ОТЗЫВ

официального оппонента Артамонова Никиты Вячеславовича на диссертацию Зыковой Татьяны Валерьевны «ФОРМУЛЫ СЛЕДОВ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ЗАМКНУТЫМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ПОТОКОМ», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Исследование спектральных свойств дифференциальных операторов в частных производных (как на областях в $\mathbb{R}^n$, так и на многообразиях) является одной из важных задач функционального анализа и теории операторов. Особую роль в общей спектральной теории дифференциальных операторов с дискретными спектром играет теория регуляризованных следов, тесно связанная в вопросами асимптотического поведения собственных значений операторов.

Первая формула регуляризованного следа для оператора Штурма-Лиувилля на конечном интервале была получена в 1953 году И.М. Гельфандом и Б.М. Левитаном. Эта работа привела к созданию теории следов для обыкновенных дифференциальных операторов, развитой работах Л.А. Дикого, М.Г. Гасымого, А.Г. Костюченко, В.А. Садовничего, В. Б. Лидского и многих других.

В работах В. А. Садовничего и В. В. Дубровского, использовавших методы теории возмущений операторов, теория следов была расширена на операторы в частных производных. В частности, была получена формула следа для оператора Бельтрами-Лапласа с гладким нечётным вещественным потенциалом на двумерной сфере S^2. Следует отметить, что для дифференциальных операторов в частных производных характерен метод суммирования следа со скобкам. Это связанно с кластерным характером асимптотики собственных значений. Позднее, в работах В. Е. Подольского этот результата был расширен на операторы Бельтрами-Лапласа с потенциалом на компактных симметрических пространствах ранга 1. В работах В.А. Садовничего и З.Ю. Фазуллина была получена формула следа оператора Бельтрами-Лапласа на сфере с произвольным комплексным потенциалом конечной гладкости.

В работах А. Вайнштейна, Д. Дёйстермаата и В. Гийемина были исследованы спектральные свойства дифференциальных операторов на компактных многообразиях с периодическим бихарактеристическим потоком. Было показано, что собственные значений локализуются вокруг спектра оператора, отвечающего главному символу. Были получены результаты об асимптотике собственных значений этих операторов, в частности, оператора Бельтрами-Лапласа.

Диссертация Зыковой Т. В. является дальнейшим развитием указанных работ и посвящена спектральным задачам оператора Бельтрами-Лапласа с потенциалом на двумерных компактных многообразиях с замкнутыми геодезическими одинаковой длины и метрика которых является возмущением стандартной метрики сферы. Рассматриваются два вида двумерных многообразний: ML-многообразие (введённое в работах Фоменко и Болсинова) и многообразие общего вида с замкнутыми геодезическими длины 2π с возмущённой метрикой сферы. Оба многообразия определяются метрикой на единичной сфере. В работе исследована асимптотика тэта- и дзета-функции оператора и получены формулы регуляризованного следа.

Диссертация состоит из введения, одной главы, приложения и списка литературы. В первой части (параграф 1.1) даётся определение ML-многообразия путём задания явными формулами метрики на единичной сфере в сферо-конических координатах, приводится явный вид оператор Бельтрами-Лапласа с потенциалом на этом многообразии и исследуется его полный символ. Вторая часть (параграф 1.2) является основной. В ней подробно исследуется асимптотика тэта- и дзета-функции оператора с потенциалом, приводятся явные формула для первых членов асимптотики через геометрические инварианты многообразия и доказывается основная формула регуляризованного следа (теорема 1). В третьей части (параграф 1.3) доказывается аналог теоремы 1 (результат сформулирован в теореме 2) для общего случая многообразия, заданного метрикой на единичной сфере такой, что все геодезические замкнуты и имеют длину 2π (этот класс многообразий включает в себя и ML-многообразие). Но здесь важно отметить, что, в отличие от предыдущего случая, явные выражения для первых членов асимптотики тэта- и дзета-функций оператора Бельтрами-Лапласа были получены автором с использованием символьных вычисление в программе Wolfram Mathematica 9 (результаты вычислений приведены в Приложении).

К недостаткам диссертации можно отнести следующее. Идентичное описание имеющихся результатов по теории следов для оператора Бельтрами-Лапласа на многообразиях встречает и во введении (стр. 9) и в первой главе (стр. 38). Так же в работе имеются опечатки (например, на стр. 13, на стр. 30 и на стр. 88). В списке литературы «оператор Бельтрами-Лапласа» и «оператор Лапласа» местами написаны с маленькой буквы. Для некоторых утверждений не даются ссылки на литературу (например, нет ссылки на доказательство формулы (1.14). Однако указанные недостатки ни в коей мере не снижают ценность диссертации. Полученные результаты, несомненно, имеют важное значение для теории регуляризованных следов и спектральной теории дифференциальных операторов в частных производных в целом.

Результаты диссертации являются новыми и могут быть использованы в Московском, С.-Петербургском, Новосибирском, Казанском университете, Математическом институте РАН, Физическом институте РАН.

Результаты диссертации опубликованы в открытой печати, по теме диссертации опубликовано 7 работ, из них две работы в журналах перечня ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Результаты диссертации прошли апробацию на семинарах механико-математического факультета МГУ и на международных конференциях.

На основании изложенного считаю, что диссертация Зыковой Татьяны Валерьевны удовлетворяет требованиям, всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор несомненно заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент: кандидат физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой Эконометрики и математических методов анализа экономики МГИМО (У) МИД России. Адрес: 119454, Москва, пр. Вернадского 76, МГИМО, кафедра Эконометрики и математических методов анализа экономики. Тел. +7 499 431-66-29, электронная почта: artamonov@inno.mgimo.ru

Артамонов Н.В.

Ученый секретарь МГИМО (У) МИД России Улин Д.С.

Подпись Артамонова Н.В. заверяю

Д.С. Улин