ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

Добровольский Николай Николаевич

Гиперболический параметр сеток с весами и его применение

Специальность 01.01.06. — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2014

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информатики механикоматематического факультета ФГБОУ ВПО «Тульский государственный университет».

Научный руководитель:	**Иванов Валерий Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Гриценко Сергей Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор (ФГБОУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»,
	Кузнецов валентин Николаевич, доктор технических наук, кандидат физико-математических наук профессор (ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»,
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВПО «Владимерский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых»**

Защита диссертации состоится 20 июня 2014 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», по адресу: Российская Федерация, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А).

Автореферат разослан 20 мая 2014 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.84, созданного на базе
ФГБОУ ВПО МГУ имени М. В. Ломоносова
доктор физико-математических наук,
профессор Александр Олегович Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Исследования, связанные с изучением теоретико-числовых сеток, имеют как теоретическое, так и практическое значение. Одной из классических задач теории чисел важной для приближенного анализа является вычисление отклонений сеток, характеризующих меру их равномерной распределенности в единичном s-мерном кубе. В начале прошлого века для изучения вопросов равномерного распределения Г. Вейль [1] разработал аппарат тригонометрических сумм сеток. Позднее в работах Н. М. Коробова тригонометрические суммы использовались для оценки погрешности интегрирования и интерполирования с использованием теоретико-числовых сеток.

Норма линейного функционала погрешности приближенного интегрирования на классе E_s^α выражается через гиперболическую дзету-функцию сеток. В случае параллелепипедальных сеток гиперболическая дзета-функция сеток совпадает с гиперболической дзета-функцией решёток. Общая оценка величины гиперболической дзета-функции решёток по теореме Бахвалова — Коробова дается через величину гиперболического параметра решётки. Поэтому **актуально** найти аналог гиперболического параметра решёток для сеток и получить аналог теоремы Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток. Таким образом качество сеток можно будет оценить в зависимости от гиперболического параметра сеток.

Вычисление погрешностей квадратурных и интерполяционных формул с теоретико-числовыми сетками и запись этих формул в удобном виде имеют уже и практическое значение при программной реализации соответствующих алгоритмов.

Нахождение наихудших функций относительно погрешности интегрирования (граничных функций классов) для различных сеток является важной задачей, поставленной Н. М. Коробовым, и её решение можно использовать при построении соответствующих алгоритмов.

[1]Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313–352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984)

Степень разработанности

Впервые гиперболическая дзета-функция сеток появилась в 1957 году в работе Н. М. Коробова [2], с которой ведется отсчет истории создания теоретико-числового метода. Сам термин появился гораздо позже в 2001 году в работе [3], и в более общем виде определение гиперболической дзета-функции дается в работе[4]. Такая ситуация объясняется логикой развития теоретико-числового метода в приближенном анализе.

На первом этапе его развития к задачам интегрирования периодических функций многих переменных применялись известные результаты из теории чисел о тригонометрических суммах. После введения в 1959 году Н. М. Коробовым параллелепипедальных сеток и понятия оптимальных коэффициентов стали выделяться собственно актуальные задачи теории чисел, решение которых требовалось для развития метода оптимальных коэффициентов.

Прежде всего заметим, что появление метода тригонометрических сумм при анализе вопросов численного интегрирования стало возможным благодаря выделению Н. М. Коробовым класса E_s^α периодических функций с быстро убывающими коэффициентами кратного ряда Фурье.

В диссертационной работе рассматриваются следующие классы периодических функций: A_2, E_2^2.

A_2 – класс периодических функций $f(x_1, x_2)$ с периодом 1 по каждой переменной и абсолютно сходящимся рядом Фурье

$$f(x_1, x_2) = \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{+\infty} C(m_1, m_2) e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)}, \qquad \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{+\infty} |C(m_1, m_2)| < \infty.$$

На пространстве A_2 рассмотрим норму

---

[2] Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. N 6. С. 1062 — 1065.

[3] Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7. Вып. 1. Тула, 2001. С. 82–86.

[4] Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.

$$||f(x_1,x_2)||_{A_2} = \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{+\infty} |C(m_1,m_2)|,$$

относительно которой A_2 сепарабельное банохово пространство, изоморфное пространству $l_{2,1}$ комплекснозначных функций на фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^2$ со сходящимся рядом из модулей значений.

В пространстве периодических функций A_2 выделяется класс E_2^2 более гладких функций, определяемый следующими условиями на коэффициенты Фурье.

Пусть $f(x_1,x_2) \in A_2$. Функция $f(x_1,x_2) \in E_2^2$ тогда и только тогда, когда для ее коэффициентов Фурье

$$C(m_1,m_2) = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1,x_2) e^{-2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2$$

выполнено условие

$$\sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^2} |C(m_1,m_2)|(\overline{m}_1\overline{m}_2)^2 < \infty,$$

где для любого вещественного m полагается $\overline{m} = \max(1,|m|)$.

На классе E_2^2 рассмотрим две эквивалентные нормы:

$$||f(\vec{x})||_{E_2^2} = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^2} |C(m_1,m_2)|(\overline{m}_1\overline{m}_2)^2 \qquad (1)$$

$$||f(\vec{x})||_{E_2^2,C_1} = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^2} |C(m_1,m_2)|(\overline{C_1m_1}\,\overline{C_1m_2})^2. \qquad (2)$$

Класс функций E_2^2 с нормой (1) будем обозначать E_2^2, а с нормой (2) — $E_2^2(\cdot,C_1)$.

Пространства E_2^2 и $E_2^2(\cdot,C_1)$ — несепарабельные банаховы пространства, изоморфные пространству $l_{2,\infty}$ — ограниченных комплекснозначных функций на фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^2$, которое в силу счётности $\mathbb{Z}^2$ изоморфно пространству l_∞ — ограниченных последовательностей комплексных чисел. Действительно, этот изоморфизм нормированных пространств E_2^2 и $l_{2,\infty}$ задается равенствами для коэффициентов Фурье

$$C(\vec{m}) = \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m}_1\overline{m}_2)^2},\ \vec{m}\in\mathbb{Z}^2, \quad ||c(\vec{m})||_\infty = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^2} |c(m_1,m_2)| < \infty.$$

Шар радиуса $C > 0$ в пространстве E_2^2 с нормой (1) обозначают через $E_2^2(C)$, а с нормой (2) — $E_2^2(C,C_1)$. Класс функций E_s^α ввел Н. М. Коробов.

Рассмотрим *квадратурную формулу с весами*

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho_k f[\xi_1(k), \dots, \xi_s(k)] - R_N[f]. \qquad (3)$$

Здесь через $R_N[f]$ обозначена погрешность, получающаяся при замене интеграла

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s$$

средним взвешенным значением функции $f(x_1, \dots, x_s)$, вычисленным в точках

$$M_k = (\xi_1(k), \dots, \xi_s(k)) \qquad (k = 1 \dots N).$$

Совокупность M точек M_k называется *сеткой* M, а сами точки — *узлами квадратурной формулы.* Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные.

Для произвольных целых $m_1,\dots,m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots,m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots,m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + \dots + m_s \xi_s(k)]}, \qquad (4)$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Будем, также, рассматривать *нормированные тригонометрические суммы сетки с весами*

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots,m_s) = \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots,m_s).$$

Положим $\rho(M) = \sum\limits_{j=1}^{N} |\rho_j|$, тогда для всех нормированных тригонометрических сумм сетки с весами справедлива тривиальная оценка

$$|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \frac{1}{N} \rho(M).$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто тригонометрическая сумма сетки и писать $S_M(\vec{m})$ и нормированная тригонометрическая сумма сетки $S^*_M(\vec{m})$.

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул (см.[4]).[5]

[5]Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \dots, m_s) \neq (0, \dots, 0)$.

Теорема 5. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*

$$R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$

$$= C(\vec{0})\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \qquad (5)$$

и при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда и только тогда, когда взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s-мерном кубе.

Из этой теоремы непосредственно следует, что для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования $R_N[f]$ на классе A_s справедливо равенство

$$\|R_N[\cdot]\|_{A_s} = \max\left(\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|, \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus\{\vec{0}\}} |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|\right). \qquad (6)$$

Анализ формулы (6) позволяет сделать вывод, что класс A_s слишком широк для рассмотрения вопросов о скорости сходимости погрешности квадратурной формулы к нулю. Как показали Н. М. Коробов и его последователи уже на классе E_s^α этот вопрос становится содержательным.

В работе [6] доказывается теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции решёток.

Теорема 11. **(Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции решёток)** *Для любой s-мерной решётки Λ справедливы оценки*

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \leqslant \begin{cases} (2+2\zeta(\alpha))^s \cdot \left(1 + \left[\dfrac{1}{\lambda}\right]\right)^s, & \text{при } q(\Lambda) = 1; \\[2ex] 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s \dfrac{(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)}, & \text{при } q(\Lambda) > 1, \end{cases}$$

[6] Добровольский, Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток / Н. М. Добровольский — Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. — №6090–84.

где λ — наибольшее число такое, что s-мерный куб $[-\lambda;\lambda]^s$ не содержит ни одной ненулевой точки решётки Λ.

Рассмотрим двумерную простейшую декартову сетку

$$M(\nu_1,\nu_2)=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right)\middle|\, 0\leqslant k_1\leqslant 2^{\nu_1}-1,\ 0\leqslant k_2\leqslant 2^{\nu_2}-1\right\} \qquad (7)$$

из $2^{\nu_1+\nu_2}$ точек, которая также называется обобщенной равномерной сеткой. Очевидно, что обобщенная равномерная сетка $M(\nu_1,\nu_2)$ является декартовым произведением соответствующих одномерных равномерных сеток:

$$M(\nu_1,\nu_2)=M(\nu_1)\times M(\nu_2).$$

Сетка Смоляка $Sm(q)=Sm(q,2)$ с параметром $q\geqslant 3$ определяется как объединение всех обобщенных равномерных сеток $M(\nu_1,\nu_2)$ с $q-1\leqslant\nu_1+\nu_2\leqslant q$, таким образом

$$Sm(q,2)=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right)\middle|\begin{array}{c}0\leqslant k_1\leqslant 2^{\nu_1}-1,\ 0\leqslant k_2\leqslant 2^{\nu_2}-1,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1,\quad q-1\leqslant\nu_1+\nu_2\leqslant q\end{array}\right\}. \qquad (8)$$

Нетрудно видеть, что минимальной равномерной сеткой, содержащей сетку Смоляка как подсетку, является $M(q-1,q-1)$: $Sm(q)\subset M(q-1,q-1)$.

Двумерные сетки Смоляка $Sm(q)$ являются частным случаем s–мерных сеток $Sm(q,s)$, которые использовались в работе [7] для построения квадратурных и интерполяционных формул с весами и на них были получены результаты на различных классах функций, сравнимые с наилучшими из известных.

Естественно изучить величину отклонения этих сеток как меры равномерности распределения их точек в s–мерном единичном кубе. Здесь возможно три различных подхода: с учетом кратности точек в объединении, без их учета и, наконец, с весами из квадратурной формулы. В работе [8] для первых двух случаев сформулированы следующие четыре результата, из которых два последних парадоксальны.

[7]Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР Т. 148, №5, С. 1042 — 1045 (1963)

[8]Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Яфаева Р. Р. О сетках С. А. Смоляка // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГу 2002. С. 18-20.

Теорема 1. *Для количества $N^{(1)}_{q,s}$ точек сетки $Sm(q,s)$ с учетом кратности точек справедливы соотношения*

$$N^{(1)}_{q,s} = \sum_{k=0}^{s-1} 2^{q-k} C^{s-1}_{q-k-1}, \quad \frac{q^{s-1}2^q}{2^{s-1}(s-1)!} \leqslant N^{(1)}_{q,s} \leqslant \frac{q^{s-1}2^q}{(s-1)!} \text{ при } q \geqslant 4s.$$

Теорема 2. *Для количества $N^{(2)}_{q,s}$ точек сетки $Sm(q,s)$ без учета кратности точек справедливо соотношение*

$$N^{(2)}_{q,s} = O(q^{s-1}2^q).$$

Теорема 3. *Для отклонения $D^{(1)}_{q,s}$ сетки $Sm(q,s)$ с учетом кратности точек справедливо соотношение*

$$D^{(1)}_{q,s} = O\left(\frac{N^{(1)}_{q,s}}{\ln N^{(1)}_{q,s}}\right).$$

Теорема 4. *Для отклонения $D^{(2)}_{q,s}$ сетки $Sm(q,s)$ без учета кратности точек справедливо соотношение*

$$D^{(2)}_{q,s} = O\left(\frac{N^{(2)}_{q,s}}{\ln N^{(2)}_{q,s}}\right).$$

Термин граничные функции ввёл Н. М. Коробов в статье [9]. Так как общий термин экстремальная функция требует уточнения о каком функционале идет речь, то в этой работе мы будем придерживаться терминологии Н. М. Коробова, так как в ней подразумевается, что речь идет о линейном функционале погрешности приближенного интегрирования, и явно указывается класс функций и квадратурная формула.

Цели и задачи

Целью диссертационной работы является получение явной формулы выражения через элементарные функции граничной функции класса E_2^2 с нормой

[9]Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 2. С. 83 — 90.

(2) для сеток Смоляка и вычисление нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурным формулам с сетками Смоляка.

Также целью данной работы является получение точной формулы для величины $D_{q,2}^{(1)}$ и новых оценок погрешности интерполяционных и квадратурных формул для двумерных сеток Смоляка.

Научная новизна

Представленные в работе результаты являются новыми, получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации следующие:

- Доказана обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток с весами.
- Найдены точные формулы для количества точек сетки Смоляка с учетом и без учета кратности узлов.
- Вычислены тригонометрические суммы сеток Смоляка с весами.
- Исследованы прямыми методами квадратурные и интерполяционные формулы с двумерными сетками Смоляка с весами.
- Найдены точные формулы для отклонения двумерных сеток Смоляка.
- Найдены явные выражения для граничных функций сеток Смоляка с весами и точное значение нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования на классе $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертационного исследования имеют значение для теоретико-числового метода Коробова в приближенном анализе. В нем содержатся развитие теории двумерных сеток с весами и теории равномерного распределения точек сетки в квадрате. Результаты относящиеся к двумерным квадратурным и интерполяционным формулам с сетками Смоляка могут использоваться на практике при разработке программ численного интегрирования и интерполирования.

Методология и методы исследования

Исследование базировалось на общей методологии теоретико-числового метода Коробова в приближенном анализе. Согласно этому методу центральными объектами исследования являются тригонометрические суммы сеток с весами, отклонение сеток и гиперболическая дзета-функция сеток с весами. При реализации этой методолгии использовались метод тригонометрических сумм, геометрия чисел, теория сравнений.

Положения выносимые на защиту

По результатам исследования на защиту выносятся следующие утверждения:

- Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток с весами.
- Точные формулы для количества узлов сетки Смоляка с учетом кратности и без учета кратности.
- Тригонометрические суммы сеток Смоляка с весами принимают только три значения — 0, -1, 1.
- Квадратурные формулы с сетками Смоляка с весами задают ненасыщаемый алгоритм численного интегрирования.
- Квадратурные формулы по сеткам Смоляка с весами являтся квадратурными формулами интерполяционного типа.
- Явное вcase выпажение граничной функции на классе $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$.
- Явное выражение для нормы $\|R_{N^{(1)}(q)}[\cdot]\|_{E_2^2\left(1,\frac{\pi^2}{6}\right)}$ линейного функционала погрешности квадратурной формулы.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность всех результатов исследования обоснована строгими математическими доказательствами.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых по грантам РФФИ №05-01-00672a, №08-01-00790a, №11-01-00571a.

Апробация результатов исследования проводилась на всероссийских и международных конференциях:

- VII международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная памяти профессора А. А. Карацубы — г. Тула, 2010 г.,
- Международная научно-практическая конференция «Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии», посвященная 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина — г. Тула, 2011 г.,
- International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology" — Odessa, August 20–26, 2012,
- X международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» — г. Волгоград, 2012 г.,
- XI международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» — г. Саратов, 2013 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1-7].

В работе [1] автору принадлежат результаты по получению явной формулы для граничных функций класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$, получение точной формулы для отклонения сеток Смоляка с учетом весов и точной формулы для функционала погрешности приближенного интегрирования для этого класса.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 5 глав, разбитых на 15 параграфов, заключения и списка литературы. Полный объем работы составляет 110 страниц. Список литературы содержит 44 наименования.

Содержание работы

Во введении рассматривается актуальность темы исследования, краткая история развития теории, предшествующей данной работе, приводятся основные результаты исследования и их теоретическая и практическая значимость.

Первая глава — «Гиперболический параметр сетки с весами» — посвящена изучению гиперболической дзета-функции сеток. В этой главе вводятся гиперболический параметр сеток и гиперболическая дзета-функция сеток — аналоги гиперболического параметра решётки и гиперболической дзета-функции решётки. Доказывается ряд теорем, позволяющих оценить норму функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле для теоретико числовых сеток через дзета-функцию сетки.

В параграфе 1 дается определение гиперболического параметра решётки и рассматривается его связь с гиперболическим крестом.

В s-мерном пространстве усеченной нормой называется величина $q(\vec{x}) = \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_s$ (x_i координата точки x), где для вещественного x обозначаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

Гиперболическим крестом называется область

$$K_s(t) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leqslant t\},$$

а величина t — его параметром. Назовем r–ой компонентой гиперболического креста $K_s(t)$ подмножество

$$K_s^{(r)}(t) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leqslant t, \text{ ровно } r \text{ координат } \vec{x} \text{ отличны от } 0\}.$$

Ясно, что справедливо следующее разбиение гиперболического креста:

$$K_s(t) = \left(\bigcup_{r=1}^{s} K_s^{(r)}(t)\right) \bigcup \{\vec{0}\}.$$

С понятием усеченной нормы и гиперболическим крестом связано понятие гиперболического параметра множества.

Определение 1. *Для произвольного подмножества K фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ гиперболическим параметром $q(K)$ называется величина*

$$q(K) = \min_{\vec{m} \in K} \overline{m_1} \ldots \overline{m_s}. \tag{9}$$

Для пустого множества K полагается $q(K) = \infty$.

Ясно, что гиперболический параметр $q(K)$ имеет простой геометрический смысл — он равен наименьшему значению параметра t гиперболического креста $K_s(t)$ такого, что на границе $K_s(t)$ имеются точки множества K, а внутри отсутствуют.

В параграфе 2 выводятся явные формулы для числа целых точек в гиперболическом кресте с параметром $t < 21$.

В параграфе 3 дается определение дзета-функции сетки.

В работе [4] дано следующее определение дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p \geqslant 1$.

Определение 2. *Дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p \geqslant 1$ называется функция $\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho})$, заданная в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$ рядом Дирихле*

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) = {\sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}}' \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(p, M, \vec{\rho}, n)}{n^\alpha}, \tag{10}$$

где

$$S^*(p, M, \vec{\rho}, n) = \sum_{\vec{m} \in N(n)} |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p. \tag{11}$$

Рассматривается и доказывается ряд теорем об оценке нормы функционала погрешности приближенного интегрирования через дзета-функцию сетки.

Теорема 6. *Для нормы $\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha}$ линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле (3) справедливо равенство*

$$\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha} = \left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right| + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} =$$
$$= \left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right| + \zeta(\alpha,1|M,\vec{\rho}).$$

Теорема 7. *Если $f(\vec{x})\in E_s^{\alpha,q}$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$|R_N[f]| \le$$
$$\leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,q}}\left(\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right|^p + \frac{1}{N^p}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,q}}\left(\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right|^p + \zeta(\alpha,p|M,\vec{\rho})\right)^{\frac{1}{p}},$$

где сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (1.15). На классе $E_s^{\alpha,q}$ эту оценку нельзя улучшить.

Из теорем (6) и (7) следует, что на классах E_s^α и $E_s^{\alpha,q}$ оценка погрешности приближенного интегрирования сводится к оценке гиперболической дзета-функции сеток. Проводя аналогию с гиперболической дзета-функцией решётки, которая равна гиперболической дзета-функции сеток в случае параллелепипедальной сетки, можно высказать гипотезу, что для гиперболической дзета-функции сеток должен быть справедлив аналог теоремы Бахвалова об оценке гиперболической дзета-функцией решётки через гиперболический параметр решётки.

В параграфе 4 доказывается ряд вспомогательных лемм и теорем, необходимых для доказательства теорема Бахвалова — Коробова для дзета-функции сетки.

В параграфе 5 непосредственно доказывается теорема Бахвалова — Коробова для дзета-функции сетки.

Теорема 12. (Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток) *Для любой рациональной сетки M*

со знаменателем p и с положительными весами $\vec\rho$ типа $\Delta(N,s)<1$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec\rho}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, справедлива оценка

$$\zeta(\alpha,p|M,\vec\rho)\leqslant 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s\frac{(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)}+$$
$$+\Delta^p(N,s)\frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(\frac{\ln^{s-1}t}{(\alpha-1)(s-1)!}+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=0}^{s-2}\frac{\ln^m t}{m!}\left(\sum_{k=m}^{s-2}\zeta(\alpha)^{s-2-k}C_k^m\frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1}+\frac{C_{s-1}^m}{\alpha-1}\right)\right), \tag{12}$$

где решётка $\Lambda=K_1(M,\vec\rho)\bigcup K_2(M,\vec\rho)$ и $t=q_3\left(M,\rho(\vec x)\right)$.

Во второй главе — «Количество узлов в двумерной сетке Смоляка» начинают рассматриваться двумерные сетки Смоляка с решения задачи о числе точек в сетке. Задача о числе точек решается в постановках с учетом кратности и без учета кратности узлов.

В параграфе 1 находится число точек с учетом кратности узлов.

Теорема 13. (стр. 35) *Если $N_q^{(1)}$ — число узлов сетки $Sm(q)$ с учетом кратности, то при $q\geqslant 2$ выполняются соотношения:*

$$N_q^{(1)}=\frac{3q-4}{2}2^q,\quad q=O\left(\ln N_q^{(1)}\right),\quad 2^q=O\left(\frac{N_q^{(1)}}{\ln N_q^{(1)}}\right)$$

В параграфе 2 находится число точек без учета кратности узлов двумя способами. Первый способ основан на представление двумерной сетки Смоляка как объединения приведенных обобщенных равномерных сеток. Второй способ основан на каноническом представлении узлов двумерной сетки Смоляка.

Теорема 14. *Если $N_q^{(2)}$ — число узлов сетки $Sm(q)$ без учета кратности, то при $q\geqslant 3$ выполняются соотношения:*

$$N_q^{(2)}=q2^{q-1},\quad q=O\left(\ln N_q^{(2)}\right),\quad 2^q=O\left(\frac{N_q^{(2)}}{\ln N_q^{(2)}}\right).$$

Для двумерных сеток Смоляка удается найти точное значение тригонометрических сеток. Оказываются, что они принимают только три значения — 0, 1 и

-1. Пользуясь этим легко найти точные значения гиперболических параметров сетки Смоляка.

В третьей главе изучаются квадратурные и интерполяционные формулы для двумерных сеток Смоляка.

В первом параграфе находятся точные значения гиперболических параметров двумерных сеток Смоляка, исследуются квадратурные формулы для двумерных сеток Смоляка с повторением узлов и без повторения при помощи аппарата тригонометрических сумм.

Теорема 15. *Для гиперболических параметров двумерной сетки Смоляка выполняются равенства:*

$$q_3(Sm(q),\rho(\vec{x}))=\infty,$$
$$q_1(Sm(q),\rho(\vec{x}))=q_2(Sm(q),\rho(\vec{x}))=q(Sm(q),\rho(\vec{x}))=2^{q-1}.$$

Квадратурные формулы описываются тремя теоремами.

Теорема 16. *Пусть $f(x_1,x_2)\in E_2^\alpha(C)$, $q\geqslant 3$, тогда для погрешности квадратурной формулы*

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-\nu}-1} f\left(\frac{k_1}{2^\nu},\frac{k_2}{2^{q-\nu}}\right)-$$
$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-1-\nu}-1} f\left(\frac{k_1}{2^\nu},\frac{k_2}{2^{q-1-\nu}}\right)-R_{N^{(1)}(q)}[f]$$

справедлива оценка

$$\left\|R_{N^{(1)}(q)}[f]\right\|_{E_2^\alpha}\leqslant\frac{4\zeta(\alpha)^2 2^\alpha q}{2^{q\alpha}}=O\left(\frac{\ln^{\alpha+1}N^{(1)}(q)}{(N^{(1)}(q))^\alpha}\right),$$

где $N^{(1)}(q)$ — количество точек сетки Смоляка с учетом их кратности.

Теорема 17. *Пусть $f(x_1,x_2)\in E_2^\alpha(C)$, $q\geqslant 3$, тогда для погрешности квад-*

ратурной формулы

$$\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2=\frac{1}{2^q}\left(\sum_{\nu=1}^{q-1}\sigma(\nu,q-\nu)+\sigma(q-1,0)+\sigma(0,q-1)-\right.$$
$$-(q-3)\sigma(0,0)-\sum_{\nu=1}^{q-3}(q-2-\nu)(\sigma(\nu,0)+\sigma(0,\nu))-$$
$$\left.-\sum_{\substack{\nu,\mu=1\\ \nu+\mu\leqslant q-2}}^{q-3}(q-1-\nu-\mu)\sigma(\nu,\mu)\right)-R_{N(q)}[f], \tag{13}$$

где

$$\sigma(\nu,\mu)=\sum_{\vec{x}\in M^*(\nu,\mu)} f(\vec{x})=$$
$$=\begin{cases}\sum\limits_{k_1=0}^{2^{\nu-1}-1}\sum\limits_{k_2=0}^{2^{\mu-1}-1} f\left(\frac{2k_1+1}{2^\nu},\frac{2k_2+1}{2^\mu}\right) & \text{при } \nu,\mu>0,\\ \sum\limits_{k_1=0}^{2^{\nu-1}-1} f\left(\frac{2k_1+1}{2^\nu},0\right) & \text{при } \nu>0,\mu=0,\\ \sum\limits_{k_2=0}^{2^{\mu-1}-1} f\left(0,\frac{2k_2+1}{2^\mu}\right) & \text{при } \nu=0,\mu>0,\\ f(0,0) & \text{при } \nu=\mu=0,\end{cases}$$

справедлива оценка

$$\left\|R_{N(q)}[f]\right\|_{E_2^\alpha}\leqslant\frac{4\zeta(\alpha)^2 2^\alpha q}{2^{q\alpha}}=O\left(\frac{\ln^{\alpha+1}N(q)}{N^\alpha(q)}\right),$$

где $N(q)$ *— количество узлов в квадратурной формуле (13).*

Теорема 18. *Если* $N(q)$ *— число узлов квадратурной формулы (13), то при* $q\geqslant 3$ *выполняются соотношения:*

$$N(q)=3q2^{q-3}=\frac{3}{4}N_q^{(2)}.$$

В параграфе 2 изучаются интерполяционные формулы для двумерных сеток Смоляка.

Интерполяционные формулы можно описать двумя теоремами.

Теорема 19. *Пусть $f(x_1,x_2)\in E_2^\alpha(C)$, $q\geqslant 3$, тогда для погрешности интерполяционной формулы*

$$f(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{2^{q-k}}\sum_{\nu=1}^{q-k-1}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-k-\nu}-1}f\left(\frac{k_1}{2^\nu},\frac{k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)\times$$
$$\times\sum_{l_1=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1}\sum_{l_2=-2^{q-k-\nu-1}}^{2^{q-k-\nu-1}-1}e^{2\pi i\left(l_1\left(x_1-\frac{k_1}{2^\nu}\right)+l_2\left(x_2-\frac{k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)\right)}-R_{N(q)}[f(\vec{x})]$$

справедлива оценка

$$|R_{N(q)}[f(\vec{x})]|\leqslant C\cdot C_6(\alpha)\frac{q^2}{2^{(\alpha-1)q}},$$

где $N(q)$ — количество точек сетки Смоляка, $C_6(\alpha)<8^\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{1+\alpha+\zeta(\alpha)}{\alpha-1}\right)$.

Теорема 20. *Пусть $f(x_1,x_2)\in E_2^\alpha(C)$, $q\geqslant 3$, тогда для интерполяционного многочлена Смоляка справедлива формула*

$$PS_f(x_1,x_2)=f(0,0)E_{q,0,0,0,0}(x_1,x_2)+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{k=0}^{2^{\nu-1}-1}f\left(\frac{2k+1}{2^\nu},0\right)E_{q,\nu,2k+1,0,0}(x_1,x_2)+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{k=0}^{2^{\nu-1}-1}f\left(0,\frac{2k+1}{2^\nu}\right)E_{q,0,0,\nu,2k+1}(x_1,x_2)+$$
$$+\sum_{\substack{\mu,\lambda=1\\ \mu+\lambda\leqslant q}}^{q-1}\sum_{k_1=0}^{2^{\mu-1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{\lambda-1}-1}f\left(\frac{2k_1+1}{2^\mu},\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)E_{q,\mu,2k_1+1,\lambda,2k_2+1}(x_1,x_2),$$

где

$$E_{q,\mu,k_1,\lambda,k_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=\overline{\mu}}^{q-\overline{\lambda}}e_{k_12^{\nu-\mu},\nu}(x_1)e_{k_22^{q-\nu-\lambda},q-\nu}(x_2)-$$
$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=\overline{\mu}}^{q-1-\overline{\lambda}}e_{k_12^{\nu-\mu},\nu}(x_1)e_{k_22^{q-1-\nu-\lambda},q-1-\nu}(x_2)$$

и $k_1=0$ при $\mu=0$, а $k_2=0$ при $\lambda=0$.

Из лемм 16–18 вытекает, что квадратурная формула (3.6) с сеткой Смоляка относится к числу квадратурных формул интерполяционного типа, то есть получается интегрированием соответствующей интерполяционной формулы (3.24).

Четвертая глава посвящена получению точных формул для отклонения двумерных сеток Смоляка с учетом кратности узлов.

Теорема 21. *Для отклонения $D^{(1)}_{q,2}$ двумерной сетки Смоляка $Sm(q)$ с учетом кратности узлов при $q > 3$ справедливо равенство*

$$D^{(1)}_{q,2} = D^{(1)}_{q,2}\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = 27 \cdot 2^{q-4} + 2q - 11 = O\left(\frac{N^{(1)}_{q,2}}{\ln N^{(1)}_{q,2}}\right).$$

В пятой главе находятся наихудшие функции класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ относительно приближенного интегрирования с использованием квадратурных формул для двумерной сетки Смоляка.

В параграфе 1 дается определение граничных функций класса.

В параграфе 2, используя оператор взвешенных сеточных средних, находится граничная функция класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$.

Теорема 24. *Пусть функция $G(x_1, x_2)$ задана формулой*

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{2^q} \sum_{\nu=1}^{q-1} \sum_{k_1=0}^{2^\nu-1} \sum_{k_2=0}^{2^{q-\nu}-1} h\left(x_1 + \frac{k_1}{2^\nu}, x_2 + \frac{k_2}{2^{q-\nu}}\right) -$$
$$- \frac{1}{2^{q-1}} \sum_{\nu=1}^{q-2} \sum_{k_1=0}^{2^\nu-1} \sum_{k_2=0}^{2^{q-1-\nu}-1} h\left(x_1 + \frac{k_1}{2^\nu}, x_2 + \frac{k_2}{2^{q-1-\nu}}\right),$$

тогда $G(x_1, x_2)$ — граничная функция класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для сетки Смоляка.

В параграфе 3 находится явный вид граничной функции класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для двумерной сетки Смоляка и точная формула для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования.

Пусть

$$p_\nu(x) = 1 + \frac{2}{4^\nu} - \frac{12}{4^\nu}\left\{2^\nu x\right\}\left(1 - \left\{2^\nu x\right\}\right).$$

Теорема 25. *Для граничной функции $G(x_1, x_2)$ класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для сетки Смоляка справедливо равенство*

$$G(x_1, x_2) = \sum_{\nu=1}^{q-1} p_\nu(x_1) p_{q-\nu}(x_2) - \sum_{\nu=1}^{q-2} p_\nu(x_1) p_{q-1-\nu}(x_2). \tag{14}$$

Теорема 26. *Для нормы* $\|R_{N^{(1)}(q)}[\cdot]\|_{E_2^2\left(1,\frac{\pi^2}{6}\right)}$ *линейного функционала погрешности квадратурной формулы (??) справедливо равенство*

$$\|R_{N^{(1)}(q)}[\cdot]\|_{E_2^2\left(1,\frac{\pi^2}{6}\right)} = \frac{3(q-1)}{4^{q-1}} + \frac{8}{16^{q-1}}. \tag{15}$$

Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

- Для гиперболической дзета-функции сеток с весами, которая равна норме линейного функционала погрешности на классе периодических функций $E_s^{\alpha,q}$ справедлива обобщенная теорема Бахвалова — Коробова, в которой роль гиперболического параметра решётки играют первый, второй и третий гиперболические параметры сетки с весами (см. теорему 13).

- Количество узлов сетки Смоляка с учетом кратности и без учета кратности имеют одинаковый порядок, но первое количество в $3 - \frac{4}{q}$ раз больше второго (см. теорему 14 и теорему 15).

- Тригонометрические суммы сеток Смоляка с весами принимают только три значения — 0, -1, 1 (см. лемму 7 стр. 46), а квадратурные формулы с этими сетками задают ненасыщаемый алгоритм численного интегрирования (см. теорему 16).

- Квадратурные формулы по сеткам Смоляка с весами являются ненасыщаемыми квадратурными формулами интерполяционного типа (см. стр. 73).

- Для граничной функции на классе $E_2^2\left(1,\frac{\pi^2}{6}\right)$ имеется явное выражение (см. теорему 24 стр. 94), которое позволяет явно вычислить норму $\|R_{N^{(1)}(q)}[\cdot]\|_{E_2^2\left(1,\frac{\pi^2}{6}\right)}$ линейного функционала погрешности квадратурной формулы (см. теорему 26).

- Для отклонения сетки Смоляка с учетом весов имеется точная формула (см. теорему 24).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — профессору Валерию Ивановичу Иванову за постоянное внимание и неоценимую поддержку.

РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Добровольский Н.Н., Киселева О.В., Симонов А.С. Граничные функции класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для сеток Смоляка // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2011. Вып. 2. С. 11—29.**

2. **Добровольский Н. Н. О гиперболическом параметре сетки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч. 1. С. 6 — 18.**

3. Добровольский Н. Н. О числе целых точек в гиперболическом кресте при значениях параметра $1 \leqslant t < 21$ // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып.1. С. 91 — 95.

4. Добровольский Н. Н. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110 — 152.

5. Добровольский Н. Н. О тригонометрическом полиноме сетки Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула, Изд-во ТулГУ, 2007. С. 36 – 36.

6. Н. Н. Добровольский О граничных функциях класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для сеток Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ 2011.

7. Добровольский Н. Н. ПОИВС ТМК: Гиперболический параметр сеток с весами // Материалы международной научно-практической конференции "МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУР И НАНОТЕХНОЛОГИИ". Тула, 3-7 октября 2011 издательство ТГПУ им Л.Н. Толстого С. 266 — 267.