МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.984.5

Зыкова Татьяна Валерьевна

ФОРМУЛЫ СЛЕДОВ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ЗАМКНУТЫМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ПОТОКОМ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
В. Е. Подольский

МОСКВА
2014

Содержание

Стр.

ВВЕДЕНИЕ 4

Глава 1. ФОРМУЛЫ СЛЕДОВ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ЗАМКНУТЫМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ПОТОКОМ 25

1.1. Предварительные сведения 25

1.1.1. Многообразие ML 25

1.1.2. Оператор Лапласа-Бельтрами на многообразии ML 30

1.1.3. Спектральные свойства оператора Лапласа-Бельтрами 36

1.2. Построение и вычисление регуляризованного следа возмущенного оператора Лапласа-Бельтрами на ML 39

1.2.1. Построение формулы регуляризованного следа для собственных чисел оператора $-\Delta_{ML} = -\tilde{\Delta}_{ML} + B$ и $-\tilde{\Delta}_{ML}$ 42

1.2.2. Построение регуляризованного следа для собственных чисел операторов $-\Delta_{ML} + q$ и $-\Delta_{ML}$ 48

1.2.3. Сведение общей формулы регуляризованного следа для собственных чисел оператора $-\Delta + q$ и $\varkappa_{ki}$ 50

1.2.4. Связь дзета-функции и тета-функции оператора Лапласа-Бельтрами 51

1.2.5. Вычисление формулы регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами на ML 53

1.3. Задача нахождения регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами на многообразиях с замкнутыми геодезическими в случае общего положения 59

1.3.1. Общий вид метрик в случае общего положения 59

1.3.2. Оператор Лапласа на многообразиях в случае общего положения 61

1.3.3. Вычисление регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами на многообразии в случае общего положения . . . 63

ПРИЛОЖЕНИЕ 70

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 86

ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является исследование задач теории регуляризованных следов дифференциальных операторов на двумерных многообразиях с замкнутыми геодезическими. В диссертации исследован спектр, дзета- и тета-функции и получены формулы регуляризованных следов возмущенного оператора Лапласа-Бельтрами на разных типах многообразий с замкнутым геодезическим потоком.

Известны два основных метода исследования распределений собственных значений многомерных дифференциальных операторов с дискретным спектром: вариационный принцип (Г. Вейль [37], Р. Курант [9]) и резольвентный (Т.Карлеман [26]). Преимущество вариационного принципа в том, что он не столь чувствителен к гладкости коэффициентов, границы области и т.п., его же недостаток в том, что он не дает достаточно точных оценок в асимптотике собственных чисел. С резольвентным методом, который основан на изучении резольвенты рассматриваемого оператора (или другой функции от него) и последующем использовании тауберовых теорем, связаны многие важнейшие достижения в области спектральных асимптотик: метод гиперболического уравнения (В.Г.Авакумович [25] и Б.М.Левитан [10]) и метод параболического уравнения (С. Минакшисундарам и А. Плейль [32]). Подробный обзор по тематике спектральной теории дифференциальных операторов в частных производных можно найти в [15]. Приведем основные результаты этой теории.

Пусть $N(\lambda)$ число собственных значений с учетом кратности оператора A, не превосходящих λ. В 1913 году Г.Вейлем [36] был получен главный член асимптотики $N(\lambda) \sim a\lambda^{n/m}$ (m-порядок оператора, n-размерность многообразия M, на котором он действует) без оценки остаточного члена, и было сделано предположение о существовании второго члена асимптотики $N(\lambda)$, связанного с учетом граничных условий (для многообразия с краем). Л.Хёрмандер [30] получил следующий результат: пусть A самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор на компактном многообразии M без края, тогда

$$N(\lambda) = a\lambda^{n/m} + O(\lambda^{(n-1)/m}) \tag{1}$$

при $\lambda \to +\infty$.

Остаточный член в формуле (1) в некоторых случаях может быть исследован, и сейчас принята следующая классификация (см. например, [15]):

- говорят, что функция $N(\lambda)$ имеет *вейлевскую асимптотику*, если

$$N(\lambda) = a\lambda^{n/m} + b\lambda^{(n-1)/m} + o(\lambda^{(n-1)/m}), \tag{2}$$

где a, b - константы;

- говорят, что функция $N(\lambda)$ имеет *квазивейлевскую асимптотику*, если

$$N(\lambda) = a\lambda^{n/m} + b\lambda^{(n-1)/m} + Q(\lambda)\lambda^{(n-1)/m} + o(\lambda^{(n-1)/m}), \tag{3}$$

где a, b - константы, а $Q(\lambda)$ - ограниченная, равномерно непрерывная на $\mathbb{R}$ функция;

- если функция Q из (3) имеет разрывы в точках ω_k, $\omega_k \to \infty$, то можно построить сходящуюся к нулю положительную последовательность $\{\varepsilon_k\}$, для которой

$$\begin{gathered} N((\omega_k + \varepsilon_k)^m) - N((\omega_k - \varepsilon_k)^m) = \\ = (Q(\omega_k + 0) - Q(\omega_k - 0))\omega_k^{n-1} + o(\omega_k^{n-1}). \end{gathered} \tag{4}$$

Если

$$(Q(\omega_k + 0) - Q(\omega_k - 0)) \geq c > 0,$$

то (4) означает, что вокруг точек ω_k образуются стягивающиеся к ω_k при

$k \to \infty$ группы собственных значений оператора $A^{1/m}$ с сумарной кратностью порядка ω_k^{n-1}. Такие группы собственных значений называются *кластерами*, а про функцию $N(\lambda)$ говорят, что она имеет *кластерную асимптотику.*

Характер асимптотики $N(\lambda)$ зависит от свойств бихарактеристического (биллиардного для оператора на многообразии с краем) потока оператора A (работы Дж. Дейстермаата и В.Гийемина [27], В.Я.Иврия [7, 31], Д.Г.Васильева [4] и других). Точка $(x,\xi) \in S^*M$ называется абсолютно периодической относительно бихарактеристического потока F^t, если $F^t(x,\xi) = (x,\xi)$, и график отображения F^t в точке (x,ξ,x,ξ) имеет касание бесконечного порядка с графиком тождественного отображения. Говорят, что выполнено условие неабсолютной периодичности, если мера множества точек из S^*M, абсолютно периодических относительно этого потока, равна нулю. Для случая неабсолютной периодичности было показано, что $N(\lambda)$ имеет вейлевскую асимптотику для оператора на многообразии без края [27], для оператора второго порядка [7, 31] и для оператора высокого порядка на многообразии с краем [4], а так же для задачи с псевдодифференциальными краевыми условиями [6]. Квазивейлевская асимптотика $N(\lambda)$ впервые была обнаружена в задаче дифракции [21].

Задачи, для которых условие неабсолютной периодичности не выполнено, исследованы значительно менее полно. Например [27], если все траектории потока на многообразии без края периодичны и имеют общий период, то (при некотором дополнительном ограничении) $N(\lambda)$ в этом случае имеет кластерную асимптотику.

Во всех перечисленных примерах исследование асимптотики $N(\lambda)$ проводилось с помощью метода гиперболического уравнения, в значительной степени развитого Л.Хёрмандером в [30]. В основе этого метода лежит исследование особенностей волновой функции оператора $\operatorname{Tr}\exp(itA)$ - следа фундаментального решения, соответствующего оператору волнового уравнения с последующим применением некоторой тауберовой теоремы. Волновая функция имеет особенность при $t = 0$ и при $t = \pm T_j$, где T_j - периоды траекторий бихарактеристического (биллиардного) потока. Поэтому, для задачи с неабсолютно периодическим потоком достаточно исследовать особенность лишь при $t = 0$ (нуль всегда является периодом траекторий бихарактеристического потока, а в данном случае других периодов нет).

Если нарушается условие неабсолютной периодичности задачи, то каждой абсолютно периодической функции траектории можно поставить в соответствие фазовый сдвиг β. Характер асимптотики $N(\lambda)$ полностью определяется этим фазовым сдвигом [15]. Функция $N(\lambda)$ имеет кластерную асимптотику тогда и только тогда, когда существует множество ненулевой меры в S^*M, состоящее из абсолютно периодических точек, которым отвечает один и тот же фазовый сдвиг. Если же такого множества, не существует, то функция $N(\lambda)$ имеет квазивейлевскую асимптотику. При некоторых дополнительных условиях функция $Q(\lambda)$ из уравнения (3) оказывается периодической.

Получение формул регуляризованных следов исследуемого оператора становится важным инструментом в исследовании спектра оператора, когда дальнейшее изучение асимптотического поведения спектра становится невозможным. Так в случае, когда $N(\lambda)$ имеет кластерную асимптотику (4), невозможно улучшение остаточного члена в (2), более того, невозможно даже выделение из остаточного члена второго члена асимптотики.

Регуляризованным следом порядка α оператора A называются соотношения вида

$$\widetilde{\sum_k}(\lambda_k^\alpha - A_k(\alpha)) = B(\alpha), \tag{5}$$

где λ_k - собственные числа оператора A, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, а $A_k(\alpha)$ и $B(\alpha)$ - явно вычисляемые через характеристики оператора функции, символ $\widetilde{\sum}$ может означать как обычное суммирование, так и применение какого-либо метода суммирования.

Первая формула такого вида для обыкновенных дифференциальных операторов была получена в 1953 году в работе [5] И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана, где в качестве A рассматривался оператор Штурма-Лиувилля с потенциалом $q(x)$, $\int\limits_0^\pi q(x)dx = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_n - n^2) = -\frac{q(0)+q(\pi)}{4}.$$

Получению формул регуляризованных следов для обыкновенных дифференциальных операторов были посвящены работы И.М. Гельфанда, Л.А. Дикого, М.Г. Гасымого, и Б.М. Левитана, Р.Ф. Шевченко, А.Г. Костюченко, В.А. Садовничего, В.Е. Подольского и многих других.

В.Б. Лидским и В.А. Садовничим в работе [12] был предложен метод доказательства формул типа (5) для широкого класса краевых задач, порожденных обыкновенными дифференциальными выражениями на конечном отрезке со сложным вхождением спектрального параметра, сводящийся к изучению регуляризованных сумм корней целых функций с определенной асимптотической структурой.

Даже для обыкновенных дифференциальных операторов регуляризованные следы могут образовывать расходящиеся ряды (см. например [17]), и тогда возникает задача их суммирования каким-либо подходящим методом.

Один из подходов — суммирование следов со скобками. Первой реализацией такого подхода для обыкновенных дифференциальных операторов можно считать работу В.А. Садовничего, В.А. Любишкина и М. Мартиновича 1987 года [18]. Крупным продвижением в теории следов стала работа В.А. Садовничего и В.В. Дубровского [16], где рассматривался оператор

Лапласа-Бельтрами, возмущенный гладким нечетным вещественнозначным потенциалом на двумерной единичной сфере S^2. Этот оператор имеет кластерную асимптотику $N(\lambda)$, и для него суммирование со скобками является естественной постановкой задачи. Для этого случая была доказана формула:

$$\mu_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{2k} \mu_{ki} - k(k+1)(2k+1) \right] = -\frac{1}{8\pi} \int\limits_{S^2} q^2 dS.$$

Позже В. Е. Подольский [14], применив к этой задаче суммирование по Абелю и затем к полученной формуле тауберову теорему Литлвуда, доказал, что ряд сходится без скобок (но этот случай является единственным исключением). Позже В.Е. Подольским [33] были получены аналогичные формулы для любых степеней собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на компактных симметрических пространствах ранга 1. А.Н. Бобров предпринимал попытку [2] найти след оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на поверхности вращения Цолля, но допустил неточность (подробнее см. параграф 1.2.1 настоящей работы), и приведенную им фомулу нельзя считать окончательно верной, но результат для случая простой сферы S^2 и произвольной комплекснозначной функции $q \in C^\infty$ был получен. В.А. Садовничий и З.Ю. Фазуллин для оператора возмущенного произвольной комплекснозначной функцией лучшей гладкости: в 2005 году для $q \in C^2(S^2)$ [19], а в 2011 году для $q \in W_1^2(S^2)$ [20] получили формулу регуляризованного следа:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2k} [\mu_{ki} - k(k+1) - c_0] = 2c_1,$$

где $c_0 = \dfrac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2} q(\omega) d\omega$, $c_1 = \dfrac{1}{32\pi^3} \int\limits_{S^2} \int\limits_{S^2} \dfrac{q(\omega) q(\omega_0)}{\sqrt{1-(\vec{\omega}, \vec{\omega_0})^2}} d\omega d\omega_0 - \dfrac{1}{16\pi} \int\limits_{S^2} q^2(\omega) d\omega$, $(\vec{\omega}, \vec{\omega_0})$ - скалярное произведение векторов $\vec{\omega} = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$

и $\vec{\omega_0} = (\cos\varphi_0 \sin\theta_0, \sin\varphi_0 \sin\theta_0, \cos\theta_0)$.

Другой подход — суммирование по Абелю. Впервые этот метод был применен В.Б. Лидским в [11] в вопросах разложения по собственным функциям некоторых обыкновенных дифференциальных операторов. Позже этот метод был успешно применен В.А. Любишкиным и В.Е. Подольским в работе [13], где была предложена формула суммирования методом Абеля первых регуляризованных следов эллиптических дифференциальных операторов порядка $m > 0$ на римановом многообразии размерности n. Существенное ограничение этого исследования $m/n > 1$ было снято для компактных симметрических пространств ранга 1 в уже упоминавшихся работах В.Е. Подольского [14] и [33].

Целью настоящей диссертации является получение явных формул регуляризованных следов возмущенного оператора Лапласа-Бельтрами на двумерных многообразиях с замкнутым геодезическим потоком. Сначала мы доказываем формулу регуляризованного следа в случае, когда оператор рассматривается на не рассматривавшемся ранее в задачах спектральной теории типе многообразия с замкнутыми геодезическими (метрика которого задана в явном виде), а затем будет приведено обобщение результата на двумерные многообразия с замкнутыми геодезическими, с помощью представления метрики в абстрактном виде. В основе решения поставленных задач лежит применение различных методов теории регуляризованных следов к псевдодифференциальным операторам (ПДО), действующим на компактных многообразиях без края, с периодическим гамильтоновым потоком. Если у многообразия геодезический поток замкнут, то оператор Лапласа-Бельтрами входит в этот класс.

Пусть M - компактное связное C^∞-многообразие без края размерности 2, A – эллиптический ПДО порядка 2 и $A \in \Psi^2_{phg}(M)$, где $\Psi^2_{phg}(M)$ —

класс полиоднородных[1] ПДО порядка 2 на M [23]. Будем полагать, что на M фиксирована некоторая положительная плотность ρ, причем A— симметричен относительно соответствующего скалярного произведения в $L^2_p(M)$:

$$(u,v)_{L^2_\rho(M)} = \int\limits_M u\bar{v}\rho, \quad u,v \in C^\infty(M),$$

и строго положителен.

A является оператором с компактной резольвентой и дискретным спектром, который состоит из вещественных собственных значений конечной кратности, которые могут накапливаться только к $+\infty$. Обозначим собственные значения оператора A через $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ с учетом кратности в порядке возрастания. Мы будем полагать, что весь спектр A лежит на луче $(0,+\infty)$ (в противном случае мы можем рассмотреть оператор $A+cI$ с соответствующей константой $c>0$).

Рассмотрим расслоение плотностей Ω на M. Сечение расслоения Ω, выраженное в локальных координатах x_1, x_2 - это функция u, такая что мера $u|dx|$ не зависит от выбора локальных координат ($|dx|$ обозначает меру Лебега в локальных координатах). Для функции u', представляющей рассматриваемое сечение в локальных координатах x' имеем

$$u'|dx'| = u|dx|.$$

Для любого $a \in \mathbb{C}$ можно определить степень Ω^a расслоения Ω, заменив записанный выше закон преобразования на

$$u'|dx'|^a = u|dx|^a;$$

[1]Нижний индекс *phg* является сокращением от polyhomogeneous (полиоднородность). ПДО называют полиоднородным, если его символ является полиоднородной функцией, то есть функцией вида $a(x,\xi) \sim \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j(x,\xi)$, где функция a_j однородна степени $m-j$ по ξ при $|\xi|>1$, где m - порядок ПДО [23].

более формально, расслоение Ω^a строится по функциям перехода

$$g_{\varkappa\varkappa'} = |\det(\varkappa \circ \varkappa'^{-1})'|^a \circ \varkappa' \text{ в } M_\varkappa \cap M_{\varkappa'},$$

где $\varkappa$ и $\varkappa'$ - произвольные локальные координаты в координатных окрестностях $M_\varkappa$ и $M_{\varkappa'}$. Таким образом, можем опеределить расслоение полуплотностей — $\Omega^{1/2}$ и в дальнейшем обозначать сечение расслоения полуплотностей через $C^\infty(M, \Omega^{1/2})$.

Дальше отметим, что если E и F - комплексные векторные расслоения класса C^∞ над C^∞-многообразием M, то ПДО порядка 2 из сечений расслоения E в сечение расслоения F - это непрерывное линейное отображение:

$$A' : C_0^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F),$$

удовлетворяющее следующему условию: для всякого открытого множества $Y \subset M$, над которыми расслоения E и F тривиализуются с помощью отображений

$$\phi_E : E|_Y \to Y \times \mathbb{C}, \quad \phi_{\mathbb{F}} : \mathbb{F}|_{\mathbb{Y}} \to \mathbb{Y} \times \mathbb{C}^{\mho},$$

существует $f \times e$ - матрица псевдодифференциальных операторов $A'_{ij} \in \Psi^2_{phg}(Y)$, такая что

$$(\phi_F(A'u)|_Y)_i = \sum A'_{ij}(\phi_E u)j, \quad u \in C_0^\infty(Y, E).$$

В этом случае мы будем писать, что $A' \in \Psi^2_{phg}(M; E, F)$.

Мы будем рассматривать оператор P, действующий в сечениях расслоения полуплотностей по формуле:

$$Pu = \rho^{1/2} A(u\rho^{-1/2}), \quad u \in C^\infty(M, \Omega^{1/2}),$$

где ρ - положительная фиксироанная плотность на M. Эта формула определяет классический эллиптический ПДО из $\Psi^2_{phg}(M;\Omega^{1/2},\Omega^{1/2})$, для которого $(Pu,v)=(u,Pv)$, $u,v\in C^\infty(M,\Omega^{1/2})$. Собственные значения этого оператора совпадают с собственными значениями оператора A, а собственные функции получаются из собственных функций оператора A умножением на $\rho^{1/2}$.

Из асимптотического разложения полного символа оператора P

$$\sigma(P)\sim\sum_{j=0}^{\infty}p_j(x,\xi)$$

можно определить главный $p(x,\xi)$ и субглавный $\mathrm{sub}(x,\xi)$ символы оператора P по правилу

$$p(x,\xi)=p_0(x,\xi),$$

$$sub(x,\xi)=p_1(x,\xi)-\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 p_0(x,\xi)}{\partial x_k\partial\xi_k},$$

где $p_j(x,\xi)$ — положительно однородные по ξ функции порядка $2-j$:

$$p_j(x,t\xi)=t^{2-j}p_j(x,\xi),\quad t>0.$$

При этом для дифференциального оператора $P=\sum\limits_{|\alpha|\le 2}p_\alpha(x)D^\alpha$, $D=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ имеем соответственно

$$p(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=2}p_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

$$sub(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=1}p_\alpha(x)\xi^\alpha-\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 p(x,\xi)}{\partial x_k\partial\xi_k}.$$

Для операторов, действующих в сечениях расслоения полуплотностей, главный и субглавный символы являются инвариантно определенными функциями на кокасательном расслоении без нулевого сечения $T^*M\setminus\{0\}$.

Теперь будем рассматривать гамильтонову систему T^*M, порожденную главным символом оператора $P^{1/2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x(t)}{\partial t} = \dfrac{\partial p^{1/2}(x,\xi)}{\partial \xi}, \\ \dfrac{\partial \xi(t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial p^{1/2}(x,\xi)}{\partial x}, \end{cases} \tag{6}$$

состоящую из четырех уравнений, (x,ξ) — координаты в T^*M, индуцированные некоторой локальной системой координат в M. Известно, что векторное поле $H_{p^{1/2}}$ на T^*M, опеределяемое правыми частями в (6), не зависит от выбора локальных координат в M.

Введем в рассмотрение гамильтонов поток $F^t(x,\xi)$, являющийся множеством траекторий гамильтонова поля $H_{p^{1/2}}$ (действие потока $F^t(x,\xi)$, $-\infty < t < +\infty$, состоит в том, что любая точка $(x,\xi) \in T^*M$ переходит в точку $(x(t),\xi(t)) \in T^*M$, являющуюся значением в момент времени t решения системы (6) с начальными условиями $x(0) = x, \quad \xi(0) = \xi$.

Особенности траекторий гамильтонова поля $F^t(x,\xi)$ и их проекций на M (*бихарактеристик* опертора P) несут информацию о спектре самого оператора и его асимиптотике [15]. Так если для оператора P на связном многообразии без края выполнены два условия:

1. *Все траектории гамильтонова поля $H_{p^{1/2}}$ замкнуты и имеют наименьший общий период T.*

   То есть, бихарактеристики оператора P на M являются простыми замкнутыми кривыми без самопересечений и при любых фиксированных (x,ξ) поток $F^t(x,\xi)$ периодичен по t с наименьшим периодом T.

2. $\beta(T,x,\xi) \equiv \beta_0 = const \quad$ *на* $T^*M \setminus \{0\}$.

   Здесь $\beta(T,x,\xi)$ - сдвиг фазы для замкнутой траектории

$F^t(x,\xi), \quad 0 \le t < T$, где $F^T(x,\xi) = (x,\xi)$, определен как

$$\beta(T,x,\xi) = \beta_c(T,x,\xi) + \beta_s(T,x,\xi),$$

где $\beta_s(T,x,\xi) = -\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^T p^{-1/2}(F^t(x,\xi)) sub(F^t(x,\xi))dt\right]_{2\pi}$,
$\beta_c(T,x,\xi) = \dfrac{\alpha\pi}{2}$, здесь $[\cdot]_{2\pi}$ - вычет по модулю 2π, α - индекс Маслова траектории γ,

то с точностью до $o(\lambda)$ все собственные значения оператора $P^{1/2}$ содержатся в объединении интервалов вида $(\mu_k+\varepsilon_k, \mu_k-\varepsilon_k)$, где $\mu_k = (2\pi k - \beta_0)T^{-1}$, $\varepsilon_k \to 0$.

Указанными свойствами обладает оператор Лапласа-Бельтрами на многообразиях с периодическим геодезическим потоком, который и будет рассматриваться в настоящей диссертации.

Опишем структуру данной работы. Диссертация состоит из одной главы, приложения и списка литературы.

В основной главе проводится исследование спектральных свойств возмущенного оператора Лапласа-Бельтрами на многообразиях с замкнутым геодезическим потоком.

В первом параграфе приведены предварительные сведения:

В пукте 1.1.1 описано многообразие ML, на котором изучаются спектральные свойства оператора Лапласа-Бельтрами (многообразие было построено и изучено в монографии А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко [3]). Метрика этого многообразия получается посредством перехода к сфероконическим координатам (v_1, v_2, v_3) в R^3:

$$x^2 = \frac{v_1(a+v_2)(a+v_3)}{(a-b)(a-c)}, y^2 = \frac{v_1(b+v_2)(b+v_3)}{(b-a)(b-c)}, z^2 = \frac{v_1(c+v_2)(c+v_3)}{(c-a)(c-b)};$$

представления метрики стандартной сферы в сферо-конических координатах ($v_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$):

$$ds_0^2 = \frac{1}{4}(v_2 - v_3)\left(-\frac{dv_2^2}{P(v_2)} + \frac{dv_3^2}{P(v_3)}\right),$$

где $P(v) = (a+v)(b+v)(c+v)$;

и последующим возмущением этой метрики:

$$ds_{\alpha,\beta}^2 = \frac{1}{4}(v_2 - v_3)\left(-\frac{dv_2^2}{Q(v_2)} + \frac{dv_3^2}{R(v_3)}\right), \quad \text{где} \tag{7}$$

$$Q(v_2) = Q_+(v_2), \quad R(v_3) = R_+(v_3), \quad \text{на области соотв. } x > 0, z > 0;$$

$$Q(v_2) = Q_+(v_2), \quad R(v_3) = R_-(v_3), \quad \text{на области соотв. } x < 0, z > 0;$$

$$Q(v_2) = Q_-(v_2), \quad R(v_3) = R_+(v_3), \quad \text{на области соотв. } x > 0, z < 0;$$

$$Q(v_2) = Q_-(v_2), \quad R(v_3) = R_-(v_3), \quad \text{на области соотв. } x < 0, z < 0;$$

$$\text{и } Q_\pm(v_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{-P(v_2)}} \pm \alpha(v_2)\right)^{-2}, R_\pm(v_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{P(v_3)}} \pm \beta(v_3)\right)^{-2}.$$

Таким образом, получено целое семейство C^∞-гладких метрик $ds_{\alpha,\beta}^2$ (попарно неизометричных) на двумерной сфере, зависящее от двух функциональных параметров α и β, и таких, что

1) все геодезические этих метрик замкнуты и имеют одинаковую длину;

2) все эти метрики $ds_{\alpha,\beta}^2$ являются возмущениями метрики стандартной сферы в том смысле, что при $\alpha = 0$, $\beta = 0$ метрика превращается в обычную метрику ds_0^2 постоянной кривизны на сфере;

3) все метрики $ds_{\alpha,\beta}^2$ задаются явными формулами.

В пункте 1.1.2 описан сам оператор Лапласа-Бельтрами на многообразии ML: приведен его явный вид на нем, исследован и описан его полный символ и его компоненты, описан его бихарактеристический поток и выделены особенности его траекторий.

В пункте 1.1.3 изложены основные спектральные свойства оператора

Лапласа-Бельтрами на двумерных многообразиях с замкнутыми геодезическими (собственные значения, их кратность, связь собственных чисел возмущенного и невозмущенного оператора), а так же приведены известные на сегодняшний день результаты в теории регуляризованных следов.

Во втором параграфе проводится построение и вычисление регуляризованного следа возмущенного оператора Лапласа-Бельтрами на ML. Для этого в рассмотрение вводятся:

1) псевдодифференциальный оператор второго порядка $-\tilde{\Delta}_{ML}$ на ML, собственные числа $\varkappa_{ki}$ которого совпадают с собственными числами оператора Лапласа-Бельтрами на стандартной сфере, то есть $\varkappa_{ki} = k(k+1)$, где $k = 0, 1, \ldots; i = 1, \ldots, 2k+1$. Также вводится в рассмотрение тета-функция этого оператора $F(t) \sim t^{-1} \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j t^j$ при $t \to 0$;

2) оператор Лапласа-Бельтрами $-\Delta_{ML}$ на ML с собственными числами λ_{ki} и тета-функцией $L(t) \sim t^{-1} \sum\limits_{j=0}^{\infty} l_j t^j$ при $t \to 0$;

3) возмущенный оператор Лапласа-Бельтрами $-\Delta_{ML}+q$ на ML с собственными числами μ_{ki} и тета-функцией $M(t) \sim t^{-1} \sum\limits_{j=0}^{\infty} m_j t^j$ при $t \to 0$.

В пункте 1.2.1 строится формула регуляризованного следа для собственных чисел операторов $-\Delta_{ML}$ и $-\tilde{\Delta}_{ML}$, которая имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2k} \lambda_{ki} - k(k+1)(2k+1) - a_0(2k+1) \right) =$$

$$= f_2 - l_2 - a_0 f_1 + \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{S^*ML} (\sigma^{av})^2 dv,$$

где σ^{av} определен ниже в формулировке Теоремы 1, $a_0 = \dfrac{f_1 - l_1}{f_0}$, l_i - коэффициенты разложения тета-функции $L(t)$ и f_i - коэффициенты разложения тета-функции $F(t)$.

В пункте 1.2.2. строится формула регуляризованного следа для собственных чисел операторов $-\Delta_{ML}+q$ и $-\Delta_{ML}$, которая имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{2k}(\mu_{ki}-\lambda_{ki})-b_0(2k+1)\right)=$$

$$=l_2-m_2-b_0l_1+\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*ML}(q^{av})^2dv,$$

где q^{av} определен ниже в формулировке Теоремы 1, $b_0=\dfrac{l_1-m_1}{l_0}$, l_i - коэффициенты разложения тета-функции $L(t)$ и m_i - коэффициенты разложения тета-функции $M(t)$.

В пункте 1.2.3 из формул, полученных в пунктах 1.2.1 и 1.2.2, выводится окончательная формула искомого регуляризованного следа:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{2k}\mu_{ki}-k(k+1)(2k+1)-(a_0+b_0)(2k+1)\right)=$$

$$=f_2-a_0f_1+\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*ML}(\sigma^{av})^2dv-m_2-b_0l_1+\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*ML}(q^{av})^2dv, \tag{8}$$

где σ^{av} и q^{av} определены ниже в формулировке Теоремы 1, $a_0=\dfrac{f_1-l_1}{f_0}$, $b_0=\dfrac{l_1-m_1}{l_0}$, m_i - коэффициенты разложения тета-функции $M(t)$, l_i - коэффициенты разложения тета-функции $L(t)$ и f_i - коэффициенты разложения тета-функции $F(t)$.

В пункте 1.2.4 устанавливается связь дзета-функции и тета-функции оператора Лапласа-Бельтрами и приводится схема вычисления искомых коэффициентов тета-функций операторов для вычисления правой части формулы (8).

В пункте 1.2.5. проводятся все вычисления недостающих коэффициентов для вычисления окончательного ответа:

$$m_0 = 1, m_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{ML} q(v_2, v_3)\sqrt{\det g} dv_2 dv_3,$$

$$m_2 = \frac{1}{60\pi} \iint\limits_{ML} (\Delta_{ML} K_{ML} + K_{ML}^2)\sqrt{\det g} dv_2 dv_3 +$$

$$+\frac{1}{24\pi} \iint\limits_{ML} \left(-\Delta_{ML} q(v_2, v_3) + 3q^2(v_2, v_3) - 2q(v_2, v_3)K_{ML}\right) \sqrt{\det g} dv_2 dv_3,$$

$$l_0 = 1, l_1 = \frac{1}{3}, l_2 = \frac{1}{60\pi} \iint\limits_{ML} (\Delta_{ML} K_{ML} + K_{ML}^2)\sqrt{\det g} dv_2 dv_3,$$

$$f_0 = 1, f_1 = \frac{1}{3}, f_2 = \frac{1}{15},$$

где $K_{ML} = \dfrac{2(R(v_3) - Q(v_2)) + (v_2 - v_3)(R'(v_3) + Q'(v_2))}{(v_2 - v_3)^3}$ - гауссова кривизна ML, и $\sqrt{\det g} = \dfrac{v_2 - v_3}{4\sqrt{-Q(v_2)R(v_3)}}$ - корень из определителя матрицы метрического тензора.

Здесь же формулируется основной результат второго параграфа:

Теорема 1. *Пусть ML — многообразие, заданное некоторым функциональным семейством гладких почти лиувиллевых метрик на сфере и определенное формулами (7). Если q - бесконечно-дифференцируемая комплекснозначная функция на ML, то для собственных чисел оператора $-\Delta_{ML} + q$ верно равенство:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2k} \left(\mu_{ki} - k(k+1) - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{ML} q dS \right) =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{S^*ML} (q^{av})^2 dv + \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{S^*ML} (\sigma^{av})^2 dv + \frac{1}{15} -$$

$$-\frac{1}{60\pi} \int\limits_{ML} (\Delta_{ML} K_{ML} + K_{ML}^2) dS - \frac{1}{24\pi} \int\limits_{ML} \left(-\Delta_{ML} q + 3q^2 - 2q(K_{ML} - 1)\right) dS,$$

где $K_{ML} = \dfrac{2(R(v_3) - Q(v_2)) + (v_2 - v_3)(R'(v_3) + Q'(v_2))}{(v_2 - v_3)^3}$ *- гауссова кривизна* ML, dS *- элемент площади поверхности* ML, S^*ML *- расслоение единичных сфер в кокасательном пространстве,* dv *- каноническая форма объема на* S^*ML, $q^{av} = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\exp t\Xi)^*(q)dt$, *где* Ξ *- гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении* $T^*ML \setminus \{0\}$, *определяемое римановой структурой на* ML, $\sigma^{av} = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\exp t\Xi)^*(\sigma)dt$, *где* $\sigma = \dfrac{1}{4}(K_{ML} - 1 +$ $\left[\dfrac{1}{3}(K_{ML})_{\mathrm{v}}u^3\int\limits_0^r(K_{ML})_{\mathrm{v}}J^3ds - (K_{ML})_{\mathrm{v}}u^2J\int\limits_0^r(K_{ML})_{\mathrm{v}}uJ^2ds\right])$, *где* v *- единичный вектор нормали к геодезической* γ, $J(r,\omega)$ *- объемная плотность в геодезических полярных координатах, то есть* $dvol(\gamma) = J(r,\omega)drd\omega$, u *и* v *- фундаментальные решения уравнения Якоби вдоль геодезической* γ *с условиями* $\begin{pmatrix} u(0) & v(0) \\ \dot{u}(0) & \dot{v}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В третьем параграфе задача нахождения регуляризованного следа возмущенного оператора Лапласа-Бельтрами рассматривается в случае общего положения, когда метрика многообразия задана в абстрактном виде.

В пункте 1.3.1 определяется многообразие $M \in SC_{2\pi}$ (геодезические замкнуты и имеют одинаковую длину 2π), метрика которого получена возмущением метрики единичной сферы, заданной в некоторых координатах (u_1, u_2)

$$ds^2 = A(u_1,u_2)du_1^2 + 2B(u_1,u_2)du_1du_2 + C(u_1,u_2)du_2^2, \qquad (9)$$

и имеет вид

$$ds_p^2 = A_p(u_1,u_2)du_1^2 + 2B_p(u_1,u_2)du_1du_2 + C_p(u_1,u_2)du_2^2, \qquad (10)$$

причем $A_p(u_1,u_2) = A(u_1,u_2) + P_A(u_1,u_2)$, $B_p(u_1,u_2) = B(u_1,u_2) + P_B(u_1,u_2)$, $C_p(u_1,u_2) = C(u_1,u_2) + P_C(u_1,u_2)$, то есть возмущения таковы, что при обнулении функций $P_A(u_1,u_2)$, $P_B(u_1,u_2)$, $P_C(u_1,u_2)$ мы получим стандартную метрику сферы ds^2.

В пункте 1.3.2 описан сам оператор Лапласа-Бельтрами на многообразии M: приведен его явный вид на нем, исследован и описан его полный символ и его компоненты.

В пункте 1.3.3 показано, что асимптотики тета-функций $\hat{F}(t)$, $\hat{L}(t)$, $\hat{M}(t)$ соответствующих операторов $-\tilde{\Delta}_M$, $-\Delta_M$, $-\Delta_M + q$, взятых уже на произвольном M, аналогичны асимптотикам, полученым в пункте 1.2.5, то есть найденные коэффициенты не зависят от вида метрики M, а зависят только лишь от инвариантных характеристик многообразия. Все коэффициенты были получены с помощью символьных вычислений в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica 9 [35], так как при задании метрики в общем виде (10), произвести вычисления вручную становится невозможным. В случае общего положения вид этих асимптотик представляет отдельный интерес, поэтому результат сформулирован в виде Леммы:

Лемма 1: *Пусть $M \in SC_{2\pi}$ — многообразие, метрика которого является возмущением метрики стандартной сферы и задана формулой (10), тогда для тета-функций $\hat{F}(t)$, $\hat{L}(t)$, $\hat{M}(t)$ соответствующих операторов $-\tilde{\Delta}_M$, $-\Delta_M$, $-\Delta_M + q$ верны асимптотические разложения при $t \to 0$:*

$$\hat{F}(t) = t^{-1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}t + O(t^2),$$

$$\hat{L}(t) = t^{-1} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{60\pi} \int\limits_M (\Delta_M K_M + K_M^2) dS \right) t + O(t^2),$$

$$\hat{M}(t) = t^{-1} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_M qdS\right) + \left(\frac{1}{60\pi}\int\limits_M (\Delta_M K_M + K_M^2)dS + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{24\pi}\int\limits_M (-\Delta_M q + 3q^2 - 2qK_M)dS\right) t + O(t^2),$$

где $K_M = \dfrac{1}{4\left(B_p(u_1,u_2)^2 - A_p(u_1,u_2)C_p(u_1,u_2)\right)^2}\times$

$\Big(C_p(u_1,u_2)A'_{p_{u_2}}(u_1,u_2)^2 - 2B_p(u_1,u_2)A'_{p_{u_2}}(u_1,u_2)B'_{p_{u_2}}(u_1,u_2) +$

$A_p(u_1,u_2)A'_{p_{u_2}}(u_1,u_2)C'_{p_{u_2}}(u_1,u_2) + 2B_p(u_1,u_2)^2 A''_{p_{u_2u_2}}(u_1,u_2) -$

$2A_p(u_1,u_2)C_p(u_1,u_2)A''_{p_{u_2u_2}}(u_1,u_2) - 2C_p(u_1,u_2)B'_{p_{u_2}}(u_1,u_2)A'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) +$

$B_p(u_1,u_2)C'_{p_{u_2}}(u_1,u_2)A'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) + 4B_p(u_1,u_2)B'_{p_{u_2}}(u_1,u_2)B'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) -$

$2A_p(u_1,u_2)C'_{p_{u_2}}(u_1,u_2)B'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) - B_p(u_1,u_2)A'_{p_{u_2}}(u_1,u_2)C'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) +$

$C_p(u_1,u_2)A'_{p_{u_1}}(u_1,u_2)C'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) - 2B_p(u_1,u_2)B'_{p_{u_1}}(u_1,u_2)C'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) +$

$A_p(u_1,u_2)C'_{p_{u_1}}(u_1,u_2)^2 - 4B_p(u_1,u_2)^2 B''_{p_{u_1u_2}}(u_1,u_2) +$

$4A_p(u_1,u_2)C_p(u_1,u_2)B''_{p_{u_1u_2}}(u_1,u_2) + 2B_p(u_1,u_2)^2 C''_{p_{u_1u_1}}(u_1,u_2) -$

$2A_p(u_1,u_2)C_p(u_1,u_2)C''_{p_{u_1u_1}}(u_1,u_2)\Big)$ *— гауссова кривизна* M.

В Теореме 2 показано, что результат Теоремы 1, сформулированный в пункте 1.2.5, полностью переносится на случай произвольного M. Результат, приведенный в Теореме 2, является универсальным и не зависит от явного вида метрик многообразия, а зависит только от его геомерических инвариантов. Из Теоремы 2, полученной для произвольного M, сформулированы три следствия, представляющие самостоятельный интерес:

Следствие 1: *Пусть* $M \in SC_{2\pi}$ *— многообразие, метрика которого является возмущением метрики стандартной сферы и задана формулой (10), тогда для собственных чисел* λ_{ki} *невозмущенного оператора*

Лапласа-Бельтрами $-\Delta_M$ на M верно равенство:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2k}(\lambda_{ki}-k(k+1)) =$$

$$= \frac{1}{15} - \frac{1}{60\pi}\int\limits_M (\Delta_M K_M + K_M^2)dS + \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*M}(\sigma^{av})^2 dv,$$

где все обозначения определены в формулировке Теоремы 2.

Следствие 2: *Пусть $M = S^2$ — стандартная сфера единичного радиуса, метрика которой задана в виде (9), q - бесконечно-дифференцируемая комплекснозначная функция на S^2, тогда для собственных чисел μ_{ki} оператора $-\Delta_{S^2} + q$ верно равенство:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2k}\left(\mu_{ki} - k(k+1) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2} q dS\right) =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*S^2}(q^{av})^2 dv - \frac{1}{24\pi}\int\limits_{S^2}\left(-\Delta_{S^2}q + 3q^2\right)dS,$$

где все обозначения определены в формулировке Теоремы 2.

Следствие 3: *Пусть $M \in SC_{2\pi}$ — многообразие, метрика которого является возмущением метрики стандартной сферы и задана формулой (10), тогда для собственных чисел λ_{ki} невозмущенного оператора Лапласа-Бельтрами $-\Delta_M$ и для собственных чисел μ_{ki} возмущенного комплекснозначной функцией q оператора Лапласа-Бельтрами $-\Delta_M + q$ на M, верно равенство:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2k}\left(\mu_{ki} - \lambda_{ki} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_M q dS\right) =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{S^*M} (q^{av})^2 dv - \frac{1}{24\pi} \int\limits_{M} \left(-\Delta_M q + 3q^2 - 2q(K_M - 1)\right) dS,$$

где все обозначения определены в формулировке Теоремы 2.

В Приложении приведены вычисленные значения аналитического продолжения дзета-функции оператора Лапласа-Бельтрами на многообразии M в случае общего положения в нуле и единице, так как эти значения используются при получении основных результатов, однако они слишком громоздки и приведение их в основном тексте мешает восприятию основных рассуждений.

***

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук Подольскому Владимиру Евгеньевичу за постановку задач, постоянное внимание и поддержку в работе.

Глава 1

ФОРМУЛЫ СЛЕДОВ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ЗАМКНУТЫМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ПОТОКОМ

1.1. Предварительные сведения

1.1.1. Многообразие ML

Возникновение теории интегральных операторов Фурье послужило толчком для новых исследований в теории изучения спектра дифференциальных операторов на компактных многообразиях с периодическим бихарактеристическим потоком. Первые результаты в этом направлении ([27], [38] и др.) показали, что спектр таких операторов хорошо локализуется вокруг спектра невозмущенного (отвечающего главному символу) оператора. В этой теории оператор Лапласа-Бельтрами, возмущенный оператором умножения на гладкую функцию, на многообразиях с замкнутым геодезическим потоком является основным модельным примером.

Нашей ближайшей целью будет вычисление регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на многообразии, заданном некоторым функциональным семейством гладких *почти лиувиллевых* метрик на сфере (что достигается посредством перехода в сферо-конические координаты и возмущением получившейся метрики таким образом, что замкнутость геодезического потока сохраняется).

Напомним, что риманова метрика на двумерной поверхности M^2 называется *лиувиллевой* [3], если в подходящих координатах x и y она записывается в виде $ds^2 = (f(x)+g(y))(dx^2+dy^2)$, где $f(x)$ и $g(y)$ — произвольные гладкие положительные функции; и называется *почти лиувиллевой*, если она представима в виде $ds^2 = (f(x) + g(y))(\alpha(x)dx^2 + \beta(y)dy^2)$, где $f(x)$, $g(y)$, $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ — гладкие положительные функции (иногда в литературе именно эта метрика называется *лиувиллевой*). При этом не трудно привести *почти лиувилеву* метрику к *лиувиллевой* заменой $x' = \int \sqrt{\alpha(x)}dx$, $y' = \int \sqrt{\beta(y)}dy$.

Многообразие, на котором мы будем изучать спектральные свойства оператора Лапласа-Бельтрами, построено и изучено А.В. Болсиновым и А.Т. Фоменко в [3], где доказано, что существует семейство C^∞-гладких метрик $ds^2_{\alpha,\beta}$ (попарно неизометричных) на двумерной сфере, зависящее от двух функциональных параметров α и β, и таких, что

1) все геодезические этих метрик замкнуты и имеют одинаковую длину;

2) все эти метрики $ds^2_{\alpha,\beta}$ являются возмущениями метрики стандартной сферы в том смысле, что при $\alpha = 0$, $\beta = 0$ метрика превращается в обычную метрику ds^2_0 постоянной кривизны на сфере;

3) все метрики $ds^2_{\alpha,\beta}$ задаются явными формулами.

Нам потребуется схема построения этих метрик. Для представления метрики постоянной кривизны на сфере в лиувиллевом виде необходимо перейти к специальным координатам в R^3, называющимися *сферо-коническими координатами* и получающимися предельным переходом из эллиптических координат.

Сферо-конические координаты v_2, v_3 получаются тогда, как корни уравнения второго порядка

$$\frac{x^2}{a+v} + \frac{y^2}{b+v} + \frac{z^2}{c+v} = 0,$$

трактуемого как предел кубического уравнения

$$\frac{x^2}{a+v} + \frac{y^2}{b+v} + \frac{z^2}{c+v} = 1,$$

когда точка с координатами (x, y, z) стремится к бесконечности, и первая сферо-коническая координата v_1 - это просто сумма квадратов: $v_1 = x^2 +$

$y^2 + z^2$.

Итак, рассмотрим в R^3 сферо-конические координаты (v_1, v_2, v_3). Явные формулы, выражающие декартовы координаты x, y, z, через сфероконические v_1, v_2, v_3, таковы:

$$x^2 = \frac{v_1(a+v_2)(a+v_3)}{(a-b)(a-c)},$$

$$y^2 = \frac{v_1(b+v_2)(b+v_3)}{(b-a)(b-c)},$$

$$z^2 = \frac{v_1(c+v_2)(c+v_3)}{(c-a)(c-b)}.$$

Выписываем в этих координатах евклидову метрику

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

в R^3, а затем, ограничивая эту метрику на стандартную сферу (которая задается в сферо-конических координатах простым уравнением $v_1 = 1$), получаем вид стандартной метрики двумерной сферы в сферо-конических координатах:

$$ds_0^2 = \frac{1}{4}(v_2 - v_3)\left(-\frac{1}{(a+v_2)(b+v_2)(c+v_2)}dv_2^2 + \frac{1}{(a+v_3)(b+v_3)(c+v_3)}dv_3^2\right)$$

или

$$ds_0^2 = \frac{1}{4}(v_2 - v_3)\left(-\frac{dv_2^2}{P(v_2)} + \frac{dv_3^2}{P(v_3)}\right),$$

где $P(v) = (a+v)(b+v)(c+v)$.

Такое представление метрики ds_0^2 в лиувиллевом виде обеспечивает наличие квадратичного интеграла ее геодезического потока [3], а значит и структуру лиувиллева слоения на расслоении единичных кокасательных векторов. Это слоение имеет четыре однопараметрических семейства торов Лиувилля, для каждого из которого можно явно выписать формулу для функции вращения:

$$\rho(t)_{S^2} = \left(\int\limits_{-t}^{-a} N(u,t)du \right) \Bigg/ \left(\int\limits_{-c}^{-b} N(u,t)du \right),$$

где $N(u,t) = \dfrac{1}{\sqrt{-P(u)(u+t)}}$, $t \in (a,b)$. Легко проверяется, что

$$\rho(t)_{S^2} \equiv 1,$$

что эквивалентно замкнутости геодезических, лежащих на торах из рассматриваемого семейства, так как необходимое и достаточное условие замкнутости всех геодезических имеет вид $\rho = const = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (Г. Дарбу). Важно, что метрики вращения без особенностей с замкнутыми геодезичискими существуют только при $p = 1$, $q = 1$.

Далее в [3] строятся возмущения стандартной метрики сферы таким образом, чтобы функция вращения не изменилась, то есть осталась равной единице. Отмечается, что приведенную формулу метрики можно рассматривать как четыре отдельные формулы на четырех областях:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}: && x > 0, z > 0; \\ &\mathrm{II}: && x < 0, z > 0; \\ &\mathrm{III}: && x > 0, z < 0; \\ &\mathrm{IV}: && x < 0, z < 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

На каждой из четырех областей функции $P(v_2)$ и $P(v_3)$ можно задать независимо друг от друга (своей формулой), лишь требуя их гладкой стыковки на границах указанных областей, также эти четыре метрики (на разных областях) можно задать разными функциями, а вместо функций $P(v_2)$ и $P(v_3)$, задаваемых одной функцией P, можно взять две разные (только от разных аргументов), например, Q и R:

$$
\begin{gathered}
g = \frac{1}{4}(v_2 - v_3)\left(-\frac{dv_2^2}{Q(v_2)} + \frac{dv_3^2}{R(v_3)}\right), \quad \text{где} \\
Q(v_2) = Q_+(v_2), \quad R(v_3) = R_+(v_3), \quad \text{на области I;} \\
Q(v_2) = Q_+(v_2), \quad R(v_3) = R_-(v_3), \quad \text{на области II;} \\
Q(v_2) = Q_-(v_2), \quad R(v_3) = R_+(v_3), \quad \text{на области III;} \\
Q(v_2) = Q_-(v_2), \quad R(v_3) = R_-(v_3), \quad \text{на области IV;}
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

Структура лиувиллева строения для метрик $ds^2(Q_+, Q_-, R_+, R_-)$ полностью аналогична, а функция вращения на аналогичном семействе торов записывается как:

$$
\rho(t)_{\text{возмущенной сферы}} = \left(\int\limits_{-t}^{-a} N_2(u,t)du\right) \Big/ \left(\int\limits_{-c}^{-b} N_3(u,t)du\right),
$$

где

$$
N_2(u,t) = \frac{1}{\sqrt{u+t}}\left(\frac{1}{\sqrt{-Q_+(u)}} + \frac{1}{\sqrt{-Q_-(u)}}\right),
$$

$$
N_3(u,t) = \frac{1}{\sqrt{-u-t}}\left(\frac{1}{\sqrt{R_+(u)}} + \frac{1}{\sqrt{R_-(u)}}\right).
$$

Далее, при выборе Q_+, Q_-, R_+, R_- такими, чтобы выполнялось условие

$$
\rho(t)_{\text{возмущенной сферы}} \equiv 1,
$$

(что в свою очередь гарантирует замкнутость геодезических). И, окончательно, в [3] приводятся явные формулы для указанных возмущенй стандартной метрики сферы, не меняющих функцию вращения:

$$\begin{aligned} Q_+(v_2) &= \left(\frac{1}{\sqrt{-P(v_2)}} + \alpha(v_2)\right)^{-2}, \\ Q_-(v_2) &= \left(\frac{1}{\sqrt{-P(v_2)}} - \alpha(v_2)\right)^{-2}, \\ R_+(v_3) &= \left(\frac{1}{\sqrt{P(v_3)}} + \beta(v_3)\right)^{-2}, \\ R_-(v_2) &= \left(\frac{1}{\sqrt{P(v_3)}} - \beta(v_3)\right)^{-2}, \end{aligned}$$

здесь α и β - почти произвольные гладкие функции, с требованием того, чтобы их добавление не меняло асимптотики (до взятия третьей производной) функции $P(v)$ в точках $v = -a, -b, -c$, и чтобы выражение в скобках всегда оставалось положительным. В остальном функции α и β произвольны.

Таким образом, в [3] показано, что метрика стандартной сферы допускает много возмущений (причем, эти возмущения даже не обязаны быть малыми), созраняющих замкнутость геодезического потока.

Всюду дальше, будем обозначать наше многообразие ML (где, буквой L, будем напоминать о *лиувиллевости* метрики), а саму метрику будем записывать просто как

$$g = \frac{1}{4}(v_2 - v_3)\left(-\frac{dv_2^2}{Q(v_2)} + \frac{dv_3^2}{R(v_3)}\right),$$

понимая ее при этом на каждой области в смысле (1.2).

1.1.2. Оператор Лапласа-Бельтрами на многообразии ML

Рассмотрим оператор $-\Delta_{ML} + q$, где q - оператор умножения на комплекснозначную бесконечно дифференцируемую функцию на ML.

Для выражения в явном виде оператора Лапласа-Бельтрами на ML в локальных координатах (v_2, v_3) воспользуемся известной формулой (например, [24]):

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} \cdot g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right), \tag{1.3}$$

здесь g_{ij} - элементы метрического тензора, g^{ij} - элементы обратной матрицы.

В координатах (v_2, v_3) оператор $-\Delta_{ML} + q$ будет иметь вид:

$$-\Delta_{ML} + q =$$

$$\frac{4Q(v_2)}{v_2 - v_3} \frac{\partial^2}{\partial^2 v_2} - \frac{4R(v_3)}{v_2 - v_3} \frac{\partial^2}{\partial^2 v_3} + \frac{2Q'(v_2)}{v_2 - v_3} \frac{\partial}{\partial v_2} - \frac{2R'(v_3)}{v_2 - v_3} \frac{\partial}{\partial v_3} + q(v_2, v_3). \tag{1.4}$$

Полный символ оператора $-\Delta_{ML} + q$:

$$a(v_2, v_3, \xi, \eta) = -\frac{4Q(v_2)}{v_2 - v_3} \xi^2 + \frac{4R(v_3)}{v_2 - v_3} \eta^2 + \frac{2iQ'(v_2)}{v_2 - v_3} \xi - \frac{2iR'(v_3)}{v_2 - v_3} \eta + q(v_2, v_3)$$

можно разбить на однородные компоненты:

$$a_2(v_2, v_3, \xi, \eta) = -\frac{4Q(v_2)}{v_2 - v_3} \xi^2 + \frac{4R(v_3)}{v_2 - v_3} \eta^2.$$

$$a_1(v_2, v_3, \xi, \eta) = \frac{2iQ'(v_2)}{v_2 - v_3} \xi - \frac{2iR'(v_3)}{v_2 - v_3} \eta; \tag{1.5}$$

$$a_0(v_2, v_3, \xi, \eta) = q(v_2, v_3);$$

Зафиксируем плотность на нашем многообразии

$$\rho_P = \sqrt{\det g} dx = \frac{v_2 - v_3}{4\sqrt{-Q(v_2)R(v_3)}} dv_2 dv_3$$

и перейдем к оператору P, действующему в сечениях расслоения полуплотностей $(ML, \Omega^{1/2})$ по формуле:

$$Pu = \rho_P^{1/2}(-\Delta_{ML})(u\rho_P^{-1/2}), \quad u \in C^\infty(ML, \Omega^{1/2}). \tag{1.6}$$

Так определен классический эллиптический псевдодифференциальный оператор из $\Psi^2_{phg}(ML, \Omega^{1/2}, \Omega^{1/2})$, для которого $(Pu, v) = (u, Pv)$, $u, v \in C^\infty(ML, \Omega^{1/2})$. Этот оператор имеет те же собственные значения, что и $-\Delta_{ML}$, а его собственные функции получаются из собственных функций оператора $-\Delta_{ML}$ умножением на $\rho^{1/2}$.

Далее зададим оператор $\mathcal{P}$ в $L^2(ML, \Omega^{1/2})$ ограничением P на те $u \in L^2(ML, \Omega^{1/2})$, для которых $Pu \in L^2(ML, \Omega^{1/2})$. Верны следующие утверждения:

1) Оператор $\mathcal{P}$ — неограниченный и самосопряженный оператор в $L^2(ML, \Omega^{1/2})$;

2) Область определения $H_2(ML, \Omega^{1/2})$ оператора $\mathcal{P}$ — всюду плотна.

Итак, пусть главный и субглавный символы оператора $\mathcal{P}$ равны $p(x, \xi)$ и $\mathrm{sub}(x, \xi)$ соответственно.

Отметим, что для бесконечно дифференцируемого риманова многообразия M размерности 2 с метрикой g, если в качестве плотности зафиксировать квадратный корень из определителя метрического тензора $\rho_P = \sqrt{\det g_{ij}}dx$, то в локальных координатах символ оператора Лапласа-Бельтрами $-\Delta$, действующего в сечениях расслоения полуплотностей $(ML, \Omega^{1/2})$ по формуле (1.6), имеет вид: $a^{(P)}(x, \xi) = a_2^{(P)}(x, \xi) + a_1^{(P)}(x, \xi) + a_0^{(P)}(x, \xi)$, где

$$a_2^{(P)}(x, \xi) = -\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\xi_i\xi_j,$$

$$a_1^{(P)}(x, \xi) = i\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i}\xi_j, \tag{1.7}$$

$$a_0^{(P)}(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{1}{4}\rho_P^{-2}\frac{\partial \rho_P}{\partial x^i} g^{ij} \frac{\partial \rho_P}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\rho_P^{-1}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i}\frac{\partial \rho_P}{\partial x^j} \right)$$

и, кроме того, $\mathrm{sub}(\Delta) = 0$.

Действительно, проведем выкладки для любого $u \in C^\infty(ML, \Omega^{1/2})$:

$$\Delta u = \rho_P^{1/2}\rho_P^{-1}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho_P g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}(u\rho_P^{-1/2})\right).$$

Затем преобразуем выражение в больших скобках в сумме:

$$\rho_P g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}(u\rho_P^{-1/2}) = \rho_P^{1/2} g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\rho_P^{-1/2} g^{ij} u \frac{\partial \rho_P}{\partial x^j}.$$

И завершим преобразование всего выражения в сумме:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho_P g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}(u\rho_P^{-1/2})\right) =$$

$$= \rho_P^{1/2} g^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \left(\frac{1}{2}\rho_P^{-1/2}\frac{\partial \rho_P}{\partial x^i} g^{ij} + \rho_P^{1/2}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i}\right)\frac{\partial u}{\partial x^j} -$$

$$-\frac{1}{2}\rho_P^{-1/2} g^{ij}\frac{\partial \rho_P}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i} + \left(\frac{1}{4}\rho_P^{-3/2}\frac{\partial \rho_P}{\partial x^i} g^{ij}\frac{\partial \rho_P}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\rho_P^{-1/2}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i}\frac{\partial \rho_P}{\partial x^j}\right) u.$$

А так как метрический тензор симметричен и $g^{ij} = g^{ji}$, то приведя подобные, мы получим вид (1.7) функций $a_k^{(P)}(x,\xi), \quad k = 0, 1, 2$.

Далее с учетом того, что

$$\mathrm{sub}(\Delta) = a_1^{(P)}(x,\xi) - \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 a_2^{(P)}(x,\xi)}{\partial x^k \partial \xi^k},$$

остается найти второе слагаемое в этой разности. Для этого последовательно возьмем производные от $a_2^{(P)}(x,\xi)$ по ξ_k и x^k:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial \xi_k} a_2^{(P)}(x,\xi) = \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial \xi_k}\left(-\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\xi_i\xi_j\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(-2\sum_{j=1}^{2} g^{kj}\xi_j\right) = -2\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^k}\xi_j.$$

И тогда

$$\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 a_2^{(P)}(x,\xi)}{\partial x^k \partial \xi_k} = -2\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^k}\xi_j = i\sum_{k,j=1}^{2} g^{kj}\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^k}\xi_j = a_1^{(P)}(x,\xi)$$

Тем самым, мы показали, что $\mathrm{sub}(\Delta) = 0$.

Из приведенных рассуждений немедленно следует, что для главного и субглавного символов оператора $\mathcal{P}$, действующего в сечениях расслоения полуплотностей $(ML, \Omega^{1/2})$, верно:

$$p(v_2, v_3, \xi, \eta) = -\frac{4Q(v_2)}{v_2 - v_3}\xi^2 + \frac{4R(v_3)}{v_2 - v_3}\eta^2,$$

$$\mathrm{sub}(v_2, v_3, \xi, \eta) = 0. \tag{1.8}$$

Р.Т. Сили показал в [34], что если $\mathcal{P}$ — положительный оператор порядка 2, то $\mathcal{P}^{1/2}$ является псевдодифференциальным оператором первого порядка, и его собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda^{1/2}$, является также собственной функцией для $\mathcal{P}$, соответствующей собственному значению λ, а главным и субглавным символом оператора $\mathcal{P}^{1/2}$ являются функции $p^{1/2}(x,\xi)$ и $\frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}(x,\xi)\mathrm{sub}(x,\xi)$ (и, в частности $\mathrm{sub}(\mathcal{P}^{1/2}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{sub}(\mathcal{P}) = 0$).

Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать оператор $\mathcal{P}^{1/2}$. Так как гамильтонов поток, определяемый главным символом оператора первого порядка, является потоком на расслоении единичных косфер, и для оператора первого порядка соответствующая унитарная группа $t \to e^{-it\mathcal{P}^{1/2}}$ является разрешающим оператором для гиперболического уравнения $(D_t + \mathcal{P}^{1/2})u = 0$ (здесь $D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$), то рассмотрение именно оператора $\mathcal{P}^{1/2}$ является упрощением как с геометрической, так и с аналитической точек зрения.

Рассмотрим гамильтонову систему T^*ML, порожденную главным символом оператора $\mathcal{P}^{1/2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x(t)}{\partial t} = \dfrac{\partial p^{1/2}(x,\xi)}{\partial \xi}, \\ \dfrac{\partial \xi(t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial p^{1/2}(x,\xi)}{\partial x}, \end{cases} \tag{1.9}$$

состоящую из четырех уравнений, (x, ξ) — координаты в T^*ML, индуцированные некоторой локальной системой координат в ML. Известно, что векторное поле $H_{p^{1/2}}$ на T^*ML, опеределяемое правыми частями в (1.9), не зависит от выбора локальных координат в ML.

Введем в рассмотрение гамильтонов поток $F^t(x,\xi)$, являющийся множеством траекторий гамильтонова поля $H_{p^{1/2}}$ (действие потока $F^t(x,\xi)$, $-\infty < t < +\infty$ состоит в том, что любая точка $(x,\xi) \in T^*ML$ переходит в точку $(x(t), \xi(t)) \in T^*ML$, являющуюся значением в момент времени t решения системы (1.9) с начальными условиями $x(0) = x, \quad \xi(0) = \xi$).

В нашем случае, гамильтонов поток удовлятворяет следующим условиям [15]:

1. *Все траектории гамильтонова поля $H_{p^{1/2}}$ замкнуты и имеют наименьший общий период T.*

   Таким образом, проекции траекторий $H_{p^{1/2}}$ (*бихарактеристики* оператора $\mathcal{P}$) на ML являются простыми замкнутыми кривыми без самопересечений и при любых фиксированных (x,ξ) поток $F^t(x,\xi)$ периодичен по t с наименьшим периодом T.

2. $\beta(T, x, \xi) \equiv \beta_0 = const\text{на}\ T^*M \setminus \{0\}$.

   Здесь $\beta(T, x, \xi)$ - сдвиг фазы для замкнутой траектории

$F^t(x,\xi)$, $\quad 0 \le t < T$, где $F^T(x,\xi) = (x,\xi)$, определен как

$$\beta(T,x,\xi) = \beta_c(T,x,\xi) + \beta_s(T,x,\xi),$$

где $\beta_s(T,x,\xi) = -\left[\frac{1}{2}\int_0^T p^{-1/2}(F^t(x,\xi))sub(F^t(x,\xi))dt\right]_{2\pi}$, $\quad \beta_c(T,x,\xi) = \frac{\alpha\pi}{2}$, здесь $[\cdot]_{2\pi}$ - вычет по модулю 2π, α - индекс Маслова траектории γ,

Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что $\beta_0 = 0$.

1.1.3. Спектральные свойства оператора Лапласа-Бельтрами

Пусть Δ — оператор Лапласа-Бельтрами, а q — оператор умножения на комплекснозначную бесконечно дифференцируемую функцию на S^2. Традиционно обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ — собственные числа невозмущенного оператора (здесь это $-\Delta$ на S^2) и через $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ — собственные числа возмущенного оператора (здесь это $-\Delta + q$ на S^2), занумерованные с учетом кратности в порядке возрастания их действительных частей.

Так как известно (например, [15]), что спектр оператора $-\Delta$ на S^2 состоит из точек $k(k+1)$ с кратностью $N_k = 2k+1$, то для собственных чисел оператора $-\Delta$ будем использовать двойную нумерацию λ_{ki}, где $k = 0, 1, \ldots;\ i = 1, \ldots, 2k+1$, а для собственных чисел оператора $-\Delta + q$ будем использовать двойную нумерацию μ_{ki}, согласованную с нумерацией λ_{ki}.

В. Гийемин [28] и Г.Видом [40] изучили спектр оператора $-\Delta + q$ на S^2 и показали, что оценка

$$|\mu_{ki} - \lambda_{ki}| = O(1), \quad i = 1, \ldots, N_k, \tag{1.10}$$

получаемая методами теории возмущений [8], может быть улучшена лишь для нечетных q (т.е. $q(\tau x) = -q(x)$ для каждого $x \in S^2$, где τ-антиподальное отображение) до

$$|\mu_{ki} - \lambda_{ki}| = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad i = 1, \ldots, N_k, \tag{1.11}$$

и O в (1.11) можно заменить на o только для $q \equiv 0$.

А. Вейнстейн [39] рассмотрел оператор $-\Delta + B$ на компактном римановом многообразии X (мы приводим результат для двумерного случая), где B - ПДО нулевого порядка и показал, что для любой функции $f(z)$, аналитической в некоторой области, содержащей последовательность $\{\mu_{ki} - \lambda_{ki}\}_{k=0,i=0}^{\infty,2k}$, (здесь, аналогично предыдущим обозначениям, μ_{ki} - собственные числа возмущенного, а λ_{ki} - невозмущенного операторов) верно

$$\sum_{i=0}^{2k} f(\mu_{ki} - \lambda_{ki}) = \frac{k}{4\pi^2} \int\limits_{S^*X} f(B^{av})dv + O(1),$$

где S^*X расслоение единичных сфер в кокасательном пространстве; dv - канонический элемент объема S^*X, $B^{av} = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\exp t\Xi)^*\sigma(B)dt$ -символ усреднения оператора B, здесь $\sigma(B)$-символ оператора B, Ξ - гамильтоново векторное поле на $T^*X \setminus \{0\}$. В.Гиейминым и А.Урибом [29] это утверждение было распространено и на случай возмущения оператора Лапласа-Бельтрами комплексным потенциалом.

Таким образом, относительно асимптотического распределения собственных чисел оператора $-\Delta + q$ были получены окончательные результаты. Получение формул регуляризованных следов исследуемого оператора становится важным инструментом в исследовании спектра оператора, когда дальнейшее изучение асимптотического поведения спектра становится невозможным.

В.А. Садовничим и В.В. Дубровским в [16] для S^2 и нечетного потенциала q впервые была получена формула следа со скобками:

$$\mu_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{2k} \mu_{ki} - k(k+1)(2k+1) \right] = -\frac{1}{8\pi} \int\limits_{S^2} q^2 dS.$$

Позже В. Е. Подольский [14], применив к этой задаче суммирование по Абелю и затем к полученной формуле тауберову теорему Литлвуда, доказал, что ряд сходится без скобок (но этот случай является единственным исключением). Позже В.Е. Подольским [33] были получены аналогичные формулы для любых степеней собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на компактных симметрических пространствах ранга 1. А.Н. Бобров предпринимал попытку [2] найти след оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на поверхности вращения Цолля, но допустил неточность (подробнее см. параграф 1.2.1 настоящей работы), и приведенную им фомулу нельзя считать окончательно верной, но результат для случая простой сферы S^2 и произвольной комплекснозначной функции $q \in C^\infty$ был получен. В.А. Садовничий и З.Ю. Фазуллин для оператора возмущенного произвольной комплекснозначной функцией лучшей гладкости: в 2005 году для $q \in C^2(S^2)$ [19], а в 2011 году для $q \in W_1^2(S^2)$ [20] получили формулу регуляризованного следа:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2k} [\mu_{ki} - k(k+1)(2k+1) - c_0] = 2c_1,$$

где $c_0 = \dfrac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2} q(\omega) d\omega$, $c_1 = \dfrac{1}{32\pi^3} \int\limits_{S^2} \int\limits_{S^2} \dfrac{q(\omega) q(\omega_0)}{\sqrt{1 - (\vec{\omega}, \vec{\omega_0})^2}} d\omega d\omega_0 - \dfrac{1}{16\pi} \int\limits_{S^2} q^2(\omega) d\omega$, $(\vec{\omega}, \vec{\omega_0})$ - скалярное произведение векторов $\vec{\omega} = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$ и $\vec{\omega_0} = (\cos\varphi_0 \sin\theta_0, \sin\varphi_0 \sin\theta_0, \cos\theta_0)$.

1.2. Построение и вычисление регуляризованного следа возмущенного оператора Лапласа-Бельтрами на ML

Обозначим через $-\tilde{\Delta}_{ML}$ псевдодифференциальный оператор второго порядка на ML, собственные числа $\varkappa_{ki}$ которого, совпадают с собственными числами оператора Лапласа-Бельтрами на S^2, то есть

$$\varkappa_{ki} = k(k+1), \tag{1.12}$$

где $k = 0, 1, \ldots$; $i = 1, \ldots, N_k$, где кратность $N_k = 2k+1$.

Пусть $-\Delta_{ML}$ - оператор Лапласа-Бельтрами на многообразии M. А. Вейнстейн в [39] указал на то, что оператор $-\Delta_{ML}$ представим в виде $-\Delta_{ML} = -\tilde{\Delta}_{ML} + B$, где B - ПДО нулевого порядка. Такое представление позволило полагать, что основные результаты этой работы, посвященной исследованию асимптотик кластеров разностей собственных значений возмущенного и невозмущенного операторов, применимы к собственным числам оператора $-\Delta_{ML}$. Но для получения окончательного вида асимптотик кластеров, необходимо знать символ оператора B или его усреднение. А. Вейнстейн выдвинул гипотезу, что символом усреднения символа такого возмущения является усреднение гаусовой кривизны вдоль геодезической. Позже, в 1997 году, С. Зельдич [41] вычислил явный вид символа усреднения, указав, что помимо предполагаемого А. Вейнстейном, есть еще один член, не всегда равный нулю:

$$\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\gamma}\left(K_{ML} - 1 + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{1}{3}(K_{ML})_{\mathrm{v}} u^3 \int\limits_0^r (K_{ML})_{\mathrm{v}} J^3 dt - (K_{ML})_{\mathrm{v}} u^2 J \int\limits_0^r (K_{ML})_{\mathrm{v}} u J^2 dt\right]\right) dr,$$

здесь K_{ML} - гауссова кривизна многообразия, γ — произвольная геодезическая, v-единичный вектор нормали к геодезической γ, $J(r,\omega)$ - объемная плотность в геодезических полярных координатах, то есть $dvol(\gamma) = J(r,\omega)drd\omega$, u и v - фундаментальные решения уравнения Якоби вдоль геодезической γ с условиями $\begin{pmatrix} u(0) & v(0) \\ \dot{u}(0) & \dot{v}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Нам удобней рассматривать эту функцию не на пространстве геодезических, а на кокасательном расслоении единичных сфер, поэтому перепишем ее в следующем виде:

$$\sigma^{av} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (\exp t\Xi)^*(\sigma)dt, \quad \text{где}$$

$$\sigma = \frac{1}{4}\Bigg(K_{ML} - 1 + \tag{1.13}$$

$$+ \left[\frac{1}{3}(K_{ML})_{\mathrm{v}}u^3\int\limits_0^r (K_{ML})_{\mathrm{v}}J^3dt - (K_{ML})_{\mathrm{v}}u^2J\int\limits_0^r (K_{ML})_{\mathrm{v}}uJ^2dt\right]\Bigg),$$

и Ξ - гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении $T^*ML \setminus \{0\}$.

Ранее, описывая спектральные свойства оператора Лапласа-Бельтрами (пункт 1.1.3), для собственных чисел невозмущенного оператора на S^2 мы вводили обозначение λ_{ki}, а для возмущенного на S^2 — μ_{ki}. Всюду дальше будем сохранять эту логику, но для операторов, заданных уже на многообразии ML. Обозначим собственные числа $-\Delta_{ML}$ через λ_{ki}, где $k = 0, 1, \ldots$; $i = 1, \ldots, 2k+1$. Здесь двойная нумерация согласована с нумерацией $\varkappa_{ki}$. Отметим, что для собственных чисел оператора $-\Delta_{ML}$ верна оценка (аналогичная (1.10)):

$$|\lambda_{ki} - \varkappa_{ki}| = O(1). \tag{1.14}$$

Далее рассмотрим $-\Delta_{ML}+q$ — оператор Лапласа-Бельтрами возмущенный комплекснозначной функцией на ML и обозначим собственные числа этого оператора через μ_{ki}, где двойная нумерация согласована с нумерацией λ_{ki} (а значит, и с нумерацией $\varkappa_{ki}$), и также $k = 0, 1, \ldots; i = 1, \ldots, 2k+1$, и также верна аналогичная оценка:

$$|\mu_{ki} - \lambda_{ki}| = O(1). \tag{1.15}$$

Наша задача получить формулу регуляризованного следа для собственных чисел оператора $-\Delta_{ML} + q$ и $\varkappa_{ki}$ (то есть, нам интересно узнать, как «отличаются» собственные числа оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом взятого на ML, от собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами, рассматриваемого на стандартной сфере). Решение поставленной задачи будет проведено в 5 этапов:

1. Построение формулы регуляризованного следа для собственных чисел оператора $-\Delta_{ML} = -\tilde{\Delta}_{ML} + B$ и $-\tilde{\Delta}_{ML}$ (то есть для λ_{ki} и $\varkappa_{ki}$);
2. Построение формулы регуляризованного следа для собственных чисел оператора $-\Delta_{ML} + q$ и $-\Delta_{ML}$ (то есть для μ_{ki} и λ_{ki});
3. Сведение общей формулы регуляризованного следа для μ_{ki} и $\varkappa_{ki}$, с помощью результатов пунктов 1. и 2.;
4. Изучение связи ζ- и θ-функций операторов $-\tilde{\Delta}_{ML}$, $-\Delta_{ML}$ и $-\Delta_{ML} + q$;
5. Вычисление формулы регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами на ML.

1.2.1. Построение формулы регуляризованного следа для собственных чисел оператора $-\Delta_{ML} = -\tilde{\Delta}_{ML} + B$ и $-\tilde{\Delta}_{ML}$

Положим $\nu_{ki} = \lambda_{ki} - k(k+1)$, здесь $i = 0, \dots, 2k$. Имеет место асимптотическое разложение при $k \to \infty$ (см., например, [29]):

$$\sum_{i=0}^{2k} \nu_{ki} = a_0(2k+1) + a_1 + a_2(2k+1)^{-1} + O(k^{-2}), \tag{1.16}$$

а значит и

$$\sum_{i=0}^{2k} \lambda_{ki} = (2k+1)k(k+1) + a_0(2k+1) + a_1 + a_2(2k+1)^{-1} + O(k^{-2}). \tag{1.17}$$

Из последней формулы видно, что для обеспечения сходимости ряда необходимо знать коэффициенты a_0, a_1 и a_2. Покажем, что a_1 и a_2 равны нулю.

Рассмотрим далее ряды $F(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(2k+1)e^{-k(k+1)t}$ и $L(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k t}$. Поскольку $\lambda_k \sim k$, то $L(t)$ равномерно сходится при $0 < t_0 \leq t < +\infty$ $\forall t_0$. Тогда

$$L(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2k} e^{-\lambda_{ki}t} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2k} e^{-(k(k+1)+\nu_{ki})t} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t}\sum_{i=0}^{2k} e^{-\nu_{ki}t}.$$

Для внутренней суммы воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t}\sum_{i=0}^{2k} e^{-\nu_{ki}t} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t}\left(2k+1 - t\sum_{i=0}^{2k}\nu_{ki} + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{2k} e^{-\nu_{ki}\xi t}\right), \tag{1.18}$$

где $0 < \xi < 1$. Так как из (1.14) следует, что $|\nu_{ki}| = O(1)$, то можем записать оценку при $t \in [0,1]$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{t^2}{2}e^{-k(k+1)t}\sum_{i=0}^{2k}e^{-\nu_{ki}\xi t}\right| < c\sum_{k=0}^{\infty}t^2 e^{-k(k+1)t}(2k+1),$$

где $c>0$ - некоторая константа. Так как $\max\limits_{t\in[0,\infty)} t^2 e^{-k(k+1)t} = (2/ek(k+1))^2$, то исследуемый ряд равномерно сходится при $t\in[0,\infty)$ и значит есть $o(1)$ при $t\to+0$. Тогда (1.18) примет вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k(k+1)t}\sum_{i=0}^{2k}e^{-\nu_{ki}t} = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-k(k+1)t}\,(2k+1) - t\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k(k+1)t}\left(\sum_{i=0}^{2k}\nu_{ki}\right) + o(1),$$

Подставляя сюда (1.16), получим при $t\to+0$

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k(k+1)t}\sum_{i=0}^{2k}e^{-\nu_{ki}t} = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-k(k+1)t}(2k+1) - a_0 t\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k(k+1)t}(2k+1) -$$

$$-a_1 t\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k(k+1)t} - a_2 t\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k(k+1)t}(2k+1)^{-1} + t\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k(k+1)t}O(k^{-2}) + o(1).$$

Отмечая, что $t\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-k(k+1)t}O(k^{-2}) = O(t)$ при $t\to+0$, получаем

$$L(t) = F(t) - a_0 tF(t) -$$

$$-a_1 t\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k(k+1)t} - a_2 t\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k(k+1)t}(2k+1)^{-1} + O(t).$$

Можно показать (см., например, [33]), что при $t\to+0$

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k(k+1)t} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}t^{-1/2} + O(1);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k(k+1)t}(2k+1)^{-1} = -\ln t + O(t), \tag{1.19}$$

и тогда окончательно, при $t \to +0$

$$L(t) = F(t) - a_0 t F(t) + a_1 \frac{1}{2}\sqrt{\pi} t^{1/2} - a_2 t \ln t + O(t). \qquad (1.20)$$

Дальше нам потребуется следующий факт общей теории ПДО (см., например, [22]): для эллиптического ПДО B положительного порядка m, полуограниченного снизу, с самосопряженной главной частью, действующего на компактном многообразии размерности n, существует разложение:

$$Tr(e^{-tB}) = \sum_{j=0}^{N} t^{\frac{j-n}{m}} (\eta_j + \tilde{\eta}_j \ln t) + O(t^{\frac{N-n}{m}} \ln t), \quad t \to +0, \qquad (1.21)$$

верное для всех N, причем $\tilde{\eta}_j = 0$ для всех $j \leq 0$. Вычислить коэфициенты η_j и $\tilde{\eta}_j$ можно с помощью детального исследования дзета-функции ПДО (см. [34]). В частности, оттуда следует, что если оператор B - дифференциальный и многообразие без края, то $\tilde{\eta}_j = 0$ для всех j. Дополнительно отметим, что в нашем случае равны и все η_j с нечетными индексами, то есть коэфициенты при дробных степенях t (более подробно это будет объяснено ниже, в параграфе, описывающем непосредственное вычисление коэффициентов тета-функций).

Для оператора являющегося самосопряженным расширением оператора $-\Delta_{ML}$ при $t \to 0$, известна асимптотика его тета-функции, совпадающая с $L(t)$:

$$L(t) \sim t^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} l_j t^j, \qquad (1.22)$$

и аналогично для $F(t)$

$$F(t) \sim t^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} f_j t^j, \qquad (1.23)$$

Отметим, что из формул (1.20), (1.22) и (1.23) сразу следует, что $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$, и осталось вычислить только a_0. Подставим (1.23) в (1.20) и перепишем:

$$L(t) = (f_0\frac{1}{t} + f_1) - a_0 f_0 + O(t), \text{ при } t \to +0. \tag{1.24}$$

Сравнивая получившуюся формулу с (1.22), получаем, что
$l_0 = f_0$ и $l_1 = f_1 - a_0 f_0$, а следовательно, $a_0 = \dfrac{f_1 - l_1}{f_0}$, где l_1, f_1, f_0 коэффициенты соответсвующих тета-функций операторов, и их можно вычислить через значения аналитического продолжения дзета-функций данных операторов (это будет сделано в пункте 1.2.4 настоящей диссертации), а значит ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{2k}\lambda_{ki} - k(k+1)(2k+1) - a_0(2k+1)\right)$$

сходится абсолютно.

Для вычисления правой части этого ряда проведем следующие рассуждения:

$$L(t) - (1 - a_0 t)F(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{2k}(e^{-\lambda_{ki}t} - e^{-k(k+1)t}) + a_0 t(2k+1)e^{-k(k+1)t}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t}\left\{\sum_{i=0}^{2k}(e^{-(\lambda_{ki} - k(k+1))t} - 1) + a_0 t(2k+1)\right\}.$$

Для внутренней суммы воспользумся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, тогда

$$L(t) - (1 - a_0 t)F(t) =$$

$$-t\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t}\left(\sum_{i=0}^{2k}\lambda_{ki} - k(k+1)(2k+1) - a_0(2k+1)\right) +$$

$$+\frac{t^2}{2!}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t}\left(\sum_{i=0}^{2k}(\lambda_{ki}-k(k+1))^2\right)+$$

$$+\frac{t^3}{3!}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t}\left(\sum_{i=0}^{2k} e^{-(\lambda_{ki}-k(k+1))\xi t}\right),$$

где $0<\xi<1$. Так как из (1.14) следует, что $|\lambda_{ki}-k(k+1)|=O(1)$, то остаточный член при $t\in[0,1]$ оценивается рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^3 e^{-k(k+1)t}(2k+1)$, а так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^2 e^{-k(k+1)t}(2k+1)$ сходится равномерно и имеет оценку $o(1)$, то остаточный член имеет оценку $o(t)$ при $t\to+0$. Значит

$$L(t)-(1-a_0t)F(t)=$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t}\left(\sum_{i=0}^{2k}\lambda_{ki}-k(k+1)(2k+1)-a_0(2k+1)\right)t+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t}\left(\sum_{i=0}^{2k}(\lambda_{ki}-k(k+1))^2\right)t^2+o(t).$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{2k}\lambda_{ki}-k(k+1)(2k+1)-a_0(2k+1)\right)e^{-k(k+1)t}=$$

$$=\frac{1}{t}((1-a_0t)F(t)-L(t))+ \tag{1.25}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t}\left(\sum_{i=0}^{2k}(\lambda_{ki}-k(k+1))^2\right)t+o(1).$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части. Как уже отмечалось выше, можем воспользоваться результатами работы [39] для нахождения асимптотики кластеров, так как символ усреднения оператора B нам известен и определен формулой (1.13). Значит при $k \to \infty$ верно

$$\sum_{i=0}^{2k}(\lambda_{ki} - k(k+1))^2 \sim \frac{k}{4\pi^2} \int\limits_{S^*ML} (\sigma^{av})^2 dv + O(1),$$

где S^*ML расслоение единичных сфер в кокасательном пространстве; dv - канонический элемент объема S^*ML.

Таким образом, для второго слагаемого (1.25) имеем

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t}\left(\sum_{i=0}^{2k}(\lambda_{ki} - k(k+1))^2\right) t =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{S^*ML} (\sigma^{av})^2 dv \sum_{k=0}^{\infty} tke^{-k(k+1)t}.$$

Можно показать (см., например, [33]), что при $t \to +0$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ke^{-k(k+1)t} = \frac{1}{2}t^{-1} + O(t^{-1/2})$ и значит $\lim\limits_{t\to+0} t\sum\limits_{k=0}^{\infty} ke^{-k(k+1)t} = \frac{1}{2}$. Отсюда, окончательно при $t \to +0$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t}\left(\sum_{i=0}^{2k}(\lambda_{ki} - k(k+1))^2\right) t = \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{S^*ML} (\sigma^{av})^2 dv. \tag{1.26}$$

Окончательно переходя в (1.25) к пределу при $t \to +0$ и пользуясь формулами (1.22) и (1.23), получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{2k} \lambda_{ki} - k(k+1)(2k+1) - a_0(2k+1)\right) =$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{1}{t}((1-a_0 t)F(t) - L(t)) + \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{S^*ML} (\sigma^{av})^2 dv = \tag{1.27}$$

$$= f_2 - l_2 - a_0 f_1 + \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{S^*ML} (\sigma^{av})^2 dv,$$

где $\sigma(R)$ определен в (1.13), $a_0 = \dfrac{f_1 - l_1}{f_0}$, l_i - коэффициенты разложения тета-функции $L(t)$ (1.22) и f_i - коэффициенты разложения тета-функции $F(t)$ (1.23).

1.2.2. Построение регуляризованного следа для собственных чисел операторов $-\Delta_{ML} + q$ и $-\Delta_{ML}$

Схема построения следа для этих операторов в целом совпадает с описанным построением в прошлом параграфе. Здесь тоже возмущенный и невозмущенный оператор на многообразии, только теперь в качестве возмущения выступает комплекснозначная функция q. И в этом случае верны все те оценки для собственных чисел, которые необходимы для построения формулы регуляризованного следа.

Аналогично можно положить $\nu'_{ki} = \mu_{ki} - \lambda_{ki}$, здесь $i = 0, \ldots, 2k$ и аналогично (1.16) записать асимптотическое разложение при $k \to \infty$:

$$\sum_{i=0}^{2k} \nu'_{ki} = b_0(2k+1) + b_1 + b_2(2k+1)^{-1} + O(k^{-2}). \tag{1.28}$$

Введем в рассмотрение ряд $M(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-\mu_k t}$ и так как для оператора являющегося самосопряженным расширением оператора $-\Delta_{ML} + q$, при $t \to 0$ известна асимптотика его тета-функции, совпадающая с $M(t)$, то:

$$M(t) \sim t^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} m_j t^j. \tag{1.29}$$

Проводя аналогичное исследование только для собственных чисел μ_{ki} и λ_{ki} с использованием асимптотик $M(t)$ и $L(t)$ можно показать, что в (1.28) b_1

и b_2 равны нулю, а $b_0 = \dfrac{l_1 - m_1}{l_0}$, причем $l_0 = m_0$, и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{2k}(\mu_{ki}-\lambda_{ki}) - b_0(2k+1)\right)$$

сходится абсолютно.

Проводя аналогичное исследование для нахождения правой части этого ряда, получим формулу, аналогичную (1.25):

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{2k}(\mu_{ki}-\lambda_{ki}) - b_0(2k+1)\right)e^{-\lambda_{ki}t} =$$

$$= \frac{1}{t}((1-b_0t)L(t) - M(t)) + \tag{1.30}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda_{ki}t}\left(\sum_{i=0}^{2k}(\mu_{ki}-\lambda_{ki})^2\right)t + o(1).$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части. Аналогично, из [29] следует, что для внутреннего ряда при $k \to \infty$ верно

$$\sum_{i=0}^{2k}(\mu_{ki}-\lambda_{ki})^2 \sim \frac{k}{4\pi^2}\int\limits_{S^*ML}(q^{av})^2 dv + O(1),$$

где S^*ML — расслоение единичных сфер в кокасательном пространстве; dv - канонический элемент объема S^*ML; символ усреднения

$$q^{av} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\exp t\Xi)^*(q)dt, \tag{1.31}$$

где Ξ - гамильтоново векторное поле на $T^*ML \setminus \{0\}$.

Окончательно переходя в (1.30) к пределу при $t \to +0$ и пользуясь формулами (1.29) и (1.22), получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{2k}(\mu_{ki}-\lambda_{ki})-b_0(2k+1)\right)=$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}((1-b_0t)L(t)-M(t))+\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*ML}(q^{av})^2dv= \tag{1.32}$$

$$=l_2-m_2-b_0l_1+\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*ML}(q^{av})^2dv,$$

где q^{av} определен в (1.31), $b_0=\dfrac{l_1-m_1}{l_0}$, l_i - коэффициенты разложения тета-функции $L(t)$ (1.22) и m_i - коэффициенты разложения тета-функции $M(t)$ (1.29).

1.2.3. Сведение общей формулы регуляризованного следа для собственных чисел оператора $-\Delta+q$ и $\varkappa_{ki}$

Теперь все необходимые объекты для построения интересующего нас следа есть. Сложим левые и правые части формул (1.27) и (1.32) и получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{2k}\mu_{ki}-k(k+1)(2k+1)-(a_0+b_0)(2k+1)\right)=$$

$$=f_2-a_0f_1+\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*ML}(\sigma^{av})^2dv-m_2-b_0l_1+\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*ML}(q^{av})^2dv, \tag{1.33}$$

где σ^{av} определен в (1.13), q^{av} определен в (1.31), $a_0=\dfrac{f_1-l_1}{f_0}$, $b_0=\dfrac{l_1-m_1}{l_0}$, m_i - коэффициенты разложения тета-функции $M(t)$ (1.29), l_i - коэффициенты разложения тета-функции $L(t)$ (1.22) и f_i - коэффициенты разложения тета-функции $F(t)$ (1.23).

Для получения окончательного ответа нам наобходимо исследовать все асимптотики $M(t)$, $L(t)$ и $F(t)$ и предъявить явный вид коэффициентов разложения, участвующих в ответе.

1.2.4. Связь дзета-функции и тета-функции оператора Лапласа-Бельтрами

Начнем с исследования тета-функции оператора $-\Delta_{ML}+q$ и нахождения коэффициентов m_j в разложении $M(t)$. Напомним (1.21), что для самосопряженнного расширения оператора $-\Delta_{ML}+q$ в $L^2_\rho(ML)$ верна асимптотика вида

$$M(t)\sim\sum_{j=0}^{\infty}m_jt^{\frac{j}{2}}. \tag{1.34}$$

В нашем случае вид θ-функции проще общего вида, описанного в (1.21). Отсутствие логарифмичиских членов связано с тем, что рассматриваемый оператор - дифференциальный, а рассматриваемое многообразие - без края. А отсутсвие членов с дробными степенями t выявляется из следующих рассуждений. Хорошо известно, что θ-функция и ζ-функция связаны преобразованием Меллина:

$$\int\limits_0^{+\infty}t^{s-1}M(t)dt=\Gamma(s)\zeta_{\Delta_{ML}+q}(s),$$

и можно показать (см. [24]), что n_j (1.21) при $j=0$ и $j=2k+1, k=0,1,2\ldots,$ вычисляются через вычеты аналитического продолжения ζ-функции γ_j в точках $z_j=\dfrac{j-2}{2}$ по формуле:

$$\gamma_j=-\frac{i}{8\pi^2}\iiint\limits_{ML}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\lambda^{\frac{j-2}{2}}b^{(0)}_{-2-j}(v_2,v_3,\xi(\alpha),\eta(\alpha),\lambda)d\lambda d\alpha dv_2dv_3 \tag{1.35}$$

Оказывается, что в нашем случае, эти вычеты равны нули и коэффициенты при дробных стпенях t в (1.21) равны нулю соответственно. Таким образом, имеем окончательный вид тета-функции опеределенный (1.34) и приступим к нахождению коэффициентов m_1 и m_2, которые в свою очередь, определяются через значения аналитического продолжения ζ-функции оператора $-\Delta_{ML}+q$ в 0 и 1:

$$m_1 = \zeta_{-\Delta_{ML}+q}(0), \quad m_2 = -\zeta_{-\Delta_{ML}+q}(1),$$

В теории ПДО известна стандартная процедура (см., например, [24]) построения параметрикса для классического эллиптического псевдодифференциального оператора на замкнутом многообразии. В ее основе — нахождение символа параметрикса как асимптотической суммы неких однородных функций, которые, в свою очередь определяются через однородные компоненты символа самого оператора с применением формулы композиции. В случае, когда оператор дифференциальный, с помощью такого метода удается получить компоненты разложения символа резольвенты по рекурентным формулам, которые в нашем случае примут вид:

$$a_2(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)b^{(0)}_{-2}(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda) = 1,$$

$$\begin{gathered} a_2(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)b_{-2-j}(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)+ \\ +\sum_{\substack{k+l+|\alpha|=j\\ l<j}} \partial^{\alpha}_{(\xi,\eta)}a_{2-k}(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)D^{\alpha}_{(v_2,v_3)}b^{(0)}_{-2-l}(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)/\alpha! = 0, \end{gathered} \tag{1.36}$$

где k,l - индексы; α - мультииндекс; $D_x = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$;
$b^{(0)}_i(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)$ - искомые компоненты символа параметрикса оператора $-\Delta_{ML}+q-\lambda I$; $a_i(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)$ - однородные компоненты символа $a(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)$ оператора $-\Delta_{ML}+q-\lambda I$, полученные из однородных компонентов (1.5) символа $a(v_2,v_3,\xi,\eta)$ оператора $-\Delta_{ML}+q$ следующим образом:

$$a_0(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda) = a_0(v_2,v_3,\xi,\eta) = q(v_2,v_3);$$

$$a_1(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)=a_1(v_2,v_3,\xi,\eta)=\frac{2iQ'(v_2)}{v_2-v_3}\xi-\frac{2iR'(v_3)}{v_2-v_3}\eta;$$

$$a_2(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)=a_2(v_2,v_3,\xi,\eta)-\lambda=-\frac{4Q(v_2)}{v_2-v_3}\xi^2+\frac{4R(v_3)}{v_2-v_3}\eta^2-\lambda.$$

Так как $a_2(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)=-\frac{4Q(v_2)}{v_2-v_3}\xi^2+\frac{4R(v_3)}{v_2-v_3}\eta^2-\lambda$, то из первого уравнения (1.36) сразу получим:

$$b^{(0)}_{-2}(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)=\frac{v_2-v_3}{-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3}, \tag{1.37}$$

а воспользовавшись вторым уравнением (1.36) сможем последовательно получить все $b^{(0)}_{-2-j}(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)$, $j=1,2,\dots$ и вычислить искомые значения ζ-функции, по формуле:

$$\zeta_{-\Delta_{ML}+q}(l)=$$

$$=(-1)^l\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_{ML}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}r^l b^{(0)}_{-2l-4}(v_2,v_3,\xi(\alpha),\eta(\alpha),-r)\,dr\,d\alpha\,dv_2\,dv_3. \tag{1.38}$$

Все эти рассуждения верны и для коэффциентов разложения $L(t)$, так

$$l_1=\zeta_{-\Delta_{ML}}(0),\;\; l_2=-\zeta_{-\Delta_{ML}}(1). \tag{1.39}$$

1.2.5. Вычисление формулы регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами на ML

С помощью (1.37) и второй формулы из (1.36) можно последовательно вычислить $b^{(0)}_{-3}(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)$, $b^{(0)}_{-4}(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)$, $b^{(0)}_{-5}(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)$ и $b^{(0)}_{-6}(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)$:

$$b^{(0)}_{-3}(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)=\frac{8Q(v_2)\xi+8R(v_3)\eta}{i(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^2}+$$

$$\frac{2Q'(v_2)(v_2-v_3)\xi-2R'(v_3)(v_2-v_3)\eta}{i(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^2}+$$

$$\frac{8Q(v_2)\xi(4Q'(v_2)\xi^2+\lambda)(v_2-v_3)+8R(v_3)\eta(4R'(v_3)\eta^2+\lambda)(v_2-v_3))}{i(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^3};$$

$$b^{(0)}_{-4}(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)=-\frac{192Q^2(v_2)\xi^2(4Q'(v_2)\xi^2+\lambda)^2(v_2-v_3)}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^5}-$$

$$\frac{192R^2(v_3)\eta^2(4R'(v_3)\eta^2+\lambda)^2(v_2-v_3)}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^5}-$$

$$\frac{384Q(v_2)R(v_3)\xi\eta(4Q'(v_2)\xi^2+\lambda)(4R'(v_3)\eta^2+\lambda)(v_2-v_3)}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^5}-$$

$$\frac{192Q^2(v_2)\xi^2(4Q'(v_2)\xi^2+\lambda)+192R^2(v_3)\eta^2(4R'(v_3)\eta^2+\lambda)}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^4}-$$

$$\frac{192Q(v_2)R(v_3)\xi\eta(4Q'(v_2)\xi^2+\lambda)+192Q(v_2)R(v_3)\xi\eta(4R'(v_3)\eta^2+\lambda)}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^4}-$$

$$\frac{112Q(v_2)Q'(v_2)\xi^2(4Q'(v_2)\xi^2+\lambda)-112R(v_3)R'(v_3)\eta^2(4R'(v_3)\eta^2+\lambda)}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^4}-$$

$$\frac{256Q^2(v_2)Q''(v_2)\xi^4(v_2-v_3)-256R^2(v_3)R''(v_3)\eta^4(v_2-v_3)}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^4}-$$

$$\frac{48Q'(v_2)R(v_3)\xi\eta(4R'(v_3)\eta^2+\lambda)(v_2-v_3)}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^4}+$$

$$\frac{48R'(v_3)Q(v_2)\xi\eta(4Q'(v_2)\xi^2+\lambda)(v_2-v_3)}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^4}-$$

$$\frac{8Q(v_2)(4Q'(v_2)\xi^2+\lambda)^2(v_2-v_3)-8R(v_3)(4R'(v_3)\eta^2+\lambda)^2(v_2-v_3)}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^4}-$$

$$\frac{96Q(v_2)Q'(v_2)\xi^2-96R(v_3)R'(v_3)\eta^2-32Q(v_2)R'(v_3)\xi\eta+32Q'(v_2)R(v_3)\xi\eta}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^3}-$$

$$\frac{8Q(v_2)(4Q'(v_2)\xi^2+\lambda)-8R(v_3)(4R'(v_3)\eta^2+\lambda)}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^3}-$$

$$\frac{32Q(v_2)Q''(v_2)\xi^2(v_2-v_3)+32R(v_3)R''(v_3)\eta^2(v_2-v_3)}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^3}-$$

$$\frac{2Q'(v_2)(4Q'(v_2)\xi^2+\lambda)(v_2-v_3)+2R'(v_3)(4R'(v_3)\eta^2+\lambda)(v_2-v_3)}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^3}-$$

$$\frac{4(Q'(v_2))^2\xi^2(v_2-v_3)+4(R'(v_3))^2\eta^2(v_2-v_3)-8Q'(v_2)R'(v_3)\xi\eta(v_2-v_3)}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^3}-$$

$$\frac{2Q'(v_2)+2R'(v_3)-q(v_2,v_3)(v_2-v_3)^2}{(-4Q(v_2)\xi^2+4R(v_3)\eta^2-\lambda v_2+\lambda v_3)^2}.$$

Коэффициенты $b^{(0)}_{-5}(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)$ и $b^{(0)}_{-6}(v_2,v_3,\xi,\eta,\lambda)$ из-за их громоздкости привести не представляется возможным.

Пользуясь (1.38), можно выписать явные формулы для вычисления искомых значений $\zeta_{-\Delta_{ML}+q}(0)$ и $\zeta_{-\Delta_{ML}+q}(1)$:

$$\zeta_{-\Delta_{ML}+q}(0)=\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_{ML}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} b^{(0)}_{-4}(v_2,v_3,\xi(\alpha),\eta(\alpha),-r)dr\,d\alpha\,dv_2dv_3,$$

$$\zeta_{-\Delta_{ML}+q}(1)=-\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_{ML}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} r b^{(0)}_{-6}(v_2,v_3,\xi(\alpha),\eta(\alpha),-r)dr\,d\alpha\,dv_2dv_3. \quad (1.40)$$

И получим, что:

$$\zeta_{-\Delta_{ML}+q}(0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{ML}\left(\frac{1}{3}K_{ML}-q(v_2,v_3)\right)\sqrt{\det g}\,dv_2dv_3,$$

$$\zeta_{-\Delta_{ML}+q}(1)=-\frac{1}{60\pi}\iint\limits_{ML}(\Delta_{ML}K_{ML}+K^2_{ML})\sqrt{\det g}\,dv_2dv_3-$$

$$-\frac{1}{24\pi}\iint\limits_{ML}\left(-\Delta_{ML}q(v_2,v_3)+3q^2(v_2,v_3)-2q(v_2,v_3)K_{ML}\right)\sqrt{\det g}\,dv_2dv_3,$$

в этих выражениях

$K_{ML}=\dfrac{2(R(v_3)-Q(v_2))+(v_2-v_3)(R'(v_3)+Q'(v_2))}{(v_2-v_3)^3}$ - гауссова кривизна

ML, и $\sqrt{\det g} = \dfrac{v_2 - v_3}{4\sqrt{-Q(v_2)R(v_3)}}$ - корень из определителя матрицы метрического тензора.

Таким образом, получили, что

$$m_1 = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{ML}\left(\frac{1}{3}K_{ML} - q(v_2, v_3)\right)\sqrt{\det g}dv_2dv_3,$$

$$m_2 = \frac{1}{60\pi}\iint\limits_{ML}(\Delta_{ML}K_{ML} + K_{ML}^2)\sqrt{\det g}dv_2dv_3+ \tag{1.41}$$

$$+\frac{1}{24\pi}\iint\limits_{ML}\left(-\Delta_{ML}q(v_2, v_3) + 3q^2(v_2, v_3) - 2q(v_2, v_3)K_{ML}\right)\sqrt{\det g}dv_2dv_3,$$

Заметим, что вычисление этих значений опиралось в большей степени на вид метрики многообразия и на вид оператора на ней. Нетрудно увидеть, что $\zeta_{\Delta_{ML}+q}(*)$ при $q = 0$, есть $\zeta_{\Delta_{ML}}(*)$. Тогда получаем, что

$$l_1 = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{ML}\left(\frac{1}{3}K_{ML}\right)\sqrt{\det g}dv_2dv_3,$$

$$l_2 = \frac{1}{60\pi}\iint\limits_{ML}(\Delta_{ML}K_{ML} + K_{ML}^2)\sqrt{\det g}dv_2dv_3, \tag{1.42}$$

Формулы, содержащие интеграл от гауссовой кривизны по многообразию (для m_1 и l_1), можно упростить, используя формулу Гаусса-Бонне, то есть воспользоваться фактом того, что $\iint\limits_{ML} K_{ML}\sqrt{\det g}dv_2dv_3 = 2\pi\chi(ML)$, где $\chi(ML)$ - характеристика Эйлера, которая в данном случае равна 2.

Асимптотику $F(t)$ можно вычислить напрямую, исследуя ряд $F(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(2k+1)e^{-k(k+1)t}$, например, с помощью [33], и получить, что при $t \to +0$

$$F(t) = t^{-1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}t + O(t^2),$$

а значит $f_0 = 1$, $f_1 = \dfrac{1}{3}$ и $f_2 = \dfrac{1}{15}$. Выше также было отмечено, что $f_0 = l_0 = m_0$, а значит $f_0 = l_0 = m_0 = 1$, и тогда имеем

$$
\begin{aligned}
& m_0 = 1, \\
& m_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{ML} q(v_2, v_3) \sqrt{\det g} dv_2 dv_3, \\
& m_2 = \frac{1}{60\pi} \iint\limits_{ML} (\Delta_{ML} K_{ML} + K_{ML}^2) \sqrt{\det g} dv_2 dv_3 + \\
& \ + \frac{1}{24\pi} \iint\limits_{ML} \left(-\Delta_{ML} q(v_2, v_3) + 3q^2(v_2, v_3) - 2q(v_2, v_3) K_{ML} \right) \sqrt{\det g} dv_2 dv_3, \\
& l_0 = 1, \\
& l_1 = \frac{1}{3}, \\
& l_2 = \frac{1}{60\pi} \iint\limits_{ML} (\Delta_{ML} K_{ML} + K_{ML}^2) \sqrt{\det g} dv_2 dv_3, \\
& f_0 = 1, \\
& f_1 = \frac{1}{3}, \\
& f_2 = \frac{1}{15}.
\end{aligned}
$$

Теперь все известно, чтобы сформулировать результат:

Теорема 1. *Пусть ML — многообразие, заданное некоторым функциональным семейством гладких почти лиувиллевых метрик на сфере и определенное формулами (1.2). Если q - бесконечно-дифференцируемая комплекснозначная функция на ML, то для собственных чисел оператора $-\Delta_{ML} + q$ верно равенство:*

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2k} \left(\mu_{ki} - k(k+1) - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{ML} q dS \right) =
$$

$$\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*ML}(q^{av})^2dv+\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*ML}(\sigma^{av})^2dv+\frac{1}{15}-$$

$$-\frac{1}{60\pi}\int\limits_{ML}(\Delta_{ML}K_{ML}+K_{ML}^2)dS-\frac{1}{24\pi}\int\limits_{ML}\left(-\Delta_{ML}q+3q^2-2q(K_{ML}-1)\right)dS,$$

где $K_{ML}=\dfrac{2(R(v_3)-Q(v_2))+(v_2-v_3)(R'(v_3)+Q'(v_2))}{(v_2-v_3)^3}$ *- гауссова кривизна* ML, S^*ML *- расслоение единичных сфер в кокасательном пространстве,* dv *- каноническая форма объема на* S^*ML, $q^{av}=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\exp t\Xi)^*(q)dt$, *где* Ξ *- гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении* $T^*ML\setminus\{0\}$, *определяемое римановой структурой на* ML, $\sigma^{av}=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\exp t\Xi)^*(\sigma)dt$, *где* $\sigma=\dfrac{1}{4}(K_{ML}-1+$
$\left[\frac{1}{3}(K_{ML})_{\mathrm{v}}u^3\int\limits_0^r(K_{ML})_{\mathrm{v}}J^3ds-(K_{ML})_{\mathrm{v}}u^2J\int\limits_0^r(K_{ML})_{\mathrm{v}}uJ^2ds\right])$, *где* v *- единичный вектор нормали к геодезической* γ, $J(r,\omega)$ *- объемная плотность в геодезических полярных координатах, то есть* $dvol(\gamma)=J(r,\omega)drd\omega$, *и* u *и* v *- фундаментальные решения уравнения Якоби вдоль геодезической* γ *с условиями* $\begin{pmatrix}u(0) & v(0)\\ \dot u(0) & \dot v(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.3. Задача нахождения регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами на многообразиях с замкнутыми геодезическими в случае общего положения

1.3.1. Общий вид метрик в случае общего положения

Рассмотрим M - двумерное компактное замкнутое многообразие без края такое, что

1) $M \in SC_{2\pi}$ [1], то есть все геодезические M замкнуты и имеют одинаковую длину 2π;

2) Метрика M является возмущением метрики стандартной сферы S^2.То есть, пусть в R^3 есть координаты (u_1, u_2, u_3), и известна их связь с декартовыми координатами (x, y, z), позволяющая выписать в этих координатах евклидову метрику $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ в R^3, а ограничением этой получившейся метрики на сферу единичного радиуса (как правило заменой одной из переменных, например, u_3 на единицу), получить общий вид стандартной метрики двумерной сферы в координатах (u_1, u_2):

$$ds^2 = A(u_1, u_2)du_1^2 + 2B(u_1, u_2)du_1du_2 + C(u_1, u_2)du_2^2, \tag{1.43}$$

где $A(u_1, u_2)$, $B(u_1, u_2)$, $C(u_1, u_2)$ таковы, что ds^2 является римановой и $A(u_1, u_2)C(u_1, u_2) - B^2(u_1, u_2) > 0$. Тогда под метрикой M, будем понимать метрики вида

$$ds_p^2 = A_p(u_1, u_2)du_1^2 + 2B_p(u_1, u_2)du_1du_2 + C_p(u_1, u_2)du_2^2, \tag{1.44}$$

для которых верно:

a) $A_p(u_1, u_2)$, $B_p(u_1, u_2)$, $C_p(u_1, u_2)$ таковы, что ds_p^2 является римановой, $A_p(u_1, u_2)C_p(u_1, u_2) - B_p^2(u_1, u_2) > 0$ и геодезические получившейся метрики замкнуты и имеют одинаковую длину 2π.

б) $A_p(u_1,u_2) = A(u_1,u_2) + P_A(u_1,u_2)$, $B_p(u_1,u_2) = B(u_1,u_2) + P_B(u_1,u_2)$, $C_p(u_1,u_2) = C(u_1,u_2) + P_C(u_1,u_2)$, то есть возмущения таковы, что при обнулении функций $P_A(u_1,u_2)$, $P_B(u_1,u_2)$, $P_C(u_1,u_2)$, мы получим стандартную метрику сферы ds^2.

Приведем примеры таких метрик:

1) Метрика сферы в сферо-конических координатах и ее возмущения, описанные метриками многообразия ML, приведенного выше. В этом случае: $u_1 = v_2$, $u_2 = v_3$, $B(v_2,v_3) = 0$, $A(v_2,v_3) = -\dfrac{(v_2 - v_3)}{4P(v_2)}$, $C(v_2,v_3) = \dfrac{(v_2 - v_3)}{4P(v_3)}$, $B_p(v_2,v_3) = 0$, $A_p(v_2,v_3) = -\dfrac{(v_2 - v_3)}{4Q(v_2)}$, $C_p(v_2,v_3) = \dfrac{(v_2 - v_3)}{4R(v_3)}$, где $Q(v_2)$ и $R(v_3)$ те же, что в (1.2).

2) Поверхность Цолля и метрика на сфере, заданная в полярных координатах:

$u_1 = \theta \in (0,\pi)$, $u_2 = \varphi \in (0,2\pi)$, $B(\theta,\varphi) = 0$, $A(\theta,\varphi) = 1$, $C(\theta,\varphi) = \sin^2\theta$, $B_p(\theta,\varphi) = 0$, $A_p(\theta,\varphi) = (1 + h(\cos\theta))^2$, $C_p(\theta,\varphi) = \sin^2\theta$, где $C^\infty \ni h : [-1,1] \to (-1,1)$ - некоторая нечетная функция, $h(1) = 0$.

Следует отметить, что в такой постановке задача нахождения регуляризованного следа для оператора Лапласа-Бельтрами до этого не рассматривалась. Во всех частных случаях рассмотренных прежде многообразия задавались метриками, в выражении которых отсутствовал член $2B(u_1,u_2)du_1du_2$ (в введенных обозначениях). Приведенный же вид охватывает все возможные выражения метрик на сфере и их возмущений. В таком виде вычислительная сложность решения задачи сильно возросла и решение во многом было получено с помощью символьных вычислений в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica 9 [35].

1.3.2. Оператор Лапласа на многообразиях в случае общего положения

Пусть M - многообразие, заданное метрикой

$$ds_p^2 = A_p(u_1,u_2)du_1^2 + 2B_p(u_1,u_2)du_1du_2 + C_p(u_1,u_2)du_2^2.$$

В координатах (u_1,u_2) оператор $-\Delta_M + q$ на M будет иметь вид (из 1.3):

$$-\Delta_M + q =$$

$$-\frac{C_p(u_1,u_2)}{|G|}\frac{\partial^2}{\partial^2 u_1} - \frac{A_p(u_1,u_2)}{|G|}\frac{\partial^2}{\partial^2 u_2} + \frac{2B_p(u_1,u_2)}{|G|}\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} -$$
$$\left(\frac{(C_p(u_1,u_2))'_{u1}}{|G|} - \frac{C_p(u_1,u_2)|G|'_{u1}}{2|G|^2} - \frac{(B_p(u_1,u_2))'_{u2}}{|G|} +\right.$$
$$\left.\frac{B_p(u_1,u_2)|G|'_{u2}}{2|G|^2}\right)\frac{\partial}{\partial u_1} - \left(\frac{(A_p(u_1,u_2))'_{u2}}{|G|} - \frac{A_p(u_1,u_2)|G|'_{u2}}{2|G|^2} -\right.$$
$$\left.\frac{(B_p(u_1,u_2))'_{u1}}{|G|} + \frac{B_p(u_1,u_2)|G|'_{u1}}{2|G|^2}\right)\frac{\partial}{\partial u_2} + q(v_2,v_3), \tag{1.45}$$

здесь $|G|$ - определитель метрического тензора и $|G| = A_p(u_1,u_2)C_p(u_1,u_2) - B_p^2(u_1,u_2)$.

Теперь можно выписать полный символ оператора $-\Delta_M + q$:

$$a(u_1,u_2,\xi,\eta) =$$

$$\frac{C_p(u_1,u_2)}{|G|}\xi^2 + \frac{A_p(u_1,u_2)}{|G|}\eta^2 - \frac{2B_p(u_1,u_2)}{|G|}\xi\eta -$$
$$-i\left(\frac{(C_p(u_1,u_2))'_{u1}}{|G|} - \frac{C_p(u_1,u_2)|G|'_{u1}}{2|G|^2} - \frac{(B_p(u_1,u_2))'_{u2}}{|G|} + \frac{B_p(u_1,u_2)|G|'_{u2}}{2|G|^2}\right)\xi -$$
$$-i\left(\frac{(A_p(u_1,u_2))'_{u2}}{|G|} - \frac{A_p(u_1,u_2)|G|'_{u2}}{2|G|^2} - \frac{(B_p(u_1,u_2))'_{u1}}{|G|} + \frac{B_p(u_1,u_2)|G|'_{u1}}{2|G|^2}\right)\eta$$
$$+q(u_1,u_2), \tag{1.46}$$

и разбить его на однородные компоненты:

$$a_2(u_1,u_2,\xi,\eta)=\frac{C_p(u_1,u_2)}{|G|}\xi^2+\frac{A_p(u_1,u_2)}{|G|}\eta^2-\frac{2B_p(u_1,u_2)}{|G|}\xi\eta;$$

$$\begin{gathered}a_1(u_1,u_2,\xi,\eta)=-i\left(\frac{(C_p(u_1,u_2))'_{u1}}{|G|}-\frac{C_p(u_1,u_2)|G|'_{u1}}{2|G|^2}-\right.\\ \left.-\frac{(B_p(u_1,u_2))'_{u2}}{|G|}+\frac{B_p(u_1,u_2)|G|'_{u2}}{2|G|^2}\right)\xi-i\left(\frac{(A_p(u_1,u_2))'_{u2}}{|G|}-\right.\\ \left.\frac{A_p(u_1,u_2)|G|'_{u2}}{2|G|^2}-\frac{(B_p(u_1,u_2))'_{u1}}{|G|}+\frac{B_p(u_1,u_2)|G|'_{u1}}{2|G|^2}\right)\eta;\\ a_0(u_1,u_2,\xi,\eta)=q(u_1,u_2);\end{gathered} \tag{1.47}$$

1.3.3. Вычисление регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами на многообразии в случае общего положения

Пусть теперь

1) $\varkappa_{ki} = k(k+1)$ - собственные числа оператора $-\tilde{\Delta}_M$, заданного на M, а $\hat{F}(t) \sim \sum\limits_{j=0}^{\infty} \hat{f}_j t^{\frac{j}{2}}$ - асимптотическое разложение тета-функции оператора $-\tilde{\Delta}_M$ при $t \to 0$;

2) λ_{ki} - собственные числа оператора $-\Delta_M$, заданного на M, а $\hat{L}(t) \sim \sum\limits_{j=0}^{\infty} \hat{l}_j t^{\frac{j}{2}}$ - асимптотическое разложение тета-функции оператора $-\Delta_M$ при $t \to 0$;

3) μ_{ki} - собственные числа оператора $-\Delta_M + q$, заданного на M, а $\hat{M}(t) \sim \sum\limits_{j=0}^{\infty} \hat{m}_j t^{\frac{j}{2}}$ - асимптотическое разложение тета-функции оператора $-\Delta_M + q$ при $t \to 0$.

Введем в рассмотрение выражения, аналогичные (1.16) и (1.28):

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{2k} (\lambda_{ki} - k(k+1)) = \hat{a}_0(2k+1) + \hat{a}_1 + \hat{a}_2(2k+1)^{-1} + O(k^{-2}), \\ &\sum_{i=0}^{2k} (\mu_{ki} - \lambda_{ki}) = \hat{b}_0(2k+1) + \hat{b}_1 + \hat{b}_2(2k+1)^{-1} + O(k^{-2}), \end{aligned} \tag{1.48}$$

Схема подхода для вычисления регуляризованного следа совпадает со структурой решения, описанной выше для оператора $-\Delta_{ML} + q$ на многообразии ML. В частности, пункты 1.2.1, 1.2.2 и 1.2.3 переносятся в общий случай без каких-либо изменений. Везде там мы пользовались только свойствами оператора Лапласа-Бельтрами возмущенного и невозмущенного, заданного на многообразиях с замкнутыми геодезическими длины 2π, но явный вид метрики в тех рассуждениях нами нигде не использовался.

Таким образом, для случая общего положения верен результат, полученный в пункте 1.2.3

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{2k}\mu_{ki}-k(k+1)(2k+1)-(\hat{a}_0+\hat{b}_0)(2k+1)\right)=$$

$$=\hat{f}_2-\hat{a}_0\hat{f}_1+\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*M}(\sigma^{av})^2dv-\hat{m}_2-\hat{b}_0\hat{l}_1+\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*M}(q^{av})^2dv, \qquad (1.49)$$

где σ^{av} определен в (1.13), q^{av} определен в (1.31), $\hat{a}_0=\dfrac{\hat{f}_1-\hat{l}_1}{\hat{f}_0}$, $\hat{b}_0=\dfrac{\hat{l}_1-\hat{m}_1}{\hat{l}_0}$, $\hat{m}_i$ - коэффициенты разложения тета-функции $\hat{M}(t)$, $\hat{l}_i$ - коэффициенты разложения тета-функции $\hat{L}(t)$ и $\hat{f}_i$ - коэффициенты разложения тета-функции $\hat{F}(t)$.

Очевидно, что функции $\hat{F}(t)$ и $F(t)$ совпадают. И значит, коэффциенты

$$\hat{f}_0=1, \quad \hat{f}_1=\frac{1}{3}, \quad \hat{f}_2=\frac{1}{15}.$$

Аналогично рассуждениям пункта 1.2.4 данной диссертации устанавливается, что

$$\hat{m}_1=\zeta_{-\Delta_M+q}(0), \quad \hat{m}_2=-\zeta_{-\Delta_M+q}(1),$$

$$\hat{l}_1=\zeta_{-\Delta_M}(0), \qquad \hat{l}_2=-\zeta_{-\Delta_M}(1).$$

Для нахождения недостающих для ответа коэффициентов разложения тета-функций были проведены символьные вычисления в системе компьютерной алгебры "Wolfram Mathematica 9" [35], так как «вручную», в отличии от предыдущего рассматриваемого частного примера, произвести эти вычисления оказывается практически невозможным. В Приложении к данной работе приведены вычисленные значения $\zeta_{-\Delta_M+q}(0)$ и $\zeta_{-\Delta_M+q}(1)$.

Несмотря на очень сложный вид получившихся коэффициентов, оказывается, что они снова записываются через инвариантные характеристики многообразия, и в случае общего положения вид асимптотик тета-функций операторов представляют самостоятельный интерес, поэтому данный результат вынесем в Лемму:

Лемма 1: *Пусть $M \in SC_{2\pi}$ — многообразие, метрика которого является возмущением метрики стандартной сферы и задана формулой (10), тогда для тета-функций $\hat{F}(t)$, $\hat{L}(t)$, $\hat{M}(t)$ соответствующих операторов $-\tilde{\Delta}_M$, $-\Delta_M$, $-\Delta_M + q$ верны асимптотические разложения при $t \to 0$:*

$$\hat{F}(t) = t^{-1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}t + O(t^2),$$

$$\hat{L}(t) = t^{-1} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{60\pi} \int\limits_M (\Delta_M K_M + K_M^2) dS \right) t + O(t^2),$$

$$\hat{M}(t) = t^{-1} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi} \int\limits_M q dS \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{60\pi} \int\limits_M (\Delta_M K_M + K_M^2) dS + \frac{1}{24\pi} \int\limits_M (-\Delta_M q + 3q^2 - 2qK_M) dS \right) t + O(t^2),$$

где $K_M = \dfrac{1}{4\left(B_p(u_1,u_2)^2 - A_p(u_1,u_2)C_p(u_1,u_2)\right)^2} \times$

$\Big(C_p(u_1,u_2) A'_{p_{u_2}}(u_1,u_2)^2 - 2B_p(u_1,u_2) A'_{p_{u_2}}(u_1,u_2) B'_{p_{u_2}}(u_1,u_2) +$

$A_p(u_1,u_2) A'_{p_{u_2}}(u_1,u_2) C'_{p_{u_2}}(u_1,u_2) + 2B_p(u_1,u_2)^2 A''_{p_{u_2 u_2}}(u_1,u_2) -$

$2A_p(u_1,u_2) C_p(u_1,u_2) A''_{p_{u_2 u_2}}(u_1,u_2) - 2C_p(u_1,u_2) B'_{p_{u_2}}(u_1,u_2) A'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) +$

$B_p(u_1,u_2) C'_{p_{u_2}}(u_1,u_2) A'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) + 4B_p(u_1,u_2) B'_{p_{u_2}}(u_1,u_2) B'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) -$

$2A_p(u_1,u_2) C'_{p_{u_2}}(u_1,u_2) B'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) - B_p(u_1,u_2) A'_{p_{u_2}}(u_1,u_2) C'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) +$

$C_p(u_1,u_2) A'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) C'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) - 2B_p(u_1,u_2) B'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) C'_{p_{u_1}}(u_1,u_2) +$

$A_p(u_1,u_2)C'_{p_{u_1}}(u_1,u_2)^2 - 4B_p(u_1,u_2)^2 B''_{p_{u_1u_2}}(u_1,u_2)+$

$4A_p(u_1,u_2)C_p(u_1,u_2)B''_{p_{u_1u_2}}(u_1,u_2) + 2B_p(u_1,u_2)^2 C''_{p_{u_1u_1}}(u_1,u_2)-$

$2A_p(u_1,u_2)C_p(u_1,u_2)C''_{p_{u_1u_1}}(u_1,u_2)\Big)$ *— гауссова кривизна M.*

Теперь можем окончательно перенести реультат Теоремы 1 на случай общего положения:

Теорема 2. *Пусть $M \in SC_{2\pi}$ — многообразие, метрика которого является возмущением метрики стандартной сферы и задана формулой (1.44), q - бесконечно-дифференцируемая комплекснозначная функция на M, тогда для собственных чисел μ_{ki} оператора $-\Delta_M + q$ верно равенство:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2k}\left(\mu_{ki} - k(k+1) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_M q dS\right) =$$

$$\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*M}(q^{av})^2 dv + \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*M}(\sigma^{av})^2 dv + \frac{1}{15}-$$

$$-\frac{1}{60\pi}\int\limits_M(\Delta_M K_M + K_M^2)dS - \frac{1}{24\pi}\int\limits_M\left(-\Delta_M q + 3q^2 - 2q(K_M - 1)\right)dS,$$

где K_M - гауссова кривизна M, S^*M - расслоение единичных косфер над M, dv - каноническая форма объема на S^*M, $q^{av} = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\exp t\Xi)^*(q)dt$, где Ξ - гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении $T^*M\backslash\{0\}$, определяемое римановой структурой на M, $\sigma^{av} = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\exp t\Xi)^*(\sigma)dt$, где

$\sigma = \dfrac{1}{4}(K_M - 1+$

$\left[\dfrac{1}{3}(K_M)_{\mathrm{v}} u^3\int\limits_0^r (K_M)_{\mathrm{v}} J^3 ds - (K_M)_{\mathrm{v}} u^2 J\int\limits_0^r (K_M)_{\mathrm{v}} u J^2 ds\right])$, *где* v *- единичный вектор нормали к геодезической γ, $J(r,\omega)$ - объемная плотность в гео-*

дезических полярных координатах, то есть $dvol(\gamma) = J(r,\omega)drd\omega$*, и* u *и* v *- фундаментальные решения уравнения Якоби вдоль геодезической* γ *с условиями* $\begin{pmatrix} u(0) & v(0) \\ \dot{u}(0) & \dot{v}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Эта теорема является универсальной в том смысле, что не зависит от явного вида метрики многообразия. Этот результат верен, например, и для многообразия ML, подробно рассматриваемого в настоящей диссертации, и для поверхностей вращения Цолля (см. примеры в пункте 1.3.1). Более того, можно привести ряд интересных следствий из нее.

Следствие 1: *Пусть* $M \in SC_{2\pi}$ *— многообразие, метрика которого является возмущением метрики стандартной сферы и задана формулой (1.44), тогда для собственных чисел* λ_{ki} *невозмущенного оператора Лапласа-Бельтрами* $-\Delta_M$ *на* M *верно равенство:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2k}(\lambda_{ki} - k(k+1)) =$$

$$= \frac{1}{15} - \frac{1}{60\pi}\int\limits_{M}(\Delta_M K_M + K_M^2)dS + \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*M}(\sigma^{av})^2 dv,$$

где все обозначения определены в формулировке Теоремы 2.

В этом легко убедиться, если положить $q = 0$ в формуле Теоремы 2. Этот результат представляет самостоятельный интерес и являтеся новым. Здесь удалось показать, как именно возмущение метрики многообразия влияет на изменение собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами.

Следствие 2: *Пусть* $M = S^2$ *— стандартная сфера единичного радиуса, метрика которой задана в виде (1.43),* q *- бесконечно-дифференци-*

руемая комплекснозначная функция на S^2, тогда для собственных чисел μ_{ki} оператора $-\Delta_{S^2}+q$ верно равенство:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2k}\left(\mu_{ki}-k(k+1)-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2} qdS\right)=$$

$$=\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*S^2}(q^{av})^2dv-\frac{1}{24\pi}\int\limits_{S^2}\left(-\Delta_{S^2}q+3q^2\right)dS,$$

где все обозначения определены в формулировке Теоремы 2.

Чтобы осуществить переход к обычной сфере в условиях Теоремы 2, необходимо в формуле теоремы принять кривизну равной 1, то есть $K_M=K_{S^2}=1$. Более того, если задать здесь q - нечетной функцией, то результат совпадет с результатами, полученными в [16] и [14].

Следствие 3: *Пусть $M\in SC_{2\pi}$ — многообразие, метрика которого является возмущением метрики стандартной сферы и задана формулой (1.44), тогда для собственных чисел λ_{ki} невозмущенного оператора Лапласа-Бельтрами $-\Delta_M$ и для собственных чисел μ_{ki} возмущенного комплекснозначной функцией q оператора Лапласа-Бельтрами $-\Delta_M+q$ на M, верно равенство:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2k}\left(\mu_{ki}-\lambda_{ki}-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{M} qdS\right)=$$

$$=\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*M}(q^{av})^2dv-\frac{1}{24\pi}\iint\limits_{M}\left(-\Delta_Mq+3q^2-2q(K_M-1)\right)dS,$$

где все обозначения определены в формулировке Теоремы 2.

Это утверждение является следствием из Теоремы 2 и Следствия 1. Здесь удалось показать, что регуляризованный след для собственных значений возмущенного и невозмущенного операторов Лапласа-Бельтрами взятых на одном M, зависит от гауссовой кривизны самого многообразия (кроме случая сферы, когда кривизна постоянна и равна 1).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для краткости записи определим $A = A_p(u_1, u_2)$, $B = B_p(u_1, u_2)$, $C = C_p(u_1, u_2)$, $q = q(u_1, u_2)$.

$$\zeta_{-\Delta_M+q}(0) = \iint\limits_M \sqrt{-B^2+AC}\left(-\frac{q}{4\pi}+\right.$$
$$\frac{1}{48\pi\left(-B^2+AC\right)^2}\left(C(A'_{u_2})^2 - 2BA'_{u_2}B'_{u_2} + AA'_{u_2}C'_{u_2} + 2B^2A''_{u_2u_2} -\right.$$
$$2ACA''_{u_2u_2} - 2CB'_{u_2}A'_{u_1} + BC'_{u_2}A'_{u_1} + 4BB'_{u_2}B'_{u_1} - 2AC'_{u_2}B'_{u_1} -$$
$$BA'_{u_2}C'_{u_1} + CA'_{u_1}C'_{u_1} - 2BB'_{u_1}C'_{u_1} + A(C'_{u_1})^2 - 4B^2B''_{u_1u_2} +$$
$$\left.4ACB''_{u_1u_2} + 2B^2C''_{u_1u_1} - 2ACC''_{u_1u_1}\right)du_1du_2;$$

$$\zeta_{-\Delta_M+q}(1) = \iint\limits_M \sqrt{-B^2+AC}\left(-\frac{q^2}{8\pi} + \frac{Aq''_{u_2u_2} - 2Bq''_{u_1u_2} + Cq''_{u_1u_1}}{24\pi(-B^2+AC)} +\right.$$
$$\frac{q'_{u_1}}{48\pi\left(-B^2+AC\right)^2}\times$$
$$\left(BCA'_{u_2} - 2ACB'_{u_2} + ABC'_{u_2} - C^2A'_{u_1} + 2BCB'_{u_1} - 2B^2C'_{u_1} + ACC'_{u_1}\right) +$$
$$\frac{q'_{u_2}}{48\pi\left(-B^2+AC\right)^2}\times$$
$$\left(-2B^2A'_{u_2} + ACA'_{u_2} + 2ABB'_{u_2} - A^2C'_{u_2} + BCA'_{u_1} - 2ACB'_{u_1} + ABC'_{u_1}\right) +$$
$$\frac{q}{48\pi\left(-B^2+AC\right)^2}\times$$
$$\left(C(A'_{u_2})^2 - 2BA'_{u_2}B'_{u_2} + AA'_{u_2}C'_{u_2} + 2B^2A''_{u_2u_2} - 2ACA''_{u_2u_2} - 2CB'_{u_2}A'_{u_1} +\right.$$
$$BC'_{u_2}A'_{u_1} + 4BB'_{u_2}B'_{u_1} - 2AC'_{u_2}B'_{u_1} - BA'_{u_2}C'_{u_1} + CA'_{u_1}C'_{u_1} -$$
$$\left.2BB'_{u_1}C'_{u_1} + A(C'_{u_1})^2 - 4B^2B''_{u_1u_2} + 4ACB''_{u_1u_2} + 2B^2C''_{u_1u_1} - 2ACC''_{u_1u_1}\right) -$$
$$\frac{1}{960\pi\left(-B^2+AC\right)^5}\times$$

$$\Big(7B^2C^2(A'_{u_2})^4 + 21AC^3(A'_{u_2})^4 - 28B^3C(A'_{u_2})^3B'_{u_2} - 140ABC^2(A'_{u_2})^3B'_{u_2} +$$
$$20B^4(A'_{u_2})^2(B'_{u_2})^2 + 272AB^2C(A'_{u_2})^2(B'_{u_2})^2 + 44A^2C^2(A'_{u_2})^2(B'_{u_2})^2 -$$
$$120AB^3A'_{u_2}(B'_{u_2})^3 - 104A^2BCA'_{u_2}(B'_{u_2})^3 + 8B^4(A'_{u_2})^3C'_{u_2} +$$
$$50AB^2C(A'_{u_2})^3C'_{u_2} + 26A^2C^2(A'_{u_2})^3C'_{u_2} - 132AB^3(A'_{u_2})^2B'_{u_2}C'_{u_2} -$$
$$204A^2BC(A'_{u_2})^2B'_{u_2}C'_{u_2} + 284A^2B^2A'_{u_2}(B'_{u_2})^2C'_{u_2} + 52A^3CA'_{u_2}(B'_{u_2})^2C'_{u_2} +$$
$$59A^2B^2(A'_{u_2})^2(C'_{u_2})^2 + 25A^3C(A'_{u_2})^2(C'_{u_2})^2 - 168A^3BA'_{u_2}B'_{u_2}(C'_{u_2})^2 +$$
$$28A^4A'_{u_2}(C'_{u_2})^3 + 12B^4C(A'_{u_2})^2A''_{u_2u_2} + 40AB^2C^2(A'_{u_2})^2A''_{u_2u_2} -$$
$$52A^2C^3(A'_{u_2})^2A''_{u_2u_2} - 16B^5A'_{u_2}B'_{u_2}A''_{u_2u_2} - 172AB^3CA'_{u_2}B'_{u_2}A''_{u_2u_2} +$$
$$188A^2BC^2A'_{u_2}B'_{u_2}A''_{u_2u_2} + 120AB^4(B'_{u_2})^2A''_{u_2u_2} - 88A^2B^2C(B'_{u_2})^2A''_{u_2u_2} -$$
$$32A^3C^2(B'_{u_2})^2A''_{u_2u_2} + 52AB^4A'_{u_2}C'_{u_2}A''_{u_2u_2} - 2A^2B^2CA'_{u_2}C'_{u_2}A''_{u_2u_2} -$$
$$50A^3C^2A'_{u_2}C'_{u_2}A''_{u_2u_2} - 152A^2B^3B'_{u_2}C'_{u_2}A''_{u_2u_2} + 152A^3BCB'_{u_2}C'_{u_2}A''_{u_2u_2} +$$
$$38A^3B^2(C'_{u_2})^2A''_{u_2u_2} - 38A^4C(C'_{u_2})^2A''_{u_2u_2} - 4B^6(A''_{u_2u_2})^2 + 28AB^4C(A''_{u_2u_2})^2 -$$
$$44A^2B^2C^2(A''_{u_2u_2})^2 + 20A^3C^3(A''_{u_2u_2})^2 - 8B^5(A'_{u_2})^2B''_{u_2u_2} - 36AB^3C(A'_{u_2})^2B''_{u_2u_2} +$$
$$44A^2BC^2(A'_{u_2})^2B''_{u_2u_2} + 80AB^4A'_{u_2}B'_{u_2}B''_{u_2u_2} - 56A^2B^2CA'_{u_2}B'_{u_2}B''_{u_2u_2} -$$
$$24A^3C^2A'_{u_2}B'_{u_2}B''_{u_2u_2} - 52A^2B^3A'_{u_2}C'_{u_2}B''_{u_2u_2} + 52A^3BCA'_{u_2}C'_{u_2}B''_{u_2u_2} -$$
$$32AB^5A''_{u_2u_2}B''_{u_2u_2} + 64A^2B^3CA''_{u_2u_2}B''_{u_2u_2} - 32A^3BC^2A''_{u_2u_2}B''_{u_2u_2} +$$
$$16AB^4(A'_{u_2})^2C''_{u_2u_2} - 6A^2B^2C(A'_{u_2})^2C''_{u_2u_2} - 10A^3C^2(A'_{u_2})^2C''_{u_2u_2} -$$
$$52A^2B^3A'_{u_2}B'_{u_2}C''_{u_2u_2} + 52A^3BCA'_{u_2}B'_{u_2}C''_{u_2u_2} + 26A^3B^2A'_{u_2}C'_{u_2}C''_{u_2u_2} -$$
$$26A^4CA'_{u_2}C'_{u_2}C''_{u_2u_2} + 16A^2B^4A''_{u_2u_2}C''_{u_2u_2} - 32A^3B^2CA''_{u_2u_2}C''_{u_2u_2} +$$
$$16A^4C^2A''_{u_2u_2}C''_{u_2u_2} + 8B^6A'_{u_2}A'''_{u_2u_2u_2} + 4AB^4CA'_{u_2}A'''_{u_2u_2u_2} -$$
$$32A^2B^2C^2A'_{u_2}A'''_{u_2u_2u_2} + 20A^3C^3A'_{u_2}A'''_{u_2u_2u_2} - 48AB^5B'_{u_2}A'''_{u_2u_2u_2} +$$
$$96A^2B^3CB'_{u_2}A'''_{u_2u_2u_2} - 48A^3BC^2B'_{u_2}A'''_{u_2u_2u_2} + 24A^2B^4C'_{u_2}A'''_{u_2u_2u_2} -$$

$48A^3B^2CC'_{u_2}A'''_{u_2u_2u_2}+24A^4C^2C'_{u_2}A'''_{u_2u_2u_2}-8AB^5A'_{u_2}B'''_{u_2u_2u_2}+$

$16A^2B^3CA'_{u_2}B'''_{u_2u_2u_2}-8A^3BC^2A'_{u_2}B'''_{u_2u_2u_2}+4A^2B^4A'_{u_2}C'''_{u_2u_2u_2}-$

$8A^3B^2CA'_{u_2}C'''_{u_2u_2u_2}+4A^4C^2A'_{u_2}C'''_{u_2u_2u_2}+8AB^6A''''_{u_2u_2u_2u_2}-24A^2B^4CA''''_{u_2u_2u_2u_2}+$

$24A^3B^2C^2A''''_{u_2u_2u_2u_2}-8A^4C^3A''''_{u_2u_2u_2u_2}-56BC^3(A'_{u_2})^3A'_{u_1}+$

$204B^2C^2(A'_{u_2})^2B'_{u_2}A'_{u_1}-36AC^3(A'_{u_2})^2B'_{u_2}A'_{u_1}-148B^3CA'_{u_2}(B'_{u_2})^2A'_{u_1}+$

$148ABC^2A'_{u_2}(B'_{u_2})^2A'_{u_1}-192AB^2C(B'_{u_2})^3A'_{u_1}-32A^2C^2(B'_{u_2})^3A'_{u_1}-$

$64B^3C(A'_{u_2})^2C'_{u_2}A'_{u_1}-20ABC^2(A'_{u_2})^2C'_{u_2}A'_{u_1}+48B^4A'_{u_2}B'_{u_2}C'_{u_2}A'_{u_1}+$

$2AB^2CA'_{u_2}B'_{u_2}C'_{u_2}A'_{u_1}-50A^2C^2A'_{u_2}B'_{u_2}C'_{u_2}A'_{u_1}+$

$132AB^3(B'_{u_2})^2C'_{u_2}A'_{u_1}+204A^2BC(B'_{u_2})^2C'_{u_2}A'_{u_1}-12AB^3A'_{u_2}(C'_{u_2})^2A'_{u_1}+$

$12A^2BCA'_{u_2}(C'_{u_2})^2A'_{u_1}-130A^2B^2B'_{u_2}(C'_{u_2})^2A'_{u_1}-38A^3CB'_{u_2}(C'_{u_2})^2A'_{u_1}+$

$28A^3B(C'_{u_2})^3A'_{u_1}-76B^3C^2A'_{u_2}A''_{u_2u_2}A'_{u_1}+76ABC^3A'_{u_2}A''_{u_2u_2}A'_{u_1}+$

$116B^4CB'_{u_2}A''_{u_2u_2}A'_{u_1}-132AB^2C^2B'_{u_2}A''_{u_2u_2}A'_{u_1}+16A^2C^3B'_{u_2}A''_{u_2u_2}A'_{u_1}-$

$28B^5C'_{u_2}A''_{u_2u_2}A'_{u_1}+6AB^3CC'_{u_2}A''_{u_2u_2}A'_{u_1}+22A^2BC^2C'_{u_2}A''_{u_2u_2}A'_{u_1}+$

$28B^4CA'_{u_2}B''_{u_2u_2}A'_{u_1}-56AB^2C^2A'_{u_2}B''_{u_2u_2}A'_{u_1}+28A^2C^3A'_{u_2}B''_{u_2u_2}A'_{u_1}+$

$104AB^3CB'_{u_2}B''_{u_2u_2}A'_{u_1}-104A^2BC^2B'_{u_2}B''_{u_2u_2}A'_{u_1}-28AB^4C'_{u_2}B''_{u_2u_2}A'_{u_1}+$

$4A^2B^2CC'_{u_2}B''_{u_2u_2}A'_{u_1}+24A^3C^2C'_{u_2}B''_{u_2u_2}A'_{u_1}-4B^5A'_{u_2}C''_{u_2u_2}A'_{u_1}+$

$8AB^3CA'_{u_2}C''_{u_2u_2}A'_{u_1}-4A^2BC^2A'_{u_2}C''_{u_2u_2}A'_{u_1}-36AB^4B'_{u_2}C''_{u_2u_2}A'_{u_1}+$

$20A^2B^2CB'_{u_2}C''_{u_2u_2}A'_{u_1}+16A^3C^2B'_{u_2}C''_{u_2u_2}A'_{u_1}+26A^2B^3C'_{u_2}C''_{u_2u_2}A'_{u_1}-$

$26A^3BCC'_{u_2}C''_{u_2u_2}A'_{u_1}-20B^5CA'''_{u_2u_2u_2}A'_{u_1}+40AB^3C^2A'''_{u_2u_2u_2}A'_{u_1}-$

$20A^2BC^3A'''_{u_2u_2u_2}A'_{u_1}-8AB^4CB'''_{u_2u_2u_2}A'_{u_1}+16A^2B^2C^2B'''_{u_2u_2u_2}A'_{u_1}-$

$8A^3C^3B'''_{u_2u_2u_2}A'_{u_1}+4AB^5C'''_{u_2u_2u_2}A'_{u_1}-8A^2B^3CC'''_{u_2u_2u_2}A'_{u_1}+4A^3BC^2C'''_{u_2u_2u_2}A'_{u_1}+$

$28C^4(A'_{u_2})^2(A'_{u_1})^2+56BC^3A'_{u_2}B'_{u_2}(A'_{u_1})^2-212B^2C^2(B'_{u_2})^2(A'_{u_1})^2-$

$$12AC^3(B'_{u_2})^2(A'_{u_1})^2-38B^2C^2A'_{u_2}C'_{u_2}(A'_{u_1})^2+10AC^3A'_{u_2}C'_{u_2}(A'_{u_1})^2+$$
$$158B^3CB'_{u_2}C'_{u_2}(A'_{u_1})^2+66ABC^2B'_{u_2}C'_{u_2}(A'_{u_1})^2-17B^4(C'_{u_2})^2(A'_{u_1})^2-$$
$$39AB^2C(C'_{u_2})^2(A'_{u_1})^2+20B^2C^3A''_{u_2u_2}(A'_{u_1})^2-20AC^4A''_{u_2u_2}(A'_{u_1})^2+$$
$$36B^3C^2B''_{u_2u_2}(A'_{u_1})^2-36ABC^3B''_{u_2u_2}(A'_{u_1})^2-18B^4CC''_{u_2u_2}(A'_{u_1})^2+$$
$$18AB^2C^2C''_{u_2u_2}(A'_{u_1})^2-56C^4B'_{u_2}(A'_{u_1})^3+28BC^3C'_{u_2}(A'_{u_1})^3+$$
$$104B^2C^2(A'_{u_2})^3B'_{u_1}+8AC^3(A'_{u_2})^3B'_{u_1}-308B^3C(A'_{u_2})^2B'_{u_2}B'_{u_1}-$$
$$28ABC^2(A'_{u_2})^2B'_{u_2}B'_{u_1}+160B^4A'_{u_2}(B'_{u_2})^2B'_{u_1}-120AB^2CA'_{u_2}(B'_{u_2})^2B'_{u_1}-$$
$$40A^2C^2A'_{u_2}(B'_{u_2})^2B'_{u_1}+240AB^3(B'_{u_2})^3B'_{u_1}+208A^2BC(B'_{u_2})^3B'_{u_1}+$$
$$56B^4(A'_{u_2})^2C'_{u_2}B'_{u_1}+120AB^2C(A'_{u_2})^2C'_{u_2}B'_{u_1}-8A^2C^2(A'_{u_2})^2C'_{u_2}B'_{u_1}-$$
$$148AB^3A'_{u_2}B'_{u_2}C'_{u_2}B'_{u_1}+148A^2BCA'_{u_2}B'_{u_2}C'_{u_2}B'_{u_1}-$$
$$568A^2B^2(B'_{u_2})^2C'_{u_2}B'_{u_1}-104A^3C(B'_{u_2})^2C'_{u_2}B'_{u_1}+24A^2B^2A'_{u_2}(C'_{u_2})^2B'_{u_1}-$$
$$24A^3CA'_{u_2}(C'_{u_2})^2B'_{u_1}+336A^3BB'_{u_2}(C'_{u_2})^2B'_{u_1}-56A^4(C'_{u_2})^3B'_{u_1}+$$
$$136B^4CA'_{u_2}A''_{u_2u_2}B'_{u_1}-120AB^2C^2A'_{u_2}A''_{u_2u_2}B'_{u_1}-16A^2C^3A'_{u_2}A''_{u_2u_2}B'_{u_1}-$$
$$160B^5B'_{u_2}A''_{u_2u_2}B'_{u_1}+120AB^3CB'_{u_2}A''_{u_2u_2}B'_{u_1}+40A^2BC^2B'_{u_2}A''_{u_2u_2}B'_{u_1}+$$
$$104AB^4C'_{u_2}A''_{u_2u_2}B'_{u_1}-108A^2B^2CC'_{u_2}A''_{u_2u_2}B'_{u_1}+4A^3C^2C'_{u_2}A''_{u_2u_2}B'_{u_1}-$$
$$32B^5A'_{u_2}B''_{u_2u_2}B'_{u_1}+64AB^3CA'_{u_2}B''_{u_2u_2}B'_{u_1}-32A^2BC^2A'_{u_2}B''_{u_2u_2}B'_{u_1}-$$
$$160AB^4B'_{u_2}B''_{u_2u_2}B'_{u_1}+112A^2B^2CB'_{u_2}B''_{u_2u_2}B'_{u_1}+48A^3C^2B'_{u_2}B''_{u_2u_2}B'_{u_1}+$$
$$104A^2B^3C'_{u_2}B''_{u_2u_2}B'_{u_1}-104A^3BCC'_{u_2}B''_{u_2u_2}B'_{u_1}+8AB^4A'_{u_2}C''_{u_2u_2}B'_{u_1}-$$
$$16A^2B^2CA'_{u_2}C''_{u_2u_2}B'_{u_1}+8A^3C^2A'_{u_2}C''_{u_2u_2}B'_{u_1}+104A^2B^3B'_{u_2}C''_{u_2u_2}B'_{u_1}-$$
$$104A^3BCB'_{u_2}C''_{u_2u_2}B'_{u_1}-52A^3B^2C'_{u_2}C''_{u_2u_2}B'_{u_1}+52A^4CC'_{u_2}C''_{u_2u_2}B'_{u_1}+$$
$$32B^6A'''_{u_2u_2u_2}B'_{u_1}-56AB^4CA'''_{u_2u_2u_2}B'_{u_1}+16A^2B^2C^2A'''_{u_2u_2u_2}B'_{u_1}+$$
$$8A^3C^3A'''_{u_2u_2u_2}B'_{u_1}+16AB^5B'''_{u_2u_2u_2}B'_{u_1}-32A^2B^3CB'''_{u_2u_2u_2}B'_{u_1}+$$

$$16A^3BC^2B'''_{u_2u_2u_2}B'_{u_1} - 8A^2B^4C'''_{u_2u_2u_2}B'_{u_1} +$$

$$16A^3B^2CC'''_{u_2u_2u_2}B'_{u_1} - 8A^4C^2C'''_{u_2u_2u_2}B'_{u_1} - 112BC^3(A'_{u_2})^2A'_{u_1}B'_{u_1} -$$

$$244B^2C^2A'_{u_2}B'_{u_2}A'_{u_1}B'_{u_1} + 20AC^3A'_{u_2}B'_{u_2}A'_{u_1}B'_{u_1} +$$

$$680B^3C(B'_{u_2})^2A'_{u_1}B'_{u_1} + 216ABC^2(B'_{u_2})^2A'_{u_1}B'_{u_1} +$$

$$122B^3CA'_{u_2}C'_{u_2}A'_{u_1}B'_{u_1} - 10ABC^2A'_{u_2}C'_{u_2}A'_{u_1}B'_{u_1} -$$

$$296B^4B'_{u_2}C'_{u_2}A'_{u_1}B'_{u_1} - 584AB^2CB'_{u_2}C'_{u_2}A'_{u_1}B'_{u_1} -$$

$$16A^2C^2B'_{u_2}C'_{u_2}A'_{u_1}B'_{u_1} + 158AB^3(C'_{u_2})^2A'_{u_1}B'_{u_1} +$$

$$66A^2BC(C'_{u_2})^2A'_{u_1}B'_{u_1} - 80B^3C^2A''_{u_2u_2}A'_{u_1}B'_{u_1} + 80ABC^3A''_{u_2u_2}A'_{u_1}B'_{u_1} -$$

$$136B^4CB''_{u_2u_2}A'_{u_1}B'_{u_1} + 128AB^2C^2B''_{u_2u_2}A'_{u_1}B'_{u_1} + 8A^2C^3B''_{u_2u_2}A'_{u_1}B'_{u_1} +$$

$$40B^5C''_{u_2u_2}A'_{u_1}B'_{u_1} - 8AB^3CC''_{u_2u_2}A'_{u_1}B'_{u_1} - 32A^2BC^2C''_{u_2u_2}A'_{u_1}B'_{u_1} +$$

$$336BC^3B'_{u_2}(A'_{u_1})^2B'_{u_1} - 130B^2C^2C'_{u_2}(A'_{u_1})^2B'_{u_1} - 38AC^3C'_{u_2}(A'_{u_1})^2B'_{u_1} +$$

$$96B^2C^2(A'_{u_2})^2(B'_{u_1})^2 + 16AC^3(A'_{u_2})^2(B'_{u_1})^2 + 224B^3CA'_{u_2}B'_{u_2}(B'_{u_1})^2 -$$

$$400B^4(B'_{u_2})^2(B'_{u_1})^2 - 464AB^2C(B'_{u_2})^2(B'_{u_1})^2 - 32A^2C^2(B'_{u_2})^2(B'_{u_1})^2 -$$

$$64B^4A'_{u_2}C'_{u_2}(B'_{u_1})^2 - 56AB^2CA'_{u_2}C'_{u_2}(B'_{u_1})^2 + 8A^2C^2A'_{u_2}C'_{u_2}(B'_{u_1})^2 +$$

$$680AB^3B'_{u_2}C'_{u_2}(B'_{u_1})^2 + 216A^2BCB'_{u_2}C'_{u_2}(B'_{u_1})^2 - 212A^2B^2(C'_{u_2})^2(B'_{u_1})^2 -$$

$$12A^3C(C'_{u_2})^2(B'_{u_1})^2 + 64B^4CA''_{u_2u_2}(B'_{u_1})^2 - 48AB^2C^2A''_{u_2u_2}(B'_{u_1})^2 -$$

$$16A^2C^3A''_{u_2u_2}(B'_{u_1})^2 + 96B^5B''_{u_2u_2}(B'_{u_1})^2 - 48AB^3CB''_{u_2u_2}(B'_{u_1})^2 -$$

$$48A^2BC^2B''_{u_2u_2}(B'_{u_1})^2 - 64AB^4C''_{u_2u_2}(B'_{u_1})^2 + 56A^2B^2CC''_{u_2u_2}(B'_{u_1})^2 +$$

$$8A^3C^2C''_{u_2u_2}(B'_{u_1})^2 - 568B^2C^2B'_{u_2}A'_{u_1}(B'_{u_1})^2 - 104AC^3B'_{u_2}A'_{u_1}(B'_{u_1})^2 +$$

$$132B^3CC'_{u_2}A'_{u_1}(B'_{u_1})^2 + 204ABC^2C'_{u_2}A'_{u_1}(B'_{u_1})^2 + 240B^3CB'_{u_2}(B'_{u_1})^3 +$$

$$208ABC^2B'_{u_2}(B'_{u_1})^3 - 192AB^2CC'_{u_2}(B'_{u_1})^3 - 32A^2C^2C'_{u_2}(B'_{u_1})^3 -$$

$$40B^3C(A'_{u_2})^3C'_{u_1} - 44ABC^2(A'_{u_2})^3C'_{u_1} + 72B^4(A'_{u_2})^2B'_{u_2}C'_{u_1} +$$

$246AB^2C(A'_{u_2})^2B'_{u_2}C'_{u_1} + 18A^2C^2(A'_{u_2})^2B'_{u_2}C'_{u_1} - 232AB^3A'_{u_2}(B'_{u_2})^2C'_{u_1} -$

$104A^2BCA'_{u_2}(B'_{u_2})^2C'_{u_1} - 92AB^3(A'_{u_2})^2C'_{u_2}C'_{u_1} - 76A^2BC(A'_{u_2})^2C'_{u_2}C'_{u_1} +$

$310A^2B^2A'_{u_2}B'_{u_2}C'_{u_2}C'_{u_1} + 26A^3CA'_{u_2}B'_{u_2}C'_{u_2}C'_{u_1} -$

$84A^3BA'_{u_2}(C'_{u_2})^2C'_{u_1} - 32B^5A'_{u_2}A''_{u_2u_2}C'_{u_1} - 38AB^3CA'_{u_2}A''_{u_2u_2}C'_{u_1} +$

$70A^2BC^2A'_{u_2}A''_{u_2u_2}C'_{u_1} + 136AB^4B'_{u_2}A''_{u_2u_2}C'_{u_1} - 120A^2B^2CB'_{u_2}A''_{u_2u_2}C'_{u_1} -$

$16A^3C^2B'_{u_2}A''_{u_2u_2}C'_{u_1} - 76A^2B^3C'_{u_2}A''_{u_2u_2}C'_{u_1} + 76A^3BCC'_{u_2}A''_{u_2u_2}C'_{u_1} +$

$48AB^4A'_{u_2}B''_{u_2u_2}C'_{u_1} - 44A^2B^2CA'_{u_2}B''_{u_2u_2}C'_{u_1} - 4A^3C^2A'_{u_2}B''_{u_2u_2}C'_{u_1} -$

$26A^2B^3A'_{u_2}C''_{u_2u_2}C'_{u_1} + 26A^3BCA'_{u_2}C''_{u_2u_2}C'_{u_1} - 24AB^5A'''_{u_2u_2u_2}C'_{u_1} +$

$48A^2B^3CA'''_{u_2u_2u_2}C'_{u_1} - 24A^3BC^2A'''_{u_2u_2u_2}C'_{u_1} + 104B^2C^2(A'_{u_2})^2A'_{u_1}C'_{u_1} +$

$36AC^3(A'_{u_2})^2A'_{u_1}C'_{u_1} - 82B^3CA'_{u_2}B'_{u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} -$

$142ABC^2A'_{u_2}B'_{u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} - 64B^4(B'_{u_2})^2A'_{u_1}C'_{u_1} - 56AB^2C(B'_{u_2})^2A'_{u_1}C'_{u_1} +$

$8A^2C^2(B'_{u_2})^2A'_{u_1}C'_{u_1} + 10B^4A'_{u_2}C'_{u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} +$

$64AB^2CA'_{u_2}C'_{u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} + 38A^2C^2A'_{u_2}C'_{u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} +$

$122AB^3B'_{u_2}C'_{u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} - 10A^2BCB'_{u_2}C'_{u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} -$

$38A^2B^2(C'_{u_2})^2A'_{u_1}C'_{u_1} + 10A^3C(C'_{u_2})^2A'_{u_1}C'_{u_1} + 38B^4CA''_{u_2u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} -$

$10AB^2C^2A''_{u_2u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} - 28A^2C^3A''_{u_2u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} + 16B^5B''_{u_2u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} -$

$12AB^3CB''_{u_2u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} - 4A^2BC^2B''_{u_2u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} - 14AB^4C''_{u_2u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} +$

$18A^2B^2CC''_{u_2u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} - 4A^3C^2C''_{u_2u_2}A'_{u_1}C'_{u_1} - 84BC^3A'_{u_2}(A'_{u_1})^2C'_{u_1} +$

$24B^2C^2B'_{u_2}(A'_{u_1})^2C'_{u_1} - 24AC^3B'_{u_2}(A'_{u_1})^2C'_{u_1} - 12B^3CC'_{u_2}(A'_{u_1})^2C'_{u_1} +$

$12ABC^2C'_{u_2}(A'_{u_1})^2C'_{u_1} + 28C^4(A'_{u_1})^3C'_{u_1} - 150B^3C(A'_{u_2})^2B'_{u_1}C'_{u_1} -$

$130ABC^2(A'_{u_2})^2B'_{u_1}C'_{u_1} + 80B^4A'_{u_2}B'_{u_2}B'_{u_1}C'_{u_1} +$

$304AB^2CA'_{u_2}B'_{u_2}B'_{u_1}C'_{u_1} + 64A^2C^2A'_{u_2}B'_{u_2}B'_{u_1}C'_{u_1} +$

$224AB^3(B'_{u_2})^2B'_{u_1}C'_{u_1} - 82AB^3A'_{u_2}C'_{u_2}B'_{u_1}C'_{u_1}-$

$142A^2BCA'_{u_2}C'_{u_2}B'_{u_1}C'_{u_1} - 244A^2B^2B'_{u_2}C'_{u_2}B'_{u_1}C'_{u_1}+$

$20A^3CB'_{u_2}C'_{u_2}B'_{u_1}C'_{u_1} + 56A^3B(C'_{u_2})^2B'_{u_1}C'_{u_1} - 32B^5A''_{u_2u_2}B'_{u_1}C'_{u_1}-$

$68AB^3CA''_{u_2u_2}B'_{u_1}C'_{u_1} + 100A^2BC^2A''_{u_2u_2}B'_{u_1}C'_{u_1} - 48AB^4B''_{u_2u_2}B'_{u_1}C'_{u_1}+$

$56A^2B^2CB''_{u_2u_2}B'_{u_1}C'_{u_1} - 8A^3C^2B''_{u_2u_2}B'_{u_1}C'_{u_1} + 20A^2B^3C''_{u_2u_2}B'_{u_1}C'_{u_1}-$

$20A^3BCC''_{u_2u_2}B'_{u_1}C'_{u_1} + 310B^2C^2A'_{u_2}A'_{u_1}B'_{u_1}C'_{u_1}+$

$26AC^3A'_{u_2}A'_{u_1}B'_{u_1}C'_{u_1} - 148B^3CB'_{u_2}A'_{u_1}B'_{u_1}C'_{u_1}+$

$148ABC^2B'_{u_2}A'_{u_1}B'_{u_1}C'_{u_1} + 48B^4C'_{u_2}A'_{u_1}B'_{u_1}C'_{u_1}+$

$2AB^2CC'_{u_2}A'_{u_1}B'_{u_1}C'_{u_1} - 50A^2C^2C'_{u_2}A'_{u_1}B'_{u_1}C'_{u_1}-$

$168BC^3(A'_{u_1})^2B'_{u_1}C'_{u_1} - 232B^3CA'_{u_2}(B'_{u_1})^2C'_{u_1} - 104ABC^2A'_{u_2}(B'_{u_1})^2C'_{u_1}+$

$160B^4B'_{u_2}(B'_{u_1})^2C'_{u_1} - 120AB^2CB'_{u_2}(B'_{u_1})^2C'_{u_1} - 40A^2C^2B'_{u_2}(B'_{u_1})^2C'_{u_1}-$

$148AB^3C'_{u_2}(B'_{u_1})^2C'_{u_1} + 148A^2BCC'_{u_2}(B'_{u_1})^2C'_{u_1} + 284B^2C^2A'_{u_1}(B'_{u_1})^2C'_{u_1}+$

$52AC^3A'_{u_1}(B'_{u_1})^2C'_{u_1} - 120B^3C(B'_{u_1})^3C'_{u_1} - 104ABC^2(B'_{u_1})^3C'_{u_1}+$

$23B^4(A'_{u_2})^2(C'_{u_1})^2 + 75AB^2C(A'_{u_2})^2(C'_{u_1})^2 + 14A^2C^2(A'_{u_2})^2(C'_{u_1})^2-$

$150AB^3A'_{u_2}B'_{u_2}(C'_{u_1})^2 - 130A^2BCA'_{u_2}B'_{u_2}(C'_{u_1})^2 + 96A^2B^2(B'_{u_2})^2(C'_{u_1})^2+$

$16A^3C(B'_{u_2})^2(C'_{u_1})^2 + 104A^2B^2A'_{u_2}C'_{u_2}(C'_{u_1})^2 + 36A^3CA'_{u_2}C'_{u_2}(C'_{u_1})^2-$

$112A^3BB'_{u_2}C'_{u_2}(C'_{u_1})^2 + 28A^4(C'_{u_2})^2(C'_{u_1})^2 + 26AB^4A''_{u_2u_2}(C'_{u_1})^2-$

$6A^2B^2CA''_{u_2u_2}(C'_{u_1})^2 - 20A^3C^2A''_{u_2u_2}(C'_{u_1})^2 - 16A^2B^3B''_{u_2u_2}(C'_{u_1})^2+$

$16A^3BCB''_{u_2u_2}(C'_{u_1})^2 + 8A^3B^2C''_{u_2u_2}(C'_{u_1})^2 - 8A^4CC''_{u_2u_2}(C'_{u_1})^2-$

$92B^3CA'_{u_2}A'_{u_1}(C'_{u_1})^2 - 76ABC^2A'_{u_2}A'_{u_1}(C'_{u_1})^2 + 56B^4B'_{u_2}A'_{u_1}(C'_{u_1})^2+$

$120AB^2CB'_{u_2}A'_{u_1}(C'_{u_1})^2 - 8A^2C^2B'_{u_2}A'_{u_1}(C'_{u_1})^2 - 64AB^3C'_{u_2}A'_{u_1}(C'_{u_1})^2-$

$20A^2BCC'_{u_2}A'_{u_1}(C'_{u_1})^2 + 59B^2C^2(A'_{u_1})^2(C'_{u_1})^2 + 25AC^3(A'_{u_1})^2(C'_{u_1})^2+$

$$72B^4A^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}(C^{'}_{u_1})^2+246AB^2CA^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}(C^{'}_{u_1})^2+18A^2C^2A^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}(C^{'}_{u_1})^2-$$

$$308AB^3B^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}(C^{'}_{u_1})^2-28A^2BCB^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}(C^{'}_{u_1})^2+204A^2B^2C^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}(C^{'}_{u_1})^2-$$

$$36A^3CC^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}(C^{'}_{u_1})^2-132B^3CA^{'}_{u_1}B^{'}_{u_1}(C^{'}_{u_1})^2-204ABC^2A^{'}_{u_1}B^{'}_{u_1}(C^{'}_{u_1})^2+$$

$$20B^4(B^{'}_{u_1})^2(C^{'}_{u_1})^2+272AB^2C(B^{'}_{u_1})^2(C^{'}_{u_1})^2+44A^2C^2(B^{'}_{u_1})^2(C^{'}_{u_1})^2-$$

$$40AB^3A^{'}_{u_2}(C^{'}_{u_1})^3-44A^2BCA^{'}_{u_2}(C^{'}_{u_1})^3+104A^2B^2B^{'}_{u_2}(C^{'}_{u_1})^3+$$

$$8A^3CB^{'}_{u_2}(C^{'}_{u_1})^3-56A^3BC^{'}_{u_2}(C^{'}_{u_1})^3+8B^4A^{'}_{u_1}(C^{'}_{u_1})^3+50AB^2CA^{'}_{u_1}(C^{'}_{u_1})^3+$$

$$26A^2C^2A^{'}_{u_1}(C^{'}_{u_1})^3-28AB^3B^{'}_{u_1}(C^{'}_{u_1})^3-140A^2BCB^{'}_{u_1}(C^{'}_{u_1})^3+$$

$$7A^2B^2(C^{'}_{u_1})^4+21A^3C(C^{'}_{u_1})^4-52B^3C^2(A^{'}_{u_2})^2A^{''}_{u_1u_2}+52ABC^3(A^{'}_{u_2})^2A^{''}_{u_1u_2}+$$

$$124B^4CA^{'}_{u_2}B^{'}_{u_2}A^{''}_{u_1u_2}-144AB^2C^2A^{'}_{u_2}B^{'}_{u_2}A^{''}_{u_1u_2}+20A^2C^3A^{'}_{u_2}B^{'}_{u_2}A^{''}_{u_1u_2}-$$

$$48B^5(B^{'}_{u_2})^2A^{''}_{u_1u_2}+96AB^3C(B^{'}_{u_2})^2A^{''}_{u_1u_2}-48A^2BC^2(B^{'}_{u_2})^2A^{''}_{u_1u_2}-$$

$$28B^5A^{'}_{u_2}C^{'}_{u_2}A^{''}_{u_1u_2}+4AB^3CA^{'}_{u_2}C^{'}_{u_2}A^{''}_{u_1u_2}+24A^2BC^2A^{'}_{u_2}C^{'}_{u_2}A^{''}_{u_1u_2}+$$

$$24AB^4B^{'}_{u_2}C^{'}_{u_2}A^{''}_{u_1u_2}-48A^2B^2CB^{'}_{u_2}C^{'}_{u_2}A^{''}_{u_1u_2}+24A^3C^2B^{'}_{u_2}C^{'}_{u_2}A^{''}_{u_1u_2}-$$

$$32B^5CA^{''}_{u_2u_2}A^{''}_{u_1u_2}+64AB^3C^2A^{''}_{u_2u_2}A^{''}_{u_1u_2}-32A^2BC^3A^{''}_{u_2u_2}A^{''}_{u_1u_2}+$$

$$16B^6B^{''}_{u_2u_2}A^{''}_{u_1u_2}-48AB^4CB^{''}_{u_2u_2}A^{''}_{u_1u_2}+48A^2B^2C^2B^{''}_{u_2u_2}A^{''}_{u_1u_2}-$$

$$16A^3C^3B^{''}_{u_2u_2}A^{''}_{u_1u_2}+36B^2C^3A^{'}_{u_2}A^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-$$

$$36AC^4A^{'}_{u_2}A^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}+32B^3C^2B^{'}_{u_2}A^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-$$

$$32ABC^3B^{'}_{u_2}A^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-26B^4CC^{'}_{u_2}A^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}+36AB^2C^2C^{'}_{u_2}A^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-$$

$$10A^2C^3C^{'}_{u_2}A^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-72B^3C^2A^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}+72ABC^3A^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-$$

$$72B^4CB^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}+80AB^2C^2B^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-8A^2C^3B^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}+$$

$$40B^5C^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-48AB^3CC^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}+8A^2BC^2C^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}+$$

$$62B^4CA^{'}_{u_2}C^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-36AB^2C^2A^{'}_{u_2}C^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-26A^2C^3A^{'}_{u_2}C^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-$$

$$16B^5B^{'}_{u_2}C^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-40AB^3CB^{'}_{u_2}C^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}+56A^2BC^2B^{'}_{u_2}C^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}+$$

$$12AB^4C^{'}_{u_2}C^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}+12A^2B^2CC^{'}_{u_2}C^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-24A^3C^2C^{'}_{u_2}C^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-$$

$$52B^3C^2A^{'}_{u_1}C^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}+52ABC^3A^{'}_{u_1}C^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}+92B^4CB^{'}_{u_1}C^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-$$

$$80AB^2C^2B^{'}_{u_1}C^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-12A^2C^3B^{'}_{u_1}C^{'}_{u_1}A^{''}_{u_1u_2}-20B^5(C^{'}_{u_1})^2A^{''}_{u_1u_2}-$$

$$12AB^3C(C^{'}_{u_1})^2A^{''}_{u_1u_2}+32A^2BC^2(C^{'}_{u_1})^2A^{''}_{u_1u_2}+8B^4C^2(A^{''}_{u_1u_2})^2-$$

$$16AB^2C^3(A^{''}_{u_1u_2})^2+8A^2C^4(A^{''}_{u_1u_2})^2+60B^4C(A^{'}_{u_2})^2B^{''}_{u_1u_2}-$$

$$92AB^2C^2(A^{'}_{u_2})^2B^{''}_{u_1u_2}+32A^2C^3(A^{'}_{u_2})^2B^{''}_{u_1u_2}-$$

$$64B^5A^{'}_{u_2}B^{'}_{u_2}B^{''}_{u_1u_2}+224AB^3CA^{'}_{u_2}B^{'}_{u_2}B^{''}_{u_1u_2}-160A^2BC^2A^{'}_{u_2}B^{'}_{u_2}B^{''}_{u_1u_2}-$$

$$240AB^4(B^{'}_{u_2})^2B^{''}_{u_1u_2}+176A^2B^2C(B^{'}_{u_2})^2B^{''}_{u_1u_2}+64A^3C^2(B^{'}_{u_2})^2B^{''}_{u_1u_2}+$$

$$4AB^4A^{'}_{u_2}C^{'}_{u_2}B^{''}_{u_1u_2}-56A^2B^2CA^{'}_{u_2}C^{'}_{u_2}B^{''}_{u_1u_2}+52A^3C^2A^{'}_{u_2}C^{'}_{u_2}B^{''}_{u_1u_2}+$$

$$304A^2B^3B^{'}_{u_2}C^{'}_{u_2}B^{''}_{u_1u_2}-304A^3BCB^{'}_{u_2}C^{'}_{u_2}B^{''}_{u_1u_2}-76A^3B^2(C^{'}_{u_2})^2B^{''}_{u_1u_2}+$$

$$76A^4C(C^{'}_{u_2})^2B^{''}_{u_1u_2}+64B^6A^{''}_{u_2u_2}B^{''}_{u_1u_2}-160AB^4CA^{''}_{u_2u_2}B^{''}_{u_1u_2}+$$

$$128A^2B^2C^2A^{''}_{u_2u_2}B^{''}_{u_1u_2}-32A^3C^3A^{''}_{u_2u_2}B^{''}_{u_1u_2}+64AB^5B^{''}_{u_2u_2}B^{''}_{u_1u_2}-$$

$$128A^2B^3CB^{''}_{u_2u_2}B^{''}_{u_1u_2}+64A^3BC^2B^{''}_{u_2u_2}B^{''}_{u_1u_2}-$$

$$32A^2B^4C^{''}_{u_2u_2}B^{''}_{u_1u_2}+64A^3B^2CC^{''}_{u_2u_2}B^{''}_{u_1u_2}-32A^4C^2C^{''}_{u_2u_2}B^{''}_{u_1u_2}+$$

$$80B^3C^2A^{'}_{u_2}A^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}-80ABC^3A^{'}_{u_2}A^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}-360B^4CB^{'}_{u_2}A^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}+$$

$$352AB^2C^2B^{'}_{u_2}A^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}+8A^2C^3B^{'}_{u_2}A^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}+96B^5C^{'}_{u_2}A^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}-$$

$$8AB^3CC^{'}_{u_2}A^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}-88A^2BC^2C^{'}_{u_2}A^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}-76B^2C^3(A^{'}_{u_1})^2B^{''}_{u_1u_2}+$$

$$76AC^4(A^{'}_{u_1})^2B^{''}_{u_1u_2}-160B^4CA^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}+160AB^2C^2A^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}+$$

$$512B^5B^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}-288AB^3CB^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}-224A^2BC^2B^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}-$$

$$360AB^4C^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}+352A^2B^2CC^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}+8A^3C^2C^{'}_{u_2}B^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}+$$

$$304B^3C^2A^{'}_{u_1}B^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}-304ABC^3A^{'}_{u_1}B^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}-240B^4C(B^{'}_{u_1})^2B^{''}_{u_1u_2}+$$

$$176AB^2C^2(B^{'}_{u_1})^2B^{''}_{u_1u_2}+64A^2C^3(B^{'}_{u_1})^2B^{''}_{u_1u_2}-16B^5A^{'}_{u_2}C^{'}_{u_1}B^{''}_{u_1u_2}+$$

$$8AB^3CA'_{u_2}C'_{u_1}B''_{u_1u_2}+8A^2BC^2A'_{u_2}C'_{u_1}B''_{u_1u_2}-160AB^4B'_{u_2}C'_{u_1}B''_{u_1u_2}+$$

$$160A^2B^2CB'_{u_2}C'_{u_1}B''_{u_1u_2}+80A^2B^3C'_{u_2}C'_{u_1}B''_{u_1u_2}-80A^3BCC'_{u_2}C'_{u_1}B''_{u_1u_2}+$$

$$4B^4CA'_{u_1}C'_{u_1}B''_{u_1u_2}-56AB^2C^2A'_{u_1}C'_{u_1}B''_{u_1u_2}+52A^2C^3A'_{u_1}C'_{u_1}B''_{u_1u_2}-$$

$$64B^5B'_{u_1}C'_{u_1}B''_{u_1u_2}+224AB^3CB'_{u_1}C'_{u_1}B''_{u_1u_2}-160A^2BC^2B'_{u_1}C'_{u_1}B''_{u_1u_2}+$$

$$60AB^4(C'_{u_1})^2B''_{u_1u_2}-92A^2B^2C(C'_{u_1})^2B''_{u_1u_2}+32A^3C^2(C'_{u_1})^2B''_{u_1u_2}+$$

$$32B^5CA''_{u_1u_2}B''_{u_1u_2}-64AB^3C^2A''_{u_1u_2}B''_{u_1u_2}+32A^2BC^3A''_{u_1u_2}B''_{u_1u_2}-$$

$$112B^6(B''_{u_1u_2})^2+240AB^4C(B''_{u_1u_2})^2-144A^2B^2C^2(B''_{u_1u_2})^2+$$

$$16A^3C^3(B''_{u_1u_2})^2-20B^5(A'_{u_2})^2C''_{u_1u_2}-$$

$$12AB^3C(A'_{u_2})^2C''_{u_1u_2}+32A^2BC^2(A'_{u_2})^2C''_{u_1u_2}+92AB^4A'_{u_2}B'_{u_2}C''_{u_1u_2}-$$

$$80A^2B^2CA'_{u_2}B'_{u_2}C''_{u_1u_2}-12A^3C^2A'_{u_2}B'_{u_2}C''_{u_1u_2}-52A^2B^3A'_{u_2}C'_{u_2}C''_{u_1u_2}+$$

$$52A^3BCA'_{u_2}C'_{u_2}C''_{u_1u_2}-32AB^5A''_{u_2u_2}C''_{u_1u_2}+64A^2B^3CA''_{u_2u_2}C''_{u_1u_2}-$$

$$32A^3BC^2A''_{u_2u_2}C''_{u_1u_2}+12B^4CA'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_2}+12AB^2C^2A'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_2}-$$

$$24A^2C^3A'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_2}+40B^5B'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_2}-48AB^3CB'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_2}+$$

$$8A^2BC^2B'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_2}-26AB^4C'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_2}+36A^2B^2CC'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_2}-$$

$$10A^3C^2C'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_2}-16B^5A'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_2}-40AB^3CA'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_2}+$$

$$56A^2BC^2A'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_2}-72AB^4B'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_2}+80A^2B^2CB'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_2}-$$

$$8A^3C^2B'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_2}+32A^2B^3C'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_2}-32A^3BCC'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_2}+$$

$$24B^4CA'_{u_1}B'_{u_1}C''_{u_1u_2}-48AB^2C^2A'_{u_1}B'_{u_1}C''_{u_1u_2}+24A^2C^3A'_{u_1}B'_{u_1}C''_{u_1u_2}-$$

$$48B^5(B'_{u_1})^2C''_{u_1u_2}+96AB^3C(B'_{u_1})^2C''_{u_1u_2}-48A^2BC^2(B'_{u_1})^2C''_{u_1u_2}+$$

$$62AB^4A'_{u_2}C'_{u_1}C''_{u_1u_2}-36A^2B^2CA'_{u_2}C'_{u_1}C''_{u_1u_2}-26A^3C^2A'_{u_2}C'_{u_1}C''_{u_1u_2}-$$

$$72A^2B^3B'_{u_2}C'_{u_1}C''_{u_1u_2}+72A^3BCB'_{u_2}C'_{u_1}C''_{u_1u_2}+36A^3B^2C'_{u_2}C'_{u_1}C''_{u_1u_2}-$$

$$36A^4CC'_{u_2}C'_{u_1}C''_{u_1u_2}-28B^5A'_{u_1}C'_{u_1}C''_{u_1u_2}+4AB^3CA'_{u_1}C'_{u_1}C''_{u_1u_2}+$$

$$24A^2BC^2A'_{u_1}C'_{u_1}C''_{u_1u_2} + 124AB^4B'_{u_1}C'_{u_1}C''_{u_1u_2} - 144A^2B^2CB'_{u_1}C'_{u_1}C''_{u_1u_2}+$$

$$20A^3C^2B'_{u_1}C'_{u_1}C''_{u_1u_2} - 52A^2B^3(C'_{u_1})^2C''_{u_1u_2} + 52A^3BC(C'_{u_1})^2C''_{u_1u_2}+$$

$$16AB^4CA''_{u_1u_2}C''_{u_1u_2} - 32A^2B^2C^2A''_{u_1u_2}C''_{u_1u_2} + 16A^3C^3A''_{u_1u_2}C''_{u_1u_2}+$$

$$32AB^5B''_{u_1u_2}C''_{u_1u_2} - 64A^2B^3CB''_{u_1u_2}C''_{u_1u_2} + 32A^3BC^2B''_{u_1u_2}C''_{u_1u_2}+$$

$$8A^2B^4(C''_{u_1u_2})^2 - 16A^3B^2C(C''_{u_1u_2})^2 + 8A^4C^2(C''_{u_1u_2})^2-$$

$$36B^5CA'_{u_2}A'''_{u_1u_2u_2} + 72AB^3C^2A'_{u_2}A'''_{u_1u_2u_2} - 36A^2BC^3A'_{u_2}A'''_{u_1u_2u_2}+$$

$$48B^6B'_{u_2}A'''_{u_1u_2u_2} - 96AB^4CB'_{u_2}A'''_{u_1u_2u_2} + 48A^2B^2C^2B'_{u_2}A'''_{u_1u_2u_2}-$$

$$24AB^5C'_{u_2}A'''_{u_1u_2u_2} + 48A^2B^3CC'_{u_2}A'''_{u_1u_2u_2} - 24A^3BC^2C'_{u_2}A'''_{u_1u_2u_2}+$$

$$20B^4C^2A'_{u_1}A'''_{u_1u_2u_2} - 40AB^2C^3A'_{u_1}A'''_{u_1u_2u_2} + 20A^2C^4A'_{u_1}A'''_{u_1u_2u_2}-$$

$$40B^5CB'_{u_1}A'''_{u_1u_2u_2} + 80AB^3C^2B'_{u_1}A'''_{u_1u_2u_2} - 40A^2BC^3B'_{u_1}A'''_{u_1u_2u_2}+$$

$$16B^6C'_{u_1}A'''_{u_1u_2u_2} - 16AB^4CC'_{u_1}A'''_{u_1u_2u_2} - 16A^2B^2C^2C'_{u_1}A'''_{u_1u_2u_2}+$$

$$16A^3C^3C'_{u_1}A'''_{u_1u_2u_2} - 24AB^4CA'_{u_2}B'''_{u_1u_2u_2} + 48A^2B^2C^2A'_{u_2}B'''_{u_1u_2u_2}-$$

$$24A^3C^3A'_{u_2}B'''_{u_1u_2u_2} + 96AB^5B'_{u_2}B'''_{u_1u_2u_2} - 192A^2B^3CB'_{u_2}B'''_{u_1u_2u_2}+$$

$$96A^3BC^2B'_{u_2}B'''_{u_1u_2u_2} - 48A^2B^4C'_{u_2}B'''_{u_1u_2u_2} + 96A^3B^2CC'_{u_2}B'''_{u_1u_2u_2}-$$

$$48A^4C^2C'_{u_2}B'''_{u_1u_2u_2} + 56B^5CA'_{u_1}B'''_{u_1u_2u_2} - 112AB^3C^2A'_{u_1}B'''_{u_1u_2u_2}+$$

$$56A^2BC^3A'_{u_1}B'''_{u_1u_2u_2} - 96B^6B'_{u_1}B'''_{u_1u_2u_2} + 176AB^4CB'_{u_1}B'''_{u_1u_2u_2}-$$

$$64A^2B^2C^2B'_{u_1}B'''_{u_1u_2u_2} - 16A^3C^3B'_{u_1}B'''_{u_1u_2u_2}+$$

$$32AB^5C'_{u_1}B'''_{u_1u_2u_2} - 64A^2B^3CC'_{u_1}B'''_{u_1u_2u_2} + 32A^3BC^2C'_{u_1}B'''_{u_1u_2u_2}-$$

$$12AB^5A'_{u_2}C'''_{u_1u_2u_2} + 24A^2B^3CA'_{u_2}C'''_{u_1u_2u_2} - 12A^3BC^2A'_{u_2}C'''_{u_1u_2u_2}-$$

$$8B^6A'_{u_1}C'''_{u_1u_2u_2} + 20AB^4CA'_{u_1}C'''_{u_1u_2u_2} - 16A^2B^2C^2A'_{u_1}C'''_{u_1u_2u_2}+$$

$$4A^3C^3A'_{u_1}C'''_{u_1u_2u_2} + 8AB^5B'_{u_1}C'''_{u_1u_2u_2} - 16A^2B^3CB'_{u_1}C'''_{u_1u_2u_2}+$$

$$8A^3BC^2B'_{u_1}C'''_{u_1u_2u_2} + 8A^2B^4C'_{u_1}C'''_{u_1u_2u_2} - 16A^3B^2CC'_{u_1}C'''_{u_1u_2u_2}+$$

$8A^4C^2C'_{u_1}C'''_{u_1u_2u_2} - 16B^7A''''_{u_1u_2u_2u_2} + 48AB^5CA''''_{u_1u_2u_2u_2} -$

$48A^2B^3C^2A''''_{u_1u_2u_2u_2} + 16A^3BC^3A''''_{u_1u_2u_2u_2} - 16AB^6B''''_{u_1u_2u_2u_2} +$

$48A^2B^4CB''''_{u_1u_2u_2u_2} - 48A^3B^2C^2B''''_{u_1u_2u_2u_2} + 16A^4C^3B''''_{u_1u_2u_2u_2} +$

$8B^2C^3(A'_{u_2})^2A''_{u_1u_1} - 8AC^4(A'_{u_2})^2A''_{u_1u_1} + 20B^3C^2A'_{u_2}B'_{u_2}A''_{u_1u_1} -$

$20ABC^3A'_{u_2}B'_{u_2}A''_{u_1u_1} - 64B^4C(B'_{u_2})^2A''_{u_1u_1} + 56AB^2C^2(B'_{u_2})^2A''_{u_1u_1} +$

$8A^2C^3(B'_{u_2})^2A''_{u_1u_1} - 14B^4CA'_{u_2}C'_{u_2}A''_{u_1u_1} + 18AB^2C^2A'_{u_2}C'_{u_2}A''_{u_1u_1} -$

$4A^2C^3A'_{u_2}C'_{u_2}A''_{u_1u_1} + 40B^5B'_{u_2}C'_{u_2}A''_{u_1u_1} - 8AB^3CB'_{u_2}C'_{u_2}A''_{u_1u_1} -$

$32A^2BC^2B'_{u_2}C'_{u_2}A''_{u_1u_1} - 18AB^4(C'_{u_2})^2A''_{u_1u_1} + 18A^2B^2C(C'_{u_2})^2A''_{u_1u_1} +$

$8B^4C^2A''_{u_2u_2}A''_{u_1u_1} - 16AB^2C^3A''_{u_2u_2}A''_{u_1u_1} + 8A^2C^4A''_{u_2u_2}A''_{u_1u_1} +$

$16B^5CB''_{u_2u_2}A''_{u_1u_1} - 32AB^3C^2B''_{u_2u_2}A''_{u_1u_1} + 16A^2BC^3B''_{u_2u_2}A''_{u_1u_1} -$

$8B^6C''_{u_2u_2}A''_{u_1u_1} + 16AB^4CC''_{u_2u_2}A''_{u_1u_1} - 8A^2B^2C^2C''_{u_2u_2}A''_{u_1u_1} -$

$52B^2C^3B'_{u_2}A'_{u_1}A''_{u_1u_1} + 52AC^4B'_{u_2}A'_{u_1}A''_{u_1u_1} + 26B^3C^2C'_{u_2}A'_{u_1}A''_{u_1u_1} -$

$26ABC^3C'_{u_2}A'_{u_1}A''_{u_1u_1} + 104B^3C^2B'_{u_2}B'_{u_1}A''_{u_1u_1} - 104ABC^3B'_{u_2}B'_{u_1}A''_{u_1u_1} -$

$36B^4CC'_{u_2}B'_{u_1}A''_{u_1u_1} + 20AB^2C^2C'_{u_2}B'_{u_1}A''_{u_1u_1} + 16A^2C^3C'_{u_2}B'_{u_1}A''_{u_1u_1} -$

$26B^3C^2A'_{u_2}C'_{u_1}A''_{u_1u_1} + 26ABC^3A'_{u_2}C'_{u_1}A''_{u_1u_1} + 8B^4CB'_{u_2}C'_{u_1}A''_{u_1u_1} -$

$16AB^2C^2B'_{u_2}C'_{u_1}A''_{u_1u_1} + 8A^2C^3B'_{u_2}C'_{u_1}A''_{u_1u_1} - 4B^5C'_{u_2}C'_{u_1}A''_{u_1u_1} +$

$8AB^3CC'_{u_2}C'_{u_1}A''_{u_1u_1} - 4A^2BC^2C'_{u_2}C'_{u_1}A''_{u_1u_1} + 26B^2C^3A'_{u_1}C'_{u_1}A''_{u_1u_1} -$

$26AC^4A'_{u_1}C'_{u_1}A''_{u_1u_1} - 52B^3C^2B'_{u_1}C'_{u_1}A''_{u_1u_1} + 52ABC^3B'_{u_1}C'_{u_1}A''_{u_1u_1} +$

$16B^4C(C'_{u_1})^2A''_{u_1u_1} - 6AB^2C^2(C'_{u_1})^2A''_{u_1u_1} - 10A^2C^3(C'_{u_1})^2A''_{u_1u_1} -$

$32B^4C^2B''_{u_1u_2}A''_{u_1u_1} + 64AB^2C^3B''_{u_1u_2}A''_{u_1u_1} - 32A^2C^4B''_{u_1u_2}A''_{u_1u_1} -$

$16B^3C^2(A'_{u_2})^2B''_{u_1u_1} + 16ABC^3(A'_{u_2})^2B''_{u_1u_1} - 48B^4CA'_{u_2}B'_{u_2}B''_{u_1u_1} +$

$56AB^2C^2A'_{u_2}B'_{u_2}B''_{u_1u_1} - 8A^2C^3A'_{u_2}B'_{u_2}B''_{u_1u_1} + 96B^5(B'_{u_2})^2B''_{u_1u_1} -$

$48AB^3C(B'_{u_2})^2B''_{u_1u_1} - 48A^2BC^2(B'_{u_2})^2B''_{u_1u_1} + 16B^5A'_{u_2}C'_{u_2}B''_{u_1u_1}-$

$12AB^3CA'_{u_2}C'_{u_2}B''_{u_1u_1} - 4A^2BC^2A'_{u_2}C'_{u_2}B''_{u_1u_1} - 136AB^4B'_{u_2}C'_{u_2}B''_{u_1u_1}+$

$128A^2B^2CB'_{u_2}C'_{u_2}B''_{u_1u_1} + 8A^3C^2B'_{u_2}C'_{u_2}B''_{u_1u_1} + 36A^2B^3(C'_{u_2})^2B''_{u_1u_1}-$

$36A^3BC(C'_{u_2})^2B''_{u_1u_1} - 16B^5CA''_{u_2u_2}B''_{u_1u_1} + 32AB^3C^2A''_{u_2u_2}B''_{u_1u_1}-$

$16A^2BC^3A''_{u_2u_2}B''_{u_1u_1} - 32B^6B''_{u_2u_2}B''_{u_1u_1} + 64AB^4CB''_{u_2u_2}B''_{u_1u_1}-$

$32A^2B^2C^2B''_{u_2u_2}B''_{u_1u_1} + 16AB^5C''_{u_2u_2}B''_{u_1u_1} - 32A^2B^3CC''_{u_2u_2}B''_{u_1u_1}+$

$16A^3BC^2C''_{u_2u_2}B''_{u_1u_1} + 104B^3C^2B'_{u_2}A'_{u_1}B''_{u_1u_1} - 104ABC^3B'_{u_2}A'_{u_1}B''_{u_1u_1}-$

$28B^4CC'_{u_2}A'_{u_1}B''_{u_1u_1} + 4AB^2C^2C'_{u_2}A'_{u_1}B''_{u_1u_1} + 24A^2C^3C'_{u_2}A'_{u_1}B''_{u_1u_1}-$

$160B^4CB'_{u_2}B'_{u_1}B''_{u_1u_1} + 112AB^2C^2B'_{u_2}B'_{u_1}B''_{u_1u_1} + 48A^2C^3B'_{u_2}B'_{u_1}B''_{u_1u_1}+$

$104AB^3CC'_{u_2}B'_{u_1}B''_{u_1u_1} - 104A^2BC^2C'_{u_2}B'_{u_1}B''_{u_1u_1} + 48B^4CA'_{u_2}C'_{u_1}B''_{u_1u_1}-$

$44AB^2C^2A'_{u_2}C'_{u_1}B''_{u_1u_1} - 4A^2C^3A'_{u_2}C'_{u_1}B''_{u_1u_1} - 32B^5B'_{u_2}C'_{u_1}B''_{u_1u_1}+$

$64AB^3CB'_{u_2}C'_{u_1}B''_{u_1u_1} - 32A^2BC^2B'_{u_2}C'_{u_1}B''_{u_1u_1} + 28AB^4C'_{u_2}C'_{u_1}B''_{u_1u_1}-$

$56A^2B^2CC'_{u_2}C'_{u_1}B''_{u_1u_1} + 28A^3C^2C'_{u_2}C'_{u_1}B''_{u_1u_1} - 52B^3C^2A'_{u_1}C'_{u_1}B''_{u_1u_1}+$

$52ABC^3A'_{u_1}C'_{u_1}B''_{u_1u_1} + 80B^4CB'_{u_1}C'_{u_1}B''_{u_1u_1} - 56AB^2C^2B'_{u_1}C'_{u_1}B''_{u_1u_1}-$

$24A^2C^3B'_{u_1}C'_{u_1}B''_{u_1u_1} - 8B^5(C'_{u_1})^2B''_{u_1u_1} - 36AB^3C(C'_{u_1})^2B''_{u_1u_1}+$

$44A^2BC^2(C'_{u_1})^2B''_{u_1u_1} + 64B^5CB''_{u_1u_2}B''_{u_1u_1} - 128AB^3C^2B''_{u_1u_2}B''_{u_1u_1}+$

$64A^2BC^3B''_{u_1u_2}B''_{u_1u_1} + 16B^6C''_{u_1u_2}B''_{u_1u_1}-$

$48AB^4CC''_{u_1u_2}B''_{u_1u_1} + 48A^2B^2C^2C''_{u_1u_2}B''_{u_1u_1} - 16A^3C^3C''_{u_1u_2}B''_{u_1u_1}+$

$26B^4C(A'_{u_2})^2C''_{u_1u_1} - 6AB^2C^2(A'_{u_2})^2C''_{u_1u_1} - 20A^2C^3(A'_{u_2})^2C''_{u_1u_1}-$

$32B^5A'_{u_2}B'_{u_2}C''_{u_1u_1} - 68AB^3CA'_{u_2}B'_{u_2}C''_{u_1u_1} + 100A^2BC^2A'_{u_2}B'_{u_2}C''_{u_1u_1}+$

$64AB^4(B'_{u_2})^2C''_{u_1u_1} - 48A^2B^2C(B'_{u_2})^2C''_{u_1u_1} - 16A^3C^2(B'_{u_2})^2C''_{u_1u_1}+$

$38AB^4A'_{u_2}C'_{u_2}C''_{u_1u_1} - 10A^2B^2CA'_{u_2}C'_{u_2}C''_{u_1u_1} - 28A^3C^2A'_{u_2}C'_{u_2}C''_{u_1u_1}-$

$$80A^2B^3B'_{u_2}C'_{u_2}C''_{u_1u_1}+80A^3BCB'_{u_2}C'_{u_2}C''_{u_1u_1}+20A^3B^2(C'_{u_2})^2C''_{u_1u_1}-$$
$$20A^4C(C'_{u_2})^2C''_{u_1u_1}+24AB^4CA''_{u_2u_2}C''_{u_1u_1}-48A^2B^2C^2A''_{u_2u_2}C''_{u_1u_1}+$$
$$24A^3C^3A''_{u_2u_2}C''_{u_1u_1}-16AB^5B''_{u_2u_2}C''_{u_1u_1}+32A^2B^3CB''_{u_2u_2}C''_{u_1u_1}-$$
$$16A^3BC^2B''_{u_2u_2}C''_{u_1u_1}+8A^2B^4C''_{u_2u_2}C''_{u_1u_1}-16A^3B^2CC''_{u_2u_2}C''_{u_1u_1}+$$
$$8A^4C^2C''_{u_2u_2}C''_{u_1u_1}-76B^3C^2A'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_1}+76ABC^3A'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_1}+$$
$$104B^4CB'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_1}-108AB^2C^2B'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_1}+4A^2C^3B'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_1}-$$
$$28B^5C'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_1}+6AB^3CC'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_1}+22A^2BC^2C'_{u_2}A'_{u_1}C''_{u_1u_1}+$$
$$38B^2C^3(A'_{u_1})^2C''_{u_1u_1}-38AC^4(A'_{u_1})^2C''_{u_1u_1}+136B^4CA'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_1}-$$
$$120AB^2C^2A'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_1}-16A^2C^3A'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_1}-160B^5B'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_1}+$$
$$120AB^3CB'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_1}+40A^2BC^2B'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_1}+116AB^4C'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_1}-$$
$$132A^2B^2CC'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_1}+16A^3C^2C'_{u_2}B'_{u_1}C''_{u_1u_1}-152B^3C^2A'_{u_1}B'_{u_1}C''_{u_1u_1}+$$
$$152ABC^3A'_{u_1}B'_{u_1}C''_{u_1u_1}+120B^4C(B'_{u_1})^2C''_{u_1u_1}-88AB^2C^2(B'_{u_1})^2C''_{u_1u_1}-$$
$$32A^2C^3(B'_{u_1})^2C''_{u_1u_1}-32B^5A'_{u_2}C'_{u_1}C''_{u_1u_1}-38AB^3CA'_{u_2}C'_{u_1}C''_{u_1u_1}+$$
$$70A^2BC^2A'_{u_2}C'_{u_1}C''_{u_1u_1}+136AB^4B'_{u_2}C'_{u_1}C''_{u_1u_1}-120A^2B^2CB'_{u_2}C'_{u_1}C''_{u_1u_1}-$$
$$16A^3C^2B'_{u_2}C'_{u_1}C''_{u_1u_1}-76A^2B^3C'_{u_2}C'_{u_1}C''_{u_1u_1}+76A^3BCC'_{u_2}C'_{u_1}C''_{u_1u_1}+$$
$$52B^4CA'_{u_1}C'_{u_1}C''_{u_1u_1}-2AB^2C^2A'_{u_1}C'_{u_1}C''_{u_1u_1}-50A^2C^3A'_{u_1}C'_{u_1}C''_{u_1u_1}-$$
$$16B^5B'_{u_1}C'_{u_1}C''_{u_1u_1}-172AB^3CB'_{u_1}C'_{u_1}C''_{u_1u_1}+188A^2BC^2B'_{u_1}C'_{u_1}C''_{u_1u_1}+$$
$$12AB^4(C'_{u_1})^2C''_{u_1u_1}+40A^2B^2C(C'_{u_1})^2C''_{u_1u_1}-52A^3C^2(C'_{u_1})^2C''_{u_1u_1}-$$
$$32B^5CA''_{u_1u_2}C''_{u_1u_1}+64AB^3C^2A''_{u_1u_2}C''_{u_1u_1}-32A^2BC^3A''_{u_1u_2}C''_{u_1u_1}+$$
$$64B^6B''_{u_1u_2}C''_{u_1u_1}-160AB^4CB''_{u_1u_2}C''_{u_1u_1}+128A^2B^2C^2B''_{u_1u_2}C''_{u_1u_1}-$$
$$32A^3C^3B''_{u_1u_2}C''_{u_1u_1}-32AB^5C''_{u_1u_2}C''_{u_1u_1}+64A^2B^3CC''_{u_1u_2}C''_{u_1u_1}-$$
$$32A^3BC^2C''_{u_1u_2}C''_{u_1u_1}+16B^4C^2A''_{u_1u_1}C''_{u_1u_1}-32AB^2C^3A''_{u_1u_1}C''_{u_1u_1}+$$

$$16A^2C^4A''_{u_1u_1}C''_{u_1u_1}-32B^5CB''_{u_1u_1}C''_{u_1u_1}+64AB^3C^2B''_{u_1u_1}C''_{u_1u_1}-$$
$$32A^2BC^3B''_{u_1u_1}C''_{u_1u_1}-4B^6(C''_{u_1u_1})^2+28AB^4C(C''_{u_1u_1})^2-44A^2B^2C^2(C''_{u_1u_1})^2+$$
$$20A^3C^3(C''_{u_1u_1})^2+8B^4C^2A'_{u_2}A'''_{u_1u_1u_2}-16AB^2C^3A'_{u_2}A'''_{u_1u_1u_2}+$$
$$8A^2C^4A'_{u_2}A'''_{u_1u_1u_2}+8B^5CB'_{u_2}A'''_{u_1u_1u_2}-16AB^3C^2B'_{u_2}A'''_{u_1u_1u_2}+$$
$$8A^2BC^3B'_{u_2}A'''_{u_1u_1u_2}-8B^6C'_{u_2}A'''_{u_1u_1u_2}+$$
$$20AB^4CC'_{u_2}A'''_{u_1u_1u_2}-16A^2B^2C^2C'_{u_2}A'''_{u_1u_1u_2}+4A^3C^3C'_{u_2}A'''_{u_1u_1u_2}-$$
$$12B^5CC'_{u_1}A'''_{u_1u_1u_2}+24AB^3C^2C'_{u_1}A'''_{u_1u_1u_2}-12A^2BC^3C'_{u_1}A'''_{u_1u_1u_2}+$$
$$32B^5CA'_{u_2}B'''_{u_1u_1u_2}-64AB^3C^2A'_{u_2}B'''_{u_1u_1u_2}+32A^2BC^3A'_{u_2}B'''_{u_1u_1u_2}-$$
$$96B^6B'_{u_2}B'''_{u_1u_1u_2}+176AB^4CB'_{u_2}B'''_{u_1u_1u_2}-64A^2B^2C^2B'_{u_2}B'''_{u_1u_1u_2}-$$
$$16A^3C^3B'_{u_2}B'''_{u_1u_1u_2}+56AB^5C'_{u_2}B'''_{u_1u_1u_2}-112A^2B^3CC'_{u_2}B'''_{u_1u_1u_2}+$$
$$56A^3BC^2C'_{u_2}B'''_{u_1u_1u_2}-48B^4C^2A'_{u_1}B'''_{u_1u_1u_2}+96AB^2C^3A'_{u_1}B'''_{u_1u_1u_2}-$$
$$48A^2C^4A'_{u_1}B'''_{u_1u_1u_2}+96B^5CB'_{u_1}B'''_{u_1u_1u_2}-$$
$$192AB^3C^2B'_{u_1}B'''_{u_1u_1u_2}+96A^2BC^3B'_{u_1}B'''_{u_1u_1u_2}-24AB^4CC'_{u_1}B'''_{u_1u_1u_2}+$$
$$48A^2B^2C^2C'_{u_1}B'''_{u_1u_1u_2}-24A^3C^3C'_{u_1}B'''_{u_1u_1u_2}+16B^6A'_{u_2}C'''_{u_1u_1u_2}-$$
$$16AB^4CA'_{u_2}C'''_{u_1u_1u_2}-16A^2B^2C^2A'_{u_2}C'''_{u_1u_1u_2}+16A^3C^3A'_{u_2}C'''_{u_1u_1u_2}-$$
$$40AB^5B'_{u_2}C'''_{u_1u_1u_2}+80A^2B^3CB'_{u_2}C'''_{u_1u_1u_2}-40A^3BC^2B'_{u_2}C'''_{u_1u_1u_2}+$$
$$20A^2B^4C'_{u_2}C'''_{u_1u_1u_2}-40A^3B^2CC'_{u_2}C'''_{u_1u_1u_2}+20A^4C^2C'_{u_2}C'''_{u_1u_1u_2}-$$
$$24B^5CA'_{u_1}C'''_{u_1u_1u_2}+48AB^3C^2A'_{u_1}C'''_{u_1u_1u_2}-24A^2BC^3A'_{u_1}C'''_{u_1u_1u_2}+$$
$$48B^6B'_{u_1}C'''_{u_1u_1u_2}-96AB^4CB'_{u_1}C'''_{u_1u_1u_2}+48A^2B^2C^2B'_{u_1}C'''_{u_1u_1u_2}-$$
$$36AB^5C'_{u_1}C'''_{u_1u_1u_2}+72A^2B^3CC'_{u_1}C'''_{u_1u_1u_2}-36A^3BC^2C'_{u_1}C'''_{u_1u_1u_2}+$$
$$8B^6CA''''_{u_1u_1u_2u_2}-24AB^4C^2A''''_{u_1u_1u_2u_2}+24A^2B^2C^3A''''_{u_1u_1u_2u_2}-8A^3C^4A''''_{u_1u_1u_2u_2}+$$
$$32B^7B''''_{u_1u_1u_2u_2}-96AB^5CB''''_{u_1u_1u_2u_2}+96A^2B^3C^2B''''_{u_1u_1u_2u_2}-$$

$$32A^3BC^3B^{''''}_{u_1u_1u_2u_2}+8AB^6C^{''''}_{u_1u_1u_2u_2}-24A^2B^4CC^{''''}_{u_1u_1u_2u_2}+$$
$$24A^3B^2C^2C^{''''}_{u_1u_1u_2u_2}-8A^4C^3C^{''''}_{u_1u_1u_2u_2}-8B^4C^2B^{'}_{u_2}A^{'''}_{u_1u_1u_1}+$$
$$16AB^2C^3B^{'}_{u_2}A^{'''}_{u_1u_1u_1}-8A^2C^4B^{'}_{u_2}A^{'''}_{u_1u_1u_1}+4B^5CC^{'}_{u_2}A^{'''}_{u_1u_1u_1}-$$
$$8AB^3C^2C^{'}_{u_2}A^{'''}_{u_1u_1u_1}+4A^2BC^3C^{'}_{u_2}A^{'''}_{u_1u_1u_1}+4B^4C^2C^{'}_{u_1}A^{'''}_{u_1u_1u_1}-$$
$$8AB^2C^3C^{'}_{u_1}A^{'''}_{u_1u_1u_1}+4A^2C^4C^{'}_{u_1}A^{'''}_{u_1u_1u_1}+16B^5CB^{'}_{u_2}B^{'''}_{u_1u_1u_1}-$$
$$32AB^3C^2B^{'}_{u_2}B^{'''}_{u_1u_1u_1}+16A^2BC^3B^{'}_{u_2}B^{'''}_{u_1u_1u_1}-8AB^4CC^{'}_{u_2}B^{'''}_{u_1u_1u_1}+$$
$$16A^2B^2C^2C^{'}_{u_2}B^{'''}_{u_1u_1u_1}-8A^3C^3C^{'}_{u_2}B^{'''}_{u_1u_1u_1}-8B^5CC^{'}_{u_1}B^{'''}_{u_1u_1u_1}+$$
$$16AB^3C^2C^{'}_{u_1}B^{'''}_{u_1u_1u_1}-8A^2BC^3C^{'}_{u_1}B^{'''}_{u_1u_1u_1}-24B^5CA^{'}_{u_2}C^{'''}_{u_1u_1u_1}+$$
$$48AB^3C^2A^{'}_{u_2}C^{'''}_{u_1u_1u_1}-24A^2BC^3A^{'}_{u_2}C^{'''}_{u_1u_1u_1}+32B^6B^{'}_{u_2}C^{'''}_{u_1u_1u_1}-$$
$$56AB^4CB^{'}_{u_2}C^{'''}_{u_1u_1u_1}+16A^2B^2C^2B^{'}_{u_2}C^{'''}_{u_1u_1u_1}+8A^3C^3B^{'}_{u_2}C^{'''}_{u_1u_1u_1}-$$
$$20AB^5C^{'}_{u_2}C^{'''}_{u_1u_1u_1}+40A^2B^3CC^{'}_{u_2}C^{'''}_{u_1u_1u_1}-20A^3BC^2C^{'}_{u_2}C^{'''}_{u_1u_1u_1}+$$
$$24B^4C^2A^{'}_{u_1}C^{'''}_{u_1u_1u_1}-48AB^2C^3A^{'}_{u_1}C^{'''}_{u_1u_1u_1}+24A^2C^4A^{'}_{u_1}C^{'''}_{u_1u_1u_1}-$$
$$48B^5CB^{'}_{u_1}C^{'''}_{u_1u_1u_1}+96AB^3C^2B^{'}_{u_1}C^{'''}_{u_1u_1u_1}-48A^2BC^3B^{'}_{u_1}C^{'''}_{u_1u_1u_1}+$$
$$8B^6C^{'}_{u_1}C^{'''}_{u_1u_1u_1}+4AB^4CC^{'}_{u_1}C^{'''}_{u_1u_1u_1}-32A^2B^2C^2C^{'}_{u_1}C^{'''}_{u_1u_1u_1}+$$
$$20A^3C^3C^{'}_{u_1}C^{'''}_{u_1u_1u_1}-16B^6CB^{''''}_{u_1u_1u_1u_2}+48AB^4C^2B^{''''}_{u_1u_1u_1u_2}-$$
$$48A^2B^2C^3B^{''''}_{u_1u_1u_1u_2}+16A^3C^4B^{''''}_{u_1u_1u_1u_2}-16B^7C^{''''}_{u_1u_1u_1u_2}+48AB^5CC^{''''}_{u_1u_1u_1u_2}-$$
$$48A^2B^3C^2C^{''''}_{u_1u_1u_1u_2}+16A^3BC^3C^{''''}_{u_1u_1u_1u_2}+8B^6CC^{''''}_{u_1u_1u_1u_1}-$$
$$24AB^4C^2C^{''''}_{u_1u_1u_1u_1}+24A^2B^2C^3C^{''''}_{u_1u_1u_1u_1}-8A^3C^4C^{''''}_{u_1u_1u_1u_1}\Big)\Big)\,du_1du_2$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бессе А.* Многообразия с замкнутыми геодезическими. — М. Мир., 1980.

[2] *Бобров А. Н.* След оператора лапласа-бельтрами с потенциалом на поверхности цолля. // *Доклады АН.* — 1999. — Т. 368, № 2. — С. 154–156.

[3] *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация (Том 2). — Ижевск. Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

[4] *Васильев Д.Г.* Двучленная асимптотика спектра краевой задачи при внутреннем отражении общего вида // *Функц. анализ и его прил.* — 1984. — Т. 18, № 4. — С. 1–13.

[5] *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // *ДАН СССР.* — 1953. — Т. 88, № 4. — С. 593–596.

[6] *Гуреев Т.Е., Сафаров Ю.Г.* Точная асимптотика спектра оператора лапласа на многообразии с периодическими геодезическими // *Труды МИАН.* — 1988. — Т. 179. — С. 36–53.

[7] *Иврий В.Я.* О точных спектральных асимптотиках для оператора лапласа-бельтрами при общих эллиптических краевых условиях // *Функц. анализ и его прил.* — 1981. — Т. 15, № 1. — С. 74–75.

[8] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М. Мир., 1972.

[9] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Том 1. — М.: ГТГИ, 1951.

[10] *Левитан Б.М.* Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка // *Изв. АН СССР. Серия матем.* — 1952. — Т. 16, № 1. — С. 325–352.

[11] *Лидский В.Б.* О суммиремости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов // *Труды ММО.* — 1962. — Т. 11. — С. 3–35.

[12] *Лидский В.Б., Садовничий В.А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // *Функц. анализ и его прил.* — 1967. — Т. 1, № 2. — С. 52–59.

[13] *Любишкин В.А., Подольский В.Е.* О суммируемости регуляризованных следов дифференциальных операторов // *Матем. заметки.* — 1993. — Т. 53, № 2. — С. 33–38.

[14] *Подольский В.Е.* Формула регуляризованного следа оператора лапласа-бельтрами с нечетным потенциалом на сфере s^2 // *Матем. заметки.* — 1994. — Т. 56, № 1. — С. 71–77.

[15] *Розенблюм Г.В., Соломяк М.З., Шубин М.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов // *Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. напр.* — 1989. — Т. 64. — С. 5–242.

[16] *Садовничий В.А., Дубровский В.В.* Классическая формула регуляризованного следа для собственных чисел оператора лапласа-бельтрами с потенциалом на сфере // *ДАН СССР.* — 1991. — Т. 319, № 1. — С. 61–62.

[17] *Садовничий В.А., Любишкин В.А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа // *ДАН СССР.* — 1981. — Т. 256, № 4. — С. 794–798.

[18] *Садовничий В.А., Любишкин В.А., М.Мартинович.* Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // *ДАН СССР.* — 1987. — Т. 293, № 5. — С. 1062–1064.

[19] *Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю.* Асимптотика собственных чисел и формула следа возмущения оператора лапласа на сфере s^2 // *Матем. заметки.* — 2005. — Т. 77, № 3. — С. 434–448.

[20] *Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю., Атнагулов А.И.* Свойства резольвенты оператора лапласа-бельтрами на двумерной сфере и формула следов // *Доклады академии наук.* — 2011. — Т. 441, № 2. — С. 174–176.

[21] *Сафаров Ю.Г.* Об асимптотике собственных значений задач дифракции // *ДАН СССР.* — 1985. — Т. 281, № 5. — С. 1058–1061.

[22] *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. — М. Мир., 1985.

[23] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 3. Псевдодифференциальные операторы. — Мосва "Мир 1987.

[24] *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. — М. Наука., 1978.

[25] *Avakumovic V.G.* Uber die eigenfunktionen auf geschlossen riemannschen mannigfaltigkeiten // *Math. Z.* — 1956. — Vol. 65. — Pp. 324–344.

[26] *Carleman T.* Uber die asymptotische verteilung der eigenwerte partieller differentialgle-ichungen // *Ber. Sachs. Acad. Wiss. Leipzig.* — 1936. — Vol. 88. — Pp. 119–132.

[27] *Duistermaat J.J., Guillemin V.* The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacterictics // *Invent.Math.* — 1975. — Vol. 29. — Pp. 39–79.

[28] *Guillemin V.* Some spectral results for the laplace operator with potential on the n-sphere // *Adv. Math.* — 1978. — Vol. 27. — Pp. 273–286.

[29] *Guillemin V., Uribe A.* Spectral properties of a crtain class of complex potentials // *Trans, of the Amer. Math. Soc.* — 1983. — Vol. 279. — Pp. 759–771.

[30] *Hormander L.* The spectral function of elliptic operator // *Acta. Math.* — 1968. — Vol. 121. — Pp. 193–218.

[31] *Ivrii V.* Precise spectral asymptotics for elliptic operators // *Lect. Notes in Math.* — 1984. — Vol. 1100. — Pp. 1–238.

[32] *Minakshisundaram S., Pleijel A.* Some properties of the eigenfunctions of the laplace-beltrami operator on riemannian manifolds // *Canad. J. Math.* — 1949. — Vol. 1. — Pp. 242–256.

[33] *Podol'skii V. E.* On the summability of regularized sums of eigenvalues of the laplace-beltrami operator with potential on symmetric spaces of rank one // *Russian J. Math. Phys.* — 1996. — Vol. 4, no. 1. — Pp. 123–130.

[34] *Seeley R. T.* Complex powers of an elliptic operator // *Proc. Symp. in sure Math.* — 1967. — Vol. 10. — Pp. 288–307.

[35] *Walfram.* Mathematica 9. — [Electronic]. http://www.wolfram.com/mathematica/.

[36] *Weil H.* Uber die ranfwertaufgabe der strahlungstheotie und asymptotische spektralgesetze. // *J.Reine Angew.* — 1913. — Vol. 143, no. 3. — Pp. 177–202.

[37] *Weil H.* Das asymptotic eigenfunctions of mixed problems of stekloff type // *Zs.Angev. Math. Phys.* — 1972. — Vol. 23. — Pp. 1–12.

[38] *Weinstein A.* Fourier integral operators, quantization and the spectra of riemmanian manifolds. // Colloque International de Geometrie Symplectique et Physique Mathematique CNRS Aix (Juin 1974). — 1976.

[39] *Weinstein A.* Asymptotics of eigenvalue clusters for the laplacian plus a potential // *Duke Math J.* — 1977. — Vol. 44. — Pp. 883–892.

[40] *Widom H.* The laplace operator with potential on the 2-sphere. // *Adv. Math.* — 1979. — Vol. 31. — Pp. 63–66.

[41] *Zelditch S.* Fine structure of zoll spectra // *Journal of functional analysis.* — 1997. — Vol. 143. — Pp. 415–460.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[42] *Зыкова Т.В.* Регуляризованный след возмущенного оператора Лапласа-Бельтрами на некотором семействе многообразий // *Доклады Академии Наук* — 2011. — Т. 437, №5 — С. 590–591.

[43] *Зыкова Т.В.* След оператора Лапласа – Бельтрами с потенциалом при возмущении метрики многообразия // *Научное обозрение* — 2014. — №2 — С. 95 –103.

[44] *Зыкова Т.В.* След оператора Лапласа – Бельтрами с потенциалом при возмущении метрики многообразия // *Деп. в ВИНИТИ РАН* — 28.03.2014 — №85-В2014, С. 1–12.

[45] *Зыкова Т.В.* Регуляризованный след оператора Лапласа-Бельтрами возмущенного оператором умножения на функцию на многообразиях со специальным возмущением метрики сферы // *e-prints arXiv:1404.4810*— 2014. — [Электронный ресурс] Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1404.4810

[46] *Зыкова Т.В.* Регуляризованный след возмущенного оператора Лапласа-Бельтрами на некотором семействе многообразий // *Международная конференция «Спектральная теория операторов и ее приложения»*, Тезисы докладов, г. Уфа — 2011.— С. 34–35.

[47] *Зыкова Т.В.* Регуляризованный след возмущенного оператора Лапласа на некоторых многообразиях // *XI Школа молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики»*, Тезисы докладов, г. Нальчик — 2013.— С. 27–31.

[48] *Зыкова Т.В.* Формулы регуляризованных следов возмущенного оператора Лапласа-Бельтрами на двумерных многообразиях с замкнутыми геодезическими в случае общего положения. // *17-ая международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвященная 170-летию со дня рождения В. А. Стеклова*, Тезисы докладов, г. Саратов — 2014 — С. 97–99.