Утверждаю
Проректор по научной работе
Башкирского государственного университета
профессор, д.х.н.
________ Захаров В.П.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ
на диссертацию Зыковой Татьяны Валерьевны
«ФОРМУЛЫ СЛЕДОВ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ЗАМКНУТЫМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ПОТОКОМ»,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Исследования спектра дифференциальных операторов на компактных многообразиях с периодическим бихарактеристическим потоком, проведенные А. Вейнстейном, Дж. Дейстермаатом и В. Гийеминым показали, что спектр таких операторов хорошо локализуется вокруг спектра невозмущенного (отвечающего главному символу) оператора. Оператор Лапласа-Бельтрами, возмущенный оператором умножения на гладкую функцию на многообразиях с замкнутым геодезическим потоком является основной моделью этого случая.

К настоящему времени, после получения А. Вейнстейном и рядом последователей асимптотики сумм вида $\sum_{i=0}^{2k} f(\mu_{ki} - \lambda_{ki})$, где μ_{ki} и λ_{ki} – собственные числа возмущенного и невозмущенного оператора из одного кластера, можно считать законченным изучение распределения спектра таких операторов методами асимптотического анализа, и на первый план вышло исследование распределения спектра методами теории регуляризованных следов.

Первая формула регуляризованного следа была получена в 1953 году И.М. Гельфандом и Б.М. Левитаном для оператора Штурма-Лиувилля, и их работа породила значительную теорию, созданную в работах

Л.А. Дикого, М.Г. Гасымого, А.Г. Костюченко, В.А. Садовничего, В. Б. Лидского и многих других.

Работы В. А. Садовничего и В. В. Дубровского по использованию методов теории возмущений в теории следов вывели эту теорию на исследование спектра операторов в частных производных. Выдающимся результатом стала работа В.А. Садовничего и В.В. Дубровского, где рассматривался оператор Лапласа-Бельтрами, возмущенный гладким нечетным вещественнозначным потенциалом на двумерной единичной сфере S^2. Этот оператор имеет кластерную асимптотику $N(\lambda)$ и для него суммирование со скобками является естественной постановкой задачи. Для этого случая была доказана формула:

$$\mu_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{2k} \mu_{ki} - k(k+1)(2k+1) \right] = -\frac{1}{8\pi} \int\limits_{S^2} q^2 dS,$$

Позже В. Е. Подольский, применив к этой задаче суммирование по Абелю и затем к полученной формуле тауберову теорему Литлвуда, доказал, что ряд сходится без скобок (но этот случай является единственным исключением). Он же получил аналогичные формулы для любых степеней собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на компактных симметрических пространствах ранга 1. А.Н. Бобров предпринимал попытку найти след оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на поверхности вращения Цолля, но допустил существенную неточность, и его результат верен только для случая простой сферы S^2 и произвольной комплекснозначной функции $q \in C^{\infty}$.

В.А. Садовничий и З.Ю. Фазуллин для оператора, возмущенного произвольной комплекснозначной функцией конечной гладкости получили формулу регуляризованного следа на сфере:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2k} [\mu_{ki} - k(k+1) - c_0] = c_1,$$

где $c_0 = \dfrac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2} q(\omega) d\omega$, $c_1 = \dfrac{1}{16\pi^3} \int\limits_{S^2} \int\limits_{S^2} \dfrac{q(\omega) q(\omega_0)}{\sqrt{1 - (\vec{\omega}, \vec{\omega_0})^2}} d\omega d\omega_0 - \dfrac{1}{8\pi} \int\limits_{S^2} q^2(\omega) d\omega$, $(\vec{\omega}, \vec{\omega_0})$ - скалярное произведение векторов $\vec{\omega} = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$

и $\vec{\omega_0} = (\cos\varphi_0 \sin\theta_0, \sin\varphi_0 \sin\theta_0, \cos\theta_0)$.

Целью диссертации Т. В. Зыковой является исследование задач спектральной теории операторов для возмущенного и невозмущенного операторов Лапласа-Бельтрами на двумерных многообразиях с замкнутыми геодезическими одинаковой длины, метрики которых являются возмущениями стандартной метрики сферы, в том числе иследование дзета- и тета-функций таких операторов и получение формул регуляризованных следов. Таким образом, мы видим, что рассматриваемая диссертация посвящена современной остроактуальной тематике в спектральной теории.

В первой части диссертации автор рассматривает оператор Лапласа-Бельтрами на одном недавно построенном геометрами А. Т. Фоменко и А. В. Болсиновым семействе многообразий, метрика которых является весьма обширным семейством двупараметрических возмущений метрики канонической сферы, при этом у всего семейства многообразий все геодезические замкнуты и имеют одинаковую длину. Т. В. Зыкова тщательно исследует, проведя огромную аналитическую работу, дзета-функцию этого семейства операторов, и асимптотическое поведение тета-функции операторов, что позволяет ей получить и формулу следа. Отметим, что решение задачи включало в себя совершенно новый элемент – было необходимо правильно учесть вклад от возмущения именно метрики многообразий, а не только вклад от возмущения потенциалом. Полученная автором формула стала первой в литературе формулой регуляризованного следа оператора на многообразии, в которой явно присутствует геометрическая составляющая.

Полученный результат открыл дорогу к решению общей задачи – изучению оператора Лапласа-Бельтрами не на том или ином важном, но конкретном семействе многообразий с замкнутыми геодезическими, чья метрика явно дана, а изучению таких операторов на произвольном многообразии с данными свойствами, метрика которых явно не известна.

Эта задача, хотя и не содержит принципиальных отличий в математических методах по сравнению с первой задачей диссертации, но несоизмеримо сложнее технически и ее решение проведено другим, сравнительно новым в современных математических исследованиях, методом вычислений – методом компьютерных символьных вычислений.

В результате во второй части диссертации Т. В. Зыкова доказала хотя и ожидаемую, но очень важную для теории следов гипотезу – что вид формулы следов не зависит от того или иного явно заданного семейства метрик, а является одним и тем же для всех таких многообразий.

Диссертация содержит приложение, в котором приведены вычисленные значения аналитического продолжения дзета-функции оператора Лапласа-Бельтрами на многообразии M в случае общего положения в нуле и единице, так как эти значения используются при получении основных результатов, однако они слишком громоздки и приведение их в основном тексте мешает восприятию основных рассуждений. Отметим, что доступность этих значений аналитического продолжения дзета-функции может быть полезна во многих исследованиях и наличие такого приложения является отдельным достоинством диссертации.

Таким образом, в диссертации получены следующие основные результаты: исследовано аналитическое продолжение дзета-функции для возмущенного и невозмущенного операторов Лапласа-Бельтрами на двумерных многообразиях с замкнутыми геодезическими; впервые получена формула геометрического регуляризованного следа для оператора Лапласа-Бельтрами при возмущении метрики многообразия; впервые получена формула регуляризованного следа для оператора Лапласа-Бельтрами, возмущенного потенциалом, на многообразии с замкнутыми геодезическими и доказано, что полученная формула верна для всех таких многообразий, не зависит от явного вида метрик, а зависит только от их геометрических инвариантов. Все результаты диссертации являются новыми, и являются весьма значимыми для дальнейшего развития теории регуляризованных следов и спектральной теории в целом.

Все утверждения в диссертации сопровождаются строгими и полными доказательствами, на все использованные автором чужие результаты даны корректные ссылки. Результаты диссертации прошли достаточную апробацию на целом ряде авторитетных специализированных семинаров и конференций.

По теме диссертации опубликовано 7 работ, все требования ВАК по качеству публикаций выполнены.

Содержание автореферата и печатных работ соответствует материалам диссертации, все основные результаты опубликованы.

Стоить отметить, что диссертант в своей работе демонстрирует высокую квалификацию и умение пользоваться асимптотическими методами спектральной теории дифференциальных и псевдодифференциальных операторов.

Работа не лишена некоторых недостатков:

1. В автореферате на с.5 формула регуляризованного следа для произвольного возмущения оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере приводится некорректно.

2. В ссылках на монографии следовало бы указать номера параграфов (пунктов) или страниц, что облегчило бы работу с диссертацией.

3. Название пункта 1.2.3 некорректно: «... собственных чисел оператора $-\Delta + q$ и $\varkappa_{ki}$».

4. В страницах 42 (сверху 3-я строка) и 63 (формула (1.48)) вместо $k(k+1)$ следовало бы писать $\varkappa_{ki}$.

Также в диссертации имеются мелкие недочеты: см., например, описку на с. 29 снизу 1-я строка, с.30 снизу 9-я строка, с.44 сверху 12-я строка, с.57 снизу 7-я строка :«Теперь всё известно, чтобы сформулировать результат» – что известно?

Данные замечания не умаляют ценности диссертации.

Таким образом, диссертация Т. В. Зыковой «Формулы следов для возмущенного оператора Лапласа-Бельтрами на многообразиях с замкнутым геодезическим потоком» является научно-квалификационной работой, результаты которой являются весьма значимыми для дальнейшего развития теории регуляризованных следов и спектральной теории в целом. Диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям п.8 «Положения о порядке присуждения ученых степеней» ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, Зыкова Татьяна Валерьевна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры математического анализа Башкирского государственного университета 12 мая 2014 г., протокол №7.

Зав. кафедрой математического анализа, д.ф.-м.н. З.Ю. Фазуллин

ПОДПИСЬ З.Ю. Фазуллина
Заверяю: Нач. общего отдела Ба...

ОБЩИЙ
ОТДЕЛ