ФГБОУ ВПО "Тульский государственный университет"

На правах рукописи

УДК 511.3

Добровольский Николай Николаевич

Гиперболический параметр сеток с весами и его применение

Специальность 01. 01. 06. — математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

профессор В. И. Иванов

Тула

2014

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования

Исследования, связанные с изучением теоретико-числовых сеток, имеют, как теоретическое значение, так и практическое значение. Одной из классических задач теории чисел, важной для приближенного анализа, является вычисление отклонений сеток, характеризующих меру их равномерной распределенности в единичном s-мерном кубе. В начале прошлого века для изучения вопросов равномерного распределения Г. Вейль [27] разработал аппарат тригонометрических сумм сеток. Позднее в работах Н. М. Коробова [13] — [18] тригонометрические суммы использовались для оценки погрешности интегрирования и интерполирования с использованием теоретико-числовых сеток.

Норма линейного функциона погрешности приближенного интегрирования на классе E_s^α выражается через гиперболическую дзету-функцию сеток. В случае параллелепипедальных сеток гиперболическая дзета-функция сеток совпадает с гиперболической дзета-функцией решёток. Общая оценка величины гиперболической дзета-функции решёток по теореме Бахвалова — Коробова дается через величину гиперболического параметра решётки. Поэтому **актуально** найти аналог гиперболического параметра решёток для сеток и получить аналог теоремы Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток. Таким образом, качество сеток можно будет оценить в зависимости от гиперболического параметра сеток.

Вычисление погрешностей квадратурных и интерполяционных формул с теоретико-числовыми сетками и запись этих формул в удобном виде имеют уже и практическое значение при программной реализации соответствующих алгоритмов.

Нахождение наихудших функций относительно погрешности интегрирования (граничных функций классов) для различных сеток является важной задачей, поставленной Н. М. Коробовым, и её решение можно использовать при построении соответствующих алгоритмов.

Степень её разработанности

Впервые гиперболическая дзета-функция сеток появилась в 1957 году в работе Н. М. Коробова [12], с которой ведется отсчет истории создания теоретико-числового метода. Сам термин появился гораздо позже в 2001 году в работе [10], и в более общем виде определение гиперболической дзета-функции сеток дается в работе [3]. Такая ситуация объясняется логикой развития теоретико-числового метода в приближенном анализе.

На первом этапе его развития к задачам интегрирования периодических функций многих переменных применялись известные результаты из теории чисел о тригонометрических суммах. После введения в 1959 году Н. М. Коробовым параллелепипедальных сеток и понятия оптимальных коэффициентов стали выделяться собственно актуальные задачи теории чисел, решение которых требовалось для развития метода оптимальных коэффициентов.

Прежде всего заметим, что появление метода тригонометрических сумм при анализе вопросов численного интегрирования стало возможным благодаря выделению Н. М. Коробовым класса E_s^α периодических функций с быстро убывающими коэффициентами кратного ряда Фурье.

В работе рассматриваются следующие классы периодических функций: $\mathfrak{A}_2$, E_2^2.

A_2 – класс периодических функций $f(x_1, x_2)$ с периодом 1 по каждой переменной и абсолютно сходящимся рядом Фурье

$$f(x_1, x_2) = \sum_{m_1, m_2=-\infty}^{+\infty} C(m_1, m_2) e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)}, \quad \sum_{m_1, m_2=-\infty}^{+\infty} |C(m_1, m_2)| < \infty.$$

На пространстве A_2 рассмотрим норму

$$||f(x_1,x_2)||_{A_2} = \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{+\infty} |C(m_1,m_2)|$$

относительно которой A_2 сепарабельное банохово пространство, изоморфное пространству $l_{2,1}$ комплекснозначных функций на фундаментальной решётке $\mathbb{Z}^2$ со сходящимся рядом из модулей значений.

В пространстве периодических функций A_2 выделяется класс E_2^2 более гладких функций, определяемый следующими условиями на коэффициенты Фурье.

Пусть $f(x_1,x_2) \in A_2$. Функция $f(x_1,x_2) \in E_2^2$ тогда и только тогда, когда для ее коэффициентов Фурье

$$C(m_1,m_2) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x_1,x_2) e^{-2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2$$

выполнено условие

$$\sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^2} |C(m_1,m_2)|(\overline{m}_1\overline{m}_2)^2 < \infty$$

где для любого вещественного m полагается $\overline{m} = \max\{1,|m|\}$.

На классе E_2^2 рассмотрим две эквивалентные нормы:

$$||f(\vec{x})||_{E_2^2} = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^2} |C(m_1,m_2)|(\overline{m}_1\overline{m}_2)^2 \text{ и } \tag{1}$$

$$||f(\vec{x})||_{E_2^2,C_1} = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^2} |C(m_1,m_2)|(\overline{C_1m_1}\,\overline{C_1m_2})^2. \tag{2}$$

Класс функций E_2^2 с нормой (1) будем обозначать E_2^2, а с нормой (2) — $E_2^2(\cdot,C_1)$.

Пространства E_2^2 и $E_2^2(\cdot,C_1)$ — несепарабельные банаховы пространства, изоморфные пространству $l_{2,\infty}$ — ограниченных комплекснозначных функций на фундаментальной решётке $\mathbb{Z}^2$, которое в силу счётности $\mathbb{Z}^2$ изоморфно пространству l_∞ — ограниченных последовательностей комплексных чисел. Действительно, этот изоморфизм нормированных пространств E_2^2 и $l_{2,\infty}$ задается равенствами для коэффициентов Фурье

$$C(\vec{m}) = \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m}_1\overline{m}_2)^2},\ \vec{m}\in\mathbb{Z}^2, \quad ||c(\vec{m})||_\infty = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^2} |c(m_1,m_2)| < \infty.$$

Шар радиуса $C > 0$ в пространстве E_2^2 с нормой (1) обозначают через $E_2^2(C)$, а с нормой (2) — $E_2^2(C, C_1)$. Класс функций E_s^α ввел Н. М. Коробов. О свойствах этого класса подробно можно узнать в [16] и [18] (также см. [9]).

Рассмотрим *квадратурную формулу с весами*

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(x_1, \ldots, x_s) dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho_k f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] - R_N[f]. \qquad (3)$$

Здесь через $R_N[f]$ обозначена погрешность, получающаяся при замене интеграла

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(x_1, \ldots, x_s) dx_1 \ldots dx_s$$

средним взвешенным значением функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, вычисленным в точках

$$M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)) \qquad (k = 1 \ldots N).$$

Совокупность M точек M_k называется *сеткой* M, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные.

Для произвольных целых $m_1, \ldots, m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1, \ldots, m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1, \ldots, m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + \ldots + m_s \xi_s(k)]}, \qquad (4)$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Будем, также, рассматривать *нормированные тригонометрические суммы сетки с весами*

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(m_1, \ldots, m_s) = \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(m_1, \ldots, m_s).$$

Положим $\rho(M) = \sum\limits_{j=1}^{N} |\rho_j|$, тогда для всех нормированных тригонометрических сумм сетки с весами справедлива тривиальная оценка

$$|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \frac{1}{N} \rho(M).$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто тригонометрическая сумма сетки и писать $S_M(\vec{m})$ и нормированная тригонометрическая сумма сетки $S^*_M(\vec{m})$.

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул (см. [3]).[1]

Теорема 5. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*

$$R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$
$$= C(\vec{0})\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \tag{5}$$

и при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда и только тогда, когда взвещенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s-мерном кубе.

Из этой теоремы непосредственно следует, что для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования $R_N[f]$ на классе $\mathfrak{A}_s$ справедливо равенство

$$\|R_N[\cdot]\|_{\mathfrak{A}_s} = \max\left(\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|, \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus\{\vec{0}\}} |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|\right). \tag{6}$$

Анализ формулы (6) позволяет сделать вывод, что класс $\mathfrak{A}_s$ слишком широк для рассмотрения вопросов о скорости сходимости погрешности квадратурной формулы к нулю. Как показали Н. М. Коробов и его последователи, уже на классе E_s^α этот вопрос становится содержательным.

В работе [5] вводится понятие гиперболического параметра $q(\Lambda)$ решётки Λ и доказывается обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции решёток.[2]

Теорема 11. **(Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции решеток)** *Для любой s-мерной решетки Λ*

[1] Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$.

[2] Гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решётки Λ задается равенством $q(\Lambda) = \min\limits_{\vec{x}\in\Lambda, \vec{x}\neq\vec{0}} \overline{x_1}\cdot\ldots\cdot\overline{x_s}$.

справедливы оценки

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \leqslant \begin{cases} (2+2\zeta(\alpha))^s \cdot \left(1+\left[\frac{1}{\lambda}\right]\right)^s, & \text{\textit{при} } q(\Lambda)=1; \\ 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s \frac{(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}}{q^{\alpha}(\Lambda)}, & \text{\textit{при} } q(\Lambda)>1, \end{cases}$$

где λ *— наибольшее число такое, что* s*-мерный куб* $[-\lambda;\lambda]^s$ *не содержит ни одной ненулевой точки решетки* Λ.

В первой главе доказывается аналог этой теоремы для случая гиперболической дзета-функции сеток.

Теорема 12. **(Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток)** *Для любой рациональной сетки* M *со знаменателем* p *и с положительными весами* $\vec{\rho}$ *типа* $\Delta(N,s)<1$, *для которых линейный оператор* $A_{M,\vec{\rho}}$ *взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, справедлива оценка*

$$\zeta(\alpha,p|M,\vec{\rho}) \leqslant 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s \frac{(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}}{q^{\alpha}(\Lambda)}+$$

$$+\Delta^p(N,s)\frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(\frac{\ln^{s-1}t}{(\alpha-1)(s-1)!}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=0}^{s-2}\frac{\ln^m t}{m!}\left(\sum_{k=m}^{s-2}\zeta(\alpha)^{s-2-k}C_k^m\frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1}+\frac{C_{s-1}^m}{\alpha-1}\right)\right),$$

где решетка $\Lambda=K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$ *и* $t=q_3\left(M,\rho(\vec{x})\right)$.

В теоретико-числовом методе приближенного анализа рассматриваются несколько основных классов сеток — это неравномерные сетки [12], параллелепипедальные сетки [13], комбинированные сетки [17], алгебраические сетки [21], обобщенные параллелепипедальные сетки [6], сетки Хэммерсли [26], сетки Холтона [25], сетки Фора [24], ЛП$_\tau$ сетки [20] и сетки Смоляка [19].

Отметим важную особенность параллелепипедальных сеток, комбинированных сеток, алгебраических сеток, обобщенных параллелепипедальных сеток и сеток Смоляка. Алгоритмы численного интегрирования по квадратурным формулам с этими классами сеток являются ненасыщаемыми на классах функций E_s^{α}.

В диссертации детально изучены двумерные сетки Смоляка.

Рассмотрим 2-мерную простейшую декартову сетку

$$M(\nu_1,\nu_2)=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right)\middle| 0\leqslant k_1\leqslant 2^{\nu_1}-1,\, 0\leqslant k_2\leqslant 2^{\nu_2}-1\right\} \qquad (7)$$

из $2^{\nu_1+\nu_2}$ точек, которая, также, называется обобщенной равномерной сеткой. Очевидно, что обобщенная равномерная сетка $M(\nu_1,\nu_2)$ является декартовым произведением соответствующих одномерных равномерных сеток:

$$M(\nu_1,\nu_2)=M(\nu_1)\times M(\nu_2).$$

Сетка Смоляка $Sm(q) = Sm(q,2)$ с параметром $q \geqslant 3$ определяется как объединение всех обобщенных равномерных сеток $M(\nu_1,\nu_2)$ с $q-1\leqslant \nu_1+\nu_2\leqslant q$, таким образом

$$Sm(q,2)=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right)\middle| \begin{array}{c} 0\leqslant k_1\leqslant 2^{\nu_1}-1,\, 0\leqslant k_2\leqslant 2^{\nu_2}-1,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1,\quad q-1\leqslant \nu_1+\nu_2\leqslant q\end{array}\right\}. \qquad (8)$$

Нетрудно видеть, что минимальной равномерной сеткой, содержащей сетку Смоляка как подсетку, является $M(q-1,q-1)$: $Sm(q)\subset M(q-1,q-1)$.

Двумерные сетки Смоляка $Sm(q)$ являются частным случаем s–мерных сеток $Sm(q,s)$, которые использовались в работе [19] для построения квадратурных и интерполяционных формул с весами и на них были получены результаты на различных классах функций, сравнимые с наилучшими из известных.

Естественно изучить величину отклонения этих сеток, как меры равномерности распределения их точек в s–мерном единичном кубе. Здесь возможно три различных подхода: с учетом кратности точек в объединении, без их учета и, наконец, с весами из квадратурной формулы. В работе [8] для первых двух случаев сформулированы следующие четыре результата, из которых два последних парадоксальны.

Теорема 1. *Для количества $N^{(1)}_{q,s}$ точек сетки $Sm(q,s)$ с учетом кратности точек справедливы соотношения*

$$N^{(1)}_{q,s}=\sum_{k=0}^{s-1}2^{q-k}C^{s-1}_{q-k-1},\quad \frac{q^{s-1}2^q}{2^{s-1}(s-1)!}\leqslant N^{(1)}_{q,s}\leqslant\frac{q^{s-1}2^q}{(s-1)!}\ \text{\textit{при}}\ q\geqslant 4s.$$

Теорема 2. *Для количества $N^{(2)}_{q,s}$ точек сетки $Sm(q,s)$ без учета кратности точек справедливо соотношение*

$$N^{(2)}_{q,s} = O(q^{s-1}2^q).$$

Теорема 3. *Для отклонения $D^{(1)}_{q,s}$ сетки $Sm(q,s)$ с учетом кратности точек справедливо соотношение*

$$D^{(1)}_{q,s} = O\left(\frac{N^{(1)}_{q,s}}{\ln N^{(1)}_{q,s}}\right).$$

Теорема 4. *Для отклонения $D^{(2)}_{q,s}$ сетки $Sm(q,s)$ без учета кратности точек справедливо соотношение*

$$D^{(2)}_{q,s} = O\left(\frac{N^{(2)}_{q,s}}{\ln N^{(2)}_{q,s}}\right).$$

Для двумерных сеток Смоляка удается найти точное значение тригонометрических сеток. Оказываются, что они принимают только три значения — 0, 1 и -1. Пользуясь этим легко найти точные значения гиперболических параметров сетки Смоляка.

В третьей главе получены следующие результаты.

Теорема 15. *Для гиперболических параметров двумерной сетки Смоляка выполняются равенства:*

$$q_3(Sm(q),\rho(\vec{x})) = \infty,$$
$$q_1(Sm(q),\rho(\vec{x})) = q_2(Sm(q),\rho(\vec{x})) = q(Sm(q),\rho(\vec{x})) = 2^{q-1}. \tag{9}$$

Квадратурные формулы с двумерными сетками Сомоляка выглядят достаточно просто (см. [41], стр. 122).

Теорема 16. *Пусть $f(x_1,x_2) \in E^2_2$, $q \geqslant 3$, тогда для погрешности квадратурной формулы*

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-\nu}-1} f\left(\frac{k_1}{2^\nu},\frac{k_2}{2^{q-\nu}}\right) -$$
$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-1-\nu}-1} f\left(\frac{k_1}{2^\nu},\frac{k_2}{2^{q-1-\nu}}\right) - R_{N^{(1)}(q)}[f] \tag{10}$$

справедлива оценка

$$\left\|R_{N^{(1)}(q)}[f]\right\|_{E_2^2} \leqslant \frac{4\pi^4 q}{9\cdot 4^q} = O\left(\frac{\ln^3 N^{(1)}(q)}{(N^{(1)}(q))^2}\right),$$

где $N^{(1)}(q) = \dfrac{3q-4}{2}2^q$ *— количество точек сетки Смоляка с учетом их кратности.*

Если квадратурную формулу (10) записать без повторения узлов, то получается более сложное выражение (см. [41], стр. 123).

Теорема 16. *Пусть* $f(x_1,x_2) \in E_2^2(C)$, $q \geqslant 3$, *тогда для погрешности квадратурной формулы*

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \frac{1}{2^q}\left(\sum_{\nu=1}^{q-1}\sigma(\nu,q-\nu)+\sigma(q-1,0)+\sigma(0,q-1)-\right.$$
$$\left.-(q-3)\sigma(0,0)-\sum_{\nu=1}^{q-3}(q-2-\nu)(\sigma(\nu,0)+\sigma(0,\nu))-\sum_{\substack{\nu,\mu=1,\\ \nu+\mu\leqslant q-2}}^{q-3}(q-1-\nu-\mu)\sigma(\nu,\mu)\right)-$$
$$-R_{N(q)}[f], \tag{11}$$

где

$$\sigma(\nu,\mu) = \sum_{\vec{x}\in M^*(\nu,\mu)} f(\vec{x}) =$$
$$= \begin{cases} \sum\limits_{k_1=0}^{2^{\nu-1}-1}\sum\limits_{k_2=0}^{2^{\mu-1}-1} f\left(\dfrac{2k_1+1}{2^\nu},\dfrac{2k_2+1}{2^\mu}\right) & \text{при } \nu,\mu>0,\\ \sum\limits_{k_1=0}^{2^{\nu-1}-1} f\left(\dfrac{2k_1+1}{2^\nu},0\right) & \text{при } \nu>0,\mu=0,\\ \sum\limits_{k_2=0}^{2^{\mu-1}-1} f\left(0,\dfrac{2k_2+1}{2^\mu}\right) & \text{при } \nu=0,\mu>0,\\ f(0,0) & \text{при } \nu=\mu=0, \end{cases} \tag{12}$$

справедлива оценка

$$\left\|R_{N(q)}[f]\right\|_{E_2^2} \leqslant \frac{4\pi^4 q}{9\cdot 4^q} = O\left(\frac{\ln^3 N(q)}{N^2(q)}\right),$$

где $N(q) = 3q2^{q-3}$ — количество узлов в квадратурной формуле (3.7).

Термин граничные функции ввёл Н. М. Коробов в статье [17]. Так как общий термин экстремальная функция требует уточнения о каком функционале идет речь, то в этой работе мы будем придерживаться терминологии Н. М. Коробоа, так как в ней подразумевается, что речь идет о линейном функционале погрешности приближенного интегрирования, и указывается на каком классе функций и для какой квадратурной формулы.

В заключительной 5 главе найден явный вид для граничных функций из класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для сеток Смоляка.

Пусть

$$p_\nu(x) = 1 + \frac{2}{4^\nu} - \frac{12}{4^\nu}\left\{2^\nu x\right\}\left(1 - \left\{2^\nu x\right\}\right).$$

Теорема 25. *Для граничной функции $G(x_1, x_2)$ класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для сетки Смоляка справедливо равенство*

$$G(x_1, x_2) = \sum_{\nu=1}^{q-1} p_\nu(x_1) p_{q-\nu}(x_2) - \sum_{\nu=1}^{q-2} p_\nu(x_1) p_{q-1-\nu}(x_2). \tag{13}$$

Явный вид граничной функции класса позволил найти точное значение для нормы $\|R_{N^{(1)}(q)}[\cdot]\|_{E_2^2\left(1,\frac{\pi^2}{6}\right)}$ линейного функционала погрешности квадратурной формулы.

Теорема 26. *Для нормы $\|R_{N^{(1)}(q)}[\cdot]\|_{E_2^2\left(1,\frac{\pi^2}{6}\right)}$ линейного функционала погрешности квадратурной формулы (10) справедливо равенство*

$$\|R_{N^{(1)}(q)}[\cdot]\|_{E_2^2\left(1,\frac{\pi^2}{6}\right)} = \frac{3(q-1)}{4^{q-1}} + \frac{8}{16^{q-1}}. \tag{14}$$

Цели и задачи

Целью данной работы является:

- получение общих оценок для гиперболической дзета-функции сеток;
- получение точной формулы для величины $D_{q,2}^{(1)}$, новых оценок погрешности интерполяционных и квадратурных формул для плоских сеток Смоляка;

- получение явной формулы выражения через элементарные функции граничной функции класса E_2^2 с нормой (2) для сеток Смоляка и вычисление нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурным формулам с сетками Смоляка.

Для достижения указанных целей были поставлены следующие задачи:

- исследовать гиперболическую дзета-функцию сеток с весами;
- найти точные формулы для количества точек сетки Смоляка с учетом и без учета кратности узлов;
- вычислить тригонометрические суммы сеток Смоляка с весами;
- исследовать прямыми методами квадратурные и интерполяционные формулы с двумерными сетками Смоляка с весами;
- найти точные формулы отклонения двумерных сеток Смоляка;
- найти явные выражения для граничных функций сеток Смоляка с весами и точное значение нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования на классе $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$.

Научная новизна

В диссертации получены следующие новые результаты:

- Доказана обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток с весами.
- Найдены точные формулы для количества точек сетки Смоляка с учетом и без учета кратности узлов.
- Вычислены тригонометрические суммы сеток Смоляка с весами.
- Исследованы прямыми методами квадратурные и интерполяционные формулы с двумерными сетками Смоляка с весами.
- Найдены точные формулы отклонения двумерных сеток Смоляка.

- Найдены явные выражения для граничных функций сеток Смоляка с весами и точное значение нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования на классе $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации имеют значение для теоретико-числового метода Коробова в приближенном анализе. В ней содержатся оценки гиперболической дзета-функции сеток с весами и развитие теории двумерных сеток с весами и теории равномерного распределения точек сетки в квадрате. Результаты относящиеся к двумерным квадратурным и интерполяционным формулам с сетками Смоляка могут использоваться на практие при разработке программ численного интегрирования и интерполирования.

Методология и методы исследования

Исследование базировалось на общей методологии теоретико-числового метода Коробова в приближенном анализе. Согласно этому методу центральными объектами исследования являются тригонометрические суммы сеток с весами, отклонение сеток и гиперболическая дзета-функция сеток с весами. При реализации этой методологии использовались метод тригонометрических сумм, геометрия чисел, теория сравнений.

Положения выносимые на защиту

По результатам исследования на защиту выносятся следующие положения:

- Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток с весами.

- Точные формулы для количества узлов сетки Смоляка с учетом кратности и без учета кратности.

- Тригонометрические суммы сеток Смоляка с весами принимают только три значения — 0, -1, 1.

- Квадратурные формулы с сетками Смоляка с весами задают ненасышаемый алгоритм численного интегрирования.

- Квадратурные формулы по сеткам Смоляка с весами являтся квадратурными формулами интерполяционного типа.

- Явное выражение граничной функции на классе $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$.

- Явное выражение для нормы $\|R_{N^{(1)}(q)}[\cdot]\|_{E_2^2\left(1,\frac{\pi^2}{6}\right)}$ линейного функционала погрешности квадратурной формулы.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность всех результатов исследования обоснована строгими математическими доказательствами.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых по грантам РФФИ №05-01-00672а, №08-01-00790а, №11-01-00571а.

Апробация результатов исследования проводилась на международных конференциях:

- VII международная научная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения", посвященная памяти профессора А.А.Карацубы, — г. Тула, 2010г.

- Международная научно-практическая конференция "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии", посвященная 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина, — г. Тула, 2011г.

- International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology", — Odessa, August 20 — 26, 2012.

- X международная научная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" , — г. Волгоград, 2012г.

- XI международная научная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" , — г. Саратов, 2013г.

- XII международная научная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" , — г. Тула, 2014г.

Основные результаты, полученные в настоящей диссертации, опубликованы в следующих работах автора: [28, 32, 34, 38, 39] .

По теме диссертации опубликованы 17 печатных работ [28–44], в том числе 4 в рецензируемых научных журналах, въодящих в перечень ВАК [28-31]. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты, принадлежащие соискателю.

В заключение автор выражает благодарность научному руководителю профессору В. И. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Глава 1

Гиперболический параметр сетки с весами

1.1 Гиперболический крест и гиперболические параметры

В s-мерном пространстве усеченной нормой называется величина $q(\vec{x}) = \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_s$ (x_i координата точки x), где для вещественного x обозначаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

Гиперболическим крестом называется область

$$K_s(t) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leqslant t\},$$

а величина t — его параметром. Назовем r–ой компонентой гиперболического креста $K_s(t)$ подмножество

$$K_s^{(r)}(t) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leqslant t, \text{ ровно } r \text{ координат } \vec{x} \text{ отличны от } 0\}.$$

Ясно, что справедливо следующее разбиение гиперболического креста:

$$K_s(t) = \left(\bigcup_{r=1}^{s} K_s^{(r)}(t)\right) \bigcup \{\vec{0}\}.$$

С понятием усеченной нормы и гиперболическим крестом связано понятие гиперболического параметра множества.

Определение 1. *Для произвольного подмножества K фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ гиперболическим параметром $q(K)$ называется величина*

$$q(K) = \min_{\vec{m}\in K} \overline{m_1}\ldots\overline{m_s}. \tag{1.1}$$

Для пустого множества K полагается $q(K) = \infty$.

Ясно, что гиперболический параметр $q(K)$ имеет простой геометрический смысл — он равен наименьшему значению параметра t гиперболического креста $K_s(t)$ такого, что на границе $K_s(t)$ имеются точки множества K, а внутри отсутствуют.

Важную роль в применении понятия гиперболического креста играет количество целых точек в гиперболическом кресте.

Обозначим через $KZ_s(t)$ множество всех целых точек, принадлежащих гиперболическому кресту $K_s(t)$, а через $KZ_s^{(r)}(t)$ – множество всех целых точек, принадлежащих r–ой компоненте $K_s^{(r)}(t)$ гиперболического креста $K_s(t)$. Таким образом,

$$KZ_s(t) = K_s(t)\cap\mathbb{Z}^s, \quad KZ_s^{(r)}(t) = K_s^{(r)}(t)\cap\mathbb{Z}^s.$$

Для $t\geqslant 1$ положим:

$$B_j(t) = \sum_{m_1\ldots m_j\leqslant t} 1, \tag{1.2}$$

здесь суммирование проводится только по натуральным значениям переменных $m_1, \ldots, m_j$. Ясно, что

$$B_1(t) = [t]. \tag{1.3}$$

Из разбиения гиперболического креста на r-ые компоненты и определения величин $B_j(t)$ получим равенство для величины $|KZ_s(t)|$ — количества целых точек в гиперболическом кресте:

$$|KZ_s(t)| = 1 + \sum_{r=1}^{s} |KZ_s^{(r)}(t)| = 1 + \sum_{r=1}^{s} C_s^r 2^r B_r(t). \tag{1.4}$$

1.2 Число целых точек в гиперболическом кресте при значениях параметра $1 \leqslant t < 21$

Обозначим через $d_s(a)$ количество решений в натуральных числах уравнения $x_1x_2\dots x_s = a$. Функция $d_s(a)$ мультипликативная (см. [2] гл. 2), а значит, для неё имеет место равенство: $d_s(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_m^{a_m}) = d_s(p_1^{a_1})d_s(p_2^{a_2})\dots d_s(p_m^{a_m})$, где $p_1,\dots,p_m$ — различные простые числа, а $a_1,\dots,a_m$ — произвольные натуральные числа.

Рассмотрим решения уравнения $x_1x_2\dots x_s = p^k$ в натуральных числах , где p простое. Ясно, что если $x_1,\dots,x_i,\dots,x_s$ решение этого уравнения, то $x_i = p^{b_i}$ и $0 \leqslant b_i \leqslant k$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$. Отсюда следует, что $b_1 + b_2 + \ldots + b_s = k$, причем число решений этих уравнений совпадает, а число решений второго известно $C_{k+s-1}^{s-1} = C_{k+s-1}^{k}$. Поэтому $d_s(1) = 1$, $d_s(2) = d_s(3) = d_s(5) = d_s(7) = d_s(11) = d_s(13) = d_s(17) = d_s(19) = s$, $d_s(6) = d_s(10) = d_s(14) = d_s(15) = s^2$, $d_s(4) = d_s(9) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}s$, $d_s(12) = d_s(18) = d_s(20) = \frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{2}s^2$, $d_s(8) = \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s$, $d_s(16) = \frac{1}{24}s^4 + \frac{1}{4}s^3 + \frac{11}{24}s^2 + \frac{1}{4}s$.

Легко заметить, что $B_j(t) = \sum\limits_{i=1}^{[t]} d_j(i)$, отсюда суммированием получим:

$B_s(t) = 1$, $1 \leqslant t < 2$;

$B_s(t) = s + 1$, $2 \leqslant t < 3$;

$B_s(t) = 2s + 1$, $3 \leqslant t < 4$;

$B_s(t) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{5}{2}s + 1$, $4 \leqslant t < 5$;

$B_s(t) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{7}{2}s + 1$, $5 \leqslant t < 6$;

$B_s(t) = \frac{3}{2}s^2 + \frac{7}{2}s + 1$, $6 \leqslant t < 7$;

$B_s(t) = \frac{3}{2}s^2 + \frac{9}{2}s + 1$, $7 \leqslant t < 8$;

$B_s(t) = \frac{1}{6}s^3 + 2s^2 + \frac{29}{6}s + 1$, $8 \leqslant t < 9$;

$B_s(t) = \frac{1}{6}s^3 + \frac{5}{2}s^2 + \frac{16}{3}s + 1$, $9 \leqslant t < 10$;

$B_s(t) = \frac{1}{6}s^3 + \frac{7}{2}s^2 + \frac{16}{3}s + 1$, $10 \leqslant t < 11$;

$B_s(t) = \frac{1}{6}s^3 + \frac{7}{2}s^2 + \frac{19}{3}s + 1$, $11 \leqslant t < 12$;

$B_s(t) = \frac{2}{3}s^3 + 4s^2 + \frac{19}{3}s + 1$, $12 \leqslant t < 13$;

$B_s(t) = \frac{2}{3}s^3 + 4s^2 + \frac{22}{3}s + 1$, $13 \leqslant t < 14$;

$B_s(t) = \frac{2}{3}s^3 + 5s^2 + \frac{22}{3}s + 1$, $14 \leqslant t < 15$;

$B_s(t) = \frac{2}{3}s^3 + 6s^2 + \frac{22}{3}s + 1$, $15 \leqslant t < 16$;

$B_s(t)=\frac{1}{24}s^4+\frac{11}{12}s^3+\frac{155}{24}s^2+\frac{91}{12}s+1,\ 16\leqslant t<17;$
$B_s(t)=\frac{1}{24}s^4+\frac{11}{12}s^3+\frac{155}{24}s^2+\frac{103}{12}s+1,\ 17\leqslant t<18;$
$B_s(t)=\frac{1}{24}s^4+\frac{17}{12}s^3+\frac{167}{24}s^2+\frac{103}{12}s+1,\ 18\leqslant t<19;$
$B_s(t)=\frac{1}{24}s^4+\frac{17}{12}s^3+\frac{167}{24}s^2+\frac{115}{12}s+1,\ 19\leqslant t<20;$
$B_s(t)=\frac{1}{24}s^4+\frac{23}{12}s^3+\frac{179}{24}s^2+\frac{115}{12}s+1,\ 20\leqslant t<21.$

Таким образом при $1\leqslant t<21$ справедливо представление

$$B_r(t)=a_1(t)r^4+a_2(t)r^3+a_3(t)r^2+a_4(t)r+1, \tag{1.5}$$

где коэффициенты $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$ и $a_4(t)$ легко выписываются из предыдущих формул.

Подставляя (1.5) в (1.4), получим

$$\begin{aligned}|KZ_s(t)|&=1+\sum_{r=1}^{s}C_s^r2^r\left(a_1(t)r^4+a_2(t)r^3+a_3(t)r^2+a_4(t)r+1\right)=\\&=a_1(t)C_4(s)+a_2(t)C_3(s)+a_3(t)C_2(s)+a_4(t)C_1(s)+C_0(s)+1,\end{aligned} \tag{1.6}$$

где

$$C_j(s)=\sum_{r=1}^{s}C_s^r2^rr^j \quad (0\leqslant j\leqslant 4). \tag{1.7}$$

С помощью формулы бинома Ньютона сразу находим:

$$C_0(s)=\sum_{r=1}^{s}C_s^r2^r=\sum_{r=0}^{s}C_s^r2^r-1=(2+1)^s-1=3^s-1. \tag{1.8}$$

При $j>0$ получаем рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned}C_j(s)&=\sum_{r=1}^{s}C_s^r2^rr^j=2s\sum_{r=1}^{s}C_{s-1}^{r-1}2^{r-1}r^{j-1}=2s+2s\sum_{r=1}^{s-1}C_{s-1}^r2^r(r+1)^{j-1}=\\&=2s+2s\sum_{r=1}^{s-1}C_{s-1}^r2^r\sum_{k=0}^{j-1}C_{j-1}^kr^k=2s\left(1+\sum_{k=0}^{j-1}C_{j-1}^kC_k(s-1)\right).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Из рекуррентной формулы (1.9) последовательно находим:

$$C_1(s) = 2s\,(1 + C_0(s-1)) = 2s3^{s-1}; \tag{1.10}$$

$$C_2(s) = 2s\left(1 + C_1^0 C_0(s-1) + C_1^1 C_1(s-1)\right) =$$
$$= 2s\left(1 + 3^{s-1} - 1 + 2(s-1)3^{s-2}\right) =$$
$$= 2s3^{s-1}\left(1 + \frac{2}{3}(s-1)\right) = 2s(2s+1)3^{s-2}; \tag{1.11}$$

$$C_3(s) = 2s\left(1 + C_2^0 C_0(s-1) + C_2^1 C_1(s-1) + C_2^2 C_2(s-1)\right) =$$
$$= 2s\left(3^{s-1} + 4(s-1)3^{s-2} + 2(s-1)(2s-1)3^{s-3}\right) = 2s\left(4s^2 + 6s - 1\right)3^{s-3}; \tag{1.12}$$

$$C_4(s) = 2s\left(1 + C_3^0 C_0(s-1) + C_3^1 C_1(s-1) + C_3^2 C_2(s-1) + C_3^3 C_3(s-1)\right) =$$
$$= 2s\left(3^{s-1} + 6(s-1)3^{s-2} + 6(s-1)(2s-1)3^{s-3} + 2(s-1)(4s^2 - 2s - 3)3^{s-4}\right) =$$
$$= 2s\left(8s^3 + 24s^2 - 2s - 3\right)3^{s-4}. \tag{1.13}$$

Подставляя в (1.6) выражения (1.10)—(1.13) и учитывая значения коэффициентов $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$ и $a_4(t)$, которые получаются из формул для $B_r(t)$, получим:

$|KZ_s(t)| = 3^s$, $1 \leqslant t < 2$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-1}(2s+3)$, $2 \leqslant t < 3$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-1}(4s+3)$, $3 \leqslant t < 4$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-2}(9 + 16s + 2s^2)$, $4 \leqslant t < 5$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-2}(9 + 22s + 2s^2)$, $5 \leqslant t < 6$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-1}(3 + 8s + 2s^2)$, $6 \leqslant t < 7$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-1}(3 + 10 + 2s^2)$, $7 \leqslant t < 8$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-4}(81 + 296s + 78s^2 + 4s^3)$, $8 \leqslant t < 9$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-4}(81 + 332s + 96s^2 + 4s^3)$ $9 \leqslant t < 10$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-4}(81 + 350s + 132s^2 + 4s^3)$, $10 \leqslant t < 11$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-4}(81 + 404s + 132s^2 + 4s^3)$, $11 \leqslant t < 12$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-4}(81 + 410s + 168s^2 + 4s^3)$, $12 \leqslant t < 13$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-4}(81 + 464s + 168s^2 + 16s^3)$, $13 \leqslant t < 14$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-4}(81 + 482s + 204s^2 + 16s^3)$, $14 \leqslant t < 15$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-4}(81 + 500s + 240s^2 + 16s^3)$ $15 \leqslant t < 16$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-5}(243 + 1560s + 796s^2 + 72s^3 + 2s^4)$, $16 \leqslant t < 17$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-5}(243 + 1722s + 796s^2 + 72s^3 + 2s^4)$, $17 \leqslant t < 18$;

$|KZ_s(t)| = 3^{s-5}(243 + 1740s + 904s^2 + 108s^3 + 2s^4)$, $18 \leqslant t < 19$;
$|KZ_s(t)| = 3^{s-5}(243 + 1902s + 904s^2 + 108s^3 + 2s^4)$, $19 \leqslant t < 20$;
$|KZ_s(t)| = 3^{s-5}(243 + 1920s + 1012s^2 + 144s^3 + 2s^4)$, $20 \leqslant t < 21$.

1.3 О гиперболическом параметре сетки

Рассмотрим класс $\mathfrak{A}_s$ всех периодических функций $f(\vec{x})$ с периодом 1 по каждой переменной, у которых их ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \quad C(\vec{m}) = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(\vec{x})e^{-2\pi i(\vec{m},\vec{x})}d\vec{x}$$

абсолютно сходится. Пространство A_s относительно нормы

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} |C(\vec{m})| < \infty$$

является сепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_1 — всех абсолютно суммируемых комплексно-значных последовательностей (см. [9] .

Рассмотрим *квадратурную формулу с весами*

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \rho_k f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] - R_N[f]. \tag{1.14}$$

Здесь через $R_N[f]$ обозначена погрешность, получающаяся при замене интеграла

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)dx_1 \ldots dx_s$$

средним взвешенным значением функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, вычисленным в точках

$$M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)) \qquad (k = 1 \ldots N).$$

Совокупность M точек M_k называется *сеткой* M, а сами точки — *узлами квадратурной формулы.* Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные.

Для произвольных целых $m_1,\ldots,m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\ldots+m_s\xi_s(k)]}, \tag{1.15}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Будем также рассматривать *нормированные тригонометрические суммы сетки с весами*

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s) = \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s).$$

Положим $\rho(M) = \sum\limits_{j=1}^{N} |\rho_j|$, тогда для всех нормированных тригонометрических сумм сетки с весами справедлива тривиальная оценка

$$|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \frac{\rho(M)}{N}. \tag{1.16}$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто тригонометрическая сумма сетки и писать $S_M(\vec{m})$ и нормированная тригонометрическая сумма сетки $S^*_M(\vec{m})$.

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул (см. [3]) [1]

Теорема 5. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*

$$R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$

$$= C(\vec{0})\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \tag{1.17}$$

и при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда и только тогда, когда взвещенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s-мерном кубе.

[1] Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1,\ldots,m_s) \neq (0,\ldots,0)$.

Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение широкий класс периодических функций $E_s^\alpha(C)$ $(\alpha > 1)$ с быстро убывающими коэффициентами Фурье. Через $E_s^\alpha(C)$ обозначается множество функций из E_s^α с нормой, не превосходящей C, то есть шар в банаховом пространстве E_s^α радиуса C с центром в нуле.

Банахово пространство E_s^α состоит из функций $f(x_1, \dots, x_s)$, имеющих по каждой из переменных $x_1, \dots, x_s$ период, равный единице, и для которых их ряды Фурье

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \dots, m_s) e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)} \tag{1.18}$$

удовлетворяют условиям[2]

$$\sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |C(m_1, \dots, m_s)| (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha = \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} < \infty. \tag{1.19}$$

Ясно, что такие ряды Фурье сходятся абсолютно, так как

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(\alpha))^s,$$

а поэтому для любого $\alpha > 1$ они представляют непрерывные функции. Здесь и далее, как обычно, $\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана.

Относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$ пространство E_s^α является несепарабельным банаховым пространством изоморфным пространству l_∞ — всех ограниченных комплексно-значных последовательностей (см. [9]).

Для дальнейшего мы будем рассматривать класс $E_s = \bigcup\limits_{\alpha > 1} E_s^\alpha$. Очевидно $E_s \subset A_s$. Ясно, что класс E_s незамкнут в пространстве A_s относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{l_1}$, но является всюду плотным множеством.

Рассмотрим понятие усеченной нормы вектора, которой называется величина $q(\vec{x}) = \overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s$. Усеченной норменной поверхностью с параметром $t \geqslant 1$ называется множество $N_s(t) = \{\vec{x} | q(\vec{x}) = t, \, \vec{x} \neq \vec{0}\}$, которое является границей гиперболического креста $K_s(t)$, заданного соотношениями $K_s(t) = \{\vec{x} | q(\vec{x}) \leqslant t\}$. Для натурального t на усеченной норменной поверхности имеется $\tau_s^*(t)$ целых

[2] Здесь и далее для вещественных m полагаем $\overline{m} = \max(1, |m|)$. Таким образом, величину $\overline{m}$ можно назвать усеченной нормой числа m, что согласуется с понятием усеченной нормы вектора, о которой речь пойдет дальше.

ненулевых точек, где

$$\tau_s^*(t) = \sum_{\vec{m}\in N(t)}{}' 1 \tag{1.20}$$

— число представлений натурального числа t в виде $t = \overline{m}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{m}_s$.

Используя новые обозначения, можно написать другое выражение для нормы функции $||f(\vec{x})||_{E_s^\alpha}$. Справедливо равенство

$$||f(\vec{x})||_{E_s^\alpha} = \max\left(|C(\vec{0})|, \sup_{t\in\mathbb{N}}\left(t^\alpha \cdot \max_{\vec{m}\in N(t)} |C(\vec{m})|\right)\right).$$

Нетрудно видеть, что произвольная периодическая функция $f(\vec{x})$ из $E_s^\alpha(C)$ по модулю ограничена величиной $C\cdot(1+2\zeta(\alpha))^s$, при этом данная оценка достижима на функции

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} \frac{C\cdot e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}}{(\overline{m}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{m}_s)^\alpha}$$

в точке $\vec{x} = \vec{0}$.

Очевидно, что $E_s^\alpha(C) \subset E_s^\beta(C)$ при $\alpha \geqslant \beta$. Для любой периодической функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha(C) \subset E_s^\beta(C)$ справедливо неравенство для норм

$$||f(\vec{x})||_{E_s^\alpha} \geqslant ||f(\vec{x})||_{E_s^\beta}.$$

Равенство достигается только для конечных тригонометрических многочленов вида

$$f(\vec{x}) = C(\vec{0}) + \sum_{\vec{m}\in N(1)} C(\vec{m})\, e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

В работе [3] дано следующее определение дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p \geqslant 1$.

Определение 2. *Дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p \geqslant 1$ называется функция $\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho})$, заданная в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$ рядом Дирихле*

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(p, M, \vec{\rho}, n)}{n^\alpha}, \tag{1.21}$$

где

$$S^*(p, M, \vec{\rho}, n) = \sum_{\vec{m}\in N(n)} |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p. \tag{1.22}$$

Непосредственно из определения следует неравенство

$$\zeta(p\alpha, p|M, \vec{\rho}) \leqslant \zeta^p(\alpha, 1|M, \vec{\rho}) \quad (\alpha > 1). \tag{1.23}$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто дзета-функция сетки M с параметром p и писать $\zeta(\alpha, p|M)$.

Теорема 6. *Если $f(x_1, \ldots, x_s) \in E_s^\alpha(C)$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$|R_N[f]| \leq C \left| \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right| + \frac{C}{N} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} =$$
$$= C \left| S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right| + C \cdot \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}), \tag{1.24}$$

где сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (1.15). На классе $E_s^\alpha(C)$ эту оценку нельзя улучшить.

Другими словами теорему 6 можно сформулировать так:

Для нормы $\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha}$ линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле (1.14) справедливо равенство

$$\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha} = \left| \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right| + \frac{1}{N} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} =$$
$$= \left| S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right| + \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}). \tag{1.25}$$

Если рассмотреть класс $E_s^{\alpha,q}$ с нормой

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,q}} = \left(|C(\vec{0})|^q + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(\vec{m})|^q (\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\frac{q\alpha}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

то справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Если $f(\vec{x}) \in E_s^{\alpha,q}$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$|R_N[f]| \leq$$
$$\leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,q}} \left(\left| \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right|^p + \frac{1}{N^p} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,q}} \left(\left| S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right|^p + \zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.26}$$

где сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (1.15). На классе $E_s^{\alpha,q}$ эту оценку нельзя улучшить.

Доказательство. Действительно, по теореме 5

$$R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$

$$= C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{\frac{\alpha}{p}}\frac{S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{\frac{\alpha}{p}}}.$$

Применем к правой части неравенство Гёльдера, получим

$$|R_N[f]| \leqslant \left(|C(\vec{0})|^q + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(\vec{m})|^q(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{\frac{q\alpha}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}\cdot$$

$$\cdot\left(\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|^p + \frac{1}{N^p}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,q}}\left(\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|^p + \zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho})\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как неравенство Гёльдера обращается в равенство при

$$C(\vec{0}) = \begin{cases} 0, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1;\\ \frac{\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right|^p}{S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1}, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) \neq 1;\end{cases}$$

и

$$C(\vec{m}) = \begin{cases} 0, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 0;\\ \frac{\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})\right|^p}{S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{\alpha}}, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \neq 0;\end{cases} \qquad \vec{m} \neq \vec{0},$$

то теорема полностью доказана. $\square$

Из теорем 6 и 7 следует, что на классах E_s^{α} и $E_s^{\alpha,q}$ оценка погрешности приближенного интегрирования сводится к оценке гиперболической дзета-функции сеток. Проводя аналогию с гиперболической дзета-функцией решетки, которая равна гиперболической дзета-функции сеток в случае параллелепипедальной сетки, можно высказать гипотезу, что для гиперболической дзета-функции сеток должен быть справедлив аналог теоремы Бахвалова об оценке гиперболической дзета-функцией решетки через гиперболический параметр решетки.

Цель данной главы — ввести понятие гиперболических параметров сетки и доказать аналог теоремы Бахвалова для гиперболической дзета-функции сеток.

1.4 Первый, второй и третий гиперболические параметры сеток

В работе [41] было дано такое определение.

"Гиперболическим параметром сетки M с весами $\rho(\vec{x})$ назовем величину

$$q\left(M, \rho(\vec{x})\right) = \min_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus\{\vec{0}\}, |S(\vec{m})|>0} \overline{m_1}\ldots\overline{m_s}\,.\text{ "}$$

В этой работе использовались несколько иные обозначения. Так

$$S(\vec{m}) = \frac{1}{|M|}\sum_{\vec{x}\in M}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}$$

— тригонометрическая сумма сетки M с весами $\rho(\vec{x})$;

$$\zeta_H(M, \rho(\vec{x})|\alpha) = {\sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s}}' \frac{|S(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}$$

— гиперболическая дзета-функции сетки M с весами $\rho(\vec{x})$.

Первое применение гиперболического параметра сетки вытекает из теоремы Абеля (см. [23], стр. 106), позволяющее представить гиперболическую дзету-функцию сетки M с весами $\rho(\vec{x})$ в интегральном виде

$$\zeta_H(M, \rho(\vec{x})|\alpha) = \alpha\int\limits_{q(M,\rho(\vec{x}))}^{\infty}\frac{D(t|M, \rho(\vec{x}))dt}{t^{\alpha+1}},$$

где

$$D(t|M, \rho(\vec{x})) = {\sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s,\, \overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\leqslant t}}' |S(\vec{m})|$$

— сумматорная функция тригонометрической суммы.

В работе [3] для любой сетки M с весами $\vec{\rho}$ на пространстве периодических функций E_s^α рассмотрен линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних заданный равенством

$$g(\vec{x}) = A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{x}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\rho_k f[x_1+\xi_1(k), \ldots, x_s+\xi_s(k)]. \tag{1.27}$$

Через $A_{M,\vec{\rho}}C(\vec{m})$ обозначается действие линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ на коэффициенты Фурье функции $f(\vec{x})$.

Лемма 1. *Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье*

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \tag{1.28}$$

справедливо равенство

$$A_{M,\vec{\rho}} C(\vec{m}) = \frac{S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})}{N} C(\vec{m}) = S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) C(\vec{m}) \tag{1.29}$$

где $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрическая сумма сетки с весами, а $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — нормированная тригонометрическая сумма сетки с весами.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\|A_{M,\vec{\rho}} f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \leqslant \frac{\rho(M)}{N} \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}. \tag{1.30}$$

Доказательство. См. [3], стр. 194. □

С точки зрения величины нормированной тригонометрической суммы сетки с весами естественно определить следующие пять подмножеств фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ таким образом:

$$K_0 = K_0(M, \vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \,|\, S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 0\}, \tag{1.31}$$

$$K_1 = K_1(M, \vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \,|\, S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 1\}, \tag{1.32}$$

$$K_2 = K_2(M, \vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \,|\, S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \neq 1,\, |S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| = 1\}, \tag{1.33}$$

$$K_3 = K_3(M, \vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \,|\, 0 < |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| < 1\}, \tag{1.34}$$

$$K_4 = K_4(M, \vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \,|\, |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| > 1\}. \tag{1.35}$$

Ясно что $\mathbb{Z}^s = K_0 \bigcup K_1 \bigcup K_2 \bigcup K_3 \bigcup K_4$. Такое разбиение называется разбиением Коробова. Оно фактически возникало в его работах, когда он проводил оценки погрешности приближенного интегрирования.

В работе [3] было дано определение нормального и несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних (см. [3], стр. 195 и 199). Нормальный оператор не увеличивает норму любой функции, то есть $K_4 = \varnothing$, а для несмещенного оператора имеем: $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1$.

Далее везде будем считать, что веса $\vec{\rho}$ выбраны так, что соответствующий линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным. Для таких операторов выражение гиперболической дзета-функции сетки имеет более простой вид

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) = \sum_{\vec{m} \in K_1 \bigcup K_2}{}' \frac{1}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha} + \sum_{\vec{m} \in K_3} \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha}. \tag{1.36}$$

Используя общее определение гиперболического параметра, в случае нормального, несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних можно определить первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$.

Определение 3. *Для произвольной сетки M с весами $\vec{\rho}$ такими, что соответствующий линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$ задаются равенствами*

$$q_\nu \left(M, \rho(\vec{x})\right) = q(K_\nu \left(M, \rho(\vec{x})\right)) \quad (\nu = 1, 2, 3). \tag{1.37}$$

Ясно, что гиперболический параметр сетки и первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$ связаны соотношением

$$q\left(M, \rho(\vec{x})\right) = \min_{\nu=1,2,3} q_\nu \left(M, \rho(\vec{x})\right).$$

Пусть сетка M — рациональная со знаменателем p, то есть в s-мерном кубе $G_s = \{\vec{x} \,|\, 0 \leqslant x_i < 1 \,(i = 1, \ldots, s)\}$ имеется N рациональных точек вида

$$\left(\frac{x_1^{(k)}}{p}, \ldots, \frac{x_s^{(k)}}{p}\right) \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{1.38}$$

$x_i^{(k)}$ — целые, $0 \leqslant x_i^{(k)} \leqslant p - 1$, p — натуральное.

Теорема 8. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, справедливо соотношение*

$$p \cdot \mathbb{Z}^s \subset K_1 \left(M, \rho(\vec{x})\right),$$

кроме того тригонометрические суммы $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ с весами $\vec{\rho}$ принимают конечное число различных значений, не превосходящее p^s.

Доказательство. Действительно, если

$$\vec{x}_k = \left(\frac{x_1^{(k)}}{p}, \ldots, \frac{x_s^{(k)}}{p}\right),$$

то $(\vec{m}, \vec{x}_k) \in \mathbb{Z}$ для любого $\vec{m} \in p \cdot \mathbb{Z}^s$, поэтому $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x}_k)} = 1$ и

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \rho(\vec{x}_k) = S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1,$$

так как линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным.

Аналогично получаем, что

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m} + p \cdot \vec{n}).$$

Следовательно, все различные значения тригонометрических сумм $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ с весами $\vec{\rho}$ содержатся среди значений для $\vec{m} \in [-p_1, p_2]^s$, где $p_1 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$ и $p_2 = \left[\frac{p}{2}\right]$. $\square$

Теорема 9. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, множество $K_1(M, \vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.*

Доказательство. Действительно, если для $\vec{m}$ выполняется равенство $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 1$, то в силу положительности весов $\vec{\rho}$ это возможно только при условии, что $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x}_k)} = 1$ при $k = 1, \ldots, N$. Это означает, что $(\vec{m}, \vec{x}_k) \in \mathbb{Z}$ при $k = 1, \ldots, N$. Таким образом, $\vec{m} \in K_1(M, \vec{\rho})$ тогда и только тогда, когда $(\vec{m}, \vec{x}_k) \in \mathbb{Z}$ при $k = 1, \ldots, N$. Но если $\vec{m}_1, \vec{m}_2 \in K_1(M, \vec{\rho})$, то и $\vec{m}_1 \pm \vec{m}_2 \in K_1(M, \vec{\rho})$, это означает что $K_1(M, \vec{\rho})$ является целочисленной решеткой. $\square$

Теорема 10. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, множество $K_1(M, \vec{\rho}) \bigcup K_2(M, \vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.*

Доказательство. Действительно, если для $\vec{m}$ выполняется равенство $|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| = 1$, то в силу положительности весов $\vec{\rho}$ это возможно только при условии, что найдется $x \in [0,1)$ такой, что $e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x}_k)} = e^{2\pi ix}$ при $k = 1,\ldots,N$. Это означает, что $\{(\vec{m},\vec{x}_k)\} = x$ при $k = 1,\ldots,N$.

Таким образом, $\vec{m} \in K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$ тогда и только тогда, когда $\{(\vec{m},\vec{x}_k)\} = \{(\vec{m},\vec{x}_1)\}$ при $k = 1,\ldots,N$.

Но если $\vec{m}_1,\vec{m}_2 \in K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$, то и

$$\vec{m}_1 \pm \vec{m}_2 \in K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho}),$$

это означает что $K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$ является целочисленной решеткой. □

1.5 Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток

Для формулировки обобщенной теоремы Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток нам потребуется обощенная теорема Бахвалова для гиперболической дзета-функци решеток из работы [5], одна лемма из работы [4] и одно новое определение.

Определение 4. *Будем говорить, что сетка M с весами $\vec{\rho}$, для которой линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, имеет тип $\Delta(N,s) < 1$, если для любого $\vec{m} \in K_3(M,\vec{\rho})$ выполняется оценка*

$$|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \Delta(N,s).$$

Теорема 11. **(Обобщенная теорема Бахвалова для гиперболической дзета-функци решеток)** *Для любой s-мерной решетки Λ справедливы оценки*

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \leqslant \begin{cases} (2+2\zeta(\alpha))^s \cdot \left(1+\left[\dfrac{1}{\lambda}\right]\right)^s, & \text{при } q(\Lambda) = 1; \\[2ex] 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s \dfrac{(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)}, & \text{при } q(\Lambda) > 1, \end{cases}$$

где λ — наибольшее число такое, что s-мерный куб $[-\lambda;\lambda]^s$ не содержит ни одной ненулевой точки решетки Λ.

Доказательство. См. [5]. $\square$

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$A_j(t)\leqslant\frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(\frac{\ln^{j-1}t}{(\alpha-1)(j-1)!}+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=0}^{j-2}\frac{\ln^m t}{m!}\left(\sum_{k=m}^{j-2}\zeta(\alpha)^{j-2-k}C_k^m\frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1}+\frac{C_{j-1}^m}{\alpha-1}\right)\right), \qquad (1.39)$$

где $\zeta(\alpha)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}m^{-\alpha}$ — дзета-функция Римана при $\alpha>1$.

Доказательство. См. [4]. $\square$

Теорема 12. **(Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функци сеток)** *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$ типа $\Delta(N,s)<1$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, праведлива оценка*

$$\zeta(\alpha,p|M,\vec{\rho})\leqslant 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s\frac{(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}}{q^{\alpha}(\Lambda)}+$$
$$+\Delta^p(N,s)\frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(\frac{\ln^{s-1}t}{(\alpha-1)(s-1)!}+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=0}^{s-2}\frac{\ln^m t}{m!}\left(\sum_{k=m}^{s-2}\zeta(\alpha)^{s-2-k}C_k^m\frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1}+\frac{C_{s-1}^m}{\alpha-1}\right)\right), \qquad (1.40)$$

где решетка $\Lambda=K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$ и $t=q_3\left(M,\rho(\vec{x})\right)$.

Доказательство. Действительно, пользуясь формулой (1.36), теоремой 10 и обозначениями из формулировки доказываемой теоремы, получим

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) = \zeta_H(\Lambda|\alpha) + \sum_{\vec{m}\in K_3} \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \zeta_H(\Lambda|\alpha) + \Delta^p(N, s)A_s(t) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s \frac{(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)} +$$

$$+\Delta^p(N, s)\frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(\frac{\ln^{s-1} t}{(\alpha-1)(s-1)!} +\right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{s-2}\frac{\ln^m t}{m!}\left(\sum_{k=m}^{s-2}\zeta(\alpha)^{s-2-k}C_k^m\frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1} + \frac{C_{s-1}^m}{\alpha-1}\right)\right).$$

□

Глава 2

Количество узлов в двумерной сетке Смоляка

Для того чтобы определить порядок роста отклонения сетки Смоляка при увеличении количества точек сетки необходимо подсчитать их количество. Из определения видно, что сетка Смоляка $Sm(q)$ является объединением нескольких обобщенных равномерных сеток, при этом любые две сетки входящие в объединение имеют непустое пересечение. Поэтому здесь возможно два случая: число узлов подсчитывается с учетом их кратности и без учета.

2.1 Число узлов с учетом их кратности

По определению сетки Смоляка справедливо представление

$$Sm(q) = \bigcup_{\substack{q-1\leqslant\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}} M(\nu_1,\nu_2) = \left(\bigcup_{\nu=1}^{q-1} M(\nu, q-\nu)\right)\bigcup\left(\bigcup_{\nu=1}^{q-2} M(\nu, q-1-\nu)\right). \quad (2.1)$$

Нетрудно видеть, что любые два члена из объединения в правой части равенства (2.1) имеют непустое пересечение. А именно, справедливо равенство

$$M(\nu_1,\nu_2)\bigcap M(\mu_1,\mu_2) = M(\lambda_1,\lambda_2), \quad (2.2)$$

где $\lambda_1 = \min(\nu_1,\mu_1)$ и $\lambda_2 = \min(\nu_2,\mu_2)$.

Обозначим через $N_q^{(1)}$ число узлов сетки $Sm(q)$ с учетом кратности, то есть узел (x_1,x_2) имеет кратность равную числу различных наборов (ν_1,ν_2) таких, что $(x_1, x_2) = (k_1 2^{-\nu_1}, k_2 2^{-\nu_2})$. Ясно, что при таком подсчете узлов справедливо равенство

$$N_q^{(1)} = \sum_{\substack{q-1\leqslant\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}} |M(\nu_1, \nu_2)|. \tag{2.3}$$

Теорема 13. *Если $N_q^{(1)}$ — число узлов сетки $Sm(q)$ с учетом кратности, то при $q \geqslant 2$ выполняются соотношения:*

$$N_q^{(1)} = \frac{3q-4}{2} 2^q, \quad q = O\left(\ln N_q^{(1)}\right). \quad 2^q = O\left(\frac{N_q^{(1)}}{\ln N_q^{(1)}}\right) \tag{2.4}$$

Доказательство. Действительно, узлы сетки Смоляка имеют вид: $\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right)$, где $0 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1} - 1$, $0 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2} - 1$, $\nu_1, \nu_2 \geqslant 1$ и $q - 1 \leqslant \nu_1 + \nu_2 \leqslant q$.

Отсюда следует, что

$$N_q^{(1)} = \sum_{k=0}^{1} \sum_{\substack{\nu_1+\nu_2=q-k\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}} 2^{\nu_1} \cdot 2^{\nu_2} = \sum_{k=0}^{1} 2^{q-k} \sum_{\nu_1=1}^{q-k-1} 1 = \sum_{k=0}^{1} 2^{q-k}(q-k-1) = \frac{3q-4}{2} 2^q.$$

Так как $N_q^{(1)} = O(q2^q)$, то $q = O\left(\ln N_q^{(1)}\right)$, $2^q = O\left(\frac{N_q^{(1)}}{\ln N_q^{(1)}}\right)$и теорема доказана. □

2.2 Число узлов без учета их кратности

Мы дадим два различных способа подсчета узлов сетки Смоляка без учета их кратности. Первый способ будет основан на понятии приведенной обобщенной равномерной сетки, а второй — на понятии канонического представления узла сетки Смоляка.

2.2.1 Приведенные обобщенные равномерные сетки.

По аналогии с приведенной системой вычетов определим при $\nu_1, \nu_2 > 0$ приведенные обобщенные равномерные сетки $M^*(\nu_1, \nu_2)$, $M^*(\nu_1, 0)$, $M^*(0, \nu_2)$ равенствами

$$M^*(\nu_1,\nu_2)=\left\{\left(\frac{2k_1-1}{2^{\nu_1}},\frac{2k_2-1}{2^{\nu_2}}\right)\middle|\, 1\leqslant k_1\leqslant 2^{\nu_1-1},\, 1\leqslant k_2\leqslant 2^{\nu_2-1}\right\},$$

$$M^*(\nu_1,0)=\left\{\left(\frac{2k_1-1}{2^{\nu_1}},0\right)\middle|\, 1\leqslant k_1\leqslant 2^{\nu_1-1},\right\},$$

$$M^*(0,\nu_2)=\left\{\left(0,\frac{2k_2-1}{2^{\nu_2}}\right)\middle|\, 1\leqslant k_2\leqslant 2^{\nu_2-1}\right\},\quad M^*(0,0)=\left\{\vec{0}\right\}. \qquad (2.5)$$

Ясно, что приведенные обобщенные равномерные сетки $M^*(\nu_1,\nu_2)$, $M^*(\nu_1,0)$ и $M^*(0,\nu_2)$ состоят из

$$|M^*(\nu_1,\nu_2)|=2^{\nu_1+\nu_2-2},\quad |M^*(\nu_1,0)|=2^{\nu_1-1},\quad |M^*(0,\nu_2)|=2^{\nu_2-1} \qquad (2.6)$$

точек, так как каждая двумерная приведенная обобщенная равномерная сетка $M^*(\nu_1,\nu_2)$ является декартовым произведением соответствующих одномерных приведенных равномерных сеток:

$$M^*(\nu_1,\nu_2)=M^*(\nu_1)\times M^*(\nu_2)$$

и справедливо равенство для количества точек одномерной приведенной равномерной сетки $M^*(\nu)$:

$$M^*(\nu)=\left\{\left(\frac{2k+1}{2^{\nu}}\right)\middle|\, 0\leqslant k\leqslant 2^{\nu-1}-1\right\},\quad |M^*(\nu)|=2^{\nu-1}, \qquad (2.7)$$

и для удобства примем соглашение

$$M^*(0)=\{(0)\},\quad |M^*(0)|=1. \qquad (2.8)$$

Ясно, что при $\nu\geqslant 0$ справедлива общая формула [1] $|M^*(\nu)|=2^{\overline{\nu}-1}$, из которой при $\nu_1,\nu_2\geqslant 0$ следует равенство $|M^*(\nu_1,\nu_2)|=2^{\overline{\nu}_1+\overline{\nu}_2-2}$.

Приведенные обобщенные равномерные сетки попарно не пересекаются. Отсюда вытекает важное для дальнейшего разбиение обобщенной равномерной сетки на непересекающиеся подсетки.

Лемма 3. *Справедливо представление*

$$M(\nu_1,\nu_2)=\left\{\vec{0}\right\}\bigcup_{\substack{1\leqslant\mu_1\leqslant\nu_1,\\ 1\leqslant\mu_2\leqslant\nu_2}}M^*(\mu_1,\mu_2)\bigcup_{1\leqslant\mu_1\leqslant\nu_1}M^*(\mu_1,0)\bigcup_{1\leqslant\mu_2\leqslant\nu_2}M^*(0,\mu_2)=$$

$$=\bigcup_{\substack{0\leqslant\mu_1\leqslant\nu_1,\\ 0\leqslant\mu_2\leqslant\nu_2}}M^*(\mu_1,\mu_2). \qquad (2.9)$$

[1] Здесь и далее для любого вещественного x полагается $\overline{x}=\max(1,|x|)$.

Доказательство. Действительно, все узлы обобщенной равномерной сетки можно разбить на четыре класса.

Первый класс состоит из единственной нулевой точки, и он образует приведенную обобщенную равномерную сетку $M^*(0,0)$.

Ко второму классу отнесем все ненулевые точки, у которых вторая координата нулевая, то есть это точки вида

$$\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, 0\right), \quad 1 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1} - 1.$$

Каждая такая точка однозначно определяет приведенную обобщенную сетку $M^*(\mu_1, 0)$, которой она принадлежит. А именно, если $(k_1, 2^{\nu_1}) = 2^d$, то $\mu_1 = \nu_1 - d$. Отсюда следует, что точки второго класса образуют следующие объединение приведенных обобщенных равномерных сеток:

$$\bigcup_{1\leqslant\mu_1\leqslant\nu_1} M^*(\mu_1, 0).$$

Аналогично, к третьему классу отнесем все ненулевые точки, у которых первая координата нулевая, то есть это точки вида

$$\left(0, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right), \quad 1 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2} - 1.$$

Каждая такая точка однозначно определяет приведенную обобщенную сетку $M^*(0, \mu_2)$, которой она принадлежит. А именно, если $(k_2, 2^{\nu_2}) = 2^d$, то $\mu_2 = \nu_2 - d$. Отсюда следует, что точки третьего класса образуют следующие объединение приведенных обобщенных равномерных сеток:

$$\bigcup_{1\leqslant\mu_2\leqslant\nu_2} M^*(0, \mu_2).$$

Наконец, к четвертому классу отнесем все узлы общего положения, то есть те, у которых обе координаты ненулевые, другими словами эти точки имеют вид

$$\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right) \quad 1 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1} - 1,\ 1 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2} - 1.$$

Каждая такая точка однозначно определяет приведенную обобщенную сетку $M^*(\mu_1, \mu_2)$, которой она принадлежит. А именно, если $(k_1, 2^{\nu_1}) = 2^{d_1}$ и $(k_2, 2^{\nu_2}) =$

2^{d_2}, то $\mu_1 = \nu_1 - d_1$ и $\mu_2 = \nu_2 - d_2$. Отсюда следует, что точки четвертого класса образуют следующие объединение приведенных обобщенных равномерных сеток:

$$\bigcup_{\substack{1 \leqslant \mu_1 \leqslant \nu_1, \\ 1 \leqslant \mu_2 \leqslant \nu_2}} M^*(\mu_1, \mu_2).$$

Так как других точек кроме указанных четырех класов обобщенная равномерная сетка не имеет, то утверждение леммы полностью доказано. □

Теорема 14. *Если $N_q^{(2)}$ — число узлов сетки $Sm(q)$ без учета кратности, то при $q \geqslant 3$ выполняются соотношения:*

$$N_q^{(2)} = q 2^{q-1}, \quad q = O\left(\ln N_q^{(2)}\right), \quad 2^q = O\left(\frac{N_q^{(2)}}{\ln N_q^{(2)}}\right).$$

Доказательство. Из определения сетки Смоляка и из леммы 3 следует представление

$$Sm(q) = \bigcup_{\substack{q-1 \leqslant \nu_1 + \nu_2 \leqslant q, \\ \nu_1, \nu_2 \geqslant 1}} M(\nu_1, \nu_2) =$$

$$= \bigcup_{\substack{q-1 \leqslant \nu_1 + \nu_2 \leqslant q, \\ \nu_1, \nu_2 \geqslant 1}} \left(\left\{ \vec{0} \right\} \bigcup_{\substack{1 \leqslant \mu_1 \leqslant \nu_1, \\ 1 \leqslant \mu_2 \leqslant \nu_2}} M^*(\mu_1, \mu_2) \bigcup_{1 \leqslant \mu_1 \leqslant \nu_1} M^*(\mu_1, 0) \bigcup_{1 \leqslant \mu_2 \leqslant \nu_2} M^*(0, \mu_2) \right) =$$

$$= \bigcup_{\substack{q-1 \leqslant \nu_1 + \nu_2 \leqslant q, \\ \nu_1, \nu_2 \geqslant 1}} \left(\bigcup_{\substack{0 \leqslant \mu_1 \leqslant \nu_1, \\ 0 \leqslant \mu_2 \leqslant \nu_2}} M^*(\mu_1, \mu_2) \right) = \bigcup_{\substack{0 \leqslant \mu_1, \mu_2 \leqslant q-1, \\ \mu_1 + \mu_2 \leqslant q}} M^*(\mu_1, \mu_2). \qquad (2.10)$$

Так как различные приведенные обобщенные равномерные сетки не пересекаются, то

$$N_q^{(2)} = |Sm(q)| = \sum_{\substack{0\leqslant \mu_1,\mu_2\leqslant q-1,\\ \mu_1+\mu_2\leqslant q}} |M^*(\mu_1,\mu_2)| =$$

$$= 1 + \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-1} |M^*(\mu_1,0)| + \sum_{1\leqslant\mu_2\leqslant q-1} |M^*(0,\mu_2)| + \sum_{\substack{1\leqslant \mu_1,\mu_2\leqslant q-1,\\ \mu_1+\mu_2\leqslant q}} |M^*(\mu_1,\mu_2)| =$$

$$= 1 + \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-1} 2^{\mu_1-1} + \sum_{1\leqslant\mu_2\leqslant q-1} 2^{\mu_2-1} + \sum_{\substack{1\leqslant \mu_1,\mu_2\leqslant q-1,\\ \mu_1+\mu_2\leqslant q}} 2^{\mu_1+\mu_2-2} =$$

$$= 1 + 2\cdot\left(2^{q-1}-1\right) + \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-1} 2^{\mu_1-1} \sum_{1\leqslant\mu_2\leqslant q-\mu_1} 2^{\mu_2-1} =$$

$$= 2^q - 1 + \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-1} 2^{\mu_1-1}\left(2^{q-\mu_1}-1\right) =$$

$$= 2^q - 1 + \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-1} 2^{q-1} - \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-1} 2^{\mu_1-1} =$$

$$= 2^q - 1 + (q-1)2^{q-1} - \left(2^{q-1}-1\right) = q2^{q-1}.$$

Отсюда следует $q = O(\ln N_q^{(2)})$, $2^q = O\left(\frac{N_q^{(2)}}{\ln N_q^{(2)}}\right)$ и утверждение теоремы полностью доказано. □

2.2.2 Каноническое представление узлов сетки Смоляка.

Пусть (x_1, x_2) — произвольный узел двумерной сетки Смоляка $Sm(q)$. Из множества различных представлений узла сетки (x_1,x_2) в виде $(x_1,x_2)=(k_1 2^{-\nu_1}, k_2 2^{-\nu_2})$, $0 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1}-1$, $0 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2}-1$, $1 \leqslant \nu_1,\nu_2$ и $q-1 \leqslant \nu_1+\nu_2 \leqslant q$ выделим каноническое представление $(k_1^{(0)}2^{-\nu_1^{(0)}}, k_2^{(0)}2^{-\nu_2^{(0)}})$, которое определяется следующим образом:

Положим $\mu_1(\nu_1,\nu_2) = \nu_1+\nu_2$, $\mu_2(\nu_1) = \nu_1$.

Определение 5. *Представление* $\left(\frac{k_1^{(0)}}{2^{\nu_1^{(0)}}}, \frac{k_2^{(0)}}{2^{\nu_2^{(0)}}}\right)$ *для узла* (x_1,x_2) *с* $0 \leqslant k_j^{(0)} \leqslant 2^{\nu_j^{(0)}}-1$, $\nu_j^{(0)} \geqslant 1$ $(j=1,2)$ *и* $q-2 < \nu_1^{(0)}+\nu_2^{(0)} \leqslant q$ *— каноническое, если*

$\mu_1^{(0)} = \nu_1^{(0)} + \nu_2^{(0)}$, $\mu_2^{(0)} = \nu_1^{(0)}$ *обладают свойством минимальности, то есть*

$$\mu_1^{(0)} = \min_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ (x_1,x_2)=\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right)}} \mu_1(\nu_1,\nu_2),$$
$$\mu_2^{(0)} = \min_{\substack{\mu_1(\nu_1,\nu_2)=\mu_1^{(0)},\\ (x_1,x_2)=(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\frac{k_2}{2^{\nu_2}})}} \mu_2(\nu_1). \tag{2.11}$$

Лемма 4. *Каноническое представление существует и единственно для любой точки сетки Смоляка.*

Доказательство. Действительно, величины $\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}$ определяются точкой (x_1, x_2) однозначно. Значит и $\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}$ определены однозначно, а следовательно и $k_1^{(0)}, k_2^{(0)}$ определены однозначно и лемма доказана. $\square$

Для дальнейшего будет полезно следующее замечание. Если $\nu = 1$, $0 \leqslant k \leqslant 2^\nu - 1$ и $2|k$, то $k = 0$.

Лемма 5. *Пусть* $\nu_j \geqslant 1$, $0 \leqslant k_j \leqslant 2^{\nu_j} - 1$ $(j = 1, 2)$ *и* $\nu_1 + \nu_2 = q$, *тогда*

а) если существует j *такое, что* $1 \leqslant j \leqslant 2$, $\nu_j \neq 1$ *и* $2|k_j$, *то* $(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}})$ — *неканоническое представление.*

б) если для любого j *такого, что* $1 \leqslant j \leqslant 2$ *из* $2|k_j$ *следует* $\nu_j = 1$, *тогда* $(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}})$ — *каноническое представление, то есть любая точка* $(x_1, x_2) = (\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}})$ *из объединения*

$$\left(\bigcup_{\substack{\nu_1+\nu_2=q,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}} M^*(\nu_1,\nu_2)\right) \bigcup (M^*(0) \times M^*(q-1)) \bigcup (M^*(q-1) \times M^*(0))$$

задана каноническим представлением.

Доказательство. а) Пусть $\nu_j \neq 1$ и $2|k_j$. Определим

$$\nu_i{}' = \begin{cases} \nu_i & \text{при } i \neq j, \\ \nu_i - 1 & \text{при } i = j, \end{cases} \quad k_i{}' = \begin{cases} k_i & \text{при } i \neq j, \\ k_i 2^{-1} & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Тогда $\nu_i{}' \geqslant 1$, $0 \leqslant k_i{}' \leqslant 2^{\nu_i{}'} - 1$ $(i = 1, 2)$ и $\nu_1{}' + \nu_2{}' = q - 1$, $(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}) = (\frac{k_1{}'}{2^{\nu_1{}'}}, \frac{k_2{}'}{2^{\nu_2{}'}})$, следовательно $(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}})$ — неканоническое представление.

б) Рассмотрим два случая.

1) Пусть $2|k_i$, тогда по условию $\nu_i = 1$, следовательно $\nu_i^{(0)} \geqslant \nu_i$.

2) Пусть $2 \not| k_j$ $(j = 1, 2)$, тогда $(k_j, 2^{\nu_i}) = 1$ и из $\frac{k_j}{2^{\nu_j}} = \frac{k_j^{(0)}}{2^{\nu_j^{(0)}}}$ следует $\nu_j^{(0)} \geqslant \nu_j$.

Итак, $\nu_i^{(0)} \geqslant \nu_i$ $(i = 1, 2)$. Отсюда следует $\mu_1^{(0)} \geqslant \mu_1(\nu_1, \nu_2)$ и $\mu_2^{(0)} \geqslant \mu_2(\nu_1)$. Из определения $\mu_i^{(0)}$ имеем $\mu_1^{(0)} = \mu_1(\nu_1, \nu_2)$ и $\mu_2^{(0)} = \mu_2(\nu_1)$, то есть $(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}})$ — каноническое представление.

Из разобранных случаев видно, что в первом случае или

$$\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right) \in M^*(0) \times M^*(q-1), \quad k_1 = 0,\, \nu_1 = 1,\, (k_2, 2) = 1,\, \nu_2 = q - 1,$$

или

$$\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right) \in M^*(q-1) \times M^*(0), \quad (k_1, 2) = 1,\, \nu_1 = q - 1,\, k_2 = 0,\, \nu_2 = 1;$$

во втором случае

$$\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right) \in \bigcup_{\substack{\mu_1+\mu_2=q,\\ \mu_1,\mu_2\geqslant 1}} M^*(\mu_1, \mu_2), \quad (k_1, 2) = 1,\, \nu_1 \geqslant 1,\, (k_2, 2) = 1,\, \nu_2 \geqslant 1,\, \nu_1 + \nu_2 = q,$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Лемма 6. *Пусть $\nu_j \geqslant 1$, $0 \leqslant k_j \leqslant 2^{\nu_j} - 1$ $(j = 1, 2)$ и $\nu_1 + \nu_2 = q - 1$.*

а) Если $\nu_1 \neq 1$ и $2|k_1$, то $(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}})$ — неканоническое представление.

б) Если из $2|k_1$ следует $\nu_1 = 1$, тогда $(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}})$ — каноническое представление, то есть любая точка $(x_1, x_2) = (\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}})$ из объединения

$$\left(\bigcup_{\substack{\nu_1+\nu_2=q-1,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}} (M^*(\nu_1) \times M(\nu_2))\right) \bigcup (M^*(0) \times M(q-2))$$

задана каноническим представлением.

Доказательство. а) Пусть $\nu_1 \neq 1$ и $2|k_1$. Определим

$$\nu_i{}' = \begin{cases} \nu_1 - 1 & \text{при } i = 1, \\ \nu_2 + 1 & \text{при } i = 2, \end{cases} \qquad k_i{}' = \begin{cases} k_1 2^{-1} & \text{при } i = 1, \\ k_2 2 & \text{при } i = 2. \end{cases}$$

тогда $\nu_i{}' \geqslant 1$, $0 \leqslant k_i{}' \leqslant 2^{\nu_i{}'} - 1$ $(i = 1, 2)$ и $\nu_1{}' + \nu_2{}' = q - 1$, но так как

$$\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right) = \left(\frac{k_1{}'}{2^{\nu_1{}'}}, \frac{k_2{}'}{2^{\nu_2{}'}}\right)$$

и

$$\mu_1(\nu_1{}', \nu_2{}') = \mu_1(\nu_1, \nu_2), \quad \mu_2(\nu_1{}') = \mu_2(\nu_1) - 1,$$

то $(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}})$ — неканоническое представление.

б) Рассмотрим два случая.

1) Пусть $2|k_1$, тогда по условию $\nu_1 = 1$ и, следовательно, $\nu_1^{(0)} \geqslant \nu_1$.

2) Пусть $2 \not| k_1$ $(j = 1, 2)$, тогда $(2^{\nu_1}, k_1) = 1$ и из $\frac{k_1}{2^{\nu_1}} = \frac{k_1^{(0)}}{2^{\nu_1^{(0)}}}$, следует $\nu_1^{(0)} \geqslant \nu_1$.

Так как $\mu_1 = \mu_1^{(0)} = q - 1$ и $\mu_2(\nu_1) \leqslant \mu_2^{(0)}$, то из определения $\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}$ следует, что $(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}})$ — каноническое представление.

Из разобранных случаев видно, что в первом случае

$$\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right) \in M^*(0) \times M(q-2), \quad k_1 = 0,\ \nu_1 = 1,\ 0 \leqslant k_2 \leqslant 2^{q-2} - 1,\ \nu_2 = q - 2,$$

а во втором случае

$$\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right) \in \bigcup_{\substack{\mu_1+\mu_2=q-1, \\ \mu_1,\mu_2\geqslant 1}} M^*(\mu_1) \times M(\mu_2), \quad \begin{cases} (k_1, 2) = 1, & \nu_1 \geqslant 1, \\ 0 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2} - 1, & \nu_2 \geqslant 1, \end{cases} \quad \nu_1 + \nu_2 = q - 1,$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Доказательство. (Теоремы 14, второй вариант.) Из лемм 5 и 6 следует, что имеет место следующие представление сетки Смоляка на попарно непересекающиеся подсетки

$$\begin{gathered} Sm(q) = (M^*(0) \times M(q-2)) \bigcup \left(\bigcup_{\substack{\nu_1+\nu_2=q, \\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}} M^*(\nu_1, \nu_2) \right) \bigcup \\ \bigcup (M^*(0) \times M^*(q-1)) \bigcup (M^*(q-1) \times M^*(0)) \bigcup \\ \bigcup \left(\bigcup_{\substack{\mu_1+\mu_2=q-1, \\ \mu_1,\mu_2\geqslant 1}} M^*(\mu_1) \times M(\mu_2) \right). \end{gathered} \tag{2.12}$$

Переходя от разбиения к подсчету количества точек, получим

$$N_q^{(2)} = 2^{q-2} + \sum_{\substack{\nu_1+\nu_2=q \\ \nu_j \geqslant 1 (j=1,2)}} \varphi(2^{\nu_1})\varphi(2^{\nu_2}) + 2\varphi(2^{q-1}) + \sum_{\nu=1}^{q-2} 2^{\nu} \sum_{\nu_1=q-1-\nu} \varphi(2^{\nu_1}) =$$

$$= 2^{q-2} + 2^{q-2}(q-1) + 2 \cdot 2^{q-2} + \sum_{\nu=1}^{q-2} 2^{\nu} 2^{q-2-\nu} =$$

$$= 2^{q-2}(q+2) + \sum_{\nu=1}^{q-2} 2^{q-2} = 2^{q-1} q \tag{2.13}$$

и утверждение теоремы снова полностью доказано. □

Глава 3

Двумерные квадратурные и интерполяционные формулы Смоляка

Оценки отклонения будут сделаны для двумерной сетки квадратурной и интерполяционной формул, построенных методом С. А. Смоляка. Эти формулы строятся для класса функций E_2^α, который определяется следующим образом:

Определение 6. *Пусть $\alpha > 1$ и $f(x_1, x_2)$ — непрерывная, периодическая с периодом 1 по каждой переменной, определенная на единичном квадрате комплекснозначная функция, разлагающаяся в ряд Фурье*

$$f(x_1, x_2) = \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{+\infty} C(m_1, m_2) e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)}.$$

Функция $f(x_1, x_2) \in E_2^\alpha$ тогда и только тогда, когда для ее коэффициентов Фурье

$$C(m_1, m_2) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x_1, x_2) e^{-2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2$$

справедлива оценка:

$$||f(x_1, x_2)||_{E_2^\alpha} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^2} |C(m_1, m_2)| (\overline{m_1}\, \overline{m}_2)^\alpha < \infty,$$

где для любого вещественного m полагается $\overline{m} = \max(1, |m|)$.

Величина $||f(\vec{x})||_{E_2^\alpha}$ является нормой, относительно которой класс функций E_2^α — несепарабельное банахово пространство, изоморфное пространству $l_{2,\infty}$ — ограниченных комплекснозначных функций на фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^2$, которое в силу счётности $\mathbb{Z}^2$ изоморфно пространству l_∞ — ограниченных последовательностей комплексных чисел. Действительно, этот изоморфизм нормированных пространств E_2^α и $l_{2,\infty}$ задается равенствами для коэффициентов Фурье

$$C(\vec{m}) = \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m}_1\overline{m}_2)^\alpha},\ \vec{m} \in \mathbb{Z}^2, \quad ||c(\vec{m})||_\infty = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^2} |c(m_1, m_2)| < \infty.$$

Шар радиуса $C > 0$ в E_2^α обычно обозначают через $E_2^\alpha(C)$. Класс функций E_2^α ввел Н. М. Коробов. О свойствах этого класса подробно можно узнать в [16] и [18] (так же см. [9]). В частности, для нормы линейного функционала погрешности $R_N[f]$ произвольной квадратурной формулы

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \sum_{k=1}^N \rho_k f\left(\vec{x}_k\right) - R_N[f] \tag{3.1}$$

с весами $\rho_1, \ldots, \rho_N$ и сеткой $M = \{\vec{x}_k \,|\, k = 1, \ldots, N\}$ справедливо равенство[1]

$$\|R_N[f]\|_{E_2^\alpha} = \sup_{f\in E_2^\alpha(1)} |R_N[f]| = |1 - S(0,0)| + \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S(m_1, m_2)|}{(\overline{m}_1\overline{m}_2)^\alpha}, \tag{3.2}$$

где $S(m_1, m_2)$ — тригонометрическая сумма сетки с весами, заданная равенством

$$S(m_1, m_2) = \sum_{k=1}^N \rho_k e^{2\pi i(m_1x_{1,k}+m_2x_{2,k})}$$

и узлы сетки $\vec{x}_k = (x_{1,k}, x_{2,k})$ $(k = 1, \ldots, N)$.

[1] Здесь $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, m_2) \neq (0, 0)$.

3.1 Тригонометрические суммы и квадратурные формулы сетки Смоляка

Для дальнейшего потребуется символ Коробова

$$\delta_m(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{m}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{m}, \end{cases} \qquad \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{la}{m}} = \delta_m(a).$$

Поведение символа Коробова от ненулевого числа a для модуля m равного степени 2 легко описать с помощью 2-показателя $\nu_2(a)$ числа a, который определяется как наибольший показатель степени двойки на который делится число a. Для $a \neq 0$ справедливо равенство

$$\delta_{2^\nu}(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu \leqslant \nu_2(a), \\ 0, & \text{если } \nu > \nu_2(a). \end{cases}$$

Лемма 7. *Для сетки Смоляка $Sm(q)$ и $S_q(m_1, m_2)$ — её тригонометрической суммы, определенной формулой:*

$$S_q(m_1, m_2) = \sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{2^{q-k}} \sum_{\nu=1}^{q-k-1} \sum_{k_1=0}^{2^\nu-1} \sum_{k_2=0}^{2^{q-k-\nu}-1} e^{2\pi i \left(\frac{m_1 k_1}{2^\nu} + \frac{m_2 k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)},$$

справедливы равенства

$$S_q(0,0) = 1, \qquad S_q(m, 0) = S_q(0, m) = \begin{cases} 1, & \text{если } q-1 \leqslant \nu_2(m), \\ 0, & \text{если } q-1 > \nu_2(m), \end{cases} \tag{3.3}$$

а при $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$

$$S_q(m_1, m_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } \min(\nu_2(m_1), \nu_2(m_2)) \geqslant q-1, \\ 0, & \text{если } \nu_2(m_1) < q-1 \leqslant \nu_2(m_2), \\ 0, & \text{если } \nu_2(m_2) < q-1 \leqslant \nu_2(m_1), \\ -1, & \text{если } \begin{cases} \nu_2(m_1) + \nu_2(m_2) \geqslant q-1, \\ \max(\nu_2(m_1), \nu_2(m_2)) \leqslant q-2, \end{cases} \\ 0, & \text{если } \nu_2(m_1) + \nu_2(m_2) < q-1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Доказательство. Действительно,

$$S_q(m_1,m_2)=\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{2^{q-k}}\sum_{\nu=1}^{q-k-1}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-k-\nu}-1}e^{2\pi i\left(\frac{m_1k_1}{2^\nu}+\frac{m_2k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\sum_{\nu=1}^{q-k-1}\left(\frac{1}{2^\nu}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}e^{2\pi i\left(\frac{m_1k_1}{2^\nu}\right)}\right)\left(\frac{1}{2^{q-k-\nu}}\sum_{k_2=0}^{2^{q-k-\nu}-1}e^{2\pi i\left(\frac{m_2k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)}\right).$$

Суммируя по k_1, k_2, получим

$$S_q(m_1,m_2)=\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\sum_{\nu=1}^{q-k-1}\delta_{2^\nu}(m_1)\delta_{2^{q-k-\nu}}(m_2).$$

При $m_1=m_2=0$ имеем:

$$S_q(0,0)=\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\sum_{\nu=1}^{q-k-1}1=(q-1)-(q-2)=1$$

и этот случай доказан.

Аналогично, при $m_1=m$, $m_2=0$ или $m_1=0$, $m_2=m$ имеем:

$$S_q(m_1,0)=S_q(0,m_2)=\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\sum_{\nu=1}^{q-k-1}\delta_{2^\nu}(m)=\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\sum_{\nu=1}^{\min(\nu_2(m),q-k-1)}1=$$

$$=\min(\nu_2(m),q-1)-\min(\nu_2(m),q-2)=\begin{cases}1, & \text{если } q-1\leqslant\nu_2(m),\\ 0, & \text{если } q-1>\nu_2(m).\end{cases}$$

Перейдем к рассмотрению общего случая $m_1\neq0$, $m_2\neq0$.

$$S_q(m_1,m_2)=\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\sum_{\nu=1}^{q-k-1}\delta_{2^\nu}(m_1)\delta_{2^{q-k-\nu}}(m_2)=$$

$$=\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\sum_{\nu=\max(1,q-k-\nu_2(m_2))}^{\min(\nu_2(m_1),q-k-1)}1.$$

Внутренняя сумма по ν отлична от нуля только, если верхний предел суммирования не меньше нижнего.

Поэтому

$$\sum_{\nu=\max(1,q-k-\nu_2(m_2))}^{\min(\nu_2(m_1),q-k-1)} 1 =$$

$$= \begin{cases} q-k-1, & \text{если } \min(\nu_2(m_1),\nu_2(m_2)) \geqslant q-k-1, \\ \nu_2(m_1), & \text{если } \nu_2(m_1) < q-k-1 \leqslant \nu_2(m_2), \\ \nu_2(m_2), & \text{если } \nu_2(m_2) < q-k-1 \leqslant \nu_2(m_1), \\ \nu_2(m_1)+\nu_2(m_2)-q+k+1, & \text{если } \begin{cases} \nu_2(m_1)+\nu_2(m_2) \geqslant q-k, \\ \max(\nu_2(m_1),\nu_2(m_2)) < q-k-1, \end{cases} \\ 0, & \text{если } \begin{cases} \nu_2(m_1)+\nu_2(m_2) < q-k, \\ \max(\nu_2(m_1),\nu_2(m_2)) < q-k-1 \end{cases} \end{cases} .$$

Отсюда следует, что

$$S_q(m_1,m_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } \min(\nu_2(m_1),\nu_2(m_2)) \geqslant q-1, \\ 0, & \text{если } \nu_2(m_1) < q-1 \leqslant \nu_2(m_2), \\ 0, & \text{если } \nu_2(m_2) < q-1 \leqslant \nu_2(m_1), \\ -1, & \text{если } \begin{cases} \nu_2(m_1)+\nu_2(m_2) \geqslant q-1, \\ \max(\nu_2(m_1),\nu_2(m_2)) \leqslant q-2, \end{cases} \\ 0, & \text{если } \nu_2(m_1)+\nu_2(m_2) < q-1. \end{cases}$$

И лемма полностью доказана. □

Нетрудно видеть, что веса $\rho(\vec{x})$ для сетки Смоляка $Sm(q)$ имеют вид:

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^q} & \text{при } \vec{x} = \left(\dfrac{k_1}{2^\nu}, \dfrac{k_2}{2^{q-\nu}}\right), \\ -\dfrac{1}{2^{q-1}}, & \text{при } \vec{x} = \left(\dfrac{k_1}{2^\nu}, \dfrac{k_2}{2^{q-1-\nu}}\right). \end{cases}$$

Доказанная лемма о значении тригонометрической суммы сетки Смоляка позволяет сразу вычислить первый, второй и третий гиперболические параметры двумерной сетки Смоляка.

Теорема 15. *Для гиперболических параметров двумерной сетки Смоляка* *выполняются равенства:*

$$q_3(Sm(q),\rho(\vec{x}))=\infty,$$
$$q_1(Sm(q),\rho(\vec{x}))=q_2(Sm(q),\rho(\vec{x}))=q(Sm(q),\rho(\vec{x}))=2^{q-1}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Действительно, из леммы 7 вытекает, что $K_3=\varnothing$, поэтому $q_3(Sm(q),\rho(\vec{x}))=\infty$.

Из формулы (3.4) вытекает, что

$$\min_{S(m_1,m_2)=1}\overline{m_1m_2}=2^{q-1}.$$

Аналогично

$$\min_{S(m_1,m_2)=-1}\overline{m_1m_2}=2^{q-1}.$$

Поэтому

$$q_1(Sm(q),\rho(\vec{x}))=q_2(Sm(q),\rho(\vec{x}))=q(Sm(q),\rho(\vec{x}))=2^{q-1}$$

и теорема полностью доказана. □

Двумерные квадратурные формулы Смоляка описываются теоремой 16, формулировка и доказательство которой оказываются гораздо проще чем в общем s-мерном случае.

Теорема 16. *Пусть $f(x_1,x_2)\in E_2^\alpha(C)$, $q\geqslant 3$, тогда для погрешности квадратурной формулы*

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_1,x_2)dx_1dx_2=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-\nu}-1} f\left(\frac{k_1}{2^\nu},\frac{k_2}{2^{q-\nu}}\right)-$$
$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-1-\nu}-1} f\left(\frac{k_1}{2^\nu},\frac{k_2}{2^{q-1-\nu}}\right)-R_{N^{(1)}(q)}[f] \tag{3.6}$$

справедлива оценка

$$\left\|R_{N^{(1)}(q)}[f]\right\|_{E_2^\alpha}\leqslant\frac{4\zeta(\alpha)^2 2^\alpha q}{2^{q\alpha}}=O\left(\frac{\ln^{\alpha+1}N^{(1)}(q)}{(N^{(1)}(q))^\alpha}\right),$$

где $N^{(1)}(q)$ — количество точек сетки Смоляка с учетом их кратности.

Доказательство. Из (3.2) и (3.3) следует, что

$$\left\|R_{N^{(1)}(q)}[f]\right\|_{E_2^\alpha} = \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_q(m_1,m_2)|}{(\overline{m}_1\overline{m}_2)^\alpha}.$$

Применим лемму 7, получим

$$\left\|R_{N^{(1)}(q)}[f]\right\|_{E_2^\alpha} = 4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2^{q-1}m)^\alpha} + 4\sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\frac{1}{(2^{q-1}m_1 2^{q-1}m_2)^\alpha} +$$
$$+4\sum_{\nu=1}^{q-2}\sum_{\mu=q-1-\nu}^{q-2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{1}{(2^\nu(2m_1+1)2^\mu(2m_2+1))^\alpha} = \frac{4\cdot 2^\alpha\zeta(\alpha)}{2^{q\alpha}} + \frac{4\cdot 4^\alpha\zeta(\alpha)^2}{4^{q\alpha}} +$$
$$+4\sum_{\nu=1}^{q-2}\sum_{\mu=q-1-\nu}^{q-2}\frac{1}{2^{(\nu+\mu)\alpha}}\frac{(\zeta(\alpha)(2^\alpha-1))^2}{4^\alpha} = \frac{4\cdot 2^\alpha\zeta(\alpha)}{2^{q\alpha}}\left(1+\frac{2^\alpha\zeta(\alpha)}{2^{q\alpha}}\right) +$$
$$+\frac{4\zeta(\alpha)^2(2^\alpha-1)}{4^\alpha}\sum_{\nu=1}^{q-2}\left(\frac{4^\alpha}{2^{q\alpha}} - \frac{4^\alpha}{2^{q\alpha}2^{\nu\alpha}}\right) = \frac{4\cdot 2^\alpha\zeta(\alpha)}{2^{q\alpha}}\left(1+\frac{2^\alpha\zeta(\alpha)}{2^{q\alpha}}\right) +$$
$$+\frac{4\zeta(\alpha)^2}{2^{q\alpha}}\left((2^\alpha-1)(q-2) - 1 + \frac{1}{2^{(q-2)\alpha}}\right) =$$
$$= \frac{4\zeta(\alpha)}{2^{q\alpha}}\left(2^\alpha + \frac{2\cdot 4^\alpha\zeta(\alpha)}{2^{q\alpha}} + \zeta(\alpha)(2^\alpha-1)q - \zeta(\alpha)(2^{\alpha+1}-1)\right) <$$
$$< \frac{4\zeta(\alpha)^2 2^\alpha q}{2^{q\alpha}} = O\left(\frac{\ln^{\alpha+1} N^{(1)}(q)}{(N^{(1)}(q))^\alpha}\right).$$

Теорема доказана. □

Заметим, что по теореме И. Ф. Шарыгина наилучший возможный порядок погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле с N узлами равен $O\left(\frac{\ln N}{N^\alpha}\right)$ и он достижим на классе параллелепипедальных сеток, например, построенных с помощью чисел Фиббоначи.

Следующая теорема позволяет записать квадратурную формулу с сеткой Смоляка без повторения узлов.

Теорема 17. *Пусть $f(x_1,x_2) \in E_2^\alpha(C)$, $q \geqslant 3$, тогда для погрешности* *квадратурной формулы*

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \frac{1}{2^q}\left(\sum_{\nu=1}^{q-1}\sigma(\nu,q-\nu)+\sigma(q-1,0)+\sigma(0,q-1)-\right.$$

$$\left.-(q-3)\sigma(0,0)-\sum_{\nu=1}^{q-3}(q-2-\nu)(\sigma(\nu,0)+\sigma(0,\nu))-\sum_{\substack{\nu,\mu=1,\\ \nu+\mu\leqslant q-2}}^{q-3}(q-1-\nu-\mu)\sigma(\nu,\mu)\right)-$$

$$-R_{N(q)}[f], \tag{3.7}$$

где

$$\sigma(\nu,\mu)=\sum_{\vec{x}\in M^*(\nu,\mu)} f(\vec{x}) =$$

$$=\begin{cases} \sum\limits_{k_1=0}^{2^{\nu-1}-1}\sum\limits_{k_2=0}^{2^{\mu-1}-1} f\left(\frac{2k_1+1}{2^\nu},\frac{2k_2+1}{2^\mu}\right) & \text{при } \nu,\mu>0,\\ \sum\limits_{k_1=0}^{2^{\nu-1}-1} f\left(\frac{2k_1+1}{2^\nu},0\right) & \text{при } \nu>0,\mu=0,\\ \sum\limits_{k_2=0}^{2^{\mu-1}-1} f\left(0,\frac{2k_2+1}{2^\mu}\right) & \text{при } \nu=0,\mu>0,\\ f(0,0) & \text{при } \nu=\mu=0, \end{cases} \tag{3.8}$$

справедлива оценка

$$\left\|R_{N(q)}[f]\right\|_{E_2^\alpha}\leqslant\frac{4\zeta(\alpha)^2 2^\alpha q}{2^{q\alpha}}=O\left(\frac{\ln^{\alpha+1}N(q)}{N^\alpha(q)}\right),$$

где $N(q)$ — количество узлов в квадратурной формуле (3.7).

Доказательство. Положим

$$\Sigma(q)=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-\nu}-1} f\left(\frac{k_1}{2^\nu},\frac{k_2}{2^{q-\nu}}\right)-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-1-\nu}-1} f\left(\frac{k_1}{2^\nu},\frac{k_2}{2^{q-1-\nu}}\right).$$

Применим представление (2.9) в лемме 3, получим

$$\Sigma(q) = \frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{\substack{0\leqslant\mu_1\leqslant\nu,\\ 0\leqslant\mu_2\leqslant q-\nu}}\sum_{(x_1,x_2)\in M^*(\mu_1,\mu_2)} f(x_1,x_2)-$$

$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}\sum_{\substack{0\leqslant\mu_1\leqslant\nu,\\ 0\leqslant\mu_2\leqslant q-1-\nu}}\sum_{(x_1,x_2)\in M^*(\mu_1,\mu_2)} f(x_1,x_2) =$$

$$= \frac{1}{2^q}\sum_{\substack{0\leqslant\mu_1,\mu_2\leqslant q-1,\\ 0\leqslant\mu_1+\mu_2\leqslant q}}\sum_{\nu=\max(\mu_1,1)}^{\min(q-1,q-\mu_2)}\sigma(\mu_1,\mu_2) - \frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\substack{0\leqslant\mu_1,\mu_2\leqslant q-2,\\ 0\leqslant\mu_1+\mu_2\leqslant q-1}}\sum_{\nu=\max(1,\mu_1)}^{\min(q-2,q-1-\mu_2)}\sigma(\mu_1,\mu_2) =$$

$$= \frac{1}{2^q}\Bigg(\sigma(0,0)(q-1-2(q-2)) + \sum_{\nu=1}^{q-1}(\sigma(\nu,0)+\sigma(0,\nu))(q-\nu-2(q-1-\nu))+$$

$$+\sum_{\substack{1\leqslant\mu_1,\mu_2\leqslant q-1,\\ 2\leqslant\mu_1+\mu_2\leqslant q}}\sigma(\mu_1,\mu_2)(q+1-\mu_1-\mu_2) - 2\sum_{\substack{1\leqslant\mu_1,\mu_2\leqslant q-2,\\ 2\leqslant\mu_1+\mu_2\leqslant q-1}}\sigma(\mu_1,\mu_2)(q-\mu_1-\mu_2)\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2^q}\Bigg(-\sigma(0,0)(q-3) - \sum_{\nu=1}^{q-1}(\sigma(\nu,0)+\sigma(0,\nu))(q-\nu-2) + \sum_{\nu=1}^{q-1}\sigma(\nu,q-\nu)-$$

$$-\sum_{\substack{1\leqslant\mu_1,\mu_2\leqslant q-2,\\ 2\leqslant\mu_1+\mu_2\leqslant q-1}}\sigma(\mu_1,\mu_2)(2(q-\mu_1-\mu_2)-(q+1-\mu_1-\mu_2))\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2^q}\Bigg(-\sigma(0,0)(q-3) - \sum_{\nu=1}^{q-3}(\sigma(\nu,0)+\sigma(0,\nu))(q-\nu-2)+\sigma(q-1,0)+$$

$$+\sigma(0,q-1) + \sum_{\nu=1}^{q-1}\sigma(\nu,q-\nu) - \sum_{\substack{1\leqslant\mu_1,\mu_2\leqslant q-3,\\ 2\leqslant\mu_1+\mu_2\leqslant q-2}}\sigma(\mu_1,\mu_2)(q-\mu_1-\mu_2-1)\Bigg)$$

.

и тем самым теорема доказана. □

Теорема 18. *Если $N(q)$ — число узлов квадратурной формулы (3.7), то при $q \geqslant 3$ выполняются соотношения:*

$$N(q) = 3q2^{q-3} = \frac{3}{4}N_q^{(2)}.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$N(q) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{q-3} 2^{\nu-1} + 2^{q-2} + 2^{q-2} + \sum_{\nu=1}^{q-1} 2^{q-2} + \sum_{\substack{1\leqslant\mu_1,\mu_2\leqslant q-3,\\ 2\leqslant\mu_1+\mu_2\leqslant q-2}} 2^{\mu_1+\mu_2-2} =$$

$$= 2\cdot 2^{q-3} - 1 + (q+1)2^{q-2} + \sum_{\nu=1}^{q-3} 2^{\nu-1}\left(\sum_{\mu=1}^{q-2-\nu} 2^{\mu-1}\right) =$$

$$= (2q+4)2^{q-3} - 1 + \sum_{\nu=1}^{q-3} 2^{\nu-1}\left(2^{q-2-\nu} - 1\right) =$$

$$= (2q+4)2^{q-3} - 1 + (q-3)2^{q-3} - (2^{q-3} - 1) = 3q2^{q-3} = \frac{3}{4}q2^{q-1} = \frac{3}{4}N_q^{(2)}$$

и теорема полностью доказана. □

3.2 Тригонометрические полиномы и интерполяционные формулы сетки Смоляка

Двумерные интерполяционные формулы Смоляка описываются теоремой 19, формулировка и доказательство которой оказываются гораздо проще чем в общем s-мерном случае.

Введем следующие обозначения. Пусть $\nu(0) = 0$, при $m \neq 0$ натуральное $\nu(m)$ определяется из условий: $2^{\nu(m)-1} \leqslant |m| < 2^{\nu(m)}$, а целое $l(m,\nu)$ — соотношениями $l(m,\nu) \equiv m \pmod{2^\nu}$ и $-2^{\nu-1} \leqslant l(m,\nu) \leqslant 2^{\nu-1} - 1$, тогда при $\nu > \nu(m)$ справедливо равенство $l(m,\nu) = m$.

Лемма 8. *Для любого $\nu > 0$, $\mu > 0$ и произвольного целого k справедливо сравнение*

$$l(m + k2^\mu, \nu) \equiv l(m,\nu) \pmod{2^\mu}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Пусть $\nu \leqslant \mu$, тогда $m + k2^\mu \equiv m \pmod{2^\nu}$ и, следовательно, $l(m + k2^\mu, \nu) = l(m,\nu)$, и, значит, утверждение леммы в этом случае выполнено.

Пусть $\nu > \mu$, тогда из сравнений

$$l(m + k2^\mu, \nu) \equiv m + k2^\mu \pmod{2^\nu}, \quad l(m,\nu) \equiv m \pmod{2^\nu}$$

следуют сравнения

$$l(m+k2^\mu,\nu)\equiv m+k2^\mu\equiv m\equiv l(m,\nu)\pmod{2^\mu}$$

и утверждение леммы полностью доказано. $\square$

Лемма 9. *Для сетки Смоляка $Sm(q,2)$ и $S^*_{q,m_1,m_2}(x_1,x_2)$ — её тригонометрического полинома, определенного формулой:*

$$S^*_{q,m_1,m_2}(x_1,x_2)=\Bigg(-e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}+\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{2^{q-k}}\sum_{\nu=1}^{q-k-1}1\times$$
$$\times\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-k-\nu}-1}e^{2\pi i\left(\frac{m_1k_1}{2^\nu}+\frac{m_2k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)}\sum_{l_1=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1}\sum_{l_2=-2^{q-k-\nu-1}}^{2^{q-k-\nu-1}-1}e^{2\pi i\left(l_1\left(x_1-\frac{k_1}{2^\nu}\right)+l_2\left(x_2-\frac{k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)\right)}\Bigg),\tag{3.10}$$

справедливы равенства

$$S^*_{q,m_1,m_2}(x_1,x_2)=-e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}+\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\sum_{\nu=1}^{q-k-1}e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+l(m_2,q-k-\nu)x_2)},\tag{3.11}$$

$$S^*_{q,m_1+l_12^{q-1},m_2+l_22^{q-1}}(x_1,x_2)=S^*_{q,m_1,m_2}(x_1,x_2)+$$
$$+e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}-e^{2\pi i\left(\left(m_1+l_12^{q-1}\right)x_1+\left(m_2+l_22^{q-1}\right)x_2\right)}.\tag{3.12}$$

Доказательство. Действительно, суммируя в (3.10) по k_1,k_2, получим

$$S^*_{q,m_1,m_2}(x_1,x_2)=-e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}+$$
$$+\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\sum_{\nu=1}^{q-k-1}\sum_{l_1=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1}\sum_{l_2=-2^{q-k-\nu-1}}^{2^{q-k-\nu-1}-1}e^{2\pi i(l_1x_1+l_2x_2)}\delta_{2^\nu}(m_1-l_1)\delta_{2^{q-k-\nu}}(m_2-l_2)=$$
$$=-e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}+\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\sum_{\nu=1}^{q-k-1}e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+l(m_2,q-k-\nu)x_2)},\tag{3.13}$$

так как $\delta_{2^\nu}(m_1-l_1)\delta_{2^{q-k-\nu}}(m_2-l_2)=1$ только при $l_1=l(m_1,\nu)$, $l_2=l(m_2,q-k-\nu)$ и 0 в остальных случаях, и равенство (3.11) доказано.

Равенство (3.12) становится очевидным, если учесть соотношения

$$l\left(m_1+l_12^{q-1},\nu\right)=l(m_1,\nu),\quad l\left(m_2+l_22^{q-1},q-k-\nu\right)=l(m_2,q-k-\nu)$$

при $k = 0, 1$ и $\nu = 0, \ldots, q-k-1$.

Лемма полностью доказана. $\square$

Лемма 10. *При $\overline{m}_1\,\overline{m}_2 \leqslant 2^{q-3}$ выполняется равенство*

$$S^*_{q,m_1,m_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} 4\sin\left(2\pi 2^{\alpha}x_1\right)\sin\left(2\pi 2^{q-3-\alpha}x_2\right) & \text{при } m_1 = 2^{\alpha}, m_2 = 2^{q-3-\alpha}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.14}$$

Доказательство. Действительно, случай $m_1 = m_2 = 0$ тривиальный, так как

$$S^*_{q,0,0}(x_1,x_2) = -1 + \sum_{k=0}^{1}(-1)^k \sum_{\nu=1}^{q-k-1} 1 = 0. \tag{3.15}$$

Поэтому сначала рассмотрим случай $m_2 = 0$, $0 < |m_1| \leqslant 2^{q-3}$. В этом случае $\nu(m_1) \leqslant q-2$ и $l(m_1, q-1) = m_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S^*_{q,m_1,0}(x_1,x_2) &= -e^{2\pi i m_1 x_1} + \sum_{k=0}^{1}(-1)^k \sum_{\nu=1}^{q-k-1} e^{2\pi i l(m_1,\nu)x_1} = \\ &= -e^{2\pi i m_1 x_1} + e^{2\pi i m_1 x_1} + \sum_{k=0}^{1}(-1)^k \sum_{\nu=1}^{q-2} e^{2\pi i l(m_1,\nu)x_1} = 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

и равенство (3.14) в этом случае установлено.

Аналогично рассмотрим случай $m_1 = 0$, $0 < |m_2| \leqslant 2^{q-3}$. В этом случае $\nu(m_2) \leqslant q-2$ и $l(m_2, q-1) = m_2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S^*_{q,0,m_2}(x_1,x_2) &= -e^{2\pi i m_2 x_2} + \sum_{k=0}^{1}(-1)^k \sum_{\nu=1}^{q-k-1} e^{2\pi i l(m_2,q-k-\nu)x_2} = \\ &= -e^{2\pi i m_2 x_2} + e^{2\pi i m_2 x_2} + \sum_{k=0}^{1}(-1)^k \sum_{\nu=1}^{q-2} e^{2\pi i l(m_2,\nu)x_2} = 0, \end{aligned} \tag{3.17}$$

и в этом случае равенство (3.14) также установлено.

Далее рассмотрим случай $|m_1||m_2| = 2^{q-3}$. Так как m_1 и m_2 — целые, то для некоторого целого α с $0 \leqslant \alpha \leqslant q-3$ имеем: $|m_1| = 2^{\alpha}$, $|m_2| = 2^{q-3-\alpha}$,

$\nu(m_1) = \alpha + 1$ и $\nu(m_2) = q - 2 - \alpha$. Отсюда следует, что

$$l\left(m_1, \nu\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \leqslant \alpha, \\ -m_1 & \text{при } \nu = \alpha+1, m_1 = 2^{\alpha}, \\ m_1 & \text{при } \nu = \alpha+1, m_1 = -2^{\alpha}, \\ m_1 & \text{при } \nu > \alpha+1, \end{cases}$$

$$l\left(m_2, q-k-\nu\right) = \begin{cases} m_2 & \text{при } \nu \leqslant \alpha+1-k, \\ -m_2 & \text{при } \nu = \alpha+2-k, m_2 = 2^{q-3-\alpha}, \\ m_2 & \text{при } \nu = \alpha+2-k, m_2 = -2^{q-3-\alpha}, \\ 0 & \text{при } \nu > \alpha+2-k, \end{cases} \tag{3.18}$$

и

$$S^*_{q,m_1,m_2}(x_1, x_2) = -e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)} + \sum_{\nu=1}^{q-1} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+l(m_2,q-\nu)x_2)} -$$

$$-\sum_{\nu=1}^{q-2} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+l(m_2,q-1-\nu)x_2)} = -e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)} + \alpha e^{2\pi i(m_2x_2)} +$$

$$+e^{2\pi i(l(m_1,\alpha+1)x_1+m_2x_2)} + e^{2\pi i(m_1x_1+l(m_2,q-2-\alpha)x_2)} + (q-3-\alpha)e^{2\pi i(m_1x_1)} -$$

$$-\alpha e^{2\pi i(m_2x_2)} - e^{2\pi i(l(m_1,\alpha+1)x_1+l(m_2,q-2-\alpha)x_2)} - (q-3-\alpha)e^{2\pi i(m_1x_1)} =$$

$$= -e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)} + e^{2\pi i(l(m_1,\alpha+1)x_1+m_2x_2)} +$$

$$+e^{2\pi i(m_1x_1+l(m_2,q-2-\alpha)x_2)} - e^{2\pi i(l(m_1,\alpha+1)x_1+l(m_2,q-2-\alpha)x_2)} =$$

$$= -\left(e^{2\pi i(m_1x_1)} - e^{2\pi i(l(m_1,\alpha+1)x_1)}\right)\left(e^{2\pi i(m_2x_2)} - e^{2\pi i(l(m_2,q-2-\alpha)x_2)}\right) =$$

$$= \begin{cases} 4\sin\left(2\pi 2^{\alpha}x_1\right)\sin\left(2\pi 2^{q-3-\alpha}x_2\right) & \text{при } m_1 = 2^{\alpha}, m_2 = 2^{q-3-\alpha}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}, \tag{3.19}$$

и этот случай полностью разобран.

Перейдем к рассмотрению общего случая $0 < |m_1||m_2| < 2^{q-3}$. Так как

$$2^{\nu(m_1)+\nu(m_2)-2} \leqslant |m_1||m_2| < 2^{q-3},$$

то $\nu(m_1) + \nu(m_2) < q-1$, и при $\nu > \nu(m_1)$ имеем $l(m_1, \nu) = m_1$, а при $q-k-\nu > \nu(m_2)$ выполняется $l(m_2, q-k-\nu) = m_2$. Отсюда следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{q-1} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+l(m_2,q-\nu)x_2)} = \sum_{\nu=1}^{\nu(m_1)} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+m_2x_2)}+$$
$$+\sum_{\nu=\nu(m_1)+1}^{q-\nu(m_2)-1} e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)} + \sum_{\nu=q-\nu(m_2)}^{q-1} e^{2\pi i(m_1x_1+l(m_2,q-\nu)x_2)} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\nu(m_1)} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+m_2x_2)}+$$
$$+(q-\nu(m_1)-\nu(m_2)-1)e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)} + \sum_{\nu=1}^{\nu(m_2)} e^{2\pi i(m_1x_1+l(m_2,\nu)x_2)}; \qquad (3.20)$$
$$\sum_{\nu=1}^{q-2} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+l(m_2,q-1-\nu)x_2)} = \sum_{\nu=1}^{\nu(m_1)} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+m_2x_2)}+$$
$$+\sum_{\nu=\nu(m_1)+1}^{q-\nu(m_2)-2} e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}+ \sum_{\nu=q-1-\nu(m_2)}^{q-2} e^{2\pi i(m_1x_1+l(m_2,q-1-\nu)x_2)}=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{\nu(m_1)} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+m_2x_2)}+$$
$$+(q-\nu(m_1)-\nu(m_2)-2)e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)} + \sum_{\nu=1}^{\nu(m_2)} e^{2\pi i(m_1x_1+l(m_2,\nu)x_2)}. \qquad (3.21)$$

Из равенств (3.20) и (3.21) следует утверждение леммы в общем случае, и лемма полностью доказана. □

Таким образом, из доказанной леммы видно, что для гиперболического креста $K_2(t) = \{(x,y)\,|\,\overline{x}\cdot\overline{y} \leqslant t\}$ при параметре $t = 2^{q-3}$ имеется ровно $q-2$ целых точек (m_1, m_2), для которых тригонометрический полином $S^*_{q,m_1,m_2}(x_1,x_2)$ не равен тождественно нулю. А именно, это справедливо только для точек вида $(m_1,m_2) = (2^\alpha, 2^{q-3-\alpha})$, где $\alpha = 0, 1, \ldots, q-3$.

Перепишем равенство (3.11) в виде

$$S^*_{q,m_1,m_2}(x_1,x_2) = \sum_{\nu=1}^{q-2} e^{2\pi il(m_1,\nu)x_1}\left(e^{2\pi il(m_2,q-\nu)x_2} - e^{2\pi il(m_2,q-1-\nu)x_2}\right) +$$
$$+\left(e^{2\pi i(l(m_1,q-1)x_1+l(m_2,1)x_2)} - e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}\right), \qquad (3.22)$$

из которого сразу следует оценка

$$\left|S^*_{q,m_1,m_2}(x_1,x_2)\right| \leqslant \begin{cases} 2(q-1) & \text{при } m_1m_2 \neq 0; \\ 2 & \text{при } m_1m_2 = 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

В работе [4] была доказана лемма

Лемма 11. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{m_1\cdot m_2>t} \frac{1}{(m_1\cdot m_2)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(\frac{\ln t+\alpha+\zeta(\alpha)}{\alpha-1}\right). \tag{3.24}$$

Теорема 19. *Пусть $f(x_1,x_2)\in E_2^\alpha(C)$, $q\geqslant 3$, тогда для погрешности интерполяционной формулы*

$$f(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{2^{q-k}}\sum_{\nu=1}^{q-k-1}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-k-\nu}-1} f\left(\frac{k_1}{2^\nu},\frac{k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)\times$$

$$\times\sum_{l_1=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1}\sum_{l_2=-2^{q-k-\nu-1}}^{2^{q-k-\nu-1}-1} e^{2\pi i\left(l_1\left(x_1-\frac{k_1}{2^\nu}\right)+l_2\left(x_2-\frac{k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)\right)} - R_{N(q)}[f(\vec{x})] \tag{3.25}$$

справедлива оценка

$$|R_{N(q)}[f(\vec{x})]| \leqslant C\cdot C_6(\alpha)\frac{q^2}{2^{(\alpha-1)q}},$$

где $N(q)$ — количество точек сетки Смоляка, $C_6(\alpha)<8^\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{1+\alpha+\zeta(\alpha)}{\alpha-1}\right)$.

Доказательство. Подставляя в интерполяционную формулу вместо функции $f(\vec{x})$ её ряд Фурье, получим

$$R_{N(q)}[f(\vec{x})]=\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{+\infty}C(m_1,m_2)\left(-e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}+\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{2^{q-k}}\sum_{\nu=1}^{q-k-1}1\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-k-\nu}-1}e^{2\pi i\left(\frac{m_1k_1}{2^\nu}+\frac{m_2k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)}\sum_{l_1=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1}\sum_{l_2=-2^{q-k-\nu-1}}^{2^{q-k-\nu-1}-1}e^{2\pi i\left(l_1\left(x_1-\frac{k_1}{2^\nu}\right)+l_2\left(x_2-\frac{k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)\right)}\right). \tag{3.26}$$

Используя леммы 9, 10 и переходя к оценке модуля, получим:

$$\left|R_{N(q)}[f(\vec{x})]\right| \leqslant C\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{+\infty}\frac{|S_q^*(m_1,m_2)|}{(\overline{m}_1\cdot\overline{m}_2)^\alpha}=C\sum_{\overline{m}_1\overline{m}_2\geqslant 2^{q-3}}\frac{|S_q^*(m_1,m_2)|}{(\overline{m}_1\cdot\overline{m}_2)^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{4(q-2)}{2^{(q-3)\alpha}}+\sum_{m_1m_2>2^{q-3}}\frac{8(q-1)}{(m_1\cdot m_2)^\alpha}+\sum_{m>2^{q-3}}\frac{8}{m^\alpha}\right) \tag{3.27}$$

Используя лемму 11, получаем

$$\begin{gathered}\left|R_{N(q)}[f(\vec{x})]\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{C}{2^{(q-3)(\alpha-1)}}\left(\frac{4(q-2)}{2^{q-3}}+\frac{8(q-1)\left((q-3)\ln 2+\alpha+\zeta(\alpha)\right)+8}{\alpha-1}\right)= \\ =\frac{C\cdot 8^{\alpha}}{2^{q(\alpha-1)}}\left(\frac{q-2}{2^{q-2}}+\frac{(q-1)\left((q-3)\ln 2+\alpha+\zeta(\alpha)\right)+1}{\alpha-1}\right)= \\ =\frac{C\cdot 8^{\alpha}\cdot(q-2)^2}{2^{q(\alpha-1)}}\left(\frac{1}{2^{q-2}(q-2)}+\frac{1}{\alpha-1}\left(\ln 2+\frac{\alpha+\zeta(\alpha)}{q-2}+\frac{1-\ln 2}{(q-2)^2}\right)\right)\leqslant \\ \leqslant \frac{C\cdot 8^{\alpha}\cdot(q-2)^2}{2^{q(\alpha-1)}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1+\alpha+\zeta(\alpha)}{\alpha-1}\right).\end{gathered} \tag{3.28}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Из доказательства леммы 10 видно, что ещё для одного класса индексов m_1, m_2 можно найти простое явное выражение тригонометрического полинома Смоляка.

Лемма 12. *При $|m_1| = 2^{\alpha}$, $|m_2| = 2^{\beta}$ и $0 \leqslant \alpha, \beta < q-1$ выполняется равенство*

$$S^*_{q,m_1,m_2}(x_1,x_2)=\begin{cases}4\sin\left(2\pi 2^{\alpha}x_1\right)\sin\left(2\pi 2^{q-3-\alpha}x_2\right) & \text{\textit{при} } m_1=2^{\alpha}, m_2=2^{q-3-\alpha},\\ 0 & \text{\textit{в остальных случаях.}}\end{cases} \tag{3.29}$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{gathered} l\left(m_1,\nu\right)=\begin{cases}0 & \text{при } \nu\leqslant\alpha,\\ -m_1 & \text{при } \nu=\alpha+1, m_1=2^{\alpha},\\ m_1 & \text{при } \nu=\alpha+1, m_1=-2^{\alpha},\\ m_1 & \text{при } \alpha+1<\nu\leqslant q-1,\end{cases} \\ l\left(m_2,q-k-\nu\right)=\begin{cases}m_2 & \text{при } \nu\leqslant q-k-\beta-2,\\ -m_2 & \text{при } \nu=q-k-\beta-1, m_2=2^{\beta},\\ m_2 & \text{при } \nu=q-k-\beta-1, m_2=-2^{\beta},\\ 0 & \text{при } q-k-\beta\leqslant\nu\leqslant q-1.\end{cases}\end{gathered} \tag{3.30}$$

Отсюда следует

$$S^*_{q,m_1,m_2}(x_1,x_2) = -e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)} + \sum_{\nu=1}^{q-1} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+l(m_2,q-\nu)x_2)} -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{q-2} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+l(m_2,q-1-\nu)x_2)} = -e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)} + \sum_{\nu=1}^{\alpha} e^{2\pi i l(m_2,q-\nu)x_2} +$$

$$+ e^{2\pi i(l(m_1,\alpha+1)x_1+l(m_2,q-\alpha-1)x_2)} + \sum_{\nu=\alpha+2}^{q-1} e^{2\pi i(m_1x_1+l(m_2,q-\nu)x_2)} -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{\alpha} e^{2\pi i l(m_2,q-1-\nu)x_2} - e^{2\pi i(l(m_1,\alpha+1)x_1+l(m_2,q-2-\alpha)x_2)} -$$

$$- \sum_{\nu=\alpha+2}^{q-2} e^{2\pi i(m_1x_1+l(m_2,q-1-\nu)x_2)} = -e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)} + e^{2\pi i l(m_2,q-1)x_2} +$$

$$+ e^{2\pi i(l(m_1,\alpha+1)x_1+l(m_2,q-\alpha-1)x_2)} + e^{2\pi i(m_1x_1+l(m_2,q-\alpha-2)x_2)} -$$

$$- e^{2\pi i l(m_2,q-1-\alpha)x_2} - e^{2\pi i(l(m_1,\alpha+1)x_1+l(m_2,q-2-\alpha)x_2)} =$$

$$= -\left(e^{2\pi i(m_1x_1)} - e^{2\pi i(l(m_1,\alpha+1)x_1)}\right)\left(e^{2\pi i(m_2x_2)} - e^{2\pi i(l(m_2,q-2-\alpha)x_2)}\right) =$$

$$= \begin{cases} 4\sin\left(2\pi 2^{\alpha}x_1\right)\sin\left(2\pi 2^{q-3-\alpha}x_2\right) & \text{при } m_1 = 2^{\alpha}, m_2 = 2^{q-3-\alpha}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}, \tag{3.31}$$

□

Лемма 13. *При* $2^{q-1}+k2^{2(q-1)} \leqslant \overline{m}_1\,\overline{m}_2 < 2^{2q-4}+k2^{2(q-1)})$ *и* $2^{q-1}+k2^{2(q-1)} \leqslant m_1 \leqslant 2^{2q-4}+k2^{2(q-1)}$ *выполняется*

$$S^*_{q,m_1,m_2}(x_1,x_2) = 0 \tag{3.32}$$

При $2^{q-1}+k2^{2(q-1)} \leqslant \overline{m}_1\,\overline{m}_2 < 2^{2q-4}+k2^{2(q-1)}$ *и* $2^{q-1}+k2^{2(q-1)} \leqslant m_2 \leqslant 2^{2q-4}+k2^{2(q-1)}$ *выполняется*

$$S^*_{q,m_1,m_2}(x_1,x_2) = 0 \tag{3.33}$$

Доказательство. Действительно, аналогично доказательству предыдущей леммы имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{q-1} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+l(m_2,q-\nu)x_2)} = \sum_{\nu=1}^{\nu(m_1)-(q-1)} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+m_2x_2)}+$$

$$+\sum_{\nu=\nu(m_1)+1-(q-1)}^{q-\nu(m_2)-1} e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}+\sum_{\nu=q-\nu(m_2)}^{q-1} e^{2\pi i(m_1x_1+l(m_2,q-\nu)x_2)}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\nu(m_1)-(q-1)} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+m_2x_2)}+$$

$$+(q-(\nu(m_1)-(q-1))-\nu(m_2)-1)e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}+\sum_{\nu=1}^{\nu(m_2)} e^{2\pi i(m_1x_1+l(m_2,\nu)x_2)}; \tag{3.34}$$

$$\sum_{\nu=1}^{q-2} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+l(m_2,q-1-\nu)x_2)} = \sum_{\nu=1}^{\nu(m_1)-(q-1)} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+m_2x_2)}+$$

$$+\sum_{\nu=\nu(m_1)-(q-1)+1}^{q-\nu(m_2)-2} e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}+\sum_{\nu=q-1-\nu(m_2)}^{q-2} e^{2\pi i(m_1x_1+l(m_2,q-1-\nu)x_2)}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\nu(m_1)-(q-1)} e^{2\pi i(l(m_1,\nu)x_1+m_2x_2)}+$$

$$+(q-(\nu(m_1)-(q-1))-\nu(m_2)-2)e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}+\sum_{\nu=1}^{\nu(m_2)} e^{2\pi i(m_1x_1+l(m_2,\nu)x_2)}. \tag{3.35}$$

(3.34) и (3.35) дают доказательство утверждения (3.32).

В силу симметрии утверждений (3.32) и (3.33) относительно m_1 и m_2 утверждение (3.33) верно. □

Пусть интерполяционный полином Смоляка $PS_f(x_1,x_2)$ для функции $f(x_1,x_2)$ задан формулой

$$PS_f(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{2^{q-k}}\sum_{\nu=1}^{q-k-1}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-k-\nu}-1} f\left(\frac{k_1}{2^\nu},\frac{k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)\times$$

$$\times\sum_{l_1=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1}\sum_{l_2=-2^{q-k-\nu-1}}^{2^{q-k-\nu-1}-1} e^{2\pi i\left(l_1\left(x_1-\frac{k_1}{2^\nu}\right)+l_2\left(x_2-\frac{k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)\right)}. \tag{3.36}$$

Лемма 14. *Для любой точки* $(x_1, x_2) \in Sm(q)$ *справедливо равенство*

$$PS_f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2). \tag{3.37}$$

Доказательство. Вычислим значения интерполяционного полинома Смоляка $PS_f(x_1, x_2)$ в узлах сетки Смоляка.

Пусть $(x_1, x_2) = \left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}, \frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)$ $(0 \leqslant n_1 \leqslant 2^{\mu_1} - 1,\ 0 \leqslant n_2 \leqslant 2^{\mu_2} - 1,\ 1 \leqslant \mu_1,\ 1 \leqslant \mu_2$ и $q - 1 \leqslant \mu_1 + \mu_2 \leqslant q)$.

$$PS_f\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}, \frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right) = \sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{2^{q-k}} \sum_{\nu=1}^{q-k-1} \sum_{k_1=0}^{2^\nu-1} \sum_{k_2=0}^{2^{q-k-\nu}-1} f\left(\frac{k_1}{2^\nu}, \frac{k_2}{2^{q-k-\nu}}\right) \times$$
$$\times \sum_{l_1=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1} \sum_{l_2=-2^{q-k-\nu-1}}^{2^{q-k-\nu-1}-1} e^{2\pi i\left(l_1\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}} - \frac{k_1}{2^\nu}\right) + l_2\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}} - \frac{k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)\right)}. \tag{3.38}$$

Подставляя в интерполяционный многочлен вместо функции $f(\vec{x})$ её ряд Фурье, получим

$$PS_f\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}, \frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right) = \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{+\infty} C(m_1, m_2) \sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{2^{q-k}} \sum_{\nu=1}^{q-k-1} \sum_{k_1=0}^{2^\nu-1} \sum_{k_2=0}^{2^{q-k-\nu}-1} 1\times$$
$$\times e^{2\pi i\left(\frac{m_1k_1}{2^\nu} + \frac{m_2k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)} \sum_{l_1=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1} \sum_{l_2=-2^{q-k-\nu-1}}^{2^{q-k-\nu-1}-1} e^{2\pi i\left(l_1\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}} - \frac{k_1}{2^\nu}\right) + l_2\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}} - \frac{k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)\right)}. \tag{3.39}$$

Выполнив суммирование по k_1 и k_2, найдем

$$PS_f\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}, \frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right) = \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{+\infty} C(m_1, m_2) \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \sum_{\nu=1}^{q-k-1} 1\times$$
$$\times \sum_{l_1=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1} \sum_{l_2=-2^{q-k-\nu-1}}^{2^{q-k-\nu-1}-1} e^{2\pi i\left(\frac{n_1l_1}{2^{\mu_1}} + \frac{n_2l_2}{2^{\mu_2}}\right)} \delta_{2^\nu}(m_1 - l_1)\delta_{2^{q-k-\nu}}(m_2 - l_2). \tag{3.40}$$

В обозначениях леммы 8 имеем

$$PS_f\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}, \frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right) = \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{+\infty} C(m_1, m_2) \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \sum_{\nu=1}^{q-k-1} e^{2\pi i\left(\frac{n_1 l(m_1,\nu)}{2^{\mu_1}} + \frac{n_2 l(m_2,q-k-\nu)}{2^{\mu_2}}\right)}. \tag{3.41}$$

Рассмотрим конечный ряд Фурье

$$f\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}, \frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right) = \sum_{m_1=-2^{\mu_1-1}}^{2^{\mu_1-1}-1} \sum_{m_2=-2^{\mu_2-1}}^{2^{\mu_2-1}-1} C_{\mu_1,\mu_2}(m_1, m_2) e^{2\pi i\left(\frac{n_1m_1}{2^{\mu_1}} + \frac{n_2m_2}{2^{\mu_2}}\right)}, \tag{3.42}$$

где

$$C_{\mu_1,\mu_2}(m_1, m_2) = \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{+\infty} C\left(m_1 + k_1 2^{\mu_1}, m_2 + k_2 2^{\mu_2}\right). \tag{3.43}$$

Преобразуем формулу (3.41) аналогично виду конечного ряда Фурье (3.42), получим

$$\begin{aligned} PS_f\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}, \frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right) = \sum_{m_1=-2^{\mu_1-1}}^{2^{\mu_1-1}-1} \sum_{m_2=-2^{\mu_2-1}}^{2^{\mu_2-1}-1} \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{+\infty} C\left(m_1 + k_1 2^{\mu_1}, m_2 + k_2 2^{\mu_2}\right) \times \\ \times \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \sum_{\nu=1}^{q-k-1} e^{2\pi i\left(\frac{n_1 l(m_1+k_1 2^{\mu_1},\nu)}{2^{\mu_1}} + \frac{n_2 l(m_2+k_2 2^{\mu_2}, q-k-\nu)}{2^{\mu_2}}\right)}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Рассмотрим при $-2^{\mu_1-1} \leqslant m_1 \leqslant 2^{\mu_1-1} - 1$, $-2^{\mu_2-1} \leqslant m_2 \leqslant 2^{\mu_2-1} - 1$ сумму

$$\sigma\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}, \frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \sum_{\nu=1}^{q-k-1} e^{2\pi i\left(\frac{n_1 l(m_1+k_1 2^{\mu_1},\nu)}{2^{\mu_1}} + \frac{n_2 l(m_2+k_2 2^{\mu_2}, q-k-\nu)}{2^{\mu_2}}\right)}. \tag{3.45}$$

Из леммы 8 следует равенство

$$\begin{aligned} \sigma\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}, \frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right) = \\ = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \sum_{\nu=1}^{q-k-1} e^{2\pi i\left(\frac{n_1 l(m_1,\nu)}{2^{\mu_1}} + \frac{n_2 l(m_2, q-k-\nu)}{2^{\mu_2}}\right)} = \sum_{\nu=1}^{\mu_1-1} e^{2\pi i\left(\frac{n_1 l(m_1,\nu)}{2^{\mu_1}} + \frac{n_2 m_2}{2^{\mu_2}}\right)} + \\ + \sum_{\nu=\mu_1}^{q-\mu_2} e^{2\pi i\left(\frac{n_1 m_1}{2^{\mu_1}} + \frac{n_2 m_2}{2^{\mu_2}}\right)} + \sum_{\nu=q-\mu_2+1}^{q-1} e^{2\pi i\left(\frac{n_1 m_1}{2^{\mu_1}} + \frac{n_2 l(m_2, q-\nu)}{2^{\mu_2}}\right)} - \\ - \sum_{\nu=1}^{\mu_1-1} e^{2\pi i\left(\frac{n_1 l(m_1,\nu)}{2^{\mu_1}} + \frac{n_2 m_2}{2^{\mu_2}}\right)} - \sum_{\nu=\mu_1}^{q-\mu_2-1} e^{2\pi i\left(\frac{n_1 m_1}{2^{\mu_1}} + \frac{n_2 m_2}{2^{\mu_2}}\right)} - \\ - \sum_{\nu=q-\mu_2}^{q-2} e^{2\pi i\left(\frac{n_1 m_1}{2^{\mu_1}} + \frac{n_2 l(m_2, q-1-\nu)}{-} 2^{\mu_2}\right)} = e^{2\pi i\left(\frac{n_1 m_1}{2^{\mu_1}} + \frac{n_2 m_2}{2^{\mu_2}}\right)}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Но, тогда

$$PS_f\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}, \frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right) =$$

$$= \sum_{m_1=-2^{\mu_1-1}}^{2^{\mu_1-1}-1} \sum_{m_2=-2^{\mu_2-1}}^{2^{\mu_2-1}-1} \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{+\infty} C\left(m_1 + k_1 2^{\mu_1}, m_2 + k_2 2^{\mu_2}\right) e^{2\pi i\left(\frac{n_1 m_1}{2^{\mu_1}} + \frac{n_2 m_2}{2^{\mu_2}}\right)} =$$

$$= \sum_{m_1=-2^{\mu_1-1}}^{2^{\mu_1-1}-1} \sum_{m_2=-2^{\mu_2-1}}^{2^{\mu_2-1}-1} C_{\mu_1,\mu_2}(m_1, m_2) e^{2\pi i\left(\frac{n_1 m_1}{2^{\mu_1}} + \frac{n_2 m_2}{2^{\mu_2}}\right)} = f\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}, \frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right), \tag{3.47}$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Положим для $x \in [0; 1)$

$$e_{k,\nu}(x) = \sum_{l=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1} e^{2\pi i l\left(x - \frac{k}{2^\nu}\right)} = \begin{cases} 2^\nu & \text{при } x = \frac{k}{2^\nu}, \\ \dfrac{(-1)^k \sin\left(2^\nu \pi x\right)}{e^{\pi i\left(x - \frac{k}{2^\nu}\right)} \sin \pi\left(x - \frac{k}{2^\nu}\right)}, & \text{при } x \neq \frac{k}{2^\nu} \end{cases}. \tag{3.48}$$

Следующая теорема позволяет записать интерполяционный многочлен Смоляка без повторения узлов сетки с явным видом базисных функций, которые на сетке Смоляка являются характеристическими функциями узлов сетки.

Теорема 20. *Пусть $f(x_1, x_2) \in E_2^\alpha(C)$, $q \geqslant 3$, тогда для интерполяционного многочлена Смоляка справедлива формула*

$$PS_f(x_1, x_2) = f(0, 0) E_{q,0,0,0,0}(x_1, x_2) +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{q-1} \sum_{k=0}^{2^{\nu-1}-1} f\left(\frac{2k+1}{2^\nu}, 0\right) E_{q,\nu,2k+1,0,0}(x_1, x_2) +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{q-1} \sum_{k=0}^{2^{\nu-1}-1} f\left(0, \frac{2k+1}{2^\nu}\right) E_{q,0,0,\nu,2k+1}(x_1, x_2) +$$
$$+ \sum_{\substack{\mu,\lambda=1,\\ \mu+\lambda\leqslant q}}^{q-1} \sum_{k_1=0}^{2^{\mu-1}-1} \sum_{k_2=0}^{2^{\lambda-1}-1} f\left(\frac{2k_1+1}{2^\mu}, \frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right) E_{q,\mu,2k_1+1,\lambda,2k_2+1}(x_1, x_2), \tag{3.49}$$

где

$$E_{q,\mu,k_1,\lambda,k_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2^q} \sum_{\nu=\overline{\mu}}^{q-\overline{\lambda}} e_{k_1 2^{\nu-\mu},\nu}(x_1) e_{k_2 2^{q-\nu-\lambda},q-\nu}(x_2) -$$
$$- \frac{1}{2^{q-1}} \sum_{\nu=\overline{\mu}}^{q-1-\overline{\lambda}} e_{k_1 2^{\nu-\mu},\nu}(x_1) e_{k_2 2^{q-1-\nu-\lambda},q-1-\nu}(x_2) \tag{3.50}$$

и $k_1 = 0$ *при* $\mu = 0$, *а* $k_2 = 0$ *при* $\lambda = 0$.

Доказательство. Интерполяционный многочлен Смоляка можно записать в виде

$$PS_f(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{2^{q-k}}\sum_{\nu=1}^{q-k-1}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-k-\nu}-1}f\left(\frac{k_1}{2^\nu},\frac{k_2}{2^{q-k-\nu}}\right)e_{k_1,\nu}(x_1)e_{k_2,q-k-\nu}(x_2). \tag{3.51}$$

Применим к интерполяционному многочлену Смоляка представление (2.9) в лемме 3, получим

$$PS_f(x_1,x_2) = \frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}\left(f(0,0)e_{0,\nu}(x_1)e_{0,q-\nu}(x_2) + \sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{k=0}^{2^{\mu-1}-1}f\left(\frac{2k+1}{2^\mu},0\right)\times\right.$$

$$\times e_{(2k+1)2^{\nu-\mu},\nu}(x_1)e_{0,q-\nu}(x_2)+\sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{k=0}^{2^{\mu-1}-1}f\left(0,\frac{2k+1}{2^\mu}\right)e_{0,q-\nu}(x_1)e_{(2k+1)2^{\nu-\mu},\nu}(x_2)+$$

$$\left.+\sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{\lambda=1}^{q-\nu}\sum_{k_1=0}^{2^{\mu-1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{\lambda-1}-1}f\left(\frac{2k_1+1}{2^\mu},\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}(x_1)e_{(2k_2+1)2^{q-\nu-\lambda},q-\nu}(x_2)\right)-$$

$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}\left(f(0,0)e_{0,\nu}(x_1)e_{0,q-1-\nu}(x_2) + \sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{k=0}^{2^{\mu-1}-1}f\left(\frac{2k+1}{2^\mu},0\right)\times\right.$$

$$\times e_{(2k+1)2^{\nu-\mu},\nu}(x_1)e_{0,q-1-\nu}(x_2)+\sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{k=0}^{2^{\mu-1}-1}f\left(0,\frac{2k+1}{2^\mu}\right)e_{0,q-1-\nu}(x_1)e_{(2k+1)2^{\nu-\mu},\nu}(x_2)+$$

$$\left.+\sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{\lambda=1}^{q-1-\nu}\sum_{k_1=0}^{2^{\mu-1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{\lambda-1}-1}f\left(\frac{2k_1+1}{2^\mu},\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}(x_1)e_{(2k_2+1)2^{q-1-\nu-\lambda},q-1-\nu}(x_2)\right)=$$

$$= f(0,0)E_{q,0,0,0,0}(x_1,x_2) + \sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{k=0}^{2^{\nu-1}-1}f\left(\frac{2k+1}{2^\nu},0\right)E_{q,\nu,2k+1,0,0}(x_1,x_2)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{k=0}^{2^{\nu-1}-1}f\left(0,\frac{2k+1}{2^\nu}\right)E_{q,0,0,\nu,2k+1}(x_1,x_2)+$$

$$+\sum_{\substack{\mu,\lambda=1,\\ \mu+\lambda\leqslant q}}^{q-1}\sum_{k_1=0}^{2^{\mu-1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{\lambda-1}-1}f\left(\frac{2k_1+1}{2^\mu},\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)E_{q,\mu,2k_1+1,\lambda,2k_2+1}(x_1,x_2),$$

где

$$E_{q,0,0,0,0}(x_1,x_2) =\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}e_{0,\nu}(x_1)e_{0,q-\nu}(x_2) - \frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}e_{0,\nu}(x_1)e_{0,q-1-\nu}(x_2); \tag{3.52}$$

$$E_{q,\nu,k,0,0}(x_1,x_2)=$$
$$=\frac{1}{2^q}\sum_{\mu=\nu}^{q-1}e_{k2^{\mu-\nu},\mu}(x_1)e_{0,q-\mu}(x_2)-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\mu=\nu}^{q-2}e_{k2^{\mu-\nu},\mu}(x_1)e_{0,q-1-\mu}(x_2); \tag{3.53}$$

$$E_{q,0,0,\nu,k}(x_1,x_2)=\frac{1}{2^q}\sum_{\mu=\nu}^{q-1}e_{0,q-\mu}(x_1)e_{k2^{\mu-\nu},\mu}(x_2)-$$
$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\mu=\nu}^{q-2}e_{0,q-1-\mu}(x_1)e_{k2^{\mu-\nu},\mu}(x_2); \tag{3.54}$$

$$E_{q,\mu,k_1,\lambda,k_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=\mu}^{q-\lambda}e_{k_1 2^{\nu-\mu},\nu}(x_1)e_{k_2 2^{q-\nu-\lambda},q-\nu}(x_2)-$$
$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=\mu}^{q-1-\lambda}e_{k_1 2^{\nu-\mu},\nu}(x_1)e_{k_2 2^{q-1-\nu-\lambda},q-1-\nu}(x_2). \tag{3.55}$$

Объединяя (3.52) — (3.55), получим (3.50) и теорема полностью доказана. □

Лемма 15. *Для любой точки $(x_1,x_2)\in Sm(q)$ справедливо равенство*

$$E_{q,0,0,0,0}(x_1,x_2)=\begin{cases}1 & \text{при } x_1=x_2=0,\\ 0 & \text{при } (x_1,x_2)\neq(0,0),\end{cases} \tag{3.56}$$

а для интеграла от базисной функции $E_{q,0,0,0,0}(x_1,x_2)$ имеем равенство

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 E_{q,0,0,0,0}(x_1,x_2)dx_1dx_2=-\frac{q-3}{2^q}. \tag{3.57}$$

Доказательство. Вычислим значение базисной функции сетки Смоляка $E_{q,0,0,0,0}(x_1,x_2)$ в узлах сетки Смоляка.

Пусть $(x_1,x_2)=\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)$ ($0\leqslant n_1\leqslant 2^{\mu_1}-1$, $0\leqslant n_2\leqslant 2^{\mu_2}-1$, $1\leqslant\mu_1$, $1\leqslant\mu_2$ и $q-1\leqslant\mu_1+\mu_2\leqslant q$), тогда

$$E_{q,0,0,0,0}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}e_{0,\nu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{0,q-\nu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}e_{0,\nu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{0,q-1-\nu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right). \tag{3.58}$$

Заметим, что

$$e_{0,\nu}\left(\frac{n}{2^{\mu}}\right)=\begin{cases} 2^{\nu} & \text{при } n=0,\\ \dfrac{\sin\left(2^{\nu}\pi\frac{n}{2^{\mu}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n}{2^{\mu}}\right)}\sin\pi\left(\frac{n}{2^{\mu}}\right)} & \text{при } 1\leqslant n\leqslant 2^{\mu}-1, 1\leqslant\nu<\mu,\\ 0 & \text{при } 1\leqslant n\leqslant 2^{\mu}-1, \mu\leqslant\nu,\end{cases} \tag{3.59}$$

поэтому

$$E_{q,0,0,0,0}\left(0,0\right)=\sum_{\nu=1}^{q-1}1-\sum_{\nu=1}^{q-2}1=1. \tag{3.60}$$

Аналогично, при $1\leqslant n_1\leqslant 2^{\mu_1}-1$, $1\leqslant\mu_1\leqslant q-1$ имеем:

$$\begin{aligned}E_{q,0,0,0,0}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},0\right)=&\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}e_{0,\nu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)2^{q-\nu}-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}e_{0,\nu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)2^{q-1-\nu}=\\ &=\frac{1}{2^{q-1}}e_{0,q-1}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)=\frac{1}{2^{q-1}}\frac{\sin\left(2^{q-1}\pi\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}=0,\end{aligned} \tag{3.61}$$

а при $1\leqslant n_2\leqslant 2^{\mu_2}-1$, $1\leqslant\mu_2\leqslant q-1$ получим:

$$\begin{aligned}E_{q,0,0,0,0}\left(0,\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)=&\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}e_{0,q-\nu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)2^{\nu}-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}e_{0,q-1-\nu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)2^{\nu}=\\ &=\frac{1}{2^{q-1}}e_{0,q-1}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)=\frac{1}{2^{q-1}}\frac{\sin\left(2^{q-1}\pi\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}=0,\end{aligned} \tag{3.62}$$

наконец, при $1\leqslant n_1\leqslant 2^{\mu_1}-1$, $1\leqslant\mu_1\leqslant q-1$, $1\leqslant n_2\leqslant 2^{\mu_2}-1$, $1\leqslant\mu_2\leqslant q-1$, $q-1\leqslant\mu_1+\mu_2\leqslant q$ имеем:

$$\begin{aligned}&E_{q,0,0,0,0}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)=\\ =&\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}e_{0,\nu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{0,q-\nu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}e_{0,\nu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{0,q-1-\nu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)=\\ &=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}\frac{\sin\left(2^{\nu}\pi\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}\frac{\sin\left(2^{q-\nu}\pi\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}-\\ &-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}\frac{\sin\left(2^{\nu}\pi\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}\frac{\sin\left(2^{q-\nu}\pi\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}=0,\end{aligned} \tag{3.63}$$

так как либо $\nu\geqslant\mu_1$, либо $q-\nu\geqslant\mu_2$ в силу неравенства $\mu_1+\mu_2\leqslant q$. Таким образом, равенство (3.56) установлено.

Перейдем к вычислению двойного интеграла по единичному квадрату от базисной функции сетки Смоляка $E_{q,0,0,0,0}(x_1,x_2)$. Заметим, что

$$\int\limits_0^1 e_{0,\nu}(x)dx = \sum_{l=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1} \int\limits_0^1 e^{2\pi i l(x)}dx = 1, \tag{3.64}$$

поэтому

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 E_{q,0,0,0,0}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 e_{0,\nu}\left(x_1\right)e_{0,q-\nu}\left(x_2\right)dx_1dx_2 -$$
$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 e_{0,\nu}\left(x_1\right)e_{0,q-1-\nu}\left(x_2\right)dx_1dx_2 = \frac{q-1}{2^q} - \frac{q-2}{2^{q-1}} = -\frac{q-3}{2^q} \tag{3.65}$$

и лемма полностью доказана. □

Лемма 16. *Для любой точки $(x_1,x_2)\in Sm(q)$ справедливы равенства*

$$E_{q,\nu,2k+1,0,0}(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & \textit{при } (x_1,x_2) = \left(\frac{2k+1}{2^\nu},0\right), \\ 0 & \textit{при } (x_1,x_2) \neq \left(\frac{2k+1}{2^\nu},0\right), \end{cases} \tag{3.66}$$

$$E_{q,0,0,\nu,2k+1}(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & \textit{при } (x_1,x_2) = \left(0,\frac{2k+1}{2^\nu}\right), \\ 0 & \textit{при } (x_1,x_2) \neq \left(0,\frac{2k+1}{2^\nu}\right), \end{cases} \tag{3.67}$$

а для интегралов от базисных функций $E_{q,\nu,2k+1,0,0}(x_1,x_2)$ и $E_{q,0,0,\nu,2k+1}(x_1,x_2)$ имеем равенство

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 E_{q,\nu,2k+1,0,0}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 E_{q,0,0,\nu,2k+1}(x_1,x_2)dx_1dx_2 =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2^q} & \textit{при } \nu = q-1, \\ -\dfrac{q-2-\nu}{2^q} & \textit{при } \nu < q-1. \end{cases} \tag{3.68}$$

Доказательство. Так как сетка Смоляка симметрична относительно замены (x_1,x_2) на (x_2,x_1) и

$$E_{q,\nu,2k+1,0,0}(x_1,x_2) = E_{q,0,0,\nu,2k+1}(x_2,x_1),$$

то достаточно утверждение леммы доказать только для одной базисной функции $E_{q,\nu,2k+1,0,0}(x_1,x_2)$, а для второй оно будет выполнено автоматически в силу симметрии.

Вычислим значение базисной функции сетки Смоляка $E_{q,\nu,2k+1,0,0}(x_1,x_2)$ в узлах сетки Смоляка.

Пусть $(x_1,x_2)=\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)$ ($0\leqslant n_1\leqslant 2^{\mu_1}-1$, $0\leqslant n_2\leqslant 2^{\mu_2}-1$, $1\leqslant\mu_1$, $1\leqslant\mu_2$ и $q-1\leqslant\mu_1+\mu_2\leqslant q$), тогда

$$E_{q,\nu,2k+1,0,0}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)=\frac{1}{2^q}\sum_{\mu=\nu}^{q-1}e_{(2k+1)2^{\mu-\nu},\mu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{0,q-\mu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)-$$
$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\mu=\nu}^{q-2}e_{(2k+1)2^{\mu-\nu},\mu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{0,q-1-\mu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right). \qquad (3.69)$$

Если $(x_1,x_2)=\left(\frac{2k+1}{2^\nu},0\right)$, то

$$E_{q,\nu,2k+1,0,0}\left(\frac{2k+1}{2^\nu},0\right)=\frac{1}{2^q}\sum_{\mu=\nu}^{q-1}e_{(2k+1)2^{\mu-\nu},\mu}\left(\frac{2k+1}{2^\nu}\right)e_{0,q-\mu}(0)-$$
$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\mu=\nu}^{q-2}e_{(2k+1)2^{\mu-\nu},\mu}\left(\frac{2k+1}{2^\nu}\right)e_{0,q-1-\mu}(0)=(q-1)-(q-2)=1. \qquad (3.70)$$

Если $(x_1,x_2)=\left(\frac{2k+1}{2^\nu},\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)$, $n_2\neq 0$ и $\nu+\mu_2\leqslant q$, то

$$E_{q,\nu,2k+1,0,0}\left(\frac{2k+1}{2^\nu},\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)=\frac{1}{2^q}\sum_{\mu=\nu}^{q-1}e_{(2k+1)2^{\mu-\nu},\mu}\left(\frac{2k+1}{2^\nu}\right)e_{0,q-\mu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)-$$
$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\mu=\nu}^{q-2}e_{(2k+1)2^{\mu-\nu},\mu}\left(\frac{2k+1}{2^\nu}\right)e_{0,q-1-\mu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)=$$
$$=\sum_{\mu=\nu}^{q-1}\frac{1}{2^{q-\mu}}\frac{\sin\left(2^{q-\mu}\pi\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}-\sum_{\mu=\nu}^{q-2}\frac{1}{2^{q-1-\mu}}\frac{\sin\left(2^{q-1-\mu}\pi\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}=$$
$$=\frac{1}{2^{q-\nu}}\frac{\sin\left(2^{q-\nu}\pi\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}=0, \qquad (3.71)$$

так как $q-\nu-\mu_2\geqslant 0$.

Если $(x_1,x_2)=\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},0\right)$, $\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\neq\frac{2k+1}{2^\nu}$ и $\mu_1\leqslant q-1$, то

$$E_{q,\nu,2k+1,0,0}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},0\right)=\frac{1}{2^q}\sum_{\mu=\nu}^{q-1}e_{(2k+1)2^{\mu-\nu},\mu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{0,q-\mu}(0)-$$
$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\mu=\nu}^{q-2}e_{(2k+1)2^{\mu-\nu},\mu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{0,q-1-\mu}(0)=\sum_{\mu=\nu}^{q-1}\frac{1}{2^\mu}e_{(2k+1)2^{\mu-\nu},\mu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)-$$
$$-\sum_{\mu=\nu}^{q-2}\frac{1}{2^\mu}e_{(2k+1)2^{\mu-\nu},\mu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)=\frac{1}{2^{q-1}}e_{(2k+1)2^{q-1-\nu},q-1}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2^{q-1}}\frac{(-1)^{(2k+1)2^{q-1-\nu}}\sin\left(2^{q-1}\pi\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}-\frac{2k+1}{2^\nu}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}-\frac{2k+1}{2^\nu}\right)}=0, \tag{3.72}$$

так как $q-1-\mu_1\geqslant 0$.

Наконец, если $(x_1,x_2)=\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)$, $\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\neq\frac{2k+1}{2^\nu}$, $n_2\neq 0$ и $\mu_1+\mu_2\leqslant q$, то

$$E_{q,\nu,2k+1,0,0}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)=\frac{1}{2^q}\sum_{\mu=\nu}^{q-1}e_{(2k+1)2^{\mu-\nu},\mu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{0,q-\mu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)-$$
$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\mu=\nu}^{q-2}e_{(2k+1)2^{\mu-\nu},\mu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{0,q-1-\mu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^q}\sum_{\mu=\nu}^{q-1}\frac{(-1)^{(2k+1)2^{\mu-\nu}}\sin\left(2^\mu\pi\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}-\frac{2k+1}{2^\nu}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}-\frac{2k+1}{2^\nu}\right)}\frac{\sin\left(2^{q-\mu}\pi\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}-$$
$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\mu=\nu}^{q-2}\frac{(-1)^{(2k+1)2^{\mu-\nu}}\sin\left(2^\mu\pi\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}-\frac{2k+1}{2^\nu}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}-\frac{2k+1}{2^\nu}\right)}\frac{\sin\left(2^{q-1-\mu}\pi\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}=0, \tag{3.73}$$

так как либо $\mu\geqslant\mu_1$, либо $q-1-\mu\geqslant\mu_2$ в силу неравенства $\mu_1+\mu_2\leqslant q$. Таким образом, равенство (3.66) установлено и первая часть леммы доказана.

Перейдем к вычислению двойного интеграла по единичному квадрату от базисной функции сетки Смоляка $E_{q,\nu,2k+1,0,0}(x_1,x_2)$. Заметим, что

$$\int_0^1 e_{k,\nu}(x)dx=\sum_{l=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1}\int_0^1 e^{2\pi il\left(x-\frac{k}{2^\nu}\right)}dx=1, \tag{3.74}$$

поэтому

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 E_{q,\nu,2k+1,0,0}(x_1,x_2)dx_1dx_2 =$$

$$=\frac{1}{2^q}\sum_{\mu=\nu}^{q-1}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 e_{(2k+1)2^{\mu-\nu},\mu}\left(x_1\right)e_{0,q-\mu}\left(x_2\right)dx_1dx_2-$$

$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\mu=\nu}^{q-2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 e_{(2k+1)2^{\mu-\nu},\mu}\left(x_1\right)e_{0,q-1-\mu}\left(x_2\right)dx_1dx_2 =$$

$$= \frac{q-\nu}{2^q}-\frac{q-1-\nu}{2^{q-1}} = -\frac{q-2-\nu}{2^q} \tag{3.75}$$

и лемма полностью доказана. $\square$

Лемма 17. *При $1\leqslant\mu$, $1\leqslant\lambda$, $\mu+\lambda\leqslant q$ для любой точки $(x_1,x_2)\in Sm(q)$ справедливо равенство*

$$E_{q,\mu,2k_1+1,\lambda,2k_2+1}(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x_1,x_2)=\left(\frac{2k_1+1}{2^\mu},\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right),\\ 0 & \text{при } (x_1,x_2)\neq\left(\frac{2k_1+1}{2^\mu},\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right),\end{cases} \tag{3.76}$$

а для интеграла от базисной функции $E_{q,\mu,2k_1+1,\lambda,2k_2+1}(x_1,x_2)$ имеем равенство

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 E_{q,\mu,2k_1+1,\lambda,2k_2+1}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = -\frac{q-1-\mu-\lambda}{2^q}. \tag{3.77}$$

Доказательство. Вычислим значение базисной функции сетки Смоляка $E_{q,\mu,2k_1+1,\lambda,2k_2+1}(x_1,x_2)$ в узлах сетки Смоляка.

Пусть $(x_1,x_2)=\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)$ ($0\leqslant n_1\leqslant 2^{\mu_1}-1$, $0\leqslant n_2\leqslant 2^{\mu_2}-1$, $1\leqslant\mu_1$, $1\leqslant\mu_2$ и $q-1\leqslant\mu_1+\mu_2\leqslant q$), тогда

$$E_{q,\mu,2k_1+1,\lambda,2k_2+1}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right) =$$

$$=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=\mu}^{q-\lambda} e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{(2k_2+1)2^{q-\nu-\lambda},q-\nu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)-$$

$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=\mu}^{q-1-\lambda} e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{(2k_2+1)2^{q-1-\nu-\lambda},q-\nu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right). \tag{3.78}$$

Если $(x_1,x_2)=\left(\frac{2k_1+1}{2^\mu},\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)$, то

$$E_{q,\mu,2k_1+1,\lambda,2k_2+1}\left(\frac{2k_1+1}{2^\mu},\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=\mu}^{q-\lambda}e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}\left(\frac{2k_1+1}{2^\mu}\right)e_{(2k_2+1)2^{q-\nu-\lambda},q-\nu}\left(\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)-$$

$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=\mu}^{q-1-\lambda}e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}\left(\frac{2k_1+1}{2^\mu}\right)e_{(2k_2+1)2^{q-1-\nu-\lambda},q-\nu}\left(\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)=$$

$$=(q+1-\lambda-\mu)-(q-\lambda-\mu)=1. \tag{3.79}$$

Если $(x_1,x_2)=\left(\frac{2k_1+1}{2^\mu},\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)$, $\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\neq\frac{2k_2+1}{2^\lambda}$ и $\mu+\mu_2\leqslant q$, то

$$E_{q,\mu,2k_1+1,\lambda,2k_2+1}\left(\frac{2k_1+1}{2^\mu},\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=\mu}^{q-\lambda}e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}\left(\frac{2k_1+1}{2^\mu}\right)e_{(2k_2+1)2^{q-\nu-\lambda},q-\nu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)-$$

$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=\mu}^{q-1-\lambda}e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}\left(\frac{2k_1+1}{2^\mu}\right)e_{(2k_2+1)2^{q-1-\nu-\lambda},q-1-\nu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)=$$

$$=\sum_{\nu=\mu}^{q-\lambda}\frac{e_{(2k_2+1)2^{q-\nu-\lambda},q-\nu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}{2^{q-\nu}}-\sum_{\nu=\mu}^{q-1-\lambda}\frac{e_{(2k_2+1)2^{q-1-\nu-\lambda},q-1-\nu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}{2^{q-1-\nu}}=$$

$$=\frac{e_{(2k_2+1)2^{q-\mu-\lambda},q-\mu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}{2^{q-\mu}}=\frac{1}{2^{q-\mu}}\cdot\frac{(-1)^{(2k_2+1)2^{q-\mu-\lambda}}\sin\left(2^{q-\mu}\pi\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}-\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}-\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)}=0, \tag{3.80}$$

так как $q-\mu-\mu_2\geqslant 0$.

Если $(x_1,x_2)=\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)$, $\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\neq\frac{2k_1+1}{2^\mu}$ и $\mu_1+\lambda\leqslant q$, то

$$E_{q,\mu,2k_1+1,\lambda,2k_2+1}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=\mu}^{q-\lambda}e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{(2k_2+1)2^{q-\nu-\lambda},q-\nu}\left(\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)-$$

$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=\mu}^{q-1-\lambda}e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{(2k_2+1)2^{q-1-\nu-\lambda},q-1-\nu}\left(\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)=$$

$$=\sum_{\nu=\mu}^{q-\lambda}\frac{e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}{2^\nu}-\sum_{\nu=\mu}^{q-1-\lambda}\frac{e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}{2^\nu}=$$

$$=\frac{e_{(2k_1+1)2^{q-\lambda-\mu},q-\lambda}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}{2^{q-\lambda}}=\frac{1}{2^{q-\lambda}}\cdot\frac{(-1)^{(2k_1+1)2^{q-\lambda-\mu}}\sin\left(2^{q-\lambda}\pi\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}-\frac{2k_1+1}{2^\mu}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}-\frac{2k_1+1}{2^\mu}\right)}=0, \qquad (3.81)$$

так как $q-\lambda-\mu_1\geqslant 0$.

Наконец, если $(x_1,x_2)=\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)$, $\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\neq\frac{2k_1+1}{2^\mu}$, $n_2\neq\frac{2k_2+1}{2^\lambda}$ и $\mu_1+\mu_2\leqslant q$, то

$$E_{q,\mu,2k_1+1,\lambda,2k_2+1}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}},\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=\mu}^{q-\lambda}e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{(2k_2+1)2^{q-\nu-\lambda},q-\nu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)-$$

$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=\mu}^{q-1-\lambda}e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)e_{(2k_2+1)2^{q-1-\nu-\lambda},q-1-\nu}\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=\mu}^{q-\lambda}\frac{(-1)^{(2k_1+1)2^{\nu-\mu}}\sin\left(2^\nu\pi\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}-\frac{2k_1+1}{2^\mu}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}-\frac{2k_1+1}{2^\mu}\right)}\frac{(-1)^{(2k_2+1)2^{q-\nu-\lambda}}\sin\left(2^{q-\nu}\pi\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}-\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}-\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)}-$$

$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=\mu}^{q-1-\lambda}\frac{(-1)^{(2k_1+1)2^{\nu-\mu}}\sin\left(2^\nu\pi\frac{n_1}{2^{\mu_1}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}-\frac{2k_1+1}{2^\mu}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_1}{2^{\mu_1}}-\frac{2k_1+1}{2^\mu}\right)}\times$$

$$\times\frac{(-1)^{(2k_2+1)2^{q-1-\nu-\lambda}}\sin\left(2^{q-1-\nu}\pi\frac{n_2}{2^{\mu_2}}\right)}{e^{\pi i\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}-\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)}\sin\pi\left(\frac{n_2}{2^{\mu_2}}-\frac{2k_2+1}{2^\lambda}\right)}=0, \qquad (3.82)$$

так как либо $\nu\geqslant\mu_1$, либо $q-1-\nu\geqslant\mu_2$ в силу неравенства $\mu_1+\mu_2\leqslant q$. Таким образом равенство (3.76) установлено и первая часть леммы доказана.

Перейдем к вычислению двойного интеграла по единичному квадрату от базисной функции сетки Смоляка $E_{q,\mu,2k_1+1,\lambda,2k_2+1}(x_1,x_2)$.

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 E_{q,\mu,2k_1+1,\lambda,2k_2+1}(x_1,x_2)dx_1dx_2=$$

$$
=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=\mu}^{q-\lambda}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}\left(x_1\right)e_{(2k_2+1)2^{q-\nu-\lambda},q-\nu}\left(x_2\right)dx_1dx_2-
$$

$$
-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=\mu}^{q-1-\lambda}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 e_{(2k_1+1)2^{\nu-\mu},\nu}\left(x_1\right)e_{(2k_2+1)2^{q-1-\nu-\lambda},q-1-\nu}\left(x_2\right)dx_1dx_2=
$$

$$
=\frac{q+1-\lambda-\mu}{2^q}-\frac{q-\lambda-\mu}{2^{q-1}}=-\frac{q-1-\lambda-\mu}{2^q} \tag{3.83}
$$

и лемма полностью доказана. □

Из лемм 15 — 17 вытекает, что квадратурная формула (3.7) с сеткой Смоляка относится к числу квадратурных формул интерполяционного типа, то есть получается интегрированием соответствующей интерполяционной формулы (3.25).

Глава 4

Точные формулы для отклонения двумерных сеток Смоляка

Рассмотрим произвольную сетку с весами $(X, \vec{\rho})$ из $N = |X|$ точек в единичном квадрате $G_2 = [0; 1)^2$, где

$$X = \{\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{N-1}\} \subset G_2, \quad \vec{\rho} = (\rho_0, \dots, \rho_{N-1}, \rho) \in \mathbb{R}^{N+1}, \tag{4.1}$$

и локальное отклонение с весом $\vec{\rho}$

$$D(X, \vec{\rho}, \vec{t}) = \sum_{k=0}^{N-1} \rho_k \chi(\vec{x}_k, \vec{t}) - N\rho t_1 t_2, \quad \vec{t} \in [0; 1]^2, \tag{4.2}$$

где

$$\chi(\vec{x}, \vec{t}) = \prod_{j=1}^{2} \chi(x_j, t_j)$$

— характеристическая функция прямоугольника $\prod\limits_{j=1}^{2} [0; t_j)$, а

$$\chi(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant x < t, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0; t) \end{cases} \tag{4.3}$$

— характеристическая функция промежутка $[0; t)$.

Для каждой сетки $(X, \vec{\rho})$ рассмотрим следующую характеристику:

$$D(X, \vec{\rho}) = \sup_{\vec{t} \in [0;1]^s} |D(X, \vec{\rho}, \vec{t})| \tag{4.4}$$

— отклонение с весом $\vec{\rho}$.

Если все веса единичные, то есть

$$\rho_0 = \rho_1 = \ldots = \rho_{N-1} = \rho = 1,$$

то имеем обычное локальное отклонение

$$D(X, \vec{t}) = \sum_{k=0}^{N-1} \chi(\vec{x}_k, \vec{t}) - N \cdot t_1 \cdot t_2; \tag{4.5}$$

отклонение

$$D(X) = \sup_{\vec{t} \in [0;1]^2} |D(X, \vec{t})|. \tag{4.6}$$

Иногда дают другое определение отклонения. Если взять за основу характеристическую функцию $\overline{\chi}(x, t)$ отрезка $[0; t]$, заданную равенством

$$\overline{\chi}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant t, \\ 0 & \text{при } x \notin [0; t], \end{cases} \tag{4.7}$$

то получим другие характеристики равномерности распределения точек сетки в единичном квадрате:

$$\overline{D}(X, \vec{\rho}, \vec{t}) = \sum_{k=0}^{N-1} \rho_k \overline{\chi}(\vec{x}_k, \vec{t}) - N\rho t_1 t_2, \quad \vec{t} \in [0; 1]^2, \tag{4.8}$$

$\overline{\chi}(\vec{x}, \vec{t}) = \prod\limits_{j=1}^{2} \overline{\chi}(x_j, t_j)$,

$$\overline{D}(X, \vec{\rho}) = \sup_{\vec{t} \in [0;1]^s} |\overline{D}(X, \vec{\rho}, \vec{t})|, \tag{4.9}$$

$$\overline{D}(X, \vec{t}) = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{\chi}(\vec{x}_k, \vec{t}) - N \cdot t_1 \cdot t_2, \quad \overline{D}(X) = \sup_{\vec{t} \in [0;1]^2} |\overline{D}(X, \vec{t})|. \tag{4.10}$$

Хотя функции локального отклонения $D(X, \vec{\rho}, \vec{t})$ и $\overline{D}(X, \vec{\rho}, \vec{t})$ не совпадают в точках разрыва, но из равенств

$$\lim_{x \to t^{+0}} \chi(x, t) = \overline{\chi}(x, t), \quad \lim_{x \to t^{-0}} \overline{\chi}(x, t) = \chi(x, t) \tag{4.11}$$

следует равенство $D(X, \vec{\rho}) = \overline{D}(X, \vec{\rho})$.

4.1 Отклонение с учетом кратности узлов

Обозначим через $D^{(1)}_{q,2}(\gamma_1,\gamma_2) = N^{(1)}_{q,2}(\gamma_1,\gamma_2) - N^{(1)}_{q,2}\cdot\gamma_1\cdot\gamma_2$ локальное отклонение сетки Смоляка $Sm(q,2)$ в области $0\leqslant x_i\leqslant\gamma_i$ $(i=1,2)$. Таким образом, $D^{(1)}_{q,2}(\gamma_1,\gamma_2) = \overline{D}\left(Sm(q,2),(\gamma_1,\gamma_2)\right)$ — локальное отклонение сетки Смоляка с учетом кратности точек.

Лемма 18. *Для локального отклонения $D^{(1)}_{q,2}(\gamma_1,\gamma_2)$ справедливо неравенство*

$$D^{(1)}_{q,2}(\gamma_1,\gamma_2)\geqslant 0. \tag{4.12}$$

Доказательство. Действительно, число решений неравенства $0\leqslant\frac{k}{2^\nu}\leqslant\gamma$ в целых k равно $1+[2^\nu\gamma]\geqslant 2^\nu\gamma$, поэтому

$$N^{(1)}_{q,2}(\gamma_1,\gamma_2)=\begin{cases}\sum\limits_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_i\geqslant 1 (i=1,2)}}\prod\limits_{j=1}^{2}(1+[\gamma_j\,2^{\nu_j}]) & \text{при } \gamma_1\neq 1,\gamma_2\neq 1,\\ \sum\limits_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_i\geqslant 1 (i=1,2)}}(1+[\gamma_1\,2^{\nu_1}])2^{\nu_2} & \text{при } \gamma_1\neq 1,\gamma_2=1,\\ \sum\limits_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_i\geqslant 1 (i=1,2)}}(1+[\gamma_2\,2^{\nu_2}])2^{\nu_1} & \text{при } \gamma_1=1,\gamma_2\neq 1,\\ \sum\limits_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_i\geqslant 1 (i=1,2)}}2^{\nu_1+\nu_2} & \text{при } \gamma_1=\gamma_2=1;\end{cases}$$

$$N^{(1)}_{q,2}\gamma_1\gamma_2=\sum_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_i\geqslant 1 (i=1,2)}}\prod_{j=1}^{2}\gamma_j\,2^{\nu_j}.$$

Отсюда следует, что

$$D^{(1)}_{q,2}(\gamma_1,\gamma_2)=N^{(1)}_{q,2}(\gamma_1,\gamma_2)-N^{(1)}_{q,2}\gamma_1\gamma_2\geqslant 0$$

и лемма доказана. □

Лемма 19. *Для отклонения $D^{(1)}_{q,2}$ сетки Смоляка справедливо равенство*

$$D^{(1)}_{q,2}=\max_{2^{q-2}\leqslant k_1,k_2\leqslant 2^{q-1}-1}D^{(1)}_{q,2}\left(\frac{k_1}{2^{q-1}},\frac{k_2}{2^{q-1}}\right). \tag{4.13}$$

Доказательство. Как следует из определений отклонения $D_{q,2}^{(1)}$, локального отклонения $D_{q,2}^{(1)}(\gamma_1,\gamma_2)$ и леммы 18

$$D_{q,2}^{(1)} = \sup_{0\leqslant\gamma_1,\gamma_2\leqslant 1} D_{q,2}^{(1)}(\gamma_1,\gamma_2).$$

Пусть

$$\frac{k}{2^{q-1}} \leqslant \gamma < \frac{k+1}{2^{q-1}}, \quad 0\leqslant k\leqslant 2^{q-1}-1,$$

тогда

$$[\gamma 2^\nu] = \left[\frac{k2^\nu}{2^{q-1}}\right].$$

Действительно, представим k и γ в виде $k = n\cdot 2^{q-1-\nu}+m$, $\gamma = \frac{k+\beta}{2^{q-1}}$, где $0\leqslant m < 2^{q-1-\nu}$ и $0\leqslant\beta<1$, тогда

$$\left[\frac{k2^\nu}{2^{q-1}}\right] = n + \left[\frac{m}{2^{q-1-\nu}}\right] = n, \quad [\gamma 2^\nu] = \left[\frac{n\cdot 2^{q-1-\nu}+m+\beta}{2^{q-1-\nu}}\right] = n.$$

Отсюда следует, что при

$$\frac{k_1}{2^{q-1}}\leqslant\gamma_1<\frac{k_1+1}{2^{q-1}}, \quad \frac{k_2}{2^{q-1}}\leqslant\gamma_2<\frac{k_2+1}{2^{q-1}}, \quad 0\leqslant k_1,k_2\leqslant 2^{q-1}-1$$

выполняется неравенство

$$(1+[\gamma_1 2^{\nu_1}])\,(1+[\gamma_2 2^{\nu_2}]) - \gamma_1\gamma_2 2^{\nu_1+\nu_2} \leqslant \left(1+\left[\frac{k_1 2^{\nu_1}}{2^{q-1}}\right]\right)\left(1+\left[\frac{k_2 2^{\nu_2}}{2^{q-1}}\right]\right) - \frac{k_1k_2 2^{\nu_1+\nu_2}}{2^{2(q-1)}}$$

и, следовательно, справедливо неравенство для локального отклонения

$$\begin{gathered}
D_{q,2}^{(1)}(\gamma_1,\gamma_2) = \\
= \sum_{k=0}^{1}\sum_{\nu=1}^{q-1-k}\left((1+[\gamma_1 2^\nu])\left(1+\left[\gamma_2 2^{q-k-\nu}\right]\right) - \gamma_1\gamma_2 2^{q-k}\right) \leqslant \\
\leqslant \sum_{k=0}^{1}\sum_{\nu=1}^{q-1-k}\left(\left(1+\left[\frac{k_1 2^\nu}{2^{q-1}}\right]\right)\left(1+\left[\frac{k_2 2^{q-k-\nu}}{2^{q-1}}\right]\right) - \frac{k_1k_2}{2^{q+k-2}}\right) = \\
= D_{q,2}^{(1)}\left(\frac{k_1}{2^{q-1}},\frac{k_2}{2^{q-1}}\right).
\end{gathered} \tag{4.14}$$

Справедливы неравенства

$$D_{q,2}^{(1)}(\gamma_1,1) \leqslant D_{q,2}^{(1)}\left(\gamma_1, 1-\frac{1}{2^{q-1}}\right), \quad D_{q,2}^{(1)}(1,\gamma_2)\leqslant D_{q,2}^{(1)}\left(1-\frac{1}{2^{q-1}},\gamma_2\right). \tag{4.15}$$

Действительно, это следует из равенств

$$N_{q,2}^{(1)}(\gamma_1, 1) = N_{q,2}^{(1)}\left(\gamma_1, 1 - \frac{1}{2^{q-1}}\right), \quad N_{q,2}^{(1)}(1, \gamma_2) = N_{q,2}^{(1)}\left(1 - \frac{1}{2^{q-1}}, \gamma_2\right).$$

Поэтому, так как $D_{q,2}^{(1)}(1,1) = 0$ и $D_{q,2}^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2) \geqslant 0$, то из (4.14) и (4.15) вытекает

$$\sup_{0 \leqslant \gamma_1, \gamma_2 \leqslant 1} D_{q,2}^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{0 \leqslant \gamma_1, \gamma_2 < 1} D_{q,2}^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{0 \leqslant k_1, k_2 \leqslant 2^{q-1}-1} D_{q,2}^{(1)}\left(\frac{k_1}{2^{q-1}}, \frac{k_2}{2^{q-1}}\right).$$

Положим

$$A = (1 + [\gamma_1 2^{\nu_1}]), \quad B = \gamma_1 2^{\nu_1},$$

тогда $A \geqslant B$ и

$$\sup_{0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{1}{2}} (A(1 + [\gamma 2^\nu]) - B\gamma 2^\nu) =$$

$$= \max_{0 \leqslant k \leqslant 2^{\nu-1}} \left(A\left(1 + \frac{2^\nu k}{2^\nu}\right) - B\frac{k}{2^\nu}2^\nu\right) = A + (A - B)\max_{0 \leqslant k \leqslant 2^{\nu-1}} k =$$

$$= A + (A - B)2^{\nu-1} = A\left(1 + \left[\frac{1}{2} \cdot 2^\nu\right]\right) - B\frac{1}{2}2^\nu,$$

то

$$\max_{0 \leqslant k_1, k_2 \leqslant 2^{q-1}-1} D_{q,2}^{(1)}\left(\frac{k_1}{2^{q-1}}, \frac{k_2}{2^{q-1}}\right) = \max_{2^{q-2} \leqslant k_1, k_2 \leqslant 2^{q-1}-1} D_{q,2}^{(1)}\left(\frac{k_1}{2^{q-1}}, \frac{k_2}{2^{q-1}}\right).$$

Итак,

$$D_{q,2}^{(1)} = \max_{2^{q-2} \leqslant k_1,\, k_2 \leqslant 2^{q-1}-1} D_{q,2}^{(1)}\left(\frac{k_1}{2^{q-1}}, \frac{k_2}{2^{q-1}}\right)$$

и лемма доказана. $\square$

При фиксированном $q > 2$ положим

$$\varphi(\nu, l) = \begin{cases} 1, \text{ при } q - 1 \leqslant \nu + l \\ 0, \text{ при } \nu + l < q - 1. \end{cases}$$

Пусть $k_1 = \sum\limits_{l=0}^{q-2} a_l 2^l$, $k_2 = \sum\limits_{l=0}^{q-2} b_l 2^l$, $a_l, b_l = 0, 1$ — двоичное представление k_1 и k_2, тогда

$$\left[\frac{k_1 2^{\nu_1}}{2^{q-1}}\right] = \sum_{l=0}^{q-2} a_l 2^{l+\nu_1-q+1}\varphi(\nu_1, l), \quad \left[\frac{k_2 2^{\nu_2}}{2^{q-1}}\right] = \sum_{l=0}^{q-2} b_l 2^{l+\nu_2-q+1}\varphi(\nu_2, l).$$

Лемма 20. *Для величины*

$$B(q)=\sum_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}} 1$$

справедливо равенство

$$B(q)=2q-3. \tag{4.16}$$

Доказательство. Действительно,

$$B(q)=\sum_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}} 1=\sum_{k=0}^{1}\sum_{\nu=1}^{q-1-k}1=\sum_{k=0}^{1}(q-1-k)=q-1+q-2=2q-3$$

и лемма доказана. □

Лемма 21. *Для величины*

$$B(q,l)=\sum_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q\\ \nu_1\nu_2\geqslant 1}}\varphi(\nu_1,l)2^{\nu_1}$$

при $0\leqslant l\leqslant q-2$ *справедливо равенство*

$$B(q,l)=3\cdot 2^{q-1}-2^{q-l}. \tag{4.17}$$

Доказательство. Действительно,

$$B(q,l)=\sum_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}}\varphi(\nu_1,l)2^{\nu_1}=\sum_{\substack{\nu=1,\\ \nu+l\geqslant q-1}}^{q-1}2^{\nu}+\sum_{\substack{\nu=1,\\ \nu+l\geqslant q-1}}^{q-2}2^{\nu}=$$

$$=\sum_{\nu=q-1-l}^{q-1}2^{\nu}+\sum_{\nu=q-1-l}^{q-2}2^{\nu}=2^q-2^{q-1-l}+2^{q-1}-2^{q-1-l}=3\cdot 2^{q-1}-2^{q-l}$$

и лемма доказана. □

Лемма 22. *Для величины*

$$B(q,l_1,l_2)=\sum_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}}(\varphi(\nu_1,l_1)\varphi(\nu_2,l_2)-1)2^{\nu_1+\nu_2}$$

при $0\leqslant l_1,l_2\leqslant q-2$ *справедливо равенство*

$$B(q,l_1,l_2)=-2^{q-1}(3q-4)+ \\ +\begin{cases} 2^{q-1}(3(l_1+l_2)-3q+8) \text{ при } l_1+l_2\geqslant q-2,\\ 0 \text{ при } l_1+l_2<q-2. \end{cases} \tag{4.18}$$

Доказательство. Действительно,

$$B(q,l_1,l_2)=\sum_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}}(\varphi(\nu_1,l_1)\varphi(\nu_2,l_2)-1)2^{\nu_1+\nu_2}=$$

$$=2^q\sum_{\nu=1}^{q-1}(\varphi(\nu,l_1)\varphi(q-\nu,l_2)-1)+2^{q-1}\sum_{\nu=1}^{q-2}(\varphi(\nu,l_1)\varphi(q-1-\nu,l_2)-1)=$$

$$=2^q\left(\sum_{\nu=q-1-l_1}^{q-1}\varphi(q-\nu,l_2)-q+1\right)+2^{q-1}\left(\sum_{\nu=q-1-l_1}^{q-2}\varphi(q-1-\nu,l_2)-q+2\right)=$$

$$=2^q\left(1-q+\sum_{\nu=q-1-l_1}^{l_2+1}1\right)+2^{q-1}\left(2-q+\sum_{\nu=q-1-l_1}^{l_2}1\right)=-2^{q-1}(3q-4)+$$

$$+\begin{cases}2^q(l_1+l_2-q+3)+2^{q-1}(l_1+l_2-q+2)\text{ при } l_1+l_2\geqslant q-2,\\ 0 \text{ при } l_1+l_2<q-2\end{cases}=$$

$$=-2^{q-1}(3q-4)+\begin{cases}2^{q-1}(3(l_1+l_2)-3q+8)\text{ при } l_1+l_2\geqslant q-2,\\ 0 \text{ при } l_1+l_2<q-2\end{cases}$$

и лемма доказана. □

Лемма 23. *Для локального отклонения*

$$D_{q,2}^{(1)}\left(\frac{k_1}{2^{q-1}},\frac{k_2}{2^{q-1}}\right)$$

при $0\leqslant k_1,k_2\leqslant 2^{q-1}-1$ *справедливо равенство*

$$D_{q,2}^{(1)}\left(\frac{k_1}{2^{q-1}},\frac{k_2}{2^{q-1}}\right)=(2q-3)+\sum_{l=0}^{q-2}(a_l+b_l)(3\cdot 2^l-2)-$$

$$-\frac{3q-4}{2^{q-1}}\sum_{l_1,l_2=0}^{q-2}a_{l_1}b_{l_2}2^{l_1+l_2}+\sum_{\substack{l_1,l_2=0,\\ l_1+l_2\geqslant q-2}}^{q-2}a_{l_1}b_{l_2}\frac{2^{l_1+l_2}}{2^{q-1}}(3(l_1+l_2)-3q+8). \tag{4.19}$$

Доказательство. Действительно, пусть $k_1=\sum\limits_{l=0}^{q-2}a_l2^l$, $k_2=\sum\limits_{l=0}^{q-2}b_l2^l$, $a_l,b_l=$

$0,1$ — двоичное представление k_1 и k_2, тогда

$$D^{(1)}_{q,2}\left(\frac{k_1}{2^{q-1}},\frac{k_2}{2^{q-1}}\right)=\sum_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}}\left(\left(1+\left[\frac{k_1 2^{\nu_1}}{2^{q-1}}\right]\right)\left(1+\left[\frac{k_2 2^{\nu_2}}{2^{q-1}}\right]\right)-\frac{k_1k_2 2^{\nu_1+\nu_2}}{2^{2(q-1)}}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}}\left(\left(1+\sum_{l=0}^{q-2}a_l 2^{l+\nu_1-q+1}\varphi(\nu_1,l)\right)\left(1+\sum_{l=0}^{q-2}b_l 2^{l+\nu_2-q+1}\varphi(\nu_2,l)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\sum_{l=0}^{q-2}a_l 2^{l+\nu_1-q+1}\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{q-2}a_l 2^{l+\nu_1-q+1}\right)\right)=$$

$$=\sum_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}}\left(1+\sum_{l=0}^{q-2}a_l 2^{l+\nu_1-q+1}\varphi(\nu_1,l)+\sum_{l=0}^{q-2}b_l 2^{l+\nu_2-q+1}\varphi(\nu_2,l)+\right.$$

$$\left.+\sum_{l_1,l_2=0}^{q-2}a_{l_1}b_{l_2}2^{l_1+l_2+\nu_1+\nu_2-2(q-1)}(\varphi(\nu_1,l_1)\varphi(\nu_2,l_2)-1)\right)=$$

$$=\sum_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}}1+\sum_{l=0}^{q-2}\frac{(a_l+b_l)}{2^{q-1}}2^l\sum_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}}\varphi(\nu_1,l)+$$

$$+\sum_{l_1,l_2=0}^{q-2}\frac{a_{l_1}b_{l_2}2^{l_1+l_2}}{2^{2(q-1)}}\sum_{\substack{q-2<\nu_1+\nu_2\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1}}2^{\nu_1+\nu_2}(\varphi(\nu_1,l_1)\varphi(\nu_2,l_2)-1)=$$

$$=B(q)+\sum_{l=0}^{q-2}\frac{(a_l+b_l)}{2^{q-1}}2^l B(q,l)+\sum_{l_1,l_2=0}^{q-2}\frac{a_{l_1}b_{l_2}2^{l_1+l_2}}{2^{2(q-1)}}B(q,l_1,l_2).$$

Применим леммы 20 — 22, получим

$$D^{(1)}_{q,2}\left(\frac{k_1}{2^{q-1}},\frac{k_2}{2^{q-1}}\right)=2q-3+\sum_{l=0}^{q-2}\frac{(a_l+b_l)}{2^{q-1}}2^l\left(3\cdot 2^{q-1}-2^{q-l}\right)+\sum_{l_1,l_2=0}^{q-2}\frac{a_{l_1}b_{l_2}2^{l_1+l_2}}{2^{2(q-1)}}\times$$

$$\times\left(-2^{q-1}(3q-4)+\begin{cases}2^{q-1}(3(l_1+l_2)-3q+8)\text{ при } l_1+l_2\geqslant q-2,\\ 0\text{ при } l_1+l_2<q-2.\end{cases}\right)=$$

$$=(2q-3)+\sum_{l=0}^{q-2}(a_l+b_l)(3\cdot 2^l-2)-$$

$$-\frac{3q-4}{2^{q-1}}\sum_{l_1,l_2=0}^{q-2}a_{l_1}b_{l_2}2^{l_1+l_2}+\sum_{\substack{l_1,l_2=0,\\ l_1+l_2\geqslant q-2}}^{q-2}a_{l_1}b_{l_2}\frac{2^{l_1+l_2}}{2^{q-1}}(3(l_1+l_2)-3q+8)$$

и лемма доказана. □

Лемма 24. *Для локального отклонения*

$$D^{(1)}_{q,2}\left(\frac{k_1}{2^{q-1}},\frac{k_2}{2^{q-1}}\right)$$

при $2^{q-2}\leqslant k_1,k_2\leqslant 2^{q-1}-1$ *справедливо равенство*

$$D^{(1)}_{q,2}\left(\frac{k_1}{2^{q-1}},\frac{k_2}{2^{q-1}}\right)=A_q(a_{q-3},b_{q-3})+\sum_{k=0}^{q-4}(a_l+b_l)C_{q,l}+\Phi_q(a_0,\ldots,b_{q-3}),\qquad(4.20)$$

где

$$A_q(x,y)=2q-7+3\cdot 2^{q-1}+(x+y)\left(3\cdot 2^{q-4}-2\right);$$

$$C_{q,l}=2^l\left(\frac{-3q+12+3l}{2}\right)-2<0 \text{ при } l\leqslant q-4;$$

$$\Phi_q(a_0,\ldots,b_{q-3})=-\sum_{l_1,l_2=0}^{q-3}a_{l_1}b_{l_2}\frac{2^{l_1+l_2}(3q-4)}{2^{q-1}}+$$

$$+\sum_{\substack{l_1,l_2=0\\ l_1+l_2\geqslant q-2}}^{q-3}a_{l_1}b_{l_2}\frac{2^{l_1+l_2}(3(l_1+l_2)-3q+8)}{2^{q-1}}<0.$$

Доказательство. Действительно, из условия $k_1,k_2\geqslant 2^{q-2}$ следует $a_{q-2}=b_{q-2}=1$, поэтому

$$D^{(1)}_{q,2}\left(\frac{k_1}{2^{q-1}},\frac{k_2}{2^{q-1}}\right)=(2q-3)+2(3\cdot 2^{q-2}-2)+\sum_{l=0}^{q-3}(a_l+b_l)(3\cdot 2^l-2)-$$

$$-\frac{3q-4}{2^{q-1}}\left(2^{2(q-2)}+\sum_{l=0}^{q-3}(a_l+b_l)2^{l+q-2}\right)-\sum_{l_1,l_2=0}^{q-3}a_{l_1}b_{l_2}\frac{2^{l_1+l_2}(3q-4)}{2^{q-1}}+$$

$$+\frac{2^{2(q-2)}}{2^{q-1}}(6(q-2)-3q+8)+\sum_{l=0}^{q-3}(a_l+b_l)\frac{2^{l+q-2}}{2^{q-1}}(3(l+q-2)-3q+8)+$$

$$+\sum_{\substack{l_1,l_2=0,\\ l_1+l_2\geqslant q-2}}^{q-3}a_{l_1}b_{l_2}\frac{2^{l_1+l_2}(3(l_1+l_2)-3q+8)}{2^{q-1}}=$$

$$=A_q(a_{q-3},b_{q-3})+\sum_{k=0}^{q-4}(a_l+b_l)C_{q,l}+\Phi_q(a_0,\ldots,b_{q-3}),$$

где

$$A_q(x,y) = (2q-3) + 2(3\cdot 2^{q-2}-2) + (x+y)\times$$
$$\times\left(3\cdot 2^{q-3} - 2 - \frac{3q-4}{2}2^{q-3} + \frac{3(q-3)+2}{2}\cdot 2^{q-3}\right) =$$
$$= 2q-7+3\cdot 2^{q-1} + (x+y)\left(3\cdot 2^{q-4}-2\right);$$
$$C_{q,l} = 3\cdot 2^l - 2 - \frac{3q-4}{2}\cdot 2^l + \frac{3l+2}{2}\cdot 2^l =$$
$$= 2^l\left(3 - \frac{3q-4}{2} + \frac{3l+2}{2}\right) - 2 = 2^l\left(\frac{-3q+12+3l}{2}\right) - 2 < 0, \text{ при } l \leqslant q-4;$$
$$\Phi_q(a_0,\ldots,b_{q-3}) = -\sum_{l_1,l_2=0}^{q-3} a_{l_1}b_{l_2}\frac{2^{l_1+l_2}(3q-4)}{2^{q-1}} +$$
$$+\sum_{\substack{l_1,l_2=0\\ l_1+l_2\geqslant q-2}}^{q-3} a_{l_1}b_{l_2}\frac{2^{l_1+l_2}(3(l_1+l_2)-3q+8)}{2^{q-1}} < 0,$$

так как $3q-4 > 3(l_1+l_2)-3q+8$ при $l_1, l_2 \leqslant q-3$, и лемма полностью доказана. □

Теорема 21. *Для отклонения $D^{(1)}_{q,2}$ двумерной сетки Смоляка $Sm(q)$ с учетом кратности узлов при $q>3$ справедливо равенство*

$$D^{(1)}_{q,2} = D^{(1)}_{q,2}\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right) = 27\cdot 2^{q-4} + 2q - 11 = O\left(\frac{N^{(1)}_{q,2}}{\ln N^{(1)}_{q,2}}\right). \qquad (4.21)$$

Доказательство. На основании лемм 19 и 24 имеем:

$$D^{(1)}_{q,2} = \max_{2^{q-2}\leqslant k_1,k_2\leqslant 2^{q-1}-1} D^{(1)}_{q,2}\left(\frac{k_1}{2^{q-1}},\frac{k_2}{2^{q-1}}\right) =$$
$$= \max_{0\leqslant a_0,b_0,\ldots,a_{q-3},b_{q-3}\leqslant 1} D^{(1)}_{q,2}\left(\frac{k_1}{2^{q-2}},\frac{k_2}{2^{q-2}}\right) =$$
$$= \max_{0\leqslant a_{q-3},b_{q-3}\leqslant 1}\left(A_q(a_{q-3},b_{q-3}) + D(a_{q-3},b_{q-3})\right),$$

где

$$D(a_{q-3},b_{q-3}) = \max_{0\leqslant a_0,b_0,\ldots,a_{q-4},b_{q-4}\leqslant 1}\left(\sum_{k=0}^{q-4}(a_l+b_l)C_{q,l} + \Phi_q(a_0,\ldots,b_{q-3})\right) =$$
$$= \Phi_q(0,\ldots,0,a_{q-3},b_{q-3}) = -3a_{q-3}b_{q-3}2^{q-4}.$$

Действительно, согласно лемме 24 все сомножители $C_{q,l}$ отрицательные, поэтому максимальное значение первой суммы равно 0. Аналогично, все слагаемые в выражении для $\Phi_q(a_0, \ldots, b_{q-3})$, зависящие от $a_0, \ldots, b_{q-4}$ отрицательные или равны 0, если соответствующие a_l или b_l равно 0. Поэтому максимальное значение величины , стоящей под знаком максимума, достигается при $a_0 = b_0 = \ldots = a_{q-4} = b_{q-4} = 0$.

Отсюда следует, что

$$D_{q,2}^{(1)} = \max_{x,y=0,1} D_{q,2}^{(1)}\left(\frac{2^{q-2}+x2^{q-3}}{2^{q-1}}, \frac{2^{q-2}+y2^{q-3}}{2^{q-1}}\right) =$$
$$= \max_{x,y=0,1}\big(2q-7+3\cdot 2^{q-1}+(x+y)\big(3\cdot 2^{q-4}-2\big)-3x\cdot y2^{q-4}\big) =$$
$$= 2q-7+3\cdot 2^{q-1}+2(3\cdot 2^{q-4}-2)-3\cdot 2^{q-4} = 27\cdot 2^{q}-4+2q-11$$

и достигается при $x = y = 1$. Поэтому

$$D_{q,2}^{(1)} = D_{q,2}^{(1)}\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = 27\cdot 2^{q-4}+2q-11 = O\left(\frac{N_{q,2}^{(1)}}{\ln N_{q,2}^{(1)}}\right)$$

и теорема полностью доказана. □

Глава 5

Граничные функции класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для сеток Смоляка

5.1 Граничные функции

Пусть функция $f(x_1, x_2) \in A_2$. Рассмотрим *квадратурную формулу с весами* ρ_k $(k = 1, \ldots, N)$

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho_k f[\xi_1(k), \xi_2(k)] - R_N[f]. \tag{5.1}$$

Здесь через $R_N[f]$ обозначен линейный функционал погрешности приближенного интегрирования, получающейся при замене интеграла

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

взвешенным средним значением функции $f(x_1, x_2)$, вычисленным в точках

$$M_k = (\xi_1(k), \xi_2(k)) \qquad (k = 1 \ldots N).$$

Совокупность M точек M_k называется *сеткой*, а сами точки — *узлами квадратурной формулы* с *весами* ρ_k.

Для произвольных целых m_1, m_2 суммы $S(m_1, m_2)$, определённые равенством

$$S(m_1, m_2) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + m_2 \xi_2(k)]}, \tag{5.2}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки* M с весами, а суммы $S^*(m_1, m_2)$, определённые равенством

$$S^*(m_1, m_2) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + m_2 \xi_2(k)]}, \tag{5.3}$$

называются *нормированными тригонометрическими суммами сетки* M с весами.

Положим $\rho(M) = \sum\limits_{j=1}^{N} |\rho_j|$, тогда для всех нормированных тригонометрических сумм сетки с весами справедлива тривиальная оценка

$$|S^*(m_1, m_2)| \leqslant \frac{1}{N} \rho(M).$$

Сформулируем в нужных нам обозначениях частные случаи двух теорем Коробова о погрешности квадратурных формул, из книги [18] стр. 56, 57.

Теорема 22. *Пусть $f(x_1, x_2) \in A_2$, $C(m_1, m_2)$ — ее коэффициенты Фурье и $S(m_1, m_2)$ — тригонометрические суммы сетки M, тогда справедливо равенство* [1]

$$R_N[f] = \frac{1}{N} \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty}{}' C(m_1, m_2) S(m_1, m_2) +$$

$$+ C(0,0) \left(\frac{S(0,0)}{N} - 1 \right) = \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty}{}' C(m_1, m_2) S^*(m_1, m_2) + C(0,0) \left(S^*(0,0) - 1 \right) \tag{5.4}$$

и при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда и только тогда, когда узлы квадратурной формулы равномерно распределены с весами в единичном квадрате.

Кроме того

$$||R_n[\cdot]||_{A_2} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^2} |S^*(\vec{m})| \, .$$

Для нормы функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратуроной формуле на классе E_2^2, заданной равенстовом

$$||R_n[\cdot]||_{E_2^2} = \sup_{||f||_{E_2^2} = 1} |R_n[f]|$$

справедлива следующая теорема Коробова.

[1] Здесь $\sum'$ означает суммирование по $(m_1, m_2) \neq (0, 0)$.

Теорема 23. *Если $f(x_1, x_2) \in E_2^2$, то для нормы функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле справедливо равенство*

$$||R_N[\cdot]||_{E_2^2} = \frac{1}{N} \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty}{}' \frac{|S(m_1, m_2)|}{(\overline{m}_1 \overline{m}_2)^2} + \left| \frac{S(0,0)}{N} - 1 \right|, \qquad (5.5)$$

где сумма $S(m_1, m_s)$ определена равенством (5.2).

Класс функций E_2^2 является частным случаем выделения линейного многообразия в A_2 через условия на коэффициенты Фурье, а именно $A_{2,\psi}$ с помощью функции $\psi(m_1, m_2) > 0$ для которой

$$\sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} \frac{1}{\psi(m_1, m_2)} < \infty.$$

Пусть $f(x_1, x_2) \in A_2$. Функция $f(x_1, x_2) \in A_{2,\psi}$ тогда и только тогда, когда для ее коэффициентов Фурье

$$C(m_1, m_2) = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) e^{-2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2$$

выполняется условие:

$$|C(m_1, m_2)| \leqslant \frac{C}{\psi(m_1, m_2)}. \qquad (5.6)$$

где C не зависит от m_1, m_2.

На классе $A_{2,\psi}$ рассмотрим норму

$$||f||_{A_{2,\psi}} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^2} |C(m_1, m_2)| \psi(m_1, m_2)$$

относительно которой $A_{2,\psi}$ — несепарабельное банохово пространство.

Справедливо обобщение утверждения (5.5), что для нормы функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратуроной формуле на классе $A_{2,\psi}$ справедливо равенство:

$$||R_N[\cdot]||_{A_{2,\psi}} = \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty}{}' \frac{|S^*(\vec{m})|}{\psi(\vec{m})} + \frac{1}{\psi(\vec{0})} \left| S^*(\vec{0}) - 1 \right|. \qquad (5.7)$$

В частности, если [2] $\psi_2(\vec{m}) = (\overline{m}_1\overline{m}_2)^2$, то пространство $A_{2,\psi_2} = E_2^2$; если $\psi_{2,C_1}(\vec{m}) = (\overline{m}_1\overline{m}_2)^2 C_1^{r(\vec{m})}$, где $r(\vec{m})$ — количество ненулевых m_1, m_2, то пространство $A_{2,\psi_2,C_1} = E_2^2(\cdot, C_1)$.

Ясно, что класс функций (5.6) относительно нормы $\|\cdot\|_{A_{2,\psi}}$ является шаром радиуса C. Будем его обозначать через $A_{2,\psi}(C)$. В частности, получаем известные классы функций $E_2^2(C) = A_{2,\psi_2}(C)$, $E_2^2(C, C_1) = A_{2,\psi_2,C_1}(C)$.

Функции $f \in A_{2,\psi}$, для которых $||f||_{A_{2,\psi}} = 1$ и $|R_n(f)| = ||R_n[\cdot]||_{A_{2,\psi}}$, называют *граничными функциями класса* $A_{2,\psi}(C)$. Нетрудно видеть, что для функции $g_0(\vec{x}) \in A_{2,\psi}$ с коэффициентами Фурье[3]

$$C_0(\vec{m}) = \begin{cases} \dfrac{\overline{S^*(\vec{m})}}{|S^*(\vec{m})|\,\psi(\vec{m})}, & \text{если } S^*(\vec{m}) \neq 0, \\ 0, & \text{если } S^*(\vec{m}) = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

справедливы равенства

$$\|g_0(\vec{x})\|_{A_{2,\psi}} = 1, \qquad |R_N[g_0]| = \|R_N[\cdot]\|_{A_{2,\psi}}, \tag{5.9}$$

таким образом, функция $g_0(\vec{x})$ — граничная функция класса $A_{2,\psi}$.

В конечном виде норма линейного функционала погрешности приближенного интегрирования для заданного класса функций и заданной сетки вычисляется в небольшом количестве случаев. Ясно, что если при некоторых значениях m_1, m_2 тригонометрическая сумма $S(m_1, m_2) = 0$, то граничная функция класса сеткой определена неоднозначно. Если для любого набора целых m_1, m_s тригонометрическая сумма $S(m_1, m_2) \geqslant 0$, то граничная функция класса определяется особенно просто:

$$f(x_1, \ldots, x_s) = C \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}}{\psi(m_1, m_2)}. \tag{5.10}$$

и не зависит от конкретной сетки с неотрицательными тригонометрическими суммами.

Впервые понятие граничной функции класса содержится в работе Н. М. Коробов [17], а более подробно в его монографии [18].

[2] Для вещественных m, следуя Коробову, полагаем $\overline{m} = \max(1, |m|)$.

[3] Здесь $\overline{S^*(\vec{m})}$ означает комплексное сопряжение к величине $S^*(\vec{m})$.

Как указывает Н. М. Коробов, наиболее интересным является случай граничных функций класса, когда они выражаются в элементарных функциях.

В монографии [18] приводится пример граничной функций класса для сеток с неотрицательными тригонометрическими суммами. Функция $\psi_0(m_1, m_2)$, заданная с помощью равенств

$$\psi_0(m) = \psi(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ \frac{\pi^2}{6} m^2, & \text{если } m \neq 0, \end{cases}$$

$$\psi_0(m_1, m_2) = \psi_0(m_1)\psi_0(m_2), \tag{5.11}$$

для которой граничная функция

$$h(x_1, x_2) = \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)}}{\psi_0(m_1, m_2)} \tag{5.12}$$

имеет простое выражение

$$h(x_1, x_2) = 9 \prod_{\nu=1}^{2} (1 - 2\{x_\nu\})^2. \tag{5.13}$$

Таким образом, функция $9C \prod\limits_{\nu=1}^{2} (1 - 2\{x_\nu\})^2$ является граничной функцией класса $E_2^2\left(C, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для любой сетки с неотрицательными тригонометрическими суммами, но как показано в работе [41] нормированные тригонометрические суммы двумерных сеток Смоляка с весами принимают одно из трех значений — 0, -1, 1 (см. [41], стр. 120 — 121).

5.2 Оператор взвешенных сеточных средних и разбиение Коробова

В работе [3] (см. стр. 194 — 197) для любой сетки M с весами $\vec{\rho}$ определен на пространстве периодических функций E_2^2 линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних, заданный равенством

$$g(\vec{x}) = A_{M,\vec{\rho}} f(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho_k f[x_1 + \xi_1(k), x_2 + \xi_2(k)]. \tag{5.14}$$

Обозначим через $A_{M,\vec\rho}C(\vec m)$ действие линейного оператора $A_{M,\vec\rho}$ на коэффициенты Фурье функции $f(\vec x)$. Приведем формулировку леммы из работы [3] (см. стр. 194).

Лемма 25. *Для любой периодической функции $f(\vec x)$ из пространства E_2^2 и её коэффициентов Фурье $C(\vec m)$ разложения в ряд Фурье*

$$f(\vec x) = \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty} C(\vec m) e^{2\pi i(\vec m,\vec x)} \tag{5.15}$$

справедливо равенство

$$A_{M,\vec\rho}C(\vec m) = \frac{S_{M,\vec\rho}(\vec m)}{N} C(\vec m) = S^*_{M,\vec\rho}(\vec m) C(\vec m) \tag{5.16}$$

где $S_{M,\vec\rho}(\vec m)$ — тригонометрическая сумма сетки с весами, а $S^*_{M,\vec\rho}(\vec m)$ — нормированная тригонометрическая сумма сетки с весами.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\|A_{M,\vec\rho} f(\vec x)\|_{E_2^2} \leqslant \frac{\rho(M)}{N} \|f(\vec x)\|_{E_2^2}. \tag{5.17}$$

Линейный оператор $A_{M,\vec\rho}$ взвешенных сеточных средних, не увеличивающий норму любой функции, в статье [3] стр. 195, назывался нормальным.

Очевидно, что необходимым и достаточным условием того, что линейный оператор $A_{M,\vec\rho}$ взвешенных сеточных средних не увиличивает норму любой функции является ограниченность сверху единицей модуля всех нормированных тригонометрических сумм с весами: $\left|S^*_{M,\vec\rho}(\vec m)\right| \leqslant 1$ ($\vec m \in \mathbb{Z}^2$), и, следовательно, оператор сеточных средних по двумерной сетке Смоляка является не увеличивающим норму любой функции.

В работе [3] (см. стр. 206 — 209) для любой сетка с весами $< M, \vec\rho >$ определены пять подмножеств фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^2$:

$$K_0 = \{\vec m \in \mathbb{Z}^2 \,|\, S_{M,\vec\rho}(\vec m) = 0\}, \tag{5.18}$$

$$K_1 = \{\vec m \in \mathbb{Z}^2 \,|\, S_{M,\vec\rho}(\vec m) = |M|\}, \tag{5.19}$$

$$K_2 = \{\vec m \in \mathbb{Z}^2 \,|\, S_{M,\vec\rho}(\vec m) \neq |M|, \, |S_{M,\vec\rho}(\vec m)| = |M|\}, \tag{5.20}$$

$$K_3 = \{\vec m \in \mathbb{Z}^2 \,|\, |S_{M,\vec\rho}(\vec m)| < |M|\}, \tag{5.21}$$

$$K_4 = \{\vec m \in \mathbb{Z}^2 \,|\, |S_{M,\vec\rho}(\vec m)| > |M|\}. \tag{5.22}$$

Таким образом, $\mathbb{Z}^2 = K_0 \bigcup K_1 \bigcup K_2 \bigcup K_3 \bigcup K_4$.

Множества K_0, K_1, K_2, K_3 и K_4 порождают разбиение пространства периодических функций E_2^2 на подпространства E_2^{2,K_j} $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$, где для произвольного подмножества $K \subset \mathbb{Z}^2$

$$E_2^{2,K} = \left\{ f(\vec{x}) \in E_2^2 \;\middle|\; f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K} C(\vec{m}) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})} \right\}. \tag{5.23}$$

Такое разбиение названо разбиением Коробова, так как оно фактически возникало в его работах, когда он проводил оценки погрешности приближенного интегрирования по различным сеткам и естественным образом область суммирования разбивалась в зависимости от величины тригонометрической суммы сетки.

Из определения множеств K_0, K_1, K_2, K_3 и K_4 и свойств нормированных тригонометрических сумм двумерных сеток Смоляка следует, что:

- подпространство E_2^{2,K_0} является ядром линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних;
- E_2^{2,K_1} — инвариантное подпространство, то есть все функции из этого подпространства переходят сами в себя под действием оператора $A_{M,\vec{\rho}}$;
- E_2^{2,K_2} — подпространство постоянной нормы без неподвижных точек, то есть все функции из этого подпространства сохраняют свою норму под действием оператора $A_{M,\vec{\rho}}$;
- E_2^{2,K_3} и E_2^{2,K_4} — пустые подпространства.

Отсюда следует, что каждая периодическая функция $f(\vec{x})$ из пространства E_2^2 представима в виде суммы соответствующих компонент из разбиения Коробова:

$$f(\vec{x}) = f_0(\vec{x}) + f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x}).$$

Для любого несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 f_j(\vec{x}) d\vec{x} = 0 \quad (j \neq 1), \qquad \int_0^1 \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_0^1 \int_0^1 f_1(\vec{x}) d\vec{x}. \tag{5.24}$$

Для двумерных сеток Смоляка в силу линейности функционала погрешности приближенного интегрирования, имеем равенство

$$R_N[f] = R_N[f_1] + R_N[f_2], \tag{5.25}$$

так как на подпространстве E_2^{2,K_0} этот функционал тождественно равен нулю.

Теперь, пользуясь граничной функцией $h(x_1, x_2) = 9(1-2\{x_1\})^2(1-2\{x_2\})^2$ на классе $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для параллелепипедальных сеток, нетрудно с помощью оператора взвешенных сеточных средних по сеткам Смоляка построить граничную функцию для двумерных сеток Смоляка.

Теорема 24. *Пусть функция $G(x_1, x_2)$ задана формулой*

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{2^q} \sum_{\nu=1}^{q-1} \sum_{k_1=0}^{2^\nu-1} \sum_{k_2=0}^{2^{q-\nu}-1} h\left(x_1 + \frac{k_1}{2^\nu}, x_2 + \frac{k_2}{2^{q-\nu}}\right) -$$

$$-\frac{1}{2^{q-1}} \sum_{\nu=1}^{q-2} \sum_{k_1=0}^{2^\nu-1} \sum_{k_2=0}^{2^{q-1-\nu}-1} h\left(x_1 + \frac{k_1}{2^\nu}, x_2 + \frac{k_2}{2^{q-1-\nu}}\right), \tag{5.26}$$

тогда $G(x_1, x_2)$ — граничная функция класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для сетки Смоляка.

Доказательство. Действительно, согласно формулам (5.11) — (5.13) справедливо равенство

$$h(x_1, x_2) = \sum_{m_1, m_2=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}}{\psi_0(m_1, m_2)}. \tag{5.27}$$

Так как функция $G(x_1, x_2)$ получена из $h(x_1, x_2)$ с помощью оператора взвешенных сеточных средних по сеткам Смоляка, то по лемме 25 имеем

$$G(x_1, x_2) = \sum_{m_1, m_2=-\infty}^{\infty} \frac{S^*(m_1, m_2)e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}}{\psi_0(m_1, m_2)}. \tag{5.28}$$

Заметим, что по свойствам нормированных тригонометрических сумм с весами сеток Смоляка справедливы равенства

$$S^*(m_1, m_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } (m_1, m_2) \in K_0, \\ 1, & \text{если } (m_1, m_2) \in K_1, \\ -1, & \text{если } (m_1, m_2) \in K_2. \end{cases}$$

Отсюда и из равенства (5.28) следует, что

$$G(x_1,x_2)=\sum_{(m_1,m_2)\in K_1}\frac{e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}}{\psi_0(m_1,m_2)}-\sum_{(m_1,m_2)\in K_2}\frac{e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}}{\psi_0(m_1,m_2)}. \qquad (5.29)$$

Таким образом, $\|G(x_1,x_2)\|_{E_2^2\left(1,\frac{\pi^2}{6}\right)}=1$ и $G(x_1,x_2)\in E_2^2\left(1,\frac{\pi^2}{6}\right)$. Далее по теореме Коробова (теорема 22, стр. 89) для величины погрешности приближенного интегрирования получим

$$R_{N^{(1)}(q)}[G]={\sum_{(m_1,m_2)\in K_1}}'\frac{S^*(m_1,m_2)}{\psi_0(m_1,m_2)}-\sum_{(m_1,m_2)\in K_2}\frac{S^*(m_1,m_2)}{\psi_0(m_1,m_2)}=$$

$$={\sum_{(m_1,m_2)\in K_1}}'\frac{1}{\psi_0(m_1,m_2)}+\sum_{(m_1,m_2)\in K_2}\frac{1}{\psi_0(m_1,m_2)}=\|R_{N^{(1)}(q)}[\cdot]\|_{E_2^2\left(1,\frac{\pi^2}{6}\right)}, \qquad (5.30)$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

5.3 Обобщенные равномерные сетки и явный вид граничной функции $G(x_1,x_2)$

Для нахождения явного вида граничной функции $G(x_1,x_2)$ заметим, что оператор $A_{Sm(q),\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних по сеткам Смоляка, заданный формулой

$$A_{Sm(q),\vec{\rho}}f(x_1,x_2)=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-\nu}-1}f\left(x_1+\frac{k_1}{2^\nu},x_2+\frac{k_2}{2^{q-\nu}}\right)-$$

$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-1-\nu}-1}f\left(x_1+\frac{k_1}{2^\nu},x_2+\frac{k_2}{2^{q-1-\nu}}\right), \qquad (5.31)$$

выражается через операторы $A_{M(\nu_1,\nu_2),\vec{1}}$ взвешенных сеточных средних по обобщенным равномерным сеткам $M(\nu_1,\nu_2)$:

$$A_{M(\nu_1,\nu_2),\vec{1}}f(x_1,x_2)=\frac{1}{2^{\nu_1+\nu_2}}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{\nu_2}-1}f\left(x_1+\frac{k_1}{2^{\nu_1}},x_2+\frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right), \qquad (5.32)$$

$$A_{Sm(q),\vec{\rho}}f(x_1,x_2)=\sum_{\nu=1}^{q-1}A_{M(\nu,q-\nu),\vec{1}}f(x_1,x_2)-\sum_{\nu=1}^{q-2}A_{M(\nu,q-1-\nu),\vec{1}}f(x_1,x_2). \qquad (5.33)$$

В работе [3] (см. стр. 210) доказана следующая лемма.

Лемма 26. *Для обобщенной равномерной сетки $M(\nu_1, \nu_2)$, функции $h(x_1, x_2)$ и компоненты $h_1(x_1, x_2)$ из разбиения Коробова справедливо равенство*

$$h_1(x_1,x_2) = \left(1 + \frac{2}{4^{\nu_1}} - \frac{12}{4^{\nu_1}}\left\{2^{\nu_1}x_1\right\}\left(1 - \left\{2^{\nu_1}x_1\right\}\right)\right) \cdot$$
$$\cdot \left(1 + \frac{2}{4^{\nu_2}} - \frac{12}{4^{\nu_2}}\left\{2^{\nu_2}x_2\right\}\left(1 - \left\{2^{\nu_2}x_2\right\}\right)\right). \qquad (5.34)$$

Для компактности записи введем обозначение

$$p_\nu(x) = 1 + \frac{2}{4^\nu} - \frac{12}{4^\nu}\left\{2^\nu x\right\}\left(1 - \left\{2^\nu x\right\}\right).$$

Теорема 25. *Для граничной функции $G(x_1, x_2)$ класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для сетки Смоляка справедливо равенство*

$$G(x_1,x_2) = \sum_{\nu=1}^{q-1} p_\nu(x_1)p_{q-\nu}(x_2) - \sum_{\nu=1}^{q-2} p_\nu(x_1)p_{q-1-\nu}(x_2). \qquad (5.35)$$

Доказательство. Заметим, что

$$h_1(x_1,x_2) = A_{M(\nu_1,\nu_2),\bar{1}} h(x_1,x_2) = p_{\nu_1}(x_1)p_{\nu_2}(x_2).$$

Отсюда и из формул (5.26) и (5.33) следует утверждение теоремы. □

Лемма 27. *Справедливо равенство*

$$\int_0^1 p_\nu(x)dx = 1. \qquad (5.36)$$

Доказательство. Функция $p_\nu(x)$ периодична с периодом $\frac{1}{2^\nu}$, поэтому

$$\int_0^1 p_\nu(x)dx = 2^\nu \int_0^{\frac{1}{2^\nu}} p_\nu(x)dx = 2^\nu \int_0^{\frac{1}{2^\nu}} \left(1 + \frac{2}{4^\nu} - \frac{12}{4^\nu} \cdot 2^\nu x\left(1 - 2^\nu x\right)\right) dx =$$
$$= \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{4^\nu} - \frac{12}{4^\nu} x\left(1 - x\right)\right) dx = 1 + \frac{2}{4^\nu} - \frac{12}{4^\nu}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1$$

и лемма доказана. □

Лемма 28. *Справедливо равенство*

$$\int_0^1 \int_0^1 G(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 1. \qquad (5.37)$$

Доказательство. Действительно,

$$\int_0^1\int_0^1 G(x_1,x_2)dx_1dx_2=\sum_{\nu=1}^{q-1}\int_0^1\int_0^1 p_\nu(x_1)p_{q-\nu}(x_2)dx_1dx_2-$$
$$-\sum_{\nu=1}^{q-2}\int_0^1\int_0^1 p_\nu(x_1)p_{q-1-\nu}(x_2)dx_1dx_2=\sum_{\nu=1}^{q-1}\int_0^1 p_\nu(x_1)dx_1\int_0^1 p_{q-\nu}(x_2)dx_2-$$
$$-\sum_{\nu=1}^{q-2}\int_0^1 p_\nu(x_1)dx_1\int_0^1 p_{q-1-\nu}(x_2)dx_2=(q-1)-(q-2)=1$$

и лемма доказана. □

Лемма 29. *Для суммы*

$$\sigma(\nu,\mu)=\frac{1}{2^\nu}\sum_{k=0}^{2^\nu-1}p_\mu\left(\frac{k}{2^\nu}\right)$$

справедливо равенство

$$\sigma(\nu,\mu)=1+\frac{2}{4^{\max(\nu,\mu)}}. \tag{5.38}$$

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. Пусть $\nu\leqslant\mu$, тогда

$$p_\mu\left(\frac{k}{2^\nu}\right)=1+\frac{2}{4^\mu}-\frac{12}{4^\mu}\left\{2^{\mu-\nu}k\right\}\left(1-\left\{2^{\mu-\nu}k\right\}\right)=1+\frac{2}{4^\mu}$$

   и $\sigma(\nu,\mu)=1+\frac{2}{4^\mu}$.

2. Пусть $\nu>\mu$, тогда

$$\sigma(\nu,\mu)=\frac{1}{2^\nu}\sum_{k=0}^{2^\nu-1}\left(1+\frac{2}{4^\mu}-\frac{12}{4^\mu}\left\{\frac{k}{2^{\nu-\mu}}\right\}\left(1-\left\{\frac{k}{2^{\nu-\mu}}\right\}\right)\right)=$$
$$=1+\frac{2}{4^\mu}-\frac{12}{4^\mu}\cdot\frac{1}{2^{\nu-\mu}}\sum_{k=0}^{2^{\nu-\mu}-1}\frac{k}{2^{\nu-\mu}}\left(1-\frac{k}{2^{\nu-\mu}}\right)=1+\frac{2}{4^\mu}-\frac{12}{4^\mu}\cdot\frac{1}{2^{\nu-\mu}}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{2^{\nu-\mu}-1}{2}-\frac{(2^{\nu-\mu}-1)(2\cdot 2^{\nu-\mu}-1)}{6\cdot 2^{\nu-\mu}}\right)=1+\frac{2}{4^\mu}-\frac{2}{4^\mu}\cdot\frac{4^{\nu-\mu}-1}{4^{\nu-\mu}}=1+\frac{2}{4^\nu}$$

и лемма доказана. □

Лемма 30. *Для суммы*

$$S(q)=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-\nu}-1}G\left(\frac{k_1}{2^\nu},\frac{k_2}{2^{q-\nu}}\right)-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-1-\nu}-1}G\left(\frac{k_1}{2^\nu},\frac{k_2}{2^{q-1-\nu}}\right)$$

справедливо равенство

$$S(q)=S_1(q)-2S_2(q)+S_3(q), \tag{5.39}$$

где

$$S_1(q)=\sum_{\nu,\mu=1}^{q-1}\left(1+\frac{2}{4^{\max(\nu,\mu)}}\right)\left(1+\frac{2}{4^{\max(q-\nu,q-\mu)}}\right),$$

$$S_2(q)=\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\max(\nu,\mu)}}\right)\left(1+\frac{2}{4^{\max(q-\nu,q-1-\mu)}}\right),$$

$$S_3(q)=\sum_{\nu,\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\max(\nu,\mu)}}\right)\left(1+\frac{2}{4^{\max(q-1-\nu,q-1-\mu)}}\right).$$

Доказательство. Воспользовавшись формулой (5.35), получим

$$S(q)=$$

$$=\frac{1}{2^q}\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-\nu}-1}\left(\sum_{\mu=1}^{q-1}p_\mu\left(\frac{k_1}{2^\nu}\right)p_{q-\mu}\left(\frac{k_2}{2^{q-\nu}}\right)-\sum_{\mu=1}^{q-2}p_\mu\left(\frac{k_1}{2^\nu}\right)p_{q-1-\mu}\left(\frac{k_2}{2^{q-\nu}}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{2^{q-1}}\sum_{\nu=1}^{q-2}\sum_{k_1=0}^{2^\nu-1}\sum_{k_2=0}^{2^{q-1-\nu}-1}\left(\sum_{\mu=1}^{q-1}p_\mu\left(\frac{k_1}{2^\nu}\right)p_{q-\mu}\left(\frac{k_2}{2^{q-1-\nu}}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{\mu=1}^{q-2}p_\mu\left(\frac{k_1}{2^\nu}\right)p_{q-1-\mu}\left(\frac{k_2}{2^{q-1-\nu}}\right)\right)=\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{\mu=1}^{q-1}\sigma(\nu,\mu)\sigma(q-\nu,q-\mu)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{\mu=1}^{q-2}\sigma(\nu,\mu)\sigma(q-\nu,q-1-\mu)-\sum_{\nu=1}^{q-2}\sum_{\mu=1}^{q-1}\sigma(\nu,\mu)\sigma(q-1-\nu,q-\mu)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{q-2}\sum_{\mu=1}^{q-2}\sigma(\nu,\mu)\sigma(q-1-\nu,q-1-\mu).$$

Так как $\sigma(\mu,\nu)=\sigma(\nu,\mu)$, то суммы со знаком минус равны и по лемме 29 получаем доказываемое утверждение. □

Лемма 31. *Справедливо равенство*

$$S(q)=1+\frac{3(q-1)}{4^{q-1}}+\frac{8}{16^{q-1}}. \tag{5.40}$$

Доказательство. Имеем:

$$S_1(q)-S_2(q)=\sum_{\nu,\mu=1}^{q-1}\left(1+\frac{2}{4^{\max(\nu,\mu)}}\right)\left(1+\frac{2}{4^{\max(q-\nu,q-\mu)}}\right)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\max(\nu,\mu)}}\right)\left(1+\frac{2}{4^{\max(q-\nu,q-1-\mu)}}\right)=\sum_{\nu=1}^{q-1}\left(1+\frac{2}{4^{q-1}}\right)\left(1+\frac{2}{4^{q-\nu}}\right)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\max(\nu,\mu)}}\right)\left(\frac{2}{4^{\max(q-\nu,q-\mu)}}-\frac{2}{4^{\max(q-\nu,q-1-\mu)}}\right).$$

Аналогично,

$$S_2(q)-S_3(q)=\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\max(\nu,\mu)}}\right)\left(1+\frac{2}{4^{\max(q-\nu,q-1-\mu)}}\right)-$$

$$-\sum_{\nu,\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\max(\nu,\mu)}}\right)\left(1+\frac{2}{4^{\max(q-1-\nu,q-1-\mu)}}\right)=\sum_{\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{q-1}}\right)\left(1+\frac{2}{4^{q-1-\mu}}\right)+$$

$$+\sum_{\nu,\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\max(\nu,\mu)}}\right)\left(\frac{2}{4^{\max(q-\nu,q-1-\mu)}}-\frac{2}{4^{\max(q-1-\nu,q-1-\mu)}}\right).$$

Поэтому

$$S_1(q)=\sum_{\nu=1}^{q-1}\left(1+\frac{2}{4^{q-1}}\right)\left(1+\frac{2}{4^{q-\nu}}\right)-\sum_{\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{q-1}}\right)\left(1+\frac{2}{4^{q-1-\mu}}\right)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\max(\nu,\mu)}}\right)\left(\frac{2}{4^{\max(q-\nu,q-\mu)}}-\frac{2}{4^{\max(q-\nu,q-1-\mu)}}\right)-$$

$$-\sum_{\nu,\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\max(\nu,\mu)}}\right)\left(\frac{2}{4^{\max(q-\nu,q-1-\mu)}}-\frac{2}{4^{\max(q-1-\nu,q-1-\mu)}}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{2}{4^{q-1}}\right)\left(\sum_{\nu=1}^{q-1}\left(1+\frac{2}{4^{\nu}}\right)-\sum_{\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\mu}}\right)\right)+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{q-1}}\right)\left(\frac{2}{4^{q-\mu}}-\frac{2}{4^{q-1-\mu}}\right)+$$

$$+\sum_{\nu,\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\max(\nu,\mu)}}\right)\left(\frac{2}{4^{\max(q-\nu,q-\mu)}}-\frac{4}{4^{\max(q-\nu,q-1-\mu)}}+\frac{2}{4^{\max(q-1-\nu,q-1-\mu)}}\right)=$$

$$=S_4(q)+S_5(q),$$

где

$$S_4(q)=\left(1+\frac{2}{4^{q-1}}\right)\left(\sum_{\nu=1}^{q-1}\left(1+\frac{2}{4^{\nu}}\right)-\sum_{\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\mu}}\right)\right)+$$
$$+\sum_{\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{q-1}}\right)\left(\frac{2}{4^{q-\mu}}-\frac{2}{4^{q-1-\mu}}\right)=\left(1+\frac{2}{4^{q-1}}\right)^2+\left(1+\frac{2}{4^{q-1}}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{\mu=2}^{q-1}\frac{2}{4^{\mu}}-\sum_{\mu=1}^{q-2}\frac{2}{4^{\mu}}\right)=\left(1+\frac{2}{4^{q-1}}\right)^2-\left(1+\frac{2}{4^{q-1}}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{4^{q-1}}\right)=$$
$$=\left(1+\frac{2}{4^{q-1}}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{4^{q-1}}\right),$$

$$S_5(q)=$$
$$=\sum_{\nu,\mu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\max(\nu,\mu)}}\right)\left(\frac{2}{4^{\max(q-\nu,q-\mu)}}-\frac{4}{4^{\max(q-\nu,q-1-\mu)}}+\frac{2}{4^{\max(q-1-\nu,q-1-\mu)}}\right)=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{q-2}\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\left(1+\frac{2}{4^{\nu}}\right)\left(\frac{2}{4^{q-\mu}}-\frac{4}{4^{q-1-\mu}}+\frac{2}{4^{q-1-\mu}}\right)+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\nu}}\right)\left(\frac{2}{4^{q-\nu}}-\frac{4}{4^{q-\nu}}+\frac{2}{4^{q-1-\nu}}\right)+$$
$$+\sum_{\mu=1}^{q-2}\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\left(1+\frac{2}{4^{\mu}}\right)\left(\frac{2}{4^{q-\nu}}-\frac{4}{4^{q-\nu}}+\frac{2}{4^{q-1-\nu}}\right)=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\nu}}\right)\left(\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{2}{4^{q-\mu}}-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{4}{4^{q-1-\mu}}+\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{2}{4^{q-1-\mu}}+\frac{2}{4^{q-\nu}}-\frac{4}{4^{q-\nu}}+\frac{2}{4^{q-1-\nu}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{2}{4^{q-\mu}}-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{4}{4^{q-\mu}}+\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{2}{4^{q-1-\mu}}\right)=\sum_{\nu=1}^{q-2}\left(1+\frac{2}{4^{\nu}}\right)\frac{6}{4^{q-\nu}}=$$
$$=\frac{12(q-2)}{4^q}+\frac{1}{2}-\frac{2}{4^{q-1}}.$$

Отсюда следует, что

$$S(q)=\left(1+\frac{2}{4^{q-1}}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{4^{q-1}}\right)+\frac{12(q-2)}{4^q}+\frac{1}{2}-\frac{2}{4^{q-1}}=1+\frac{3(q-1)}{4^{q-1}}+\frac{8}{16^{q-1}}$$

и лемма доказана. □

Теорема 26. *Для нормы* $\|R_{N^{(1)}(q)}[\cdot]\|_{E_2^2\left(1,\frac{\pi^2}{6}\right)}$ *линейного функционала погрешности квадратурной формулы (10) справедливо равенство*

$$\|R_{N^{(1)}(q)}[\cdot]\|_{E_2^2\left(1,\frac{\pi^2}{6}\right)} = \frac{3(q-1)}{4^{q-1}} + \frac{8}{16^{q-1}}. \tag{5.41}$$

Доказательство. Действительно, из формулы (5.30) (стр. 96) следует

$$\|R_{N^{(1)}(q)}[\cdot]\|_{E_2^2\left(1,\frac{\pi^2}{6}\right)} = R_{N^{(1)}(q)}[G] =$$
$$= S(q) - \int_0^1 \int_0^1 G(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{3(q-1)}{4^{q-1}} + \frac{8}{16^{q-1}}$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

- Для гиперболической дзета-функции сеток с весами, которая равна норме линейного функционала погрешности на классе периодических функций $E_s^{\alpha,q}$ справедлива обобщенная теорема Бахвалова — Коробова, в которой роль гиперполического параметра решётки играют первый, второй и третий гиперболические параметры сетки с весами (см. теорему 12 стр. 34).

- Количество узлов сетки Смоляка с учетом кратности и без учета кратности имеют одинаковый порядок, но первое количество в $3 - \frac{4}{q}$ раз больше второго (см. теорему 13 стр. 37 и теорему 14 стр. 40).

- Тригонометрические суммы сеток Смоляка с весами принимают только три значения — 0, -1, 1 (см. лемму 7 стр. 48), а квадратурные формулы с этими сетками задают ненасышаемый алгоритм численного интегрирования (см. теорему 16 стр. 51).

- Квадратурные формулы по сеткам Смоляка с весами являтся ненасышаемыми квадратурными формулами интерполяционного типа (см. стр. 76).

- Для граничной функции на классе $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ получено явное выражение (см. теорему 25 стр. 97), которое позволяет явно вычислить норму $\|R_{N^{(1)}(q)}[\cdot]\|_{E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)}$ линейного функционала погрешности квадратурной формулы (см. теорему 26 стр. 101).

- Для отклонения сетки Смоляка с учетом весов получена точная формула (см. теорему 21 стр. 86).

Литература

[1] Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. N 4. С. 3–18.

[2] Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.

[3] Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник 2008 Т. 9, вып. 1(25). С. 185 — 223.

[4] Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82 — 90.

[5] Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. — Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. — №6090–84.

[6] Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6089–84.

[7] Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. — Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. — №6091–84.

[8] Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Яфаева Р. Р. О сетках С. А. Смоляка // "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: ТулГУ, 2002. С. 18–20.

[9] Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. 1998. Т. 4, вып. 3. С. 56–67.

[10] Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2001. Т. 7, вып. 1. С. 82–86.

[11] Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решетки в гиперболическом кресте при малых значениях параметра // Всерос. научн. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики Тула: Изд-во ТулГУ, 2000. С. 29–30

[12] Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. №6. С. 1062 — 1065.

[13] Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та. 1959. №4. С. 19 — 25.

[14] Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. №6. С. 1207 — 1210.

[15] Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 1009—1012.

[16] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

[17] Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83 — 90.

[18] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

[19] Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР. 1963. Т. 148. №5, С. 1042 — 1045.

[20] Соболь И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. / М.: Наука, 1969.

[21] Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. №4. С. 818–821.

[22] Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

[23] Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. / М.: МИР, 1974.

[24] Faure H. Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimention s) // Acta Arith. 1982. V 41. P. 337–351.

[25] Halton J. H. On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals. // Numerische Math. 1960. V 27. №2 P. 84 – 90.

[26] Hammersley J. M. Monte-Carlo methods for sobving multivariable problems // Proc. N 4. Acad. Sci. 1960.

[27] Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313–352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984).

[28] Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" . Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90 — 98.

[29] Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 4, ч. 2. С. 47 — 52.

[30] Dobrovolskaya, L. P., Dobrovolsky, M. N., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovolsky, N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. V. 211. 2014. P. 23-62. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_2

[31] Добровольский Н. Н., Ребров Е. Д. Квадратичное отклонение двумерных сеток Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула, Изд-во ТулГУ, 2008. С. 51 – 52.

[32] Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Проблемно ориентированная информационно вычислительная система ТМК (теоретико-числовой метод Коробова) // Роль университетов в поддержке гуманитарных научных исследований: Материалы V Междунар. науч.-практ. конф.: В 2 т. / Отв. ред. О. Г. Вронский. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2010. Доп. том.

[33] Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток / Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2012. 193 с.

[34] Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2012. 284 с.

[35] Dobrovolskiy N. M., Dobrovolskaya L. P., Dobrovolskiy N. N., Ogorodnichuk N. K., Rebrov E. D. Algorithms fot computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology". Odessa, August 20 — 26, 2012. p. 22 — 24.

[36] Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Юшина Е. И. О матричной форме теоремы Галуа о чисто периодических цепных дробях // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 3(43). С. 47 — 52.

[37] Добровольская Л. П., Добровольский М. Н. , Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вы-

числение оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4 — 107.

Основные работы автора по темме диссертации

[38] **Добровольский Н.Н., Киселева О.В., Симонов А.С. Граничные функции класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для сеток Смоляка // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2011. Вып. 2. С. 11—29.**

[39] **Добровольский Н. Н. О гиперболическом параметре сетки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч. 1. С. 6 — 18.**

[40] Добровольский Н. Н. О числе целых точек в гиперболическом кресте при значениях параметра $1 \leqslant t < 21$ // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып.1. С. 91 — 95.

[41] Добровольский Н. Н. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110 — 152.

[42] Добровольский Н. Н. О тригонометрическом полиноме сетки Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула, Изд-во ТулГУ, 2007. С. 36 – 36.

[43] Добровольский Н. Н. О граничных функциях класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для сеток Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ, 2011.

[44] Добровольский Н. Н. ПОИВС ТМК: Гиперболический параметр сеток с весами // Материалы международной научно-практической конферен-

ции "МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУР И НАНОТЕХНОЛОГИИ". Тула, 3-7 октября 2011 изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого С. 266 — 267.