, что эта мера либо сосредоточена в некоторой точке, либо имеет плотность вида*

$$p(t) = (2\pi\sigma_f)^{-1/2} \exp(-(2\sigma_f)^{-1}(t - a_f)^2)$$

относительно меры Лебега.

Следующая теорема обобщает результаты из [15, 16, 28] о носителе преобразования Радона в гауссовском случае. Во-первых, она относится к необязательно непрерывным функциям, во-вторых, она отличается от этих результатов тем, что рассматриваемое множество V лежит в X, а не в $H(\mu)$; в-третьих, в [15, 28] функция оценивается экспонентой полунормы (в [16] даже ограничена), а не экспонентой квадрата.

Теорема 2.4. *Пусть μ — центрированная радоновская гауссовская мера, p — полунорма на X и $\varepsilon_p > 0$ таково, что функция $\exp(2\varepsilon_p p^2)$ интегрируема относительно μ. Предположим, что борелевская функция f на X такова, что $|f(x)| \leq C \exp(\varepsilon_p p^2(x))$, причем ее преобразование Радона $\mathcal{R}^\mu f$ удовлетворяет следующему условию: существует такое ограниченное выпуклое замкнутое множество $V \subset X$, что $\mathcal{R}^\mu f(L + x) = 0$ для каждой гиперплоскости L при μ-почти всех x, для которых $(L + x) \cap V = \varnothing$. Тогда $f(x) = 0$ для μ-почти всех $x \in X \backslash V$.*

Сформулируем здесь теорему Ферника (см. [3]), которая гарантирует существование используемых в нашей теореме констант.

Теорема (Ферник). *Пусть μ — центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X и p — μ–измеримая полунорма на X, тогда существует $\varepsilon_p > 0$ такое, что*

$$\int \exp(\varepsilon_p p^2) d\mu < \infty.$$

Было бы интересно получить бесконечномерные аналоги более тонких конечномерных результатов о преобразовании Радона как для гауссовских мер, так и других классов распределений, возникающих в приложениях, например, удовлетворяющих эллиптическим уравнениям типа стационарного уравнения Колмогорова (см. [4,19,20]). Это связано с тем, что в бесконечномерном случае нет какой-либо привилегированной меры типа лебеговской, относительно которой нахождение преобразования Радона было бы наиболее естественным.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.И. Богачеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Глава 1

Равномерно распределенные последовательности

1. Определение и вспомогательные данные

В настоящей главе вводятся два класса топологических пространств, на которых всякая вероятностная радоновская мера обладает равномерно распределенной последовательностью или равномерно плотной равномерно распределенной последовательностью. Показано, что эти свойства сохраняются при умножении на вполне регулярное суслинское пространство. Используемые ниже понятия, связанные с мерами на топологических пространствах и слабой сходимостью мер, можно найти в [2].

Понятие равномерно распределенной последовательности чисел θ_n из $[0,1]$ исследовалось уже более века назад в работах П. Боля [22], В. Серпинского [39] и Г. Вейля [40]. Согласно исходному определению, так называется последовательность, для которой для каждого фиксированного подинтервала J число точек из $\theta_1,\ldots,\theta_n$ в J, деленное на n, стремится к длине J. Несложно проверяется, что это равносильно такому свойству: для каждой непрерывной функции f на $[0,1]$ ее интеграл равен предел чисел

$$\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

Кроме того, по теореме Вейерштрасса о равномерном приближении тригонометрическими многочленами. это равносильно тому, что для всякого целого $k\neq 0$ верно равенство

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\exp(2\pi i k x_n)=0.$$

Известно, что для равномерно интегрируемой последовательности величины $(f(x_1)+\cdots+f(x_n))/n$ сходятся к интегралу и от функции, интегрируемой по Риману. Если же для данной функции f это верно для всех равномерно распределенных последовательностей $\{x_n\}$, то она обязана быть интегрируемой по Риману.

П. Боль, В. Серпинский и Г. Вейль независимо приводят важный пример равномерно распределенной последовательности.

Пример. *Для всякого иррационального числа $\theta \in (0,1)$ последовательность $x_n := n\theta - [n\theta]$ является равномерно распределенной относительно меры Лебега на $[0,1]$.*

Г. Вейлю принадлежит следующее утверждение.

Пример. *Если среди коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ многочлена $f(x) = a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ хотя бы один иррационален, то последовательность $f(k)$ mod 1 является равномерно распределенной относительно меры Лебега на $[0,1]$.*

Однако про многие конкретные последовательности не удается выяснить, являются ли они равномерно распределенными. Например, вопрос открыт для последовательности $e^n \bmod 1$.

Пусть X — вполне регулярное топологическое пространство (все рассматриваемые ниже пространства предполагаются вполне регулярными) и $C_b(X)$ — пространство ограниченных непрерывных функций на X. Напомним (см. [2]) определение радоновской меры.

Определение 1.1. *Вероятностная борелевская мера μ на X (т. е. вероятностная мера на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$, порожденной всеми открытыми множествами) называется радоновской, или мерой Радона, если для всякого борелевского множества B и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset B$, что $\mu(B\backslash K) < \varepsilon$.*

Таковы все борелевские меры на полных сепарабельных метризуемых пространствах, а также на суслинских пространства.

Определение 1.2. *Последовательность радоновских мер μ_n слабо сходится к радоновской мере μ, если интегралы по мерам μ_n от всякой ограниченной непрерывной функции сходятся к интегралу от этой функции по мере μ.*

Теперь дадим определение основного объекта нашего исследования.

Определение 1.3. *Последовательность точек $x_n \in X$ называется равномерно распределенной относительно вероятностной радоновской меры μ на X, если для всякой ограниченной непрерывной функции f на X имеет место равенство*

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

Если теперь обозначить через δ_a меру Дирака в a, т. е. вероятностную меру, сосредоточенную в точке $a \in X$, то определение будет означать слабую сходимость мер $n^{-1}(\delta_{x_1}+\cdots+\delta_{x_n})$ к мере μ.

Г. Нидеррейтер в работе [36] доказал теорему, которая дает нам простой критерий существования равномерно распределенной последовательности относительно неотрицательной борелевской меры μ.

Теорема (Niederreiter). *Пусть μ — неотрицательная борелевская мера на компактном хаусдорфовом пространстве X. В этом случае существует μ-равномерно распределенная последовательность тогда и только тогда, когда существует такая последовательность мер с конечными носителями (μ_j), $j=1,2,\ldots$, что*

$$\lim_{j\to\infty} \mu_j(B) = \mu(B)$$

для каждого μ-измеримого множества $B \subset X$.

Если X является вполне регулярным суслинским пространством, то всякая вероятностная мера Радона на X обладает равномерно распределенной последовательностью. В общем случае это не так даже для компактов: примером служит компактификация Стоуна–Чеха натурального ряда (см. [2], пример 8.10.54).

Пример. *Пусть $X = \beta\mathbb{N}$ — стоун-чеховская компактификация $\mathbb{N}$. Тогда на X существуют вероятностные меры Радона, не обладающие равномерно распределенными последовательностями.*

Отметим, что компактное суслинское пространство метризуемо, а для метризуемых компактов существование равномерно распределенной последовательности для всякой вероятностной меры было известно еще в 50-х годах прошлого века. Кстати, его можно вывести из того факта, что метризуемый компакт является непрерывным образом канторовского множества C, если для последнего при всякой заданной на нем мере доказать наличие равномерно распределенной последовательности.

Конечно, понятие равномерно распределенной последовательности имеет смысл и для бэровских мер.

Далее нам понадобятся следующие определения, введенные автором в работе [41].

Определение 1.4. *Будем говорить, что вероятностная радоновская мера μ на X имеет t-равномерно распределенную последовательность, если существует такая последовательность точек $x_n \in X$, что последовательность мер*

$$\frac{\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n}}{n}$$

равномерно плотна и слабо сходится к μ.

Определение 1.5. *Будем говорить, что пространство X обладает свойством* (ud)*, если каждая вероятностная мера Радона на X имеет равномерно распределенную последовательность. Если же каждая такая мера имеет t-равномерно распределенную последовательность, то назовем X пространством со свойством* (tud)*.*

Ввиду приведенного выше результата Нидеррейтера, свойство (ud) равносильно тому, что всякая мера Радона на X является слабым пределом последовательности вероятностных мер с конечными носителями, а свойство (tud), как можно усмотреть из доказательства теоремы Нидеррейтера (см. [2], теорема 8.10.52), дополнительно требует равномерной плотности для некоторой такой последовательности.

Отметим, что указанные свойства не всегда сохраняются при переходе к компактному подмножеству. Например, в предположении гипотезы континуума произведение континуума отрезков обладает свойством (ud), но это произведение содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное компактификации Стоуна–Чеха натурального ряда, которая не имеет свойства (ud). В частности, носители приближающих дискретных мер не всегда можно выбрать в носителе приближаемой меры. Различные результаты, связанные с равномерно распределенными последовательностями в топологических пространствах, можно найти в работах [23, 31–33, 37].

2. Пространства со свойством равномерного распределения

В данном параграфе будем изучать устойчивость класса пространств со свойством равномерного распределения относительно умножения на пространства, в которых компакты метризуемы, в частности на суслинские пространства.

Следующее предложение показывает, в частности, что проверку введенных свойств достаточно осуществлять лишь для мер с компактными носителями.

Предложение 2.1. *Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ подпространство X_n в X измеримо относительно всех радоновских мер на X и обладает свойством* (tud). *Тогда пространство $Y := \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ также обладает этим свойством. Аналогичное утверждение верно для свойства* (ud).

Доказательство. Пусть μ — вероятностная мера Радона на Y. Положим $X_0 := \varnothing$. Через I_A будем обозначать индикаторную функцию множества A, а через $I_A \cdot \mu$ меру с плотностью I_A относительно μ. Свойства (tud) и (ud) сохраняются при конечных объединениях. Действительно, если μ — вероятностная радоновская мера на $X_1 \cup X_2$, то можно найти неотрицательные дискретные меры μ_n^1 на X_1 с $\mu_n^1(X_1) = \mu(X_1)$, слабо сходящиеся на X_1 к мере $I_{X_1} \cdot \mu$, а также неотрицательные дискретные меры μ_n^2 на X_2 с $\mu_n^2(X_2) = \mu(X_2 \backslash X_1)$, слабо сходящиеся на X_2 к мере $I_{X_2 \backslash X_1} \cdot \mu$. Тогда дискретные вероятностные меры $\mu_n^1 + \mu_n^2$ слабо сходятся к μ на $X_1 \cup X_2$.

Поэтому далее можно считать, что $X_n \subset X_{n+1}$. По условию для каждого n найдется равномерно плотная последовательность неотрицательных мер $\mu_{n,k}$ на X_n с конечными носителями и $\|\mu_{n,k}\| = \mu(X_n \backslash X_{n-1})$, которая слабо сходится к мере $I_{X_n \backslash X_{n-1}} \cdot \mu$ на X_n при $k \to \infty$. Положим

$$\nu_n := c_n^{-1}[\mu_{1,n} + \cdots + \mu_{n,n}],$$

$$c_n := \mu_{1,n}(X) + \cdots + \mu_{n,n}(X) = \mu(X_n).$$

Получены вероятностные меры с конечными носителями в Y. Ясно, что $c_n \to 1$ при $n \to \infty$. Меры ν_n слабо сходятся к μ на Y. Действительно, пусть f — ограниченная непрерывная функция на Y и $\varepsilon > 0$. Можно считать, что $|f| \le 1$. Найдем такое n_1, что

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \mu(X_n \backslash X_{n-1}) < \varepsilon$$

и

$$\|\nu_n - \mu_{1,n} - \cdots - \mu_{n,n}\| \le \varepsilon, \quad \forall\, n \ge n_1.$$

Затем найдем такое $m \ge n_1$, что

$$\Bigl| \int_{X_n \backslash X_{n-1}} f\, d\mu - \int_{X_n \backslash X_{n-1}} f\, d\mu_{n,k} \Bigr| < \varepsilon n_1^{-1}$$

при каждом $n = 1, \ldots, n_1$ и всех $k \ge m$. Тогда при $n \ge m$ получим

$$\Bigl| \int_Y f\, d\mu - \int_Y f\, d\nu_n \Bigr| \le 4\varepsilon.$$

Остается заметить, что последовательность $\{\nu_n\}$ равномерно плотна в Y. Для этого при фиксированном $\varepsilon > 0$ выберем n_1 так же, как и выше, а затем при каждом $n = 1, \ldots, n_1$ найдем такой компакт $K_n \subset X_n$, что

$$\mu_{n,k}(X \backslash K_n) \le \varepsilon \quad \text{при всех } k.$$

Множество $K = K_1 \cup \cdots \cup K_{n_1}$ компактно и $\nu_n(Y \backslash K) \le 3\varepsilon$ для всех n. Случай свойства (ud) аналогичен. □

Замечание 2.2. Из этого предложения следует, что всякая вероятностная радоновская мера, сосредоточенная на счетном объединении метризуемых компактов, обладает t-равномерно распределенной последовательностью, принадлежащей этому объединению. Значит, всякое вполне регулярное пространство, в котором все компакты метризуемы, обладает свойством (tud). Например, таковы вполне регулярные суслинские пространства.

Предложение 2.3. *Пусть компакт X имеет свойство* (tud), *а отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно и сюръективно. Тогда Y также обладает свойством* (tud). *Аналогичное утверждение верно для свойства* (ud).

Доказательство. Из условия следует, что Y – компакт, причем прообразы компактов компактны. Отсюда следует, что индуцированное отображение пространств мер сюръективно. Поэтому для всякой вероятностной меры Радона μ на Y найдется вероятностная мера Радона ν на X, для которой $\mu = \nu \circ f^{-1}$. Тогда для ν существует t-равномерно распределенная последовательность точек $x_n \in X$. Положим

$$\nu_n = n^{-1}(\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n}).$$

Тогда для всякой непрерывной ограниченной функции h на X имеем

$$\int_X h(x)\,\nu_n(dx) \to \int_X h(x)\,\nu(dx).$$

Докажем, что последовательность $y_n := f(x_n)$ является равномерно распределенной для μ. Положим

$$\mu_n := n^{-1}(\delta_{y_1} + \cdots + \delta_{y_n}).$$

Заметим, что

$$\mu_n = \nu_n \circ f^{-1}.$$

Пусть $g \in C_b(Y)$. Тогда $h = g \circ f \in C_b(X)$, откуда

$$\int_Y g\,d\mu_n = \int_X g \circ f\,d\nu_n \to \int_X g \circ f d\nu = \int_Y g\,d\mu.$$

Равномерная плотность последовательности μ_n следует из того, что для любого компакта $K \subset X$ выполнено неравенство

$$\nu_n(K) \le \nu_n(f^{-1}(f(K))) = \mu_n(f(K)).$$

Случай свойства (ud) аналогичен. □

Из приведенных рассуждений вытекает также следующее утверждение.

Предложение 2.4. *Свойства* (ud) *и* (tud) *сохраняются непрерывными сюръективными отображениями, для которых индуцированные отображения пространств вероятностных радоновских мер сюръективны* (*например, таковы непрерывные отображения, для которых прообразы компактов компактны*).

Теорема 2.5. *Пусть пространство X обладает свойством* (tud). *Тогда этим свойством обладает пространство $X\times Y$ для всякого непустого вполне регулярного пространства Y, в котором компакты метризуемы. Аналогичное утверждение верно для свойства* (ud).

Доказательство. Поскольку проекции всякой меры на $X\times Y$ на сомножители сосредоточены на счетных объединениях компактов, а компакты в Y метризуемы, то предложение 2.1 сводит общий случай к случаю, когда X и Y компактны, причем Y — метрическое пространство.

В этом случае свойства (ud) и (tud) совпадают.

Пусть μ – вероятностная мера Радона на $X\times Y$, ν – ее проекция на X и μ_Y – ее проекция на Y. Как известно (см. [2], §10.4), существуют условные вероятностные радоновские меры μ^x на Y, т.е.

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mu(dxdy)=\int_X\int_Y f(x,y)\,\mu^x(dy)\,\nu(dx)$$

для всякой ограниченной борелевской функции f на $X\times Y$, причем для всякого борелевского множества $B\subset Y$ функция $x\mapsto \mu^x(B)$ измерима относительно ν. Пространство $\mathcal{P}(Y)$ борелевских вероятностных мер на Y наделим метрикой Канторовича–Рубинштейна d (см. [2], §8.3), задаваемой формулой

$$d(\mu_1,\mu_2)=\sup\Bigl|\int_Y f(y)\,\mu_1(dy)-\int_Y f(y)\,\mu_2(dy)\Bigr|,$$

где sup берется по всем таким функциям f на Y, что $|f(y)|\le 1$ и f липшицева с постоянной 1. Тогда $(\mathcal{P}(Y),d)$ – компактное метрическое пространство (см. [2], теоремы 8.3.2 и 8.9.3). Легко проверить, что отображение $\xi\colon\ x\mapsto\mu^x$ из X в $\mathcal{P}(Y)$ измеримо относительно меры ν. Для этого надо заметить, что имеется счетное множество в $C(Y)$, разделяющее меры на Y, а для всякой функции $\varphi \in C(Y)$ функция

$$x \mapsto \int_Y \varphi(y)\, \mu^x(dy)$$

измерима относительно ν. По теореме Лузина найдется последовательность таких компактов $K_n \subset X$, что $\nu(K_n) > 1-2^{-n}$, $K_n \subset K_{n+1}$ и сужения отображения ξ на K_n непрерывны. Напомним, что всякое непрерывное отображение G на компакте K в пространстве X, принимающее значения в банаховом пространстве E, продолжается до непрерывного отображения G_K из X в замкнутую выпуклую оболочку множества $G(K)$. От полноты E можно отказаться, если замкнутая выпуклая оболочка $G(K)$ полна (достаточно перейти к пополнению E). Поскольку $\mathcal{P}(Y)$ является полным выпуклым подмножеством нормированного пространства всех радоновских мер на Y с нормой Канторовича–Рубинштейна (это нормированное пространство не банахово, если компакт Y бесконечен), то при каждом n существует непрерывное отображение $\xi_n\colon\ x \mapsto \xi_n^x$, $X \to \mathcal{P}(Y)$, совпадающее с ξ на K_n. Положим $K_0 = \varnothing$.

При каждом фиксированном n для всякого $i = 1, \ldots, n-1$ найдем открытые множества $U_{n,i} \supset K_i$ со следующими свойствами:

$$d(\xi_i(x), \xi_n(x)) \le 2^{-n} \quad \text{при всех } i = 1, \ldots, n-1 \text{ и всех } x \in K_i.$$

Это возможно ввиду совпадения ξ_n с ξ_i на компакте K_i и непрерывности ξ_n и ξ_i. Можно считать, что $U_{n,i} \subset U_{n,i+1}$ при $i \le n-2$, перейдя к множествам $U_{n,1} \cap \cdots \cap U_{n,i}$, ибо $K_i \subset K_{i+1}$.

По нашему предположению для каждого фиксированного m имеется последовательность неотрицательных радоновских мер $\nu_{m,i}$ с конечными носителями $S_{m,i}$ и $\nu_{m,i}(X) = \nu(K_m \backslash K_{m-1})$, слабо сходящаяся на X к мере $I_{K_m \backslash K_{m-1}} \cdot \nu$. Теперь для каждого n найдем такой номер $m_n \ge n$, что

$$\nu_{1,m_n}(X \backslash U_{n,1}) + \nu_{2,m_n}(X \backslash U_{n,2}) + \cdots + \nu_{n-1,m_n}(X \backslash U_{n,n-1}) \le 2^{-n}. \qquad (2)$$

Это возможно, так как слабая сходимость мер $\nu_{l,i}$ к мере $I_{K_l\backslash K_{l-1}}\cdot\nu$ дает соотношение

$$\limsup_{i\to\infty}\nu_{l,i}(Z)\le\nu(Z\cap(K_l\backslash K_{l-1}))$$

для всех замкнутых множеств Z, а мы имеем

$$\nu((X\backslash U_{n,l})\cap(K_l\backslash K_{l-1}))=0$$

ввиду включения $K_l\subset U_{n,l}$ при $l\le n-1$. Положим

$$\nu_n:=\nu_{1,m_n}+\cdots+\nu_{n-1,m_n}.$$

Заметим, что ν_n – неотрицательная мера с конечным носителем, причем

$$\nu_n(X)=\nu_{1,m_n}(X)+\cdots+\nu_{n-1,m_n}(X)=\nu(K_{n-1}).$$

Поэтому при $n>1$ меры $\nu_n(X)^{-1}\nu_n$ – вероятностные.

Покажем, что меры ν_n слабо сходятся к ν. Пусть $\psi\in C_b(X)$, $|\psi(x)|\le 1$ и $\varepsilon>0$. Возьмем m с $2^{-m}<\varepsilon$. Ввиду слабой сходимости мер $\nu_{l,i}$ к мерам $I_{K_l\backslash K_{l-1}}\cdot\nu$ при фиксированном $l=1,\ldots,m$, найдется такое $N>m$, что при всех $l=1,\ldots,m$ и $i\ge N$ выполнены неравенства

$$\left|\int_X\psi(x)\,\nu_{l,i}(dx)-\int_{K_l\backslash K_{l-1}}\psi(x)\,\nu(dx)\right|\le\varepsilon m^{-1}.$$

При $i\ge N$ получаем

$$\left|\int_X\psi(x)\,(\nu_{1,i}+\cdots+\nu_{m,i})(dx)-\int_{K_m}\psi(x)\,\nu(dx)\right|\le\varepsilon.$$

При $n\ge N$ это дает оценку

$$\left|\int_X\psi(x)\,\nu_n(dx)-\int_X\psi(x)\,\nu(dx)\right|\le 3\varepsilon$$

ввиду соотношений $\nu(X\backslash K_m)\le\varepsilon$ и

$$\|\nu_n-\nu_{1,m_n}-\cdots-\nu_{m,m_n}\|\le\nu(K_{m+1}\backslash K_m)+\nu(K_{m+2}\backslash K_{m+1})+\cdots\le 2^{-m}\le\varepsilon.$$

Итак, слабая сходимость ν_n к ν установлена.

Ввиду компактности $(\mathcal{P}(Y), d)$ при фиксированном n можно разделить X на такие попарно дизъюнктные борелевские части $B_{n,i}$, где $i = 1, \ldots, N_n$, что верны оценки

$$d(\mu_n^x, \mu_n^z) < 2^{-n} \quad \text{при } x, z \in B_{n,i}.$$

Выберем в $B_{n,i}$ по точке $x_{n,i}$ и найдем такую меру $\sigma_{n,i} \in \mathcal{P}(Y)$ с конечным носителем, что

$$d(\mu_n^x, \sigma_{n,i}) \leq 2^{1-n} \quad \text{при } x \in B_{n,i}.$$

Для этого достаточно взять такую меру в шаре радиуса 2^{-n} с центром в $\mu_n^{x_{n,i}}$. Положим

$$\mu_n^x := \sigma_{n,i} \quad \text{при } x \in B_{n,i}.$$

Таким образом,

$$\sup_{x \in X} d(\xi_n^x, \mu_n^x) \leq 2^{1-n}.$$

Наконец, зададим меру μ_n на $X \times Y$ с конечным носителем как меру с проекцией ν_n на X и условными мерами μ_n^x, т.е.

$$\mu_n(B) = \int_X \int_Y I_B(x,y)\, \mu_n^x(dy)\, \nu_n(dx).$$

Покажем, что меры μ_n слабо сходятся к μ. Достаточно установить сходимость на функциях вида

$$f(x,y) = \psi(x)\varphi(y), \quad \text{где } \psi \in C_b(X),\ \sup_x |\psi(x)| \leq 1,\ \sup_y |\varphi(y)| \leq 1,$$

причем функция φ липшицева с постоянной 1. Действительно, линейная оболочка множества таких функций плотна в $C(X \times Y)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем m так, что $2^{-m} < \varepsilon$. Справедливо неравенство

$$\left| \int_X \psi(x) \int_Y \varphi(y)\, \xi_m^x(dy)\, \nu(dx) - \int_X \psi(x) \int_Y \varphi(y)\, \xi^x(dy)\, \nu(dx) \right| \leq 2^{-m}, \quad (3)$$

ибо $\xi_m = \xi$ на K_m и $\nu(X \backslash K_m) \leq 2^{-m}$. Покажем, что при $n \geq m$ выполнено неравенство

$$\left| \int_X \psi(x) \int_Y \varphi(y)\, \xi_m^x(dy)\, \nu_n(dx) - \int_X \psi(x) \int_Y \varphi(y)\, \xi_n^x(dy)\, \nu_n(dx) \right| \leq 2^{2-m}. \quad (4)$$

В самом деле, мера ν_n отличается по вариации от меры

$$\eta := \nu_{1,m_n} + \cdots + \nu_{m,m_n}$$

не более, чем на 2^{-m}. Ввиду оценки (2) и включений $U_{n,i} \subset U_{n,m}$ при $i \le n$ получаем

$$\eta(X \backslash U_{n,m}) \le \nu_{1,m_n}(X \backslash U_{n,1}) + \nu_{2,m_n}(X \backslash U_{n,2}) + \cdots + \nu_{m,m_n}(X \backslash U_{n,n-1}) \le 2^{-n}.$$

При $x \in U_{n,m}$ мы имеем $d(\xi_n^x, \xi_m^x) \le 2^{-n}$. Следовательно,

$$\left| \int_X \psi(x) \int_Y \varphi(y)\, \xi_n^x(dy)\, \eta(dx) - \int_X \psi(x) \int_Y \varphi(y)\, \xi_m^x(dy)\, \eta(dx) \right| \le$$
$$\le \int_X \left| \int_Y \varphi(y)\, \xi_n^x(dy) - \int_Y \varphi(y)\, \xi_m^x(dy) \right| |\psi(x)|\, \eta(dx) \le$$
$$\le \int_X d(\xi_n^x, \xi_m^x)\, \eta(dx) \le 2^{-n} + \eta(X \backslash U_{n,m}) \le 2^{1-n},$$

откуда следует (4).

Непрерывность отображения $x \mapsto \xi_m^x$ со значениями в $(\mathcal{P}(Y), d)$ дает непрерывность функции

$$x \mapsto \int_Y \varphi(y)\, \xi_m^x(dy).$$

Следовательно, найдется такое $N > m$, что

$$\left| \int_X \psi(x) \int_Y \varphi(y)\, \xi_m^x(dy)\, \nu(dx) - \int_X \psi(x) \int_Y \varphi(y)\, \xi_m^x(dy)\, \nu_n(dx) \right| < \varepsilon \quad (5)$$

при $n \ge N$. При таких n с учетом соотношений (3), (4) и (5) находим

$$\left| \int_{X\times Y} f\, d\mu - \int_{X\times Y} f\, d\mu_n \right| \le 6\varepsilon.$$

Остается заменить меры μ_n вероятностными мерами $\mu_n(X)^{-1}\mu_n$ и воспользоваться тем, что $\mu_n(X) = \nu(K_{n-1}) \to 1$ при $n \to \infty$. Теорема доказана. $\square$

Напомним, что во вполне регулярных суслинских пространствах компакты метризуемы.

Следствие. *Утверждение теоремы остается верным, если в качестве Y взять вполне суслинское пространство.*

По-видимому, свойство (tud) строго сильнее свойства (ud). Разумеется, для компактов (более общим образом, для секвенциально прохоровских пространств) оба свойства равносильны. Представляется весьма правдоподобным, что существуют компакты X и Y со свойством (ud), произведение $X \times Y$ которых не имеет этого свойства. Было бы интересно построить соответствующие примеры.

Глава 2

Преобразование Радона в бесконечномерных пространствах

1. Определение преобразования Радона

Целью этой работы является введение преобразования Радона для мер на бесконечномерных пространствах. Классическое преобразование Радона числовой функции f на $\mathbb{R}^n$ задано на пространстве аффинных подпространств коразмерности 1, т.е. на пространстве множеств вида $L+x$, где L – гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, и действует по формуле

$$\mathcal{R}f(L+x) = \int_{L+x} f(u)du.$$

В настоящее время аналогичные преобразования исследованы в значительно более общей ситуации, в частности, для нелинейных многообразий (см. [13, 14]), где имеются ссылки на обширную литературу). Здесь же, в [13], отмечено, что преобразование Радона тесно связано с преобразованием Фурье

$$\tilde{f}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i(x,u)}dx, \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Действительно, если $s \in \mathbb{R}^n$ и ω — единичный вектор, то

$$\tilde{f}(s\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{(x,\omega)=r} f(x)e^{-i(x,\omega)}dm(x),$$

таким образом

$$\tilde{f}(s\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega, r)e^{-isr}dr.$$

Это означает, что n-мерное преобразование Фурье есть композиция одномерного преобразования Фурье и преобразования Радона.

Мы ограничимся указанным выше частным случаем (играющем важную роль в теории), поскольку целью работы является обсуждение бесконечномерного преобразования Радона. Такое преобразование уже обсуждалось рядом авторов (см. [16, 24, 25, 34]) в случае гауссовских мер. Разумеется, в бесконечномерном случае предлагаемое нами общее определение не является единственным возможным разумным аналогом конечномерного преобразования Радона, но оно представляется естественным и позволяет получить аналоги некоторых свойств классического преобразования.

Для дальнейшего рассмотрения понадобятся понятия радоновской меры на локально выпуклом пространстве X и системы условных мер. Более подробную информацию можно найти в [2,17]. Обозначим через $\mathcal{B}(X)$ борелевскую σ-алгебру пространства X, т.е. наименьшую σ-алгебру, содержащую все открытые множества. Напомним, что радоновской мерой на X называется счетно-аддитивная вещественная (возможно, знакопеременная) функция μ на $\mathcal{B}(X)$, обладающая следующим свойством: для всяких $B \in \mathcal{B}(X)$ и $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K_\varepsilon \subset B$, что $|\mu|(B\backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$, где $|\mu|$ обозначает полную вариацию меры μ, т.е. если $\mu = \mu^+ - \mu^-$, где μ^+ и μ^- – взаимно сингулярные неотрицательные меры на $\mathcal{B}(X)$, то $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Положим $\|\mu\| := |\mu|(X)$.

Иногда бывает полезно рассматривать сужение радоновской меры на σ-алгебру $\sigma(X^*)$, порожденную пространством X^* непрерывных линейных функционалов на X. Впрочем, для многих пространств (например сепарабельных пространств Фреше или суслинских локально выпуклых пространств) эта σ-алгебра совпадает с борелевской.

Пусть $l \in X^*$, $l \neq 0$, $L = \operatorname{Ker} l = l^{-1}(0)$. Выберем вектор $v \in X$, для которого $l(v) = 1$.

Обозначим через $\mu \circ l^{-1}$ образ меры μ при отображении l, т.е. борелевскую меру на прямой, заданную формулой

$$\mu \circ l^{-1}(B) = \mu(l^{-1}(B)).$$

Известно, что существуют такие меры μ^{L+tv} на множествах $L+tv$, называемые условными, что

$$\mu(B)=\int_{\mathbb{R}}\mu^{L+tv}\,|\mu|\circ l^{-1}(dt),\quad B\in\mathcal{B}(X).$$

Аффинные подпространства $L+tv$ охватывают все аффинные подпространства вида $L+x$, $x\in X$, поэтому можно считать, что заданы условные меры μ^{L+x} на множествах $L+x$, удовлетворяющие тождеству

$$\mu(B)=\int_X\mu^{L+x}\,|\mu|(dx),\quad B\in\mathcal{B}(X).$$

При этом $L+x=L+l(x)v$, ибо $x-l(x)v\in L$, откуда

$$\mu^{L+x}=\mu^{L+l(x)v}.$$

Разумеется, для неотрицательной меры μ мы имеем $|\mu|=\mu$, причем в этом случае условные меры можно выбрать вероятностными. Известно, что условные меры определены однозначно с точностью до переопределения их для точек x из множества μ-меры нуль (или точек t из множества $\mu\circ l^{-1}$-меры нуль). В дальнейшем для удобства мы будем считать, что фиксированы некоторые борелевские (по x или t) версии условных мер.

Пусть f – ограниченная борелевская функция на X. Преобразование Радона функции f зададим формулой

$$\mathcal{R}^\mu f(L+x)=\int_X f(y)\mu^{L+x}(dy).\tag{6}$$

Более общим образом, формулой (6) можно задать преобразование Радона интегрируемой функции f, однако оно может быть определено уже не для всех x. Так как мера μ^{L+x} сосредоточена на $L+x$, то и интеграл можно брать по $L+x$, а не по всему пространству. Однако нередко бывает удобно как раз иметь область интегрирования, не зависящую от x.

Из определения ясно, что фактически мы рассматриваем интегралы

$$\mathcal{R}^\mu f(L+tv)=\int_X f(y)\mu^{L+tv}(dy).$$

Правомерно ли считать введенное нами преобразование аналогом классического преобразования Радона в $\mathbb{R}^n$? Проблема в том, что мера Лебега, используемая в конечномерном случае, бесконечна и не имеет непосредственного бесконечномерного аналога. Конечно, если считать условными мерами на плоскостях, порожденными мерой Лебега, естественные меры Лебега на этих плоскостях, то аналогия имеет место. Однако если в случае, когда функция f имеет носитель в кубе Q, взять в качестве меры μ сужение меры Лебега на Q, то наше определение уже не даст классическое преобразование Радона. Точнее говоря, будет выполнено равенство

$$\mathcal{R}^\mu f(L+x) = \frac{1}{\varrho(x)} \int_{L+x} f(y)dy,$$

где $\varrho(x)$ – $(n-1)$-мерная мера сечения куба Q плоскостью $L+x$. Правда, $\varrho(x)$ не зависит от f, поэтому оба преобразования связаны довольно просто. Если вероятностная мера μ на $\mathbb{R}^n$ задана плотностью ϱ_μ, L — подпространство векторов с нулевой последней координатой, $v = e_n$ — n-й базисный вектор, то из известной формулы для условных плотностей (см. [2], § 10.4) вытекает равенство

$$\mathcal{R}^\mu f(L+tv) = \frac{1}{\psi(t)} \int_L f(y+tv)\varrho_\mu(y+tv)\, dy, \tag{7}$$

где ψ — плотность образа меры μ при проектировании на последнюю координатную прямую, т.е.

$$\psi(t) = \int_L \varrho_\mu(y+tv)dy.$$

Будем говорить, что плотность ϱ некоторой борелевской меры на $\mathbb{R}^n$ входит в класс B_∞, если для всякого $k \in \mathbb{N}$ функция $(1+|x|)^k\varrho(x)$ существенно ограничена.

Заметим, что значение бесконечномерного преобразования Радона в фиксированной точке (x, L) можно выразить через некоторое конечномерное преобразование Радона. Это будет сделано во втором параграфе.

Сравним нашу конструкцию с определением из работ [16,34], где предполагалось, что μ — центрированная гауссовская мера. Для этого сперва напомним (см. [3, 17]) определение гауссовской меры.

Определение 1.1. *Радоновская вероятностная мера γ на локально выпуклом пространстве X называется гауссовской, если всякий функционал $f \in X^*$ является гауссовской случайной величиной на (X, γ), т.е. мера $\gamma \circ f^{-1}$ – гауссовская на прямой; последнее означает, что эта мера либо сосредоточена в некоторой точке, либо имеет плотность вида*

$$p(t) = (2\pi\sigma_f)^{-1/2} \exp(-(2\sigma_f)^{-1}(t - a_f)^2)$$

относительно меры Лебега.

Если все меры $\gamma \circ f^{-1}$ симметричны (это равносильно тому, что $a_f = 0$), то мера γ называется центрированной. Стандартная гауссовская мера на прямой задается плотностью $(2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2)$. Типичными и важными для приложений примерами гауссовских мер служат мера Винера на пространстве $C[0, 1]$ и счетное произведение стандартных гауссовских мер на прямой, рассматриваемое на пространстве $\mathbb{R}^\infty$ всех вещественных последовательностей. Последний пример универсален: всякая центрированная радоновская гауссовская мера, не сосредоточенная на конечномерном пространстве, изоморфна счетному произведению стандартных гауссовских мер при некотором измеримом линейном отображении.

Для центрированной гауссовской меры γ на X обозначим через X^*_γ замыкание X^* в $L^2(\gamma)$, а через $H(\gamma)$ обозначим линейное подпространство в X, состоящее из всех векторов h с конечной нормой

$$|h|_H := \sup\{\xi(h) \colon\ \xi \in X^*,\ \|\xi\|_{L^2(\gamma)} \le 1\}.$$

Подпространство $H(\gamma)$ называется пространством Камерона–Мартина меры γ. Известно, что относительно указанной нормы оно оказывается сепарабельным гильбертовым пространством, единичный шар которого компактен в X, причем $H(\gamma)$ изоморфно X^*_γ посредством отображения

$$K_\gamma\colon\ \eta \mapsto \int_X \eta(x)x\,\gamma(dx), \quad \eta \in X^*_\gamma.$$

Этот векторный интеграл можно задать в смысле Бохнера, но для введения упомянутого изоморфизма достаточно интерпретировать его в слабом смысле как равенство

$$\xi(K_\gamma\eta) = \int_X \xi(x)\eta(x)\,\gamma(dx), \quad \xi \in X^*, \eta \in X^*_\gamma.$$

Если $h \in H(\gamma)$ и $h = K_\gamma\eta$, где $\eta \in X^*_\gamma$, то полагают $\widehat{h} = \eta$. Например, если $X = \mathbb{R}^\infty$ и γ — счетное произведение стандартных гауссовских мер, то X^* можно отождествить с пространством конечных последовательностей, тогда X^*_γ естественно отождествляется с l^2, что дает также равенство $H(\gamma) = l^2$.

Аналогом X^*_γ для общей меры μ можно считать замыкание X^* в пространстве $L^0(\mu)$ измеримых функций со сходимостью по мере. Тогда при желании можно распространить преобразование Радона и на элементы $l \in X^*_\mu$, так как условные меры существуют и на множествах $l^{-1}(t)$, однако мы не будем здесь это делать, хотя для полного отождествления нашей конструкции с определениями из [16, 34] в гауссовском случае без этого не обойтись. Укажем лишь, что в гауссовском случае наличие описанного выше изоморфизма между X^*_γ и $H(\gamma)$ позволяет задать преобразование Радона $Gf(P)$ ограниченной борелевской функции f на множестве аффинных гиперплоскостей в $H(\gamma)$ вида $P = P_0 + h$, где P_0 – замкнутая гиперплоскость в $H(\gamma)$ и $h \in H(\gamma)$. Для этого записываем P в виде $P = e^\perp + te$, где $e \in H(\gamma)$, $|e|_H = 1$, берем условные меры γ^t на множествах $\widehat{e}^{-1}(t)$ и интегрируем f по условной мере γ^1. Непосредственно проверяется, что это и дает описанное в [16, 34] преобразование.

Отметим, что использование условных мер в данной конструкции совершенно естественно. Условные меры на бесконечномерных пространствах играют важную при рассмотрении различных преобразований мер. Например, они используются при изучении нелинейных образов мер (см.

книгу [5]). В действительности интегрирование по подмногообразиям в конечномерном случае тоже можно рассматривать как интегрирование по условным мерам. Основное своеобразие конечномерного случая состоит в наличии инвариантных мер. С помощью условных мер преобразование Радона в принципе можно задавать и на бесконечномерных многообразиях.

2. Свойства преобразования Радона

Значение бесконечномерного преобразования Радона в фиксированной точке (x, L) можно выразить через некоторое конечномерное преобразование Радона. Для этого возьмем конечномерное линейное подпространство $K \subset X$, содержащее v. Пусть $K_0 = K \cap L$. Существует непрерывная линейная проекция $P_K\colon\ X \to K$ с тем свойством, что

$$Z := P_K^{-1}(0) \subset L.$$

Ее можно построить в виде

$$P_K x = l(x)v + l_1(x)v_1 + \dots l_{k-1}(x)v_{k-1},$$

где $v_1, \dots, v_{k-1}$ – базис в K_0, $l_i \in X^*$. Тогда

$$P_K x - l(x)v \in K_0 \quad \forall\, x \in X.$$

Положим $\mu_K := \mu \circ P_K^{-1}$. Мера μ_K на конечномерном пространстве K порождает преобразование Радона $\mathcal{R}_K$ на ограниченных борелевских функциях. Согласно нашему определению,

$$\mathcal{R}_K h(K_0 + th) = \int_K h(u)\mu_K^{K_0+tv}(du)$$

для всякой ограниченной борелевской функции h на K, где $\mu_K^{K_0+tv}$ – соответствующая мере μ_K условная мера на $K_0 + tv$ (тем самым интегрировать можно не по всему K, а по $K_0 + tv$). Это означает, что

$$\mu_K = \int_{\mathbb{R}} \mu_K^{K_0+tv} \mu_K \circ l^{-1}(dt).$$

Рассмотрим теперь функцию

$$h(u) = \int_X f(y)\mu^{Z+u}(dy), \quad u \in K.$$

Предложение 2.1. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{R}^\mu f(L + tv) = \mathcal{R}_K h(K_0 + tv) \tag{8}$$

для $\mu \circ l^{-1}$-почти всех t. Иначе говоря,

$$\mathcal{R}^\mu f(L + l(x)v) = \mathcal{R}_K h(K_0 + l(x)v)$$

для μ-почти всех x, что можно записать также в виде

$$\mathcal{R}^{\mu} f(L+x) = \mathcal{R}_K h(K_0 + P_K x) \tag{9}$$

для μ-почти всех x.

Доказательство. Правая часть (8) совпадает с

$$\int_K \int_X f(y) \mu^{Z+u}(dy) \mu_K^{K_0+tv}(du),$$

поэтому нам достаточно проверить равенство

$$\int_K \mu^{Z+u} \mu_K^{K_0+tv}(du) = \mu^{L+tv} \tag{10}$$

для $\mu \circ l^{-1}$-почти всех t. В свою очередь, для этого достаточно показать, что интегралы от обеих частей (10) по мере $\mu \circ l^{-1}$ равны, поскольку условные меры определены однозначно с точностью до эквивалентности, а при каждом t мера, задаваемая правой частью (10), сосредоточена на аффинном подпространстве $L + tv$ в силу соотношения $Z + K_0 + tv \subset L + tv$. Интеграл от μ^{L+tv} по мере $\mu \circ l^{-1}$ есть мера μ, а интеграл от левой части (10) по мере $\mu \circ l^{-1}$ равен интегралу от μ^{Z+u} по мере, полученной интегрированием $\mu_K^{K_0+tv}$ по $\mu \circ l^{-1}$, т.е. по мере μ_K. Остается заметить, что интеграл от μ^{Z+u} по μ_K есть также исходная мера μ. Формулы (9) и (10) совпадают, так как $L + l(x)v = L + x$, ибо $x - l(x) \in L$ для всех x, аналогично $K_0 + l(x)v = K_0 + P_K x$, ибо $P_K x - l(x)v \in K_0$. □

Обратим внимание на то обстоятельство, что имеется весьма большой произвол в выборе K. Можно брать возрастающие конечномерные пространства K, что будет важно ниже.

Определение 2.2. *Будем говорить, что конечномерные проекции меры μ задаются плотностями класса B_∞, если для всякого сюръективного непрерывного линейного отображения $T\colon X \to \mathbb{R}^n$ мера $\mu \circ T^{-1}$ имеет плотность из B_∞.*

Теорема 2.3. *Предположим, что конечномерные проекции вероятностной меры μ задаются почти всюду положительными плотностями класса B_∞. Пусть ограниченная борелевская функция f такова, что ее преобразование Радона $\mathcal{R}^\mu f$ удовлетворяет следующему условию: существует такое ограниченное выпуклое замкнутое множество $V \subset X$, что $\mathcal{R}^\mu f(L+x) = 0$ для каждой гиперплоскости L при μ-почти всех x, для которых $(L+x)\cap V = \varnothing$. Тогда $f(x) = 0$ для μ-почти всех $x \in X\backslash V$.*

Доказательство. Пусть K — конечномерное пространство в X, Z — дополняющее его замкнутое линейное подпространство. Выберем проектор P_K на K. Пространство K будем отождествлять с $\mathbb{R}^k$. Замыкание $P_K(V)$ обозначим через C; оно выпукло и компактно. Пусть $v \in K$ и K_0 – подпространство коразмерности 1 в K. Тогда $L = Z + K_0$ — замкнутая гиперплоскость, содержащая Z, но не содержащая v, $K_0 = K \cap L$. Будем считать, что $L = l^{-1}(0)$, $l \in X^*$, $l(v) = 1$. В силу формул (9), (10) для функции

$$h(u) = \int_X f(y)\mu^{Z+u}(dy)$$

на K выполнено равенство

$$\mathcal{R}_K h(K_0 + P_K x) = 0$$

для μ-почти всех x с тем свойством, что $(L+x)\cap V = \varnothing$. Следовательно,

$$\mathcal{R}_K h(K_0 + u) = 0$$

для почти всех относительно меры $\mu \circ P_K^{-1}$ точек $u \in K$ с тем свойством, что $C \cap (K_0 + u) = \varnothing$.

Для преобразования Радона в $\mathbb{R}^k$ известна теорема Хелгасона (см. следствие 2.8 в [13]): если преобразование Радона непрерывной функции f класса B_∞ равно нулю на аффинных гиперподпространствах, лежащих вне некоторого выпуклого компакта C, то $f(x) = 0$ при $x \notin C$. Из доказательства (в котором f заменяется гладкими свертками) видно, что без предположения непрерывности f будет верно такое заключение:

$f=0$ почти всюду вне C. Применяя этот факт и учитывая формулу (7), мы получаем, что почти всюду вне выпуклого компакта C обращается в нуль функция $h\varrho_K$, где ϱ_K — плотность проекции μ на $K=\mathbb{R}^k$ относительно стандартной меры Лебега. В силу нашего условия на проекции почти всюду вне C равна нулю сама функция h. Тогда функция h равна нулю почти всюду вне $P_K(V)$, ибо выпуклое множество в $\mathbb{R}^k$ отличается от своего замыкания на множество меры нуль. Тем самым функция $h(P_K x)$ равна нулю μ-почти всюду вне замкнутого цилиндра $V_K=P_K^{-1}(P_K(V))$.

Из этого следует, что $f=0$ почти всюду вне V. Действительно, пользуясь радоновостью μ, для каждого $\varepsilon>0$ можно найти такую функцию g вида $g(x)=g_0(Qx)$, где $Q\colon\ X\to\mathbb{R}^n$ – непрерывный линейный оператор и $g_0\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $\|f-g\|_{L^2}\le\varepsilon$. Тогда для оператора E_Q условного математического ожидания, порожденного проекцией Q, имеем

$$\|E_Q f-E_Q g\|_{L^2}\le\varepsilon,$$

но $E_Q g=g$, откуда

$$\|f-E_Q f\|_{L^2}\le 2\varepsilon.$$

При этом $E_Q f$ задается функцией h рассмотренного выше вида, что вытекает из известного представления условного математического ожидания интегралом по условной мере (см. § 10.4 в [2]). Взяв конечномерное подпространство K, дополняющее подпространство $Z=Q^{-1}(0)$, в использованных ранее обозначениях получаем

$$E_Q f(x)=h(P_K x),\quad h(u)=\int_X f(y)\mu^{Z+u}(dy).$$

При этом $h(P_K x)=0$ почти всюду вне цилиндра $V_K=P_K^{-1}(P_K(V))$. Такие проектор P_{K_n} и функция u_n найдутся для каждого ε вида n^{-1}, $n\in\mathbb{N}$, поэтому

$$\|f-u_n\circ P_{K_n}\|_{L^2}\to 0.$$

Если замкнутое полупространство $\Pi=\{l_0\le c\}$, где $l_0\in X^*$, содержит V, а все цилиндры V_n лежат в Π, то мы получаем, что $f(x)=0$

почти всюду в открытом полупространстве $X\backslash\Pi = \{l_0 > c\}$. Чтобы добиться включения $V_n \subset \Pi$, добавляем l_0 к конечным наборам функционалов, задающих проекции на K_n. Поскольку мера $|f|\mu$ радонова, то она оказывается равной нулю на объединении всех таких открытых полупространств, дополнения которых содержат V (см. предложение 7.2.2 в [2]). Из замкнутости V и теоремы Хана–Банаха следует, что указанное объединение есть $X\backslash V$. Равенство нулю меры $|f|\mu$ на $X\backslash V$ равносильно тому, что $f(x) = 0$ почти всюду на $X\backslash V$. $\square$

Отметим, что достаточным условием наличия плотностей класса B_∞ у конечномерных проекций является бесконечная дифференцируемость мер $f^k\mu$, где $f \in X^*$ и $k \in \mathbb{N}$, вдоль векторов из плотного подпространства (см. [17, 18]). Достаточным условием положительности плотностей почти всюду является эквивалентность меры μ ее сдвигам на векторы всюду плотного множества.

Здесь нужно сделать еще одно замечание. Наша теорема доказана для случая, когда плотности проекции меры принадлежат классу B_∞. Это ограничение не удается улучшить. Однако, в классической теореме о носителе оно также присутствует. Более того, есть контрпример, показывающий что это невозможно. Приведем его здесь вместе с теоремой.

Теорема (Helgason). *Пусть функция $f \in C(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *для любого целого $k > 0$ функция $|x|^k f(x)$ ограничена;*

(ii) *существует постоянная $A > 0$, такая что $\hat{f}(\xi) = 0$, если $d(0,\xi) > A$, где d — расстояние в $\mathbb{R}^n$.*

Тогда $f(x) = 0$ при $|x| > A$.

Первое условие как раз и означает, что $f \in B_\infty(\mathbb{R}^n)$. В качестве примера, показывающего, что его нельзя ослабить, рассмотрим на плоскости функцию $f(x, y) = (x + iy)^{-5}$, измененную в малом круге около начала координат так, чтобы полученная функция была гладкой в $\mathbb{R}^2$. По теореме Коши для большого полукруга имеем

$$\int_l f(x)dm(x) = 0$$

для любой прямой l, лежащей вне единичного круга. Таким образом выполнено условие (ii), а значит условие (i) не может быть отброшено или существенно ослаблено.

3. Преобразование Радона в случае гауссовских мер

Для корректной формулировки последней теоремы нам понадобится теорема Ферника, которая гарантирует существование используемых в нашей теореме констант.

Теорема (Ферник). *Пусть μ – центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X и p – μ–измеримая полунорма на X, тогда существует $\varepsilon_p > 0$ такое, что*

$$\int \exp(\varepsilon_p p^2) d\mu < \infty.$$

Теорема 3.1. *Пусть μ — центрированная радоновская гауссовская мера, p — полунорма на X и $\varepsilon_p > 0$ таково, что функция $\exp(2\varepsilon_p p^2)$ интегрируема относительно μ. Предположим, что борелевская функция f на X такова, что $|f(x)| \leq C\exp(\varepsilon_p p^2(x))$, причем ее преобразование Радона $\mathcal{R}^\mu f$ удовлетворяет следующему условию: существует такое ограниченное выпуклое замкнутое множество $V \subset X$, что $\mathcal{R}^\mu f(L+x) = 0$ для каждой гиперплоскости L при μ-почти всех x, для которых $(L+x) \cap V = \varnothing$. Тогда $f(x) = 0$ для μ-почти всех $x \in X \backslash V$.*

Доказательство. Сделаем несколько предварительных замечаний, относящихся к общим мерам. Пусть L и v — те же, что и выше, $K \subset X$ — конечномерное линейное подпространство, содержащее v, $K_0 = K \cap L$. Возьмем линейную проекцию $P_K\colon X \to K$ с тем свойством, что

$$Z := P_K^{-1}(0) \subset L.$$

Тогда $P_K x - l(x)v \in K_0$ при $x \in X$. Положим $\mu_K := \mu \circ P_K^{-1}$. Мера μ_K на конечномерном пространстве K порождает преобразование Радона $\mathcal{R}_K$ на ограниченных борелевских функциях. Согласно нашему определению,

$$\mathcal{R}_K h(K_0 + tv) = \int_K h(u)\mu_K^{K_0+tv}(du)$$

для всякой ограниченной борелевской функции h на K, где $\mu_K^{K_0+tv}$ — соответствующая мере μ_K условная мера на $K_0 + tv$. Рассмотрим теперь

функцию
$$h(u) = \int_X f(y)\mu^{Z+u}(dy), \quad u \in K.$$
В параграфе 2.2 было доказано равенство
$$\mathcal{R}^\mu f(L+tv) = \mathcal{R}_K h(K_0+tv)$$
для $\mu\circ l^{-1}$-почти всех t. Иначе говоря,
$$\mathcal{R}^\mu f(L+l(x)v) = \mathcal{R}_K h(K_0+l(x)v)$$
для μ-почти всех x, что можно записать также в виде
$$\mathcal{R}^\mu f(L+x) = \mathcal{R}_K h(K_0+P_K x) \tag{11}$$
для μ-почти всех x. В ходе доказательства было установлено равенство
$$\int_K \mu^{Z+u}\mu_K^{K_0+tv}(du) = \mu^{L+tv} \tag{12}$$
для $\mu\circ l^{-1}$-почти всех t.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть K — конечномерное пространство в X, Z — дополняющее его замкнутое линейное подпространство. Выберем проектор P_K на K. Пространство K будем отождествлять с $\mathbb{R}^k$. Замыкание $P_K(V)$ обозначим через C; оно выпукло и компактно. Пусть $v \in K$ и K_0 — подпространство коразмерности 1 в K. Тогда $L = Z + K_0$ — замкнутая гиперплоскость, содержащая Z, но не содержащая v, $K_0 = K \cap L$. Будем считать, что $L = l^{-1}(0)$, $l \in X^*$, $l(v) = 1$. В силу формул (11), (12) для функции
$$h(u) = \int_X f(y)\mu^{Z+u}(dy)$$
на K выполнено равенство
$$\mathcal{R}_K h(K_0+P_K x) = 0$$
для μ-почти всех x с тем свойством, что $(L+x)\cap V = \varnothing$. Следовательно, $\mathcal{R}_K h(K_0+u) = 0$ для почти всех относительно меры $\mu\circ P_K^{-1}$ точек $u \in K$ с тем свойством, что $C\cap(K_0+u) = \varnothing$. Пусть ϱ_K — плотность проекции μ на $K = \mathbb{R}^k$ относительно стандартной меры Лебега, т.е. ϱ_K — гауссовская

плотность. Покажем, что $h\varrho_K$ является функцией класса B_∞. Для этого следующим образом оценим ее интеграл по K:

$$\left|\int_K h(x+y)\varrho_K dx\right| = \left|\int_K\int_X f(x+y)\mu^{Z+x}(dy)\varrho_K dx\right| \leq$$

$$\leq \int_K\int_X |f(x+y)|\,\mu^{Z+x}(dy)\varrho_K dx \leq$$

$$\leq \int_K\int_X C\,\exp(\varepsilon_p p^2(x+y))\mu^{Z+x}(dy)\varrho_K dx.$$

Последняя оценка следует из условия $|f(x)| \leq C\,\exp(\varepsilon_p p^2(x))$. Далее, с учетом $p^2(x+y) \leq 2p^2(y)+2p^2(x)$, оценим сверху этот интеграл через

$$\int_K\int_X C\,\exp(\varepsilon_p(2p^2(y)+2p^2(x)))\mu^{Z+x}(dy)\varrho_K dx =$$

$$= \int_K C_y\,\exp(2\varepsilon_p p^2(x))\varrho_K dx.$$

Теперь перейдем к сферическим координатам (r,φ).

$$\int_K C_y\,\exp(2\varepsilon_p p^2(x))\varrho_K dx =$$

$$= \int_K C_y \exp((2\varepsilon_p p^2(\bar\varphi)-1/2)r^2)\cdot r^{n-1}\cdot g(\bar\varphi)dr\,d\bar\varphi =$$

$$= \int_\Pi\int_{\mathbb{R}^1} C_y \exp((2\varepsilon_p p^2(\bar\varphi)-1/2)r^2)\cdot r^{n-1}\cdot g(\bar\varphi)dr\,d\bar\varphi,$$

где $\Pi = [-\pi,\pi]^{n-2}\times[-\pi/2,\pi/2]$, $\bar\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$.

Правая часть неравенства интегрируема, значит, по теореме Фубини для почти всякого $\bar\varphi$ существует интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^1} C_y \exp((2\varepsilon_p p^2(\varphi)-1/2)r^2)r^{n-1}dr.$$

Поэтому $2\varepsilon_p p^2(\bar\varphi)-1/2<0$ почти всюду. Следовательно, $|h(x+y)\varrho_y|\cdot\|x\|^k$ стремится к нулю при $\|x\|\to\infty$ для любой степени k по мере Лебега.

Для преобразования Радона в $\mathbb{R}^k$ теорема Хелгасона (см. следствие 2.8 в [13]) утверждает, что если преобразование Радона непрерывной функции ψ класса B_∞ равно нулю на аффинных гиперподпространствах, лежащих вне некоторого выпуклого компакта C, то $\psi(x) = 0$ при $x \notin C$. Однако из доказательства (в котором ψ заменяется гладкими свертками) видно, что без предположения непрерывности ψ будет верно такое заключение: $\psi = 0$ почти всюду вне C. Применяя этот факт, получаем, что почти всюду вне выпуклого компакта C обращается в нуль функция $h\varrho_K$. Поэтому почти всюду вне C равна нулю сама функция h. Тогда функция h равна нулю почти всюду вне $P_K(V)$, ибо выпуклое множество в $\mathbb{R}^k$ отличается от своего замыкания на множество меры нуль. Тем самым функция $h(P_K x)$ равна нулю μ-почти всюду вне замкнутого цилиндра $V_K = P_K^{-1}(P_K(V))$. Доказательство того, что f равняется нулю почти всюду вне V, аналогично доказательству, приведенному в параграфе 2.2. $\square$

Отметим, что для гауссовских мер аналогичным образом преобразование Радона можно задавать на необязательно замкнутых гиперплоскостях вида l^{-1}, где l — измеримая линейная функция (или, что равносильно, элемент замыкания X^* в $L^2(\mu)$).

Отметим также, что доказанная теорема обобщает результаты из [15, 16, 28] о носителе преобразования Радона в гауссовском случае. Во-первых, она относится к необязательно непрерывным функциям, во-вторых, она отличается от этих результатов тем, что рассматриваемое множество V лежит в X, а не в $H(\mu)$; в-третьих, в [15, 28] функция оценивается экспонентой полунормы (в [16] даже ограничена), а не экспонентой квадрата. Наконец, следует отметить общее упущение работ [15, 16, 28]: требуемая в них секвенциальная непрерывность функции f (кстати, равносильная обычной непрерывности в рассматриваемых в этих работах ситуациях) в сочетании с ограниченностью носителя приводит к тому, что в результате функция f может быть лишь тождественно нулевой. Например, на пространствах типа S', модельных для указанных работ, нет ненулевых непрерывных функций с ограниченными носителями, поскольку в таких пространствах ограниченные множества предкомпактны. Однако формулировки основных результатов из [15, 16, 28] можно так исправить (с незначительными изменениями в доказательствах), что они будут применимы уже к нетривиальным функциям f.

Было бы интересно получить бесконечномерные аналоги более тонких конечномерных результатов о преобразовании Радона как для гауссовских мер, так и других классов распределений, возникающих в приложениях, например, удовлетворяющих эллиптическим уравнениям типа стационарного уравнения Колмогорова (см. [4,19,20]). Это связано с тем, что в бесконечномерном случае нет какой-либо привилегированной меры типа лебеговской, относительно которой нахождение преобразования Радона было бы наиболее естественным.

Литература

[1] Александров А.Д. *Additive set functions in abstract spaces.* Матем. сб. 1940. Т. 8(50). С. 307–348; ibid. 1941. Т. 9(51). С. 563–628; ibid. 1943. Т. 13(55). С. 169–238.

[2] Богачев В.И. Основы теории меры. Т. 2. 2-е изд. Москва – Ижевск, РХД, 2006.

[3] Богачев В.И. Гауссовские меры. Наука, М., 1997.

[4] Богачев В.И., Крылов Н.В., Рёкнер М. *Эллиптические и параболические уравнения для мер.* Успехи матем. наук. 2009. Т. 64, N 6. С. 5–116.

[5] Давыдов Ю.А., Лифшиц М.А., Смородина Н.В. Локальные свойства распределений стохастических функционалов. Физматлит, М., 1995.

[6] Канторович Л.В. *О перемещении масс.* ДАН СССР. 1942. Т. 37, N 7-8. С. 227–229.

[7] Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. *Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах.* Докл. РАН СССР. 1957. Т. 115, N 6. С. 1058–1061.

[8] Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М., Наука, 1985.

[9] Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М., Мир, 1990.

[10] Прохоров Ю.В. *Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.* Теория вероятн. и ее примен. 1956. Т. 1, N 2. С. 177–238.

[11] Рохлин В.А. *Об основных понятиях теории меры.* Матем. сб. 1949. Т. 25. С. 107–150.

[12] Скороход А.В. Исследования по теории случайных процессов. Изд-во Киевского ун-та, Киев, 1961.

[13] Хелгасон С. Преобразование Радона. М., Мир, 1983.

[14] Хелгасон С. Группы и геометрический анализ: интегральная геометрия, инвариантные дифференциальные операторы и сферические функции. М., Мир, 1987.

[15] Becnel J.J. *The support theorem for the Gauss–Radon transform.* Inf. Dimen. Anal., Quantum Probab. Related Topics. 2012. V. 15, N 2. P. 1–21.

[16] Becnel J.J., Sengupta A.N. *A support theorem for a Gaussian Radon transform in infinite dimensions.* Trans. Amer. Math. Soc. 2012. V. 364. P. 1281–1291.

[17] Bogachev V.I. Differentiable measures and the Malliavin calculus. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2010.

[18] Bogachev V.I. *Differentiable measures and the Malliavin calculus.* J. Math. Sci. (New York), 1997. V. 87, N 5. P. 3577–3731.

[19] Bogachev V.I., Röckner M. *Regularity of invariant measures on finite and infinite dimensional spaces and applications.* J. Funct. Anal. 1995. V. 133, N 1. P. 168–223.

[20] Bogachev V.I., Röckner M. *Elliptic equations for measures on infinite-dimensional spaces and applications.* Probab. Theory Related Fields. 2001. V. 120, N 4. P. 445–496.

[21] Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. *La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude de systèmes dynamiques de la mécanique non-linéaire.* Ann. Math. 1937. B. 38. S. 65–113.

[22] Bohl P. *Über ein in der Theorie der säkulären Störungen vorkommendes Problem.* J. Reine Angew. Math. 1909. B. 135. S. 189–283.

[23] Fremlin D. Measure theory. V. 4. University of Essex, Colchester, 2003.

[24] Hertle A. *Gaussian surface measures and the Radon transform on separable Banach spaces.* Lecture Notes in Math. 1980. V. 794. P. 513–531.

[25] Hertle A. *Gaussian plane and spherical means in separable Hilbert spaces*. Lecture Notes in Math. 1982. V. 945. P. 314–335.

[26] Hlawka E. *Folgen auf kompakten Räumen*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1956. B. 20. S. 223–241.

[27] Holmes I. *Inversion formula for the Gaussian Radon transform for Banach spaces*. Inf. Dimen. Anal., Quantum Probab. Related Topics. 2013. V. 16, N 4. P. 1–10.

[28] Holmes I., Sengupta A.N. *A Gaussian Radon transform for Banach spaces*. J. Funct. Anal. 2012. V. 263, N 11. P. 3689–3706.

[29] Kolmogoroff A. *La transformation de Laplace dans les espaces linéaires*. C. R. Acad. Sci. Paris. 1935. T. 200. P. 1717–1718.

[30] Lévy P. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gautier-Villars, Paris, 1937 (2e éd., 1954; 385 p.).

[31] Losert V. *On the existence of uniformly distributed sequences in compact topological spaces. I*. Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 246. P. 463–471.

[32] Losert V. *On the existence of uniformly distributed sequences in compact topological spaces. II*. Monatsh. Math. 1979. B. 87, N 3. S. 247–260.

[33] Mercourakis S. *Some remarks on countably determined measures and uniform distribution of sequences*. Monatsh. Math. 1996. B. 121, N 1-2. S. 79–111.

[34] Mihai V., Sengupta A.N. *The Radon–Gauss transform*. Soochow J. Math. 2007. V. 33. P. 415–434.

[35] Neumann J. von. *Einige Sätze über messbare Abbildungen*. Ann. Math. 1932. V. 33. P. 574–586.

[36] Niederreiter H. *On the existence of uniformly distributed sequences in compact spaces*. Compositio Math. 1972. V. 25. P. 93–99.

[37] Plebanek G. *Approximating Radon measures on first-countable compact spaces*. Colloq. Math. 2000. V. 86, N 1. P. 15–23.

[38] Radon J. *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*. Ber. Verh. Königl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig. 1917. B. 29. S. 262–277.

[39] Sierpiński W. *Sur la valeur asymptotic d'une certaine somme*. Bull. Int. Acad. Polon. Sci. (Cracovie) A. 1910. P. 9–11.

[40] Weyl H. *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*. Math. Ann. 1916. B. 77. S. 313–352.

Работы автора по теме диссертации

[41] Богачев В.И., Лукинцова М.Н. *О топологических пространствах, обладающих равномерно распределенными последовательностями.* Докл. РАН. 2008. Т. 418, № 5. С. 587–591.

[42] Богачев В.И., Лукинцова М.Н. *Преобразование Радона в бесконечномерных пространствах.* Докл. РАН. 2012. Т. 443, № 3. С. 279–282.

[43] Лукинцова М.Н. *Преобразование Радона в бесконечномерных пространствах с гауссовскими мерами.* Докл. РАН. 2013. Т. 453, № 3. С. 252–255.