Отзыв официального оппонента на диссертацию Зыковой Татьяны Валерьевны «Формулы следов для возмущенного оператора Лапласа–Бельтрами на многообразиях с замкнутым геодезическим потоком» на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ).

Диссертация Т. В. Зыковой «Формулы следов для возмущенного оператора Лапласа–Бельтрами на многообразиях с замкнутым геодезическим потоком» посвящена вычислению регуляризованных следов дифференциальных операторов на двумерных многообразиях с замкнутыми геодезическими.

Первым исследованием, относящимся к вычислению регуляризованного следа обыкновенного дифференциального оператора на отрезке, является работа И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана (1953), в которой была получена формула регуляризованного следа для оператора Штурма–Лиувилля.

Достаточно быстро эта тематика стала актуальной. Работы по вычислению регуляризованных следов находят применения в спектральной теории и ее приложениях. Методы, применяемые для получения регуляризованных следов, привели к развитию не только самой спектральной теории, но и послужили источником многих продвижений в теории псевдодифференциальных операторов, теории аналитических функций, спектральной геометрии и других областях математики.

Получением формул регуляризованных следов для обыкновенных дифференциальных операторов занимались И.М.Гельфанд, Л.А.Дикий, М.Г.Гасымов, Б.М.Левитан, Р.Ф.Шевченко, А.Г. Костюченко, В.А.Садовничий и многие другие.

Дальнейшие исследования многих математиков показали, что даже в случае обыкновенных дифференциальных операторов формулы регуляризованных следов нередко приводят к расходящимся рядам, в связи с чем вводятся различные методы суммирования (со скобками, по Абелю и т.д.). Этот подход к суммированию получил большое развитие при рассмотрении дифференциальных операторов в частных производных. Особый интерес представляет оператор Лапласа–Бельтрами на многообразиях. Изучение следов возмущённых и невозмущённых операторов Лапласа–Бельтрами на многообразиях имеет свои дополнительные сложности: приходится налагать ограничения как на класс потенциалов q, так и на класс многообразий. Как правило исследуются достаточно гладкие потенциалы. В 2011 г. в работе В. А. Садовничего и З. Ю. Фазуллина были получены формулы для регуляризованных следов в случае произвольного комплекснозначного потенциала q класса $W_1^2(S^2)$. Только в редких случаях удаётся понизить гладкость потенциала. Например, для операторов Штурма–Лиувилля А. М. Савчуком и А. А. Шкаликовым были рассмотрены потенциалы, являющиеся обобщенными производными функций ограниченной вариации.

В качестве многообразий как правило изучалась единичная сфера S^2. В. Е. Подольским были получены формулы для любых степеней собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на компактных симметрических пространствах ранга 1. Позже А. Н. Бобровым была предпринята попытка найти след оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на поверхности вращения Цолля, но в силу допущенной неточности приведённую им формулу можно считать верной лишь для случая простой сферы S^2 и произвольной комплекснозначной функции $q \in C^\infty$.

В связи с этим весьма интересным и важным является изучение следов операторов, полученных не только возмущением символа оператора, но и возмущением метрики многообразия. В такой постановке задача о нахождении регуляризованных следов ранее не рассматривалась.

И здесь автору удалось получить несколько новых глубоких результатов.

Диссертация состоит из введения, одной главы, разделённой на три параграфа, и приложения.

В первом параграфе приводятся предварительные сведения. Введён класс многообразий ML, на котором изучаются спектральные свойства оператора Лапласа–Бельтрами. Также в этом параграфе построен оператор Лапласа–Бельтрами на указанном многообразии и изучены его спектральные свойства: указаны собственные значения и их кратности.

Во втором параграфе проводится построение и вычисление регуляризованного следа возмущенного оператора Лапласа-Бельтрами на ML. **Третий параграф** посвящён нахождению регуляризованного следа возмущенного оператора Лапласа–Бельтрами рассматривается в случае общего положения, когда метрика многообразия задана в абстрактном виде. **В приложении** приведены вычисления значений аналитического продолжения дзета-функции оператора Лапласа-Бельтрами на многообразии M в случае общего положения в нуле и единице.

Наиболее значимые результаты содержатся во втором и третьем параграфах диссертации. Остановимся на них подробнее.

Второй параграф является основным в диссертационной работе. В нём последовательно получены формулы регуляризованных следов для

- $-\Delta_{ML} = -\tilde{\Delta}_{ML} + B$ и $-\tilde{\Delta}_{ML}$;
- $-\tilde{\Delta}_{ML} + q$ и $-\tilde{\Delta}_{ML}$;

и получен основной результат, а именно построена формула регуляризованного следа для $-\Delta_{ML}+q$. Эта формула учитывает как возмущения оператора потенциалом, так и возмущения метрики многообразия, на котором рассматривается оператор.

Кроме того в этом же параграфе проведено исследование аналитического продолжения дзета-функции для возмущённого и невозмущённого операторов Лапласа–Бельтрами на двумерных многообразиях с замкнутыми геодезическими, установлена связь между тета- и дзета-функциями оператора Лапласа–Бельтрами и вычислены коэффициенты тета-функции, необходимые для формулы регуляризованных следов.

Существенным достижением диссертанта в этом параграфе является то, что явно показано, что формула регуляризованного следа зависит от геометрических характеристик многообразия, что дало возможность рассмотреть задачу в более общем виде для возмущённых метрик.

В третьем параграфе рассмотрены двумерные компактные замкнутые многообразия без края, все геодезические которых замкнуты и имеют одинаковую длину 2π. Задание метрик таково, что они являются возмущением метрики стандартной сферы. В этот класс многообразий входят многообразия, рассмотренные во втором параграфе, а также поверхности Цолля. В такой постановке задача нахождения следа Лапласа–Бельтрами ранее не рассматривалась. Предложенный диссертантом вид многообразий охватывает все возможные выражения метрик на сфере и их возмущений.

Показано, что формула регуляризованного следа не зависит от явного задания метрики, а выписываются через инвариантные характеристики многообразия, что и позволило получить формулу регуляризованного следа и в случае общего вида возмущённых метрик.

Отметим, что рассмотрение общего вида метрик приводит к значительному усложнению вычислений коэффициентов тета-функции. Применение пакета для символьных вычислений нисколько не умаляет значимости полученных результатов, поскольку носит вспомогательный характер.

Более того, вычисленные значения аналитического продолжения дзета-функции оператора Лапласа–Бельтрами на многообразии ML в нуле и единице могут быть полезны специалистам в дальнейших исследованиях.

Важно отметить, что полученная формула не только даёт ответ для регуляризованных следов на новых многообразиях. Она в некотором смысле универсальна: меняя параметры, задающие метрику и потенциал, автор показывает, что полученные ранее другими математиками формулы для частных случаев укладываются в общую формулу.

В целом диссертация — сильная и интересная работа. Научная новизна и высокий научный уровень не вызывает сомнений. Полученные результаты и разработанные методы могут найти применение в спектральной теории операторов, спектральной геометрии. Все результаты строго доказаны. Доказательства тщательно продуманы и изложены ясно.

Коротко резюмируем основные результаты диссертации.

1. Впервые рассмотрен оператор Лапласа–Бельтрами, возмущенный не только потенциалом, но и метрикой многообразия.

2. Впервые получена формула регуляризованного следа для оператора Лапласа–Бельтрами на классе многообразий с замкнутыми геодезическими, метрика которых является возмущением стандартной метрикой сферы, а сам оператор возмущается потенциалом.

3. Показано, что формула регуляризованного следа зависит от геометрических инвариантов метрики из рассматриваемого класса.

4. Исследовано аналитическое продолжение дзета-функции для возмущённого и невозмущённого операторов Лапласа–Бельтрами на двумерных многообразиях с замкнутыми геодезическими.

Среди недочётов работы можно указать громоздкую нумерацию разделов, особенно если учесть, что диссертация состоит из одной главы.

Некоторая путаница в обозначении многообразия то через M, то через ML, а также несколько найденных опечаток не носят систематического характера, поэтому не будем останавливаться на них подробно.

Работа написана ясно, доказательства понятны. Указанные недочёты не умаляют научных достоинств диссертации. Получены новые и интересные результаты. Они также показывают глубокое знание предмета и хороший уровень квалификации соискателя. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах автора, 2 из которых входят в список ВАК. Результаты могут применяться в спектральной теории операторов, спектральной геометрии и математической физике. Они будут интересны специалистам из МГУ имени М.В.Ломоносова, МИРАН имени В.А.Стеклова, ПОМИ РАН. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Полученные результаты несомненно являются достаточными для защиты диссертации на соискание степени кандидата физико-математических наук. Диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения учёных степеней...» ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а её автор, Зыкова Татьяна Валерьевна, заслуживает присвоения звания кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теории функций и
функционального анализа
механико-математического факультета МГУ — Шейпак — И. А. Шейпак

23.05.2014

И.о. декана
механико-математического факультета МГУ
профессор — В. Н. Чубариков