

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Вязьмин Вадим Сергеевич

**ЛОКАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ АНОМАЛИИ
СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПО ДАННЫМ АЭРОГРАВИМЕТРИИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СФЕРИЧЕСКОГО
ВЕЙвлЕТ-РАЗЛОЖЕНИЯ**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2014

Работа выполнена на кафедре прикладной механики и управления механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель: Болотин Юрий Владимирович,
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: Конешов Вячеслав Николаевич,
доктор технических наук,
Институт физики Земли
имени О.Ю. Шмидта РАН

Каршаков Евгений Владимирович,
кандидат физико-математических наук,
Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН

Ведущая организация: Открытое акционерное общество
«Центральный научно-исследовательский
институт «Дельфин»

Защита диссертации состоится 12 сентября 2014 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Ломоносовский проспект, д. 27.

Автореферат разослан 12 августа 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.22,
кандидат физико-математических наук,
доцент

Прошкин В.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Аэрогравиметрические съемки предназначены для локального определения аномалии силы тяжести в исследуемом районе. Данные об аномалии используются в разведочной геофизике, навигации, геодезии и пр. В настоящее время аэрогравиметрия является основным средством быстрого получения локальных данных высокой точности и пространственного разрешения об аномалии силы тяжести. Аэрогравиметрические съемки проводятся также для уточнения глобальных моделей гравитационного поля Земли. Методы уточнения глобальной модели хорошо развиты (интегральные методы, метод среднеквадратической коллокации) и основываются, как правило, на разложении поля силы тяжести в ряд по сферическим (шаровым) функциям.

В приложениях часто не требуется построение глобальной модели гравитационного поля, а достаточно локально определенных его характеристик (аномалия силы тяжести на земной поверхности, возмущающий потенциал, уклонение отвесной линии, высота геоида и др.). Для определения в локальной области указанных характеристик по данным аэрогравиметрии необходима нелокальная информация о гравитационном поле Земли. В связи с чем данные аэрогравиметрии целесообразно комбинировать с данными глобальных моделей гравитационного поля. Новые глобальные модели высокого разрешения, такие как EGM2008, требуют совершенствования методов комбинирования. В настоящее время в мире активно развивается метод многомасштабного представления поля силы тяжести на основе сферического вейвлет-разложения, имеющий свойство пространственно-частотной локализации. Актуальной задачей является применение этого метода в аэрогравиметрии для локального определения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии совместно с данными глобальной модели.

Цель работы.

Целью диссертации является разработка методики локального определения аномалии силы тяжести и других характеристик поля силы тяжести по данным аэрогравиметрии и глобальной модели поля с использованием метода многомасштабного представления на основе сферического вейвлет-разложения. Отличительным свойством метода является возможность пространственно-частотной локализации функции, что удобно при работе

с локальными аэрогравиметрическими данными. В работе используется сферическое вейвлет-разложение в концепции, разработанной Техническим университетом Кайзерслаутерна (Германия)¹. Вейвлеты данной концепции являются гармоническими функциями вне сферы и, таким образом, могут использоваться при решении разных задач преобразования поля силы тяжести.

Методы исследований.

Теоретические результаты диссертации получены методами математической физики, многомасштабного вейвлет-анализа на сфере, оптимального и минимаксного оценивания.

Достоверность результатов.

В работе приведены подробные доказательства полученных теоретических результатов. Разработанная методика проверена обработкой модельных и реальных данных.

Научная новизна.

Все основные результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. В разработанной методике локального определения аномалии силы тяжести метод многомасштабного представления на сфере на основе гармонических вейвлетов Абеля-Пуассона впервые применен для локального определения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии. Впервые получены соотношения на характеристики ошибок данных аэрогравиметрии и глобальной модели гравитационного поля Земли, при которых комбинирование указанных данных проводить нецелесообразно.

Теоретическая и практическая ценность.

Разработанные алгоритмы и методы обработки данных аэрогравиметрии могут быть использованы для повышения точности локального определения аномалии силы тяжести и других характеристик аномального поля силы тяжести Земли (потенциал, уклонение отвесной линии, высота геоида и др.) с приложениями в прикладной геофизике. Теоретические результаты работы могут быть также использованы при выборе методики комплексирования данных.

¹Freeden W., Michel V. Multiscale Potential Theory (With Applications to Geoscience), Birkhäuser Verlag, Boston, 2004. 509 p.

Апробация работы.

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Семинар имени А.Ю. Ишлинского по прикладной механике и управлению под рук. проф. Александрова В.В., проф. Парусникова Н.А., проф. Болотина Ю.В. (МГУ, 2012, 2014).
2. Конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, 2014).
3. Симпозиум Международной ассоциации по геодезии (IAG) «Наземная, морская и аэрогравиметрия: измерения на неподвижных и подвижных основаниях» (С.-Петербург, 2013).
4. Международный коллоквиум имени А. фон Гумбольдта «Роль фундаментальных наук в современном обществе» (Москва, 2012).
5. Международный научно-технический семинар «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации» (Алушта, 2010, 2011).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора [1-5], из которых 3 – в журналах перечня ВАК. Список работ приведен в конце автореферата. Работа над диссертацией выполнялась при поддержке РФФИ (проекты 10-01-00703-а, 13-01-00604-а).

Личный вклад.

В совместных работах [1,3,4] Болотину Ю.В. принадлежит постановка задач и общее научное руководство, а все результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из списка сокращений, введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 98 наименований, включая работы автора. В диссертации приведено 16 рисунков, 3 таблицы. Общий объем диссертации – 108 страниц.

Содержание диссертации

Во введении формулируется цель диссертационной работы как разработка методики локального определения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии и глобальной модели гравитационного поля Земли с использованием метода многомасштабного представления на основе сферического вейвлет-разложения. Приводится структура работы.

Первая глава является вводной. В § 1.1 кратко рассмотрены история гравиметрии, история и современное состояние скалярной аэрогравиметрии. В § 1.2 изложены теоретические основы гравиметрии. Аномальным полем силы тяжести называется отклонение реального поля силы тяжести от нормального, вызванное неравномерностью распределения масс в Земле. Потенциал аномального поля (возмущающий потенциал) определяется как $T(x) = W(x) - U(x)$, где $x \in \mathbb{R}^3$ – точка в геоцентрической системе координат, $W(x)$ – потенциал поля силы тяжести Земли, $U(x)$ – потенциал нормального поля силы тяжести, т. е. поля силы тяжести уровенного эллипсоида вращения, близкого к поверхности Земли (референц-эллипсоид).

Вектор аномалии силы тяжести в свободном воздухе определяется как $\Delta\mathbf{g}(x) = \mathbf{g}(x) - \mathbf{g}_0(x)$, где $\mathbf{g}(x) = \text{grad } W(x)$ – вектор реальной силы тяжести, $\mathbf{g}_0(x) = \text{grad } U(x)$ – вектор нормальной силы тяжести. В скалярной аэрогравиметрии рассматривается только вертикальная составляющая вектора $\Delta\mathbf{g}$ (проекция на географическую вертикаль), которую далее будем обозначать через Δg :

$$\Delta g(\varphi, \lambda, h) = g(\varphi, \lambda, h) - g_0(\varphi, h), \quad (1)$$

где $g(\varphi, \lambda, h)$ – вертикальная составляющая вектора силы тяжести, взятая с обратным знаком; $g_0(\varphi, h)$ – абсолютное значение нормальной силы тяжести, φ, λ, h – географические координаты. Величина $g_0(\varphi, h)$ в прикладных задачах определяется с помощью формулы Гельмерта². В геофизике и геодезии для аномалии силы тяжести применяются внесистемные единицы измерения: 1 Гал = 10^{-2} м/с², 1 мГал = 10^{-5} м/с².

Основной задачей прикладной гравиметрии является определение характеристик аномального поля силы тяжести (возмущающий потенциал, аномалия силы тяжести на заданной высоте, уклонение отвесной линии, высота геоида и др.) по измерениям аномалии силы тяжести. Определение этих характеристик называется трансформациями поля. Формально большинство

²Торге В. Гравиметрия. М.: Мир. 1999. 429 с.

характеристик может быть найдено по известным формулам физической геодезии (Стокса, Венинг – Мейнеса, Хотина, Брунса и др.)³.

В § 1.3 приведены принципы проведения и обработки измерений в скалярной аэрогравиметрии, состав измерительной аппаратуры. Измерения проводятся с борта летательного аппарата, как правило, на постоянной высоте над референц-эллипсоидом. Траектория движения над исследуемым участком земной поверхности представляет собой набор параллельных отрезков (галсов) и разворотов между ними. Измерения аномалии силы тяжести проводятся вдоль галсов, на которых аномалию удобно представлять как функцию времени.

Авиационная гравиметрическая система, рассматриваемая в диссертации, включает в себя бортовые приемники сигналов спутниковой навигационной системы (СНС); гиростабилизированную платформу в кардановом подвесе, на которую вертикально установлен одноосный гравиметрический датчик. Также используется наземный приемник сигналов СНС (базовая станция) для обработки измерений СНС в фазово-дифференциальном режиме. Гравиметрический датчик измеряет проекцию удельной силы, действующей на его чувствительный элемент (ЧЭ) со стороны подвеса, на ось чувствительности датчика. Основным уравнением скалярной аэрогравиметрии является уравнение движения ЧЭ в проекции на географическую вертикаль:

$$\Delta g = -\ddot{h} - g_0 + g_E + f_3, \quad (2)$$

где \dot{h} – вертикальная составляющая скорости ЧЭ; g_0 – абсолютное значение нормальной силы тяжести; Δg – вертикальная составляющая вектора аномалии силы тяжести; f_3 – вертикальная составляющая удельной силы, действующей на ЧЭ со стороны подвеса гравиметра; g_E – поправка Этвёша для учета центробежного и кориолисова ускорений во время движения. Искомой величиной в (2) является аномалия Δg . Величина вертикальной проекции f_3 удельной силы измеряется гравиметром, величины g_E , g_0 , \dot{h} определяются по измерениям СНС.

Обработка авиационных измерений аэрогравиметрии включает следующие основные этапы:

- 1) определение аномалии силы тяжести на траектории полета из решения основного уравнения аэрогравиметрии (2);
- 2) вычисление определяющих характеристик аномального поля силы тяжести.

³Heiskanen W., Moritz H. Physical geodesy // San Francisco: Freeman, 1967. 364 p.

На этапе 1 сначала определяется оценка аномалии $\Delta g'$ по «сырым» измерениям $\ddot{h}', g'_0, g'_E, f'_3$ в виде

$$\Delta g' = -\ddot{h}' - g'_0 + g'_E + f'_3.$$

После чего к данным $\Delta g'$ применяется гравиметрический фильтр⁴, определяющий слаженную оценку аномалии $\Delta \tilde{g}'$. На этапе 2 чаще всего в качестве определяющей характеристики аномального поля выбирается карта аномалий силы тяжести в свободном воздухе на высоте полета. Построение карты аномалий ведется без привлечения какой-либо геофизической информации на участке съемки. Измерения аномалии при этом редуцируются на заданную на постоянной высоте сетку узлов карты. Карта характеризуется разрешением – половиной минимальной выявляемой длины волны аномалии. Точность съемок оценивают по расхождениям в точках пересечения галсов и сравнением с имеющимися наземными данными. К другим определяющим характеристикам поля относятся коэффициенты разложения аномалии или возмущающего потенциала в ряд по системам сферических вейвлетов, радиальных мультиполей, точечных масс, гармонических сплайнов или других систем функций на сфере.

В § 1.4 рассматривается одна из основных трансформаций поля силы тяжести в аэрогравиметрии – задача локального определения возмущающего потенциала T на участке земной поверхности. T является гармонической функцией во внешнем пространстве Земли в предположении об отсутствии притягивающих масс. Данная задача трансформации сводится к решению вспомогательной задачи определения T в локальной области на некоторой сфере (формально на всей сфере) из уравнения вида⁵:

$$\Delta g(x) = - \int_{\Omega_R} \frac{\partial \Pi(x, y)}{\partial |x|} T(y) d\omega(y), \quad x \in \mathcal{E}_h, \quad (3)$$

где Ω_R – так называемая сфера Бьерхаммера, лежащая внутри Земли сколь угодно близко к ее поверхности, $d\omega$ – элемент поверхности на сфере, $\Pi(x, y)$ – ядро Пуассона, \mathcal{E}_h – участок съемки на постоянной высоте над референц-эллипсоидом. Данный подход к определению T основан на теореме Рунге – Уолша⁶ о приближении гармонической функции другой, имеющей большую область гармоничности. Особенность рассматриваемой

⁴Bolotin Y.V., Yurist S.S. Suboptimal smoothing filter for the marine gravimeter GT-2M // Gyroscopy and Navigation. 2011. V. 2 (3). P. 152–155.

⁵Торге В. Гравиметрия. М.: Мир. 1999. 429 с.

⁶Freeden W., Michel V. Multiscale Potential Theory (With Applications to Geoscience), Birkhäuser Verlag, Boston, 2004. 509 p.

трансформации состоит в том, что (3) относится к классу обратных некорректно поставленных по Адамару задач (оператор трансформации не ограничен⁷).

Другая особенность связана с тем, что данные аэрогравиметрии об аномалии $\Delta g(x)$ локальны, тогда как для корректного приближенного решения (3) требуется нелокальная информация о поле силы тяжести. Вследствие чего данные аэрогравиметрии необходимо комбинировать с данными глобальных моделей поля. В завершение параграфа рассмотрены известные подходы к комбинированию локальных и глобальных данных, основанные на разложениях аномалии силы тяжести или возмущающего потенциала в ряд по шаровым функциям, сферическим вейвлетам, радиальным мультиполям, точечным массам, гармоническим сплайнам и др. Сделан вывод о предпочтительности применения в задаче комбинирования авиационных и глобальных данных сферического вейвлет-разложения, обладающего возможностью многомасштабного представления поля силы тяжести.

Во **второй главе** изложен метод многомасштабного представления на сфере, основанный на гармонических скейлинг-функциях и вейвлетах Абеля-Пуассона. Данная концепция метода разработана Техническим университетом Кайзерслаутерна (Германия)⁸. Скейлинг-функция Абеля-Пуассона уровня детализации $j \in \mathbb{N}_0$ определяется формулой:

$$\Phi_j(x, y) = \frac{1}{4\pi R} \frac{|x|^2 - R^2 b_j^2}{(|x|^2 + R^2 b_j^2 - 2b_j x^T y)^{3/2}}, \quad b_j = e^{-2^{-j}}, \quad (4)$$

где $x \in \mathbb{R}^3$, $|x| > R b_j^{1/2}$, $y \in \Omega_R$. Здесь Ω_R – сфера некоторого радиуса $R > 0$. Сферическим вейвлетом Абеля-Пуассона уровня детализации j называется функция

$$\Psi_j(x, y) = \Phi_{j+1}(x, y) - \Phi_j(x, y). \quad (5)$$

Скейлинг-функция $\Phi_j(x, y)$ и вейвлет $\Psi_j(x, y)$ являются гармоническими функциями в области определения x и зависят только от сферического расстояния от y до своего центра x при фиксированном $|x|$. $\Phi_j(x, y)$, $\Psi_j(x, y)$ локализованы на сфере (убывают при удалении y от x), при этом чем выше уровень детализации j , тем лучше пространственная и тем хуже частотная локализация (в разложении в ряд по сферическим гармоникам).

⁷Wahba G. Convergence rates of certain approximate solutions to Fredholm integral equations of the first kind. J. of Approx. Theory. 1973. №7. P. 167–185.

⁸Freed W., Michel V. Multiscale Potential Theory (With Applications to Geoscience), Birkhäuser Verlag, Boston, 2004. 509 p.

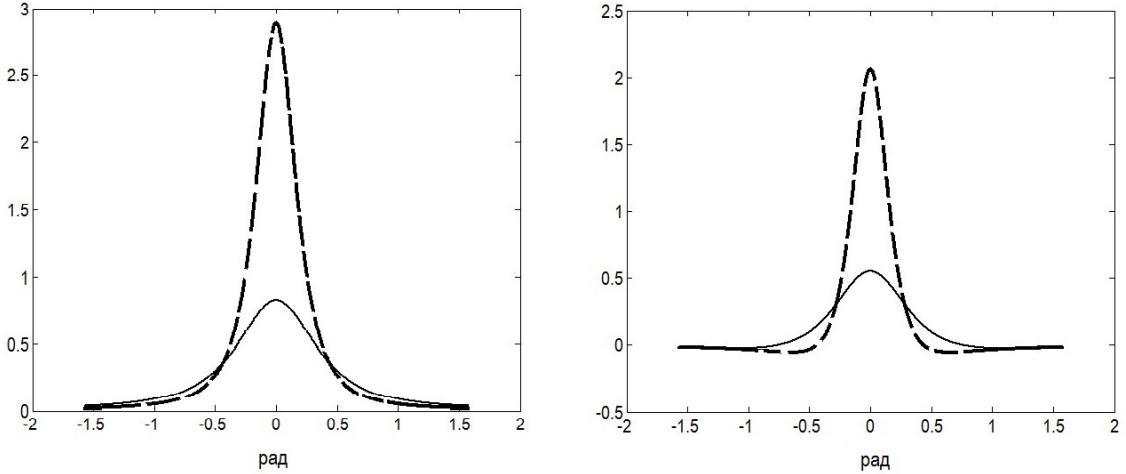


Рис. 1: Сечения скейлинг-функции (слева) для $j=1, j=2$ (пунктир) и вейвлета Абеля-Пуассона (справа) для $j=1, j=0$ (пунктире) в зависимости от величины угла [рад] между x и y при $|x| = |y|$, $R = 1$ м, [м^{-2}].

Многомасштабное представление произвольной гармонической функции $f(x)$ из пространства Соболева $H_s(\overline{\Omega_R^{ext}})$, где $\overline{\Omega_R^{ext}} = \Omega_R^{ext} \cup \Omega_R$, $s \geq 0$, состоит в *вейвлет-разложении* (вычислении скейлинг-коэффициентов (СК) и вейвлет-коэффициентов (ВК) на разных уровнях детализации) и *вейвлет-восстановлении* $f(x)$ на некотором (максимальном) уровне детализации J (вычислении сглаженной и детальных компонент функции на разных уровнях детализации). Скейлинг-коэффициент $a_J(y)$ функции $f(x)$ на уровне детализации J в точке $y \in \Omega_R$ определяется формулой свертки:

$$a_J(y) = (\Phi_J * f)(y) = \int_{\Omega_R} \Phi_J(y, u) f(u) d\omega(u), \quad u, y \in \Omega_R. \quad (6)$$

Вейвлет-коэффициент $c_j(y)$ в точке $y \in \Omega_R$ на уровне детализации j , $0 \leq j \leq J-1$, определяются как:

$$c_j(y) = (\Psi_j * f)(y). \quad (7)$$

Отметим, что в терминах теории фильтров СК и ВК интерпретируются как результаты низкочастотной и полосовой фильтрации $f(x)$ соответственно.

Формула *вейвлет-восстановления* $f_J(x)$ функции $f(x)$ на уровне детализации J по ВК на уровнях $j_0, \dots, J-1$ и по СК на уровне j_0 имеет вид:

$$f_J(x) = f_{j_0}(x) + \sum_{j=j_0}^{J-1} g_j(x), \quad (8)$$

$$f_{j_0}(x) = (\Phi_{j_0} * a_{j_0})(x), \quad g_j(x) = (\tilde{\Psi}_j * c_j)(x),$$

где $f_{j_0}(x)$ — сглаженная компонента $f(x)$, $g_j(x)$ — детальная компонента $f(x)$, $\tilde{\Psi}_j(x, y) = \Phi_{j+1}(x, y) + \Phi_j(x, y)$. При этом $f_J(x)$ может быть записана как

$$f_J(x) = (\Phi_J * a_J)(x). \quad (9)$$

Известно, что $f_J(x)$ вместе с ее частными производными порядка, меньшего $s-1$, равномерно сходятся в $\overline{\Omega_R^{ext}}$ при $J \rightarrow \infty$ к $f(x)$ и ее соответствующим частным производным.

В § 2.3 метод многомасштабного представления на сфере адаптирован для обработки локальных данных аэрогравиметрии. Проиллюстрирована возможность регуляризации некорректной обратной задачи трансформации при использовании данного метода. Приведены квадратурные формулы для интегральных сверток. Выписаны формулы некоторых трансформаций с использованием многомасштабного представления аномалии силы тяжести. Получена оценка погрешности вычисления СК аномалии при интегрировании в ограниченной зоне, получена оценка степени «сглаженности» аномалии в результате вейвлет-восстановления. Показано отсутствие прямой суммы детализирующих подпространств многомасштабного представления в случае вейвлетов Абеля-Пуассона, а также в случае произвольных вейвлетов с неограниченным числом гармоник в разложении по сферическим функциям.

В третьей главе представлена разработанная методика локального определения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии и глобальной модели гравитационного поля Земли с использованием метода сферического вейвлет-разложения, изложенного в главе 2. Методика состоит из трех этапов: 1) оценивание СК аномалии силы тяжести на максимальном уровне детализации по данным аэрогравиметрии; 2) вычисление ВК аномалии силы тяжести на разных уровнях детализации по СК, оцененным на первом этапе по данным аэрогравиметрии; вычисление ВК аномалии силы тяжести по данным глобальной модели; 3) уточнение ВК данных аэрогравиметрии по ВК глобальной модели на общих уровнях детализации. Для решения задачи этапа 1 используется рекуррентный метод наименьших квадратов (МНК) с шагом рекурсии по номеру галса съемки, позволяющий учесть специфику данных аэрогравиметрии, в частности некоррелированность ошибок измерений на разных галсах. В силу плохой обусловленности задачи первого этапа применена информационная форма МНК с регуляризацией информационной матрицы СК на последнем шаге рекурсии. Задача этапа 3 поставлена как задача оценивания ВК аномалии силы тяжести и решена с помощью алгоритма МНК в ковариационной форме.

В § 3.1 вводится модель сглаженных авиационных измерений на галсе полета. Каждый галс Γ_k будем представлять в виде непрерывной

параметризованной временем кривой в \mathbb{R}^3 :

$$\Gamma_k = \{x_k(t) = (\varphi_k(t), \lambda_k(t), h_k(t)) | t \in I_k \subset \mathbb{R}\}, \quad k = 1, \dots, K,$$

где $\varphi_k(t), \lambda_k(t), h_k(t)$ – географические координаты летательного аппарата на k -ом галсе, I_k – интервал времени движения по k -му галсу, K – общее число галсов. Сглаживание авиационных измерений на галсе проводится с помощью гравиметрического фильтра⁹. Фильтр характеризуется импульсной переходной функцией $\mathcal{G}(t)$ и частотой среза ω_{cut} . Разрешающая способность в пространстве фильтра равна половине выявляемой длины волны L аномалии, амплитуда которой в результате фильтрации подавляется вдвое. Величина L определяется выражением $L = 2\pi V / \omega_{cut}$. Здесь V – средняя скорость движения летательного аппарата вдоль галса.

Модель сглаженных авиационных измерений на галсе запишем в виде:

$$\Delta \tilde{g}'_k(t_{ik}) = \sum_{m=i-M}^{i+M} \mathcal{G}(t_{ik} - t_{mk}) \Delta g(x_k(t_{mk})) + \delta g_k(t_{ik}), \quad i = 1, \dots, M_k, \quad (10)$$

где $\Delta g(x_k(t_{mk}))$ – аномалия силы тяжести в свободном воздухе в точке измерения $x_k(t_{mk}) \in \mathbb{R}^3$, заданной в сферической системе координат; $t_{mk}, t_{ik} \in I_k$ – дискретные моменты времени записи данных, относящиеся к k -ому галсу; $\Delta \tilde{g}'_k(t_{ik})$ – сглаженное измерение аномалии силы тяжести на k -ом галсе, $\delta g_k(t_{ik})$ – ошибка измерения на галсе, M_k – число измерений на k -ом галсе, $2M+1$ – длина носителя гравиметрического фильтра. Координаты точек измерений предполагаются известными. Будем считать, что ошибка измерения на k -ом галсе как функция полетного времени является случайным процессом с нулевым математическим ожиданием и известной корреляционной функцией $C_k(t_{ik} - t_{mk})$, определяемой погрешностями «сырых» измерений и свойствами гравиметрического фильтра. Ошибки измерения на разных галсах не коррелированы:

$$E[\delta g_k(t_{ik}) \delta g_l(t_{ml})] = 0, \quad k \neq l. \quad (11)$$

Оценивание скейлинг-коэффициентов в информационной форме

Об аномалии $\Delta g(x)$ предполагается, что функция $|x| \Delta g(x)$ является гармонической в Ω_R^{ext} и принадлежит пространству Соболева $H_s(\Omega_R^{ext})$, $s > 1$. Радиус R сферы Ω_R равен минимальному значению длины $|x_k(\cdot)|$ по всем

⁹Bolotin Y.V., Yurist S.S. Suboptimal smoothing filter for the marine gravimeter GT-2M // Gyroscopy and Navigation. 2011. V. 2 (3). P. 152-155.

точкам измерений на галсах. Дополнительно предположим, что $\Delta g(x)$ имеет ограниченный спектр (в разложении по сферическим гармоникам). Пусть J – максимальный уровень детализации, отвечающий максимальной частоте гармоники. Тогда $\Delta g(x)$ может быть аппроксимирована сверткой скейлинг-функции Абеля-Пуассона с СК на уровне детализации J :

$$\Delta g(x_k(t_{mk})) \doteq (\Phi_J * a_J)(x_k(t_{mk})), \quad (12)$$

где свертка определена в (6), $a_J(y)$ – СК аномалии силы тяжести на уровне детализации J в точке $y \in \Omega_R$. В силу нормировки скейлинг-функции СК имеют размерность аномалии силы тяжести (мГал). Уравнение (10) в рамках принятых выше предположений может быть переписано в виде

$$\Delta \tilde{g}'_k(t_{ik}) = \sum_{m=i-M}^{i+M} \mathcal{G}(t_{ik} - t_{mk})(\Phi_J * a_J)(x_k(t_{mk})) + \delta g_k(t_{ik}), \quad (13)$$

где $i = 1, \dots, M_k$. Введем квадратурную формулу для свертки (12):

$$(\Phi_J * a_J)(x_k(t_{mk})) \doteq \sum_{n,s} \omega_{ns} \Phi_J(x_k(t_{mk}), y_{ns}) a_J(y_{ns}), \quad (14)$$

где y_{ns} – узлы эквиангулярной сетки на сфере Ω_R :

$$y_{ns} = R (\cos \lambda_s \cos \theta_n, \sin \lambda_s \cos \theta_n, \sin \theta_n)^T, \quad (15)$$

θ_n – сферическая ко-широта, λ_s – долгота. Значения шагов по долготе $\Delta \lambda$ и по ко-широте $\Delta \theta$ выберем эквивалентными минимуму из двух величин: расстояния между галсами и половины разрешающей способности в пространстве $L/2$ гравиметрического фильтра. Веса интегрирования ω_{ns} зададим формулой

$$\omega_{ns} = R^2 \Delta \lambda \Delta \theta \sin \theta_n, \quad (16)$$

получаемой в результате дискретизации интеграла в (14) по долготе по формуле трапеций, по широте – по формуле Гаусса-Чебышева. В силу локализации скейлинг-функции Φ_J на сфере суммирование в (14) достаточно проводить по узлам y_{ns} из некоторой окрестности точки $x_k(t_{mk})R/|x_k(t_{mk})|$ на сфере. В результате множество узлов y_{ns} , определяемых квадратурной формулой (14) по всем галсам съемки (обозначим его через Y , количество узлов в нем – через $N = |Y|$), состоит из узлов внутри участка съемки и узлов вне его на расстоянии, не большем радиуса окрестности суммирования. Представим Y в виде объединения его подмножеств Y_k , $k = 1, \dots, K$:

$$Y = \bigcup_{k=1}^K Y_k, \quad Y_k \subset Y, \quad N_k = |Y_k|, \quad (17)$$

где каждый Y_k состоит из узлов Y , заметаемых окрестностями суммирования точек измерений $x_k(t_{mk})$ k -го галса, N_k – количество узлов в Y_k . В силу построения подмножества Y_k имеют по крайней мере попарные пересечения.

Пренебрегая погрешностью квадратурной формулы (14), запишем модель авиационных измерений на галсе (13) в матричной форме:

$$\Delta\tilde{g}'_k = H_k a_k + \delta g_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (18)$$

где $\Delta\tilde{g}'_k = (\Delta\tilde{g}'_k(t_{1k}), \dots, \Delta\tilde{g}'_k(t_{M_k k}))^T$, $\delta g_k = (\delta g_k(t_{1k}), \dots, \delta g_k(t_{M_k k}))^T$. Через a_k обозначен вектор размерности $N_k \times 1$ неизвестных СК $a_J(\cdot)$ в узлах множества Y_k , через H_k – матрица размера $M_k \times N_k$, элементами которой являются суммы произведений значений весовой функции гравиметрического фильтра в (13), весов квадратурной формулы и значений скейлинг-функции в узлах Y_k . Введем матрицу ковариаций случайного вектора ошибок измерений на k -ом галсе $R_k = E[\delta g_k \delta g_k^T]$. Элементы матрицы R_k определяются как

$$E[\delta g_k(t_{ik}) \delta g_k(t_{mk})] = C(t_{ik} - t_{mk}), \quad i, m = 1, \dots, M_k.$$

Ошибки измерений на разных галсах не коррелированы в силу (11): $E[\delta g_k \delta g_l^T] = 0$, $k \neq l$.

Поставим задачу оценивания вектора СК на максимальном уровне детализации J в виде задачи МНК:

$$\sum_{k=1}^K (\Delta\tilde{g}'_k - H_k a_k)^T R_k^{-1} (\Delta\tilde{g}'_k - H_k a_k) \rightarrow \min, \quad (19)$$

где минимизация проводится по $a_k \in \mathbb{R}^{N_k}$, $k = 1, \dots, K$. При этом векторы a_k имеют хотя бы попарно общие элементы. В силу построения множества узлов Y задача (19) часто оказывается неполного ранга.

Задача (19) может быть решена с помощью алгоритма рекуррентного МНК в информационной форме¹⁰. В диссертационной работе алгоритм адаптирован для учета специфических особенностей проведения аэро-гравиметрических съемок так, чтобы вектор неизвестных расширялся автоматически при добавлении очередного галса. Формулы адаптированного алгоритма имеют вид:

$$Q_{(k)} = \begin{pmatrix} Q_{(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{I}_k^T H_k^T R_k^{-1} H_k \mathcal{I}_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (20)$$

$$b_{(k)} = \begin{pmatrix} b_{(k-1)} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{I}_k^T H_k^T R_k^{-1} \Delta\tilde{g}'_k, \quad (21)$$

¹⁰Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. М.: Физматлит, 2005. 376 с.

с начальными условиями $Q_{(0)} = 0$, $b_{(0)} = 0$, где $Q_{(k)}$ — информационная матрица вектора СК $a_{(k)}$ размера $N_{(k)} \times N_{(k)}$, $b_{(k)}$ — информационная оценка вектора СК $a_{(k)}$ размера $N_{(k)} \times 1$, \mathcal{I}_k — проекционная матрица размера $N_k \times N_{(k)}$, определенная равенством $a_k = \mathcal{I}_k a_{(k)}$, где вектор $a_k \in \mathbb{R}^{N_k}$ состоит из СК, коррелированных с k -ым галсом, вектор $a_{(k)} \in \mathbb{R}^{N_{(k)}}$ состоит из СК, определенных галсами $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$. Полученные на последнем K -ом шаге рекурсии информационная матрица вектора СК $Q_{(K)}$ и информационная оценка вектора СК $b_{(K)}$ имеют размеры $N \times N$ и $N \times 1$ соответственно, где $N = |Y|$. Матрица $Q_{(K)}$ и вектор $b_{(K)}$ связаны соотношением:

$$b_{(K)} = Q_{(K)}a. \quad (22)$$

Здесь $a \in \mathbb{R}^N$ — вектор, состоящий из всех СК на данном участке съемки.

Определение оценок скейлинг-коэффициентов

Из уравнения (22) определяется оценка \tilde{a} вектора СК. По информационной матрице $Q_{(K)}$ вектора СК вычислением ее приближенной обратной определяется ковариационная матрица ошибок оценки СК $P_{\delta a_J}$. Матрица $Q_{(K)}$ часто является плохо обусловленной, в связи с чем требуется ее регуляризация. Предлагаемая методика регуляризации информационной матрицы использует данные глобальной модели гравитационного поля Земли и состоит в следующем. Проводится редукция матрицы $Q_{(K)}$, в ходе которой обнуляются ее информационно мало значимые строки и столбцы. А именно, в случае, если все элементы n -ой строки и n -ого столбца по модулю меньше $\varepsilon^2 \sigma_{glob}^{-2}$ (где σ_{glob} — информация о среднеквадратической погрешности данных глобальной модели, ε — настроочный безразмерный параметр), то n -ая строка и n -ый столбец обнуляются. К полученной в результате такой процедуры матрице затем добавляется регуляризующий член $\mu_0 I$, и обратная к регуляризованной матрице принимается за оценку ковариационной матрицы ошибок оценки СК $\tilde{P}_{\delta a_J}$. В качестве параметра регуляризации μ_0 выбирается величина

$$\mu_0 = \mu^2 d_{glob}^{-2}, \quad (23)$$

где d_{glob}^2 — вариация СК аномалии силы тяжести в регионе съемки, рассчитываемая по глобальной модели; μ — безразмерный настроочный параметр регуляризации.

Таким образом, с точностью до перестановки строк и столбцов оценка ковариационной матрицы $\tilde{P}_{\delta a_J}$ имеет вид:

$$\tilde{P}_{\delta a_J} = \begin{pmatrix} (\bar{Q}_{(K)} + \mu^2 d_{glob}^{-2} I_1)^{-1} & 0 \\ 0 & \mu^{-2} d_{glob}^2 I_2 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где $\bar{Q}_{(K)}$ — подматрица $Q_{(K)}$, строки и столбцы которой содержат хотя бы один элемент по модулю больший $\varepsilon^2 \sigma_{glob}^{-2}$; I_1, I_2 — единичные матрицы соответствующих размерностей. Оценка вектора СК определяется выражением (с точностью до перестановки элементов в векторе):

$$\tilde{a} = \tilde{P}_{\delta a_J} \begin{pmatrix} \bar{b}_{(K)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{Q}_{(K)} + \mu^2 d_{glob}^{-2} I_1)^{-1} \bar{b}_{(K)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где $\bar{b}_{(K)}$ — часть вектора $b_{(K)}$, соответствующая подматрице $\bar{Q}_{(K)}$. Поясним физический смысл редукции информационной матрицы $\bar{Q}_{(K)}$: можно показать, что в результате редукции обнуляются СК в дальних узлах (в узлах, отстоящих от участка съемки).

Вычисление вейвлет-коэффициентов

Далее в § 3.1 по найденным оценкам вектора СК \tilde{a} и матрицы ковариаций их ошибок $\tilde{P}_{\delta a_J}$ вычисляются оценки векторов ВК \tilde{c}_j и матриц ковариаций их ошибок $\tilde{P}_{\delta c_j}$ на уровнях детализации $j = j_0, \dots, J-1$ с помощью формулы:

$$\tilde{c}_j(y_{pl}^j) = \sum_{n,s} \omega_{ns} \Psi_j(y_{pl}^j, y_{ns}) \tilde{a}_J(y_{ns}), \quad (26)$$

где $\tilde{a}_J(y_{ns})$ — элемент вектора \tilde{a} (оценка СК в узле y_{ns}), $\Psi_j(y_{pl}^j, y_{ns})$ — вейвлет Абеля-Пуассона. Узлы y_{ns} и веса ω_{ns} определены в (15)–(16). Множество узлов y_{pl}^j ВК на уровне j определено на эквиангурярной сетке на сфере Ω_R в результате прореживания в 2^{J-1-j} раз по сферической ко-широте и долготе узлов множества Y (17), а также включения дополнительных узлов из-за увеличения радиуса пространственной локализации вейвлета при уменьшении j . Обозначим число узлов сетки на уровне j через L_j . Элементы матрицы ковариаций ошибок ВК $\tilde{P}_{\delta c_j}$ размера $L_j \times L_j$ вычисляются как

$$\begin{aligned} E[\delta c_j(y_{pl}^j) \delta c_j(y_{p'l'}^j)] &= \\ &= \sum_{n,s} \sum_{m,q} \omega_{ns} \omega_{mq} \Psi_j(y_{pl}^j, y_{ns}) \Psi_j(y_{p'l'}^j, y_{mq}) E[\delta a_J(y_{ns}) \delta a_J(y_{mq})], \end{aligned} \quad (27)$$

где $\delta c_j(y_{pl}^j)$, $\delta c_j(y_{p'l'}^j)$ — ошибки оценок ВК, y_{pl}^j , $y_{p'l'}^j$ — узлы сетки на уровне j , $\delta a_J(y_{ns})$, $\delta a_J(y_{mq})$ — ошибки оценок СК, $E[\delta a_J(y_{ns}) \delta a_J(y_{mq})]$ — элемент матрицы $\tilde{P}_{\delta a_J}$.

Комбинирование вейвлет-коэффициентов данных аэрогравиметрии и глобальной модели на основе МНК

В § 3.2 поставлена и решена задача уточнения оценок ВК $\tilde{c}_j \in \mathbb{R}^{L_j}$ и матриц ковариаций их ошибок $\tilde{P}_{\delta c_j}$ (27), полученных из данных аэрогравиметрии, по данным глобальной модели гравитационного поля Земли. Предполагается, что данные глобальной модели представлены в виде набора ВК $c_j^{glob} \in \mathbb{R}^{L_j}$ (вычисленных на том же множестве узлов, что и \tilde{c}_j) и матриц ковариаций их ошибок P_j^{glob} на уровнях детализации $j = j_0, \dots, J_{glob}-1$. Ввиду более высокого пространственного разрешения данных аэрогравиметрии справедливо соотношение $J_{glob} \leq J$. Введено предположение о некоррелированности ошибок ВК как данных аэрогравиметрии δc_j^{air} , так и глобальных данных δc_j^{glob} на разных уровнях детализации:

$$E[\delta c_j^{air}(\delta c_{j'}^{air})^T] = 0, \quad E[\delta c_j^{glob}(\delta c_{j'}^{glob})^T] = 0, \text{ при всех } j \neq j'. \quad (28)$$

Задача оптимального оценивания ВК на общих уровнях детализации $j = j_0, \dots, J_{glob}-1$ поставлена в виде задачи МНК:

$$(c_j - \tilde{c}_j)^T \tilde{P}_{\delta c_j}^{-1} (c_j - \tilde{c}_j) + (c_j - c_j^{glob})^T (P_{\delta c_j}^{glob})^{-1} (c_j - c_j^{glob}) \rightarrow \min_{c_j \in \mathbb{R}^{L_j}}. \quad (29)$$

Решение (29) возможно в ковариационной форме по алгоритму МНК:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_j^+ &= (I - S_j)\tilde{c}_j + S_j c_j^{glob}, & \tilde{P}_{\delta c_j}^+ &= (I - S_j)\tilde{P}_{\delta c_j}, \\ S_j &= \tilde{P}_{\delta c_j} [\tilde{P}_{\delta c_j} + (P_{\delta c_j}^{glob})]^{-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

где оценка \tilde{c}_j^+ есть результат уточнения ВК данных аэрогравиметрии по ВК глобальной модели, $\tilde{P}_{\delta c_j}^+$ — матрица ковариаций ошибок оценки.

Комбинирование вейвлет-коэффициентов данных аэрогравиметрии и глобальной модели в постановке задачи гарантирующего оценивания

Согласно теории МНК, комбинирование оценки ВК, полученной по данным аэрогравиметрии, с ВК глобальной модели улучшает оценку. Но на практике это не всегда так. В § 3.3 рассмотрена задача комбинирования ВК данных аэрогравиметрии и глобальной модели в постановке метода гарантирующего (минимаксного) оценивания¹¹. Предполагается, что статистические характеристики ошибок ВК неизвестны, но заданы множества, описывающие их неопределенность. Рассмотрена задача поиска линейного оценивателя, оптимального по критерию минимума дисперсии ошибки оценки, для случая «наихудшего» из допустимых распределений ошибок ВК.

¹¹Лидов М.Л., Бахшиян Б.Ц., Матасов А.И. Об одном направлении в проблеме гарантирующего оценивания (обзор) // Космические исследования, 1991. Т. 29. №5. С. 659-684.

Получены соотношения на характеристики ошибок в данных, при которых комбинирование ВК нецелесообразно.

Введем векторы ВК данных аэрогравиметрии c^{air} и данных глобальной модели c^{glob} уровня детализации j , опустив индекс j , размерности $L_j \times 1$, которые представим в виде:

$$c^{air} = c + \Delta c^{air} + \delta c^{air}, \quad (31)$$

$$c^{glob} = c + \Delta c^{glob}, \quad (32)$$

где $c \in \mathbb{R}^{L_j}$ — неизвестный вектор (истинных) ВК на уровне детализации j , предполагаемый детерминированным; $\delta c^{air} \in \mathbb{R}^{L_j}$ — случайный вектор ошибок ВК с нулевым математическим ожиданием и неизвестной неотрицательно определенной ковариационной матрицей P_{air} такой, что дисперсии ошибок авиационных ВК ограничены, а их ковариации неизвестны:

$$D[\delta c_i^{air}] \leq (\rho_i^{air})^2, \quad |E[\delta c_i^{air} \delta c_k^{air}]| \leq \rho_i^{air} \rho_k^{air}, \quad (33)$$

где $\rho_i^{air} > 0$ — заданные числа, δc_i^{air} — элементы вектора δc^{air} , $i = 1, \dots, L_j$. Далее, Δc^{air} , Δc^{glob} в (31)–(32) — детерминированные векторы методических погрешностей ВК, элементы которых удовлетворяют ограничениям:

$$|\Delta c_i^{air}| \leq \varepsilon_i^{air}, \quad |\Delta c_i^{glob}| \leq \varepsilon_i^{glob}, \quad i = 1, \dots, L_j, \quad (34)$$

где ε_i^{air} , $\varepsilon_i^{glob} > 0$ — заданные числа.

Введем вектор $\xi = (\delta c^{airT} + \Delta c^{airT} \Delta c^{globT})^T$. Через \mathcal{R} обозначим множество всех векторов $\xi \in \mathbb{R}^{2L_j}$, характеристики компонент которых удовлетворяют (33)–(34). Будем искать оценку вектора ВК $c \in \mathbb{R}^{L_j}$ с помощью линейного оценивателя $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{2L_j} \rightarrow \mathbb{R}^{L_j}$ в виде $\tilde{c} = \mathcal{F}(c^{airT} c^{globT})^T$. Введем гарантированное значение для второго момента ошибки оценки

$$d_\xi(\mathcal{F}) = \sup_{c \in \mathbb{R}^{N_j}} E[\|c - \tilde{c}\|^2]. \quad (35)$$

Запишем условие оптимальности оценивателя \mathcal{F} в виде следующей вариационной проблемы

$$\mathcal{F}^* = \arg \min_{\mathcal{F}} \max_{\xi \in \mathcal{R}} d_\xi(\mathcal{F}). \quad (36)$$

Результаты, полученные в параграфе, сформулированы в виде утверждения.

Утверждение. *Оптимальный оцениватель в минимаксной задаче (36) имеет вид $\mathcal{F}^* = (F^* \ I - F^*)$, где F^* — диагональная матрица размера $L_j \times L_j$ с элементами f_i^* на диагонали, определяемыми выражениями:*

$$1) \quad f_i^* = \frac{(\varepsilon_i^{glob})^2 - \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob}}{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air} - \varepsilon_i^{glob})^2}, \quad (37)$$

если для каждого $i = 1, \dots, L_j$

$$\varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob} < \min\{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, (\varepsilon_i^{glob})^2\}; \quad (38)$$

оптимальное значение d^* функционала $d_\xi(\mathcal{F})$ имеет вид:

$$d^* = \sum_{i=1}^{L_j} \frac{(\rho_i^{air})^2 (\varepsilon_i^{glob})^2}{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air} - \varepsilon_i^{glob})^2}; \quad (39)$$

$$2) \quad f_i^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sign}\left((\varepsilon_i^{glob})^2 - (\rho_i^{air})^2 - (\varepsilon_i^{air})^2\right), \quad (40)$$

если для каждого $i = 1, \dots, L_j$

$$\varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob} \geq \min\{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, (\varepsilon_i^{glob})^2\}; \quad (41)$$

оптимальное значение d^* функционала $d_\xi(\mathcal{F})$ имеет вид:

$$d^* = \sum_{i=1}^{L_j} \min\{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, (\varepsilon_i^{glob})^2\}; \quad (42)$$

3) f_i^* принимает значение (37) для $i \in I_1$ и (40) для $i \in I_2$, если для $i \in I_1$ выполнены условия (38), для $i \in I_2$ – условия (41), где множества индексов I_1, I_2 не пусты, не пересекаются, $I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, L_j\}$; оптимальное значение d^* функционала $d_\xi(\mathcal{F})$ имеет вид:

$$\begin{aligned} d^* = & \sum_{i \in I_1} \frac{(\rho_i^{air})^2 (\varepsilon_i^{glob})^2}{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air} - \varepsilon_i^{glob})^2} + \\ & + \sum_{i \in I_2} \min\{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, (\varepsilon_i^{glob})^2\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Оптимальная оценка \tilde{c} вектора ВК определяется равенством $\tilde{c} = F^* c^{air} + (I - F^*) c^{glob}$. В случае оценивателя (40) элементы \tilde{c}_i вектора \tilde{c} для каждого $i = 1, \dots, L_j$ определяются выражением:

$$\tilde{c}_i = \begin{cases} c_i^{air}, & \text{если } (\varepsilon_i^{glob})^2 > (\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, \\ c_i^{glob}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отсюда имеет место

Следствие. Оптимальная оценка \tilde{c} вектора ВК имеет вид $\tilde{c} = c^{air}$ в случае, когда характеристики ошибок ВК авиационных и глобальных данных удовлетворяют условиям:

$$\varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob} > (\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, \quad i = 1, \dots, L_j. \quad (44)$$

Другими словами, уточнение авиационных ВК по данными глобальной модели нецелесообразно при выполнении (44). На практике это возможно лишь в редких случаях, когда ошибки ВК глобальной модели чрезвычайно высоки.

Четвертая глава посвящена проверке разработанной методики локального определения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии и глобальной модели поля силы тяжести с использованием метода многомасштабного представления на сфере. В § 4.1 проведена обработка модельных данных, показавшая эффективность разработанной методики. В § 4.2 приведены результаты обработки данных реальных аэрогравиметрических измерений в районе Новой Земли¹² и данных глобальной модели EGM2008¹³. Авиасъемка выполнена с использованием аэрогравиметрической системы GT-1A¹⁴. Длина волны гравиметрического фильтра в (10) $L = 10$ км (фильтр близок к сглаживателю Баттерворт 3-го порядка). Частота выходных данных 1 Гц. Ошибки измерений примерно соответствуют модели белого шума на частоте 1 Гц с СКО 50 мГал, пропущенного через гравиметрический фильтр. Географическая широта региона съемки: 74° – 76° . Регион съемки был покрыт сетью параллельных галсов. Для проверки алгоритмов выбран 31 галс (рис. 2). Расстояние между галсами 4 км. Высота полета 3500 – 4700 м, средняя высота 3900 м. Скорость самолета 100 м/с. Максимальное и минимальное значения данных об аномалии в свободном воздухе равны 82.6 мГал и -15.0 мГал соответственно.

По авиационным данным с помощью алгоритма (20)–(25) (первый этап разработанной методики) проведено оценивание вектора СК a_J на уровне $J = 10$, соответствующем минимуму из $L/2$ и расстояния между галсами (4 км). Узлы эквиангулярной сетки (15) определены на сфере Ω_R радиуса $R = 6360.8$ км. Шаг сетки по сферической ко-широте $\Delta\theta$ взят равным 0.045° , что эквивалентно половине минимальной длины волны $L/2$ аномалии, определяемой на галсе. Шаг по долготе $\Delta\lambda$ равен 0.13° и эквивалентен расстоянию между галсами. Множество узлов Y (17), определенное таким образом для данного участка съемки, изображено на рис. 3. Величина порога для редукции информационной матрицы $Q_{(K)}$ на последнем шаге рекурсии $K = 31$ выбрана в соответствии с информацией о среднеквадратической погрешности σ_{glob} данных глобальной модели EGM2008 (σ_{glob} составляет порядка 30 мГал в регионе съемки в гармоническом разложении аномалии

¹²Полетные данные предоставлены Институтом физики Земли имени О.Ю. Шмидта РАН.

¹³Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008) // J. Geophys. Res. 2012. V. 117 (B04406). P. 1-38.

¹⁴Berzhitsky V.N., Bolotin Y. V., Golovan A.A., Parusnikov N.A., Yurist S.S. et al. GT-1A inertial gravimeter system. Results of flight tests // Moscow State University. 2002. 32 p.

до степени 1800).

Настроочный безразмерный параметр ε в (24) принят равным 1, откуда величина порога $\varepsilon^2 \sigma_{glob}^{-2}$ равна 0.001 мГал⁻². Значение вариации СК аномалии силы тяжести в регионе съемки d_{glob}^2 , рассчитанное по глобальной модели, равно 140 мГал². Безразмерный параметр регуляризации μ в (24) взят равным 0.1. Значение μ настраивалось так, чтобы уменьшить ошибку восстановления аномалии по оцениваемым СК на галсах и чтобы в то же время уменьшить вариацию оцениваемых СК в регионе съемки. Отметим, что регуляризация в форме (24) сохраняет физический смысл ковариационной матрицы $\tilde{P}_{\delta a_j}$ ошибок оценки СК (плохо оцениваемые и обнуленные СК имеют большие дисперсии), что важно для корректного комбинирования данных. На рис. 3 изображены галсы, множество узлов, в которых оценены СК и множество узлов, в которых СК обнулены в ходе редукции информационной матрицы. Как и ожидалось, обнулены лишь СК в дальних узлах.

По найденным СК \tilde{a}_j проведено восстановление аномалии силы тяжести на галсах по формуле (9). Среднеквадратическое отклонение ошибки восстановления на каждом галсе изменяется от 0.03 мГал (1-ый галс) до 0.16 мГал (21-ый галс). На рис. 4 приведен пример восстановления аномалии на одном галсе. В результатах практически отсутствует эффект Гиббса на краях галсов. Далее, по найденным СК \tilde{a}_j авиа-данных и матрице ковариаций их ошибок $\tilde{P}_{\delta a_j}$ были вычислены ВК \tilde{c}_j аномалии силы тяжести авиа-данных и матрицы ковариаций их ошибок $\tilde{P}_{\delta c_j}$ на уровнях $j=7-9$ по формулам (26)-(27) (второй этап разработанной методики).

Вычисление вейвлет-коэффициентов по глобальной модели EGM2008

Для уточнения данных аэрогравиметрии использовалась глобальная модель EGM2008. По данным модели были рассчитаны ВК на уровнях $j=7-9$ в тех же узлах, как и ВК авиа-данных. ВК вычислены по формуле

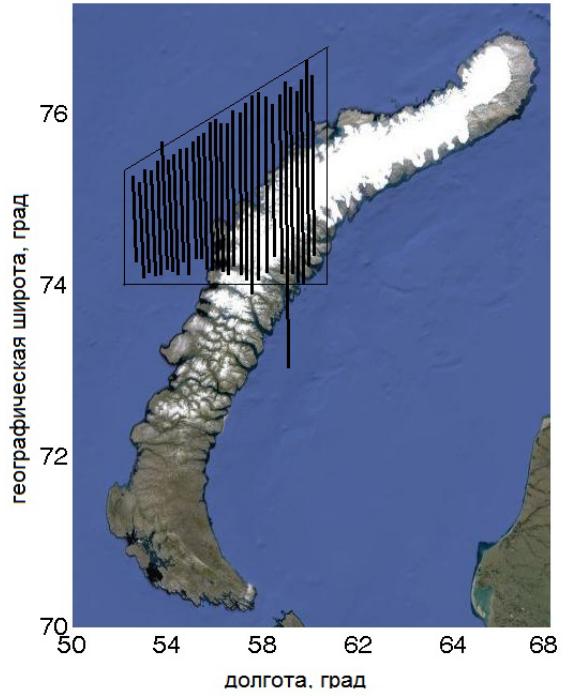


Рис. 2: Схема галсов аэрогравиметрической съемки.

На рис. 3 изображены галсы, множество узлов, в которых оценены СК и множество узлов, в которых СК обнулены в ходе редукции информационной матрицы. Как и ожидалось, обнулены лишь СК в дальних узлах.

На рис. 3 изображены галсы, множество узлов, в которых оценены СК и множество узлов, в которых СК обнулены в ходе редукции информационной матрицы. Как и ожидалось, обнулены лишь СК в дальних узлах.

На рис. 3 изображены галсы, множество узлов, в которых оценены СК и множество узлов, в которых СК обнулены в ходе редукции информационной матрицы. Как и ожидалось, обнулены лишь СК в дальних узлах.

На рис. 3 изображены галсы, множество узлов, в которых оценены СК и множество узлов, в которых СК обнулены в ходе редукции информационной матрицы. Как и ожидалось, обнулены лишь СК в дальних узлах.

На рис. 3 изображены галсы, множество узлов, в которых оценены СК и множество узлов, в которых СК обнулены в ходе редукции информационной матрицы. Как и ожидалось, обнулены лишь СК в дальних узлах.

На рис. 3 изображены галсы, множество узлов, в которых оценены СК и множество узлов, в которых СК обнулены в ходе редукции информационной матрицы. Как и ожидалось, обнулены лишь СК в дальних узлах.

На рис. 3 изображены галсы, множество узлов, в которых оценены СК и множество узлов, в которых СК обнулены в ходе редукции информационной матрицы. Как и ожидалось, обнулены лишь СК в дальних узлах.

На рис. 3 изображены галсы, множество узлов, в которых оценены СК и множество узлов, в которых СК обнулены в ходе редукции информационной матрицы. Как и ожидалось, обнулены лишь СК в дальних узлах.

На рис. 3 изображены галсы, множество узлов, в которых оценены СК и множество узлов, в которых СК обнулены в ходе редукции информационной матрицы. Как и ожидалось, обнулены лишь СК в дальних узлах.

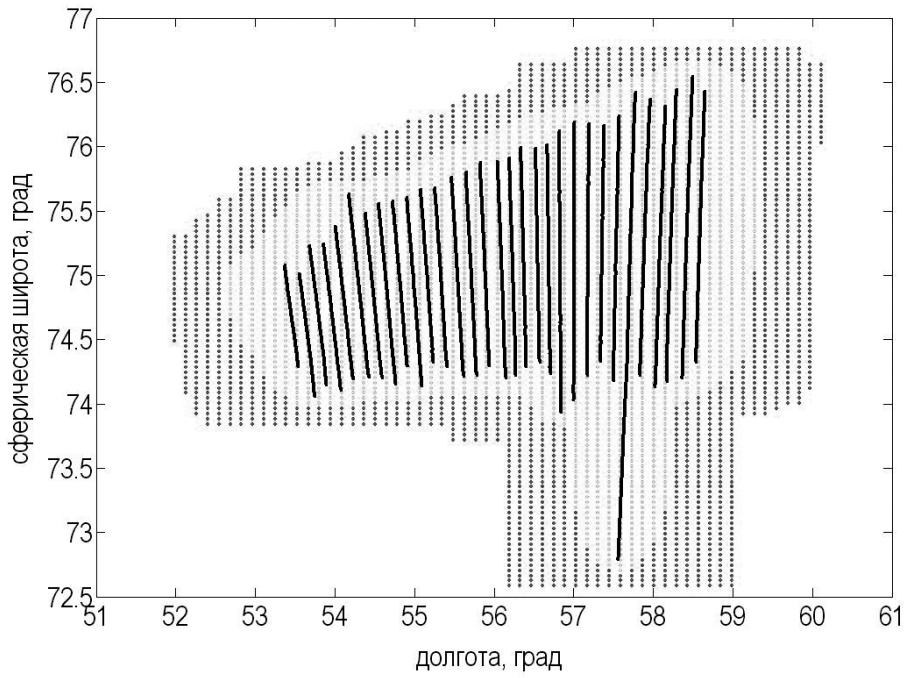


Рис. 3: Схема галсов; множество узлов, в которых оценены СК аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии (светло-серая область); множество узлов, в которых обнулены СК (тёмная область).

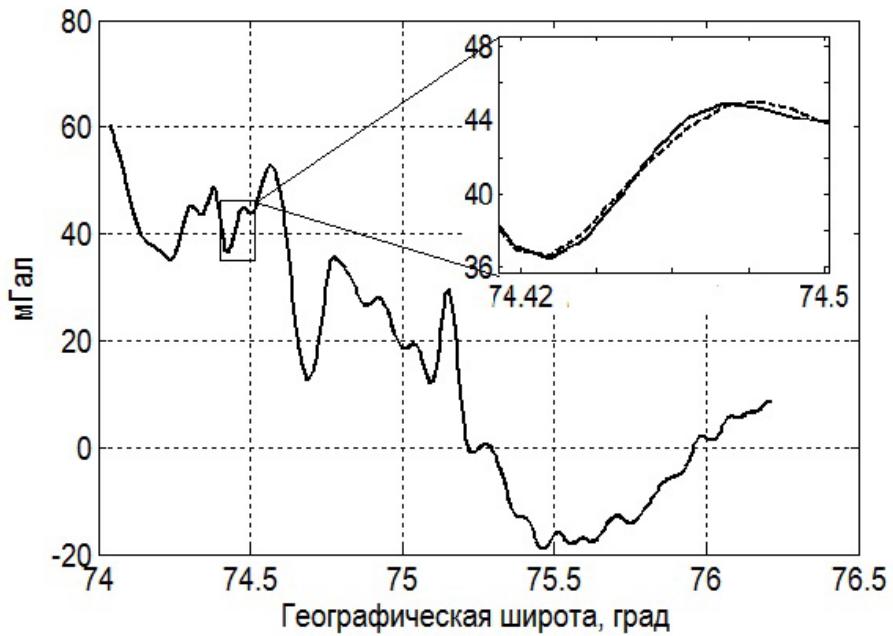


Рис. 4: Аномалия силы тяжести на галсе по данным аэрогравиметрии (сплошная линия) и результат восстановления аномалии по СК, оцененным по данным аэрогравиметрии на максимальном уровне детализации $J=10$ (пунктирная линия), мГал.

(7) по значениям аномалии силы тяжести в свободном воздухе. Аномалии рассчитаны по гармоническим коэффициентам до степени 1800 в узлах θ_k, λ_s эквиангулярной сетки Y (17), использовавшейся при вычислении СК авиаданных. Матрица ковариаций ошибок измерения в данных об аномалии силы тяжести глобальной модели рассчитана по диагональной матрице ковариаций ошибок гармонических коэффициентов, предоставляемой моделью EGM2008.

Комбинирование данных

Комбинирование ВК данных аэрогравиметрии и ВК модели EGM2008 (третий этап разработанной методики) на уровнях $j=7-9$ выполнено с помощью алгоритма МНК (30). Результаты комбинирования приведены в табл. 1 и на рис. 5. На графиках результатов комбинирования на каждом уровне детализации прослеживается коррекция алгоритмом множества авиационных ВК на краях области по ВК глобальной модели. Это связано с тем, что авиационные ВК в узлах на краях области малодостоверны, так как в ходе редукции информационной матрицы СК на максимальном уровне J были обнулены СК на краях области. Алгоритмом скорректированы также «выбросы», вызванные регуляризацией.

Таблица 1: Результаты комбинирования данных: S_{glob} – СКО разности комбинированных и глобальных ВК, S_{avia} – СКО разности комбинированных и авиационных ВК.

Уровень	Разрешение, км	S_{glob} , мГал	S_{avia} , мГал
7	16	2.3	2.0
8	8	2.3	2.0
9	4	2.0	2.2

В заключении приведены основные результаты диссертационной работы.

- Поставлена и решена задача локального определения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии и глобальной модели гравитационного поля Земли с использованием метода сферического вейвлет-разложения. Предложена и реализована методика решения задачи, включающая этапы: 1) оценивания скейлинг-коэффициентов

(СК) аномалии силы тяжести на максимальном уровне детализации по данным аэрогравиметрии; 2) вычисления вейвлет-коэффициентов (ВК) по данным глобальной модели и оценок ВК по СК, оцененным на первом этапе, на разных уровнях детализации; 3) уточнения оценок ВК данных аэрогравиметрии по ВК глобальной модели на общих уровнях детализации.

- Для решения задачи оценивания СК (первый этап методики) применен рекуррентный алгоритм МНК в информационной форме с шагом рекурсии по номеру галса. Алгоритм адаптирован для учета специфических особенностей проведения аэрогравиметрических съемок (вектор неизвестных автоматически расширяется на каждом шаге рекурсии). Разработана физически обоснованная методика регуляризации информационной матрицы СК, получаемой на последнем шаге рекурсии. Методика использует данные глобальной модели поля в качестве априорной информации. Задача уточнения оценок ВК по данным глобальной модели (третий этап методики) поставлена как задача МНК и решена в ковариационной форме.
- Задача уточнения ВК данных аэрогравиметрии по глобальным данным рассмотрена в постановке гарантирующего оценивания. Исследованы условия на характеристики ошибок ВК, при которых уточнение проводить нецелесообразно. Сделан вывод, что на практике уточнение следует проводить всегда.
- Проведена проверка разработанной методики на модельных данных и на результатах реальной аэрогравиметрической съемки и данных глобальной модели гравитационного поля EGM2008, показавшая эффективность методики. Алгоритмы методики позволяют корректно обрабатывать данные полетов, проводимых на разных высотах. Методическая погрешность обработки авиа-данных порядка 0.2 мГал.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Юрию Владимировичу Болотину за помощь в работе. Автор благодарен заведующему лабораторией управления и навигации А.А. Головану, профессору А.И. Матасову, профессору Н.А. Парусникову, старшим научным сотрудникам М.Ю. Попеленскому и А.В. Козлову за критические замечания и обсуждения.

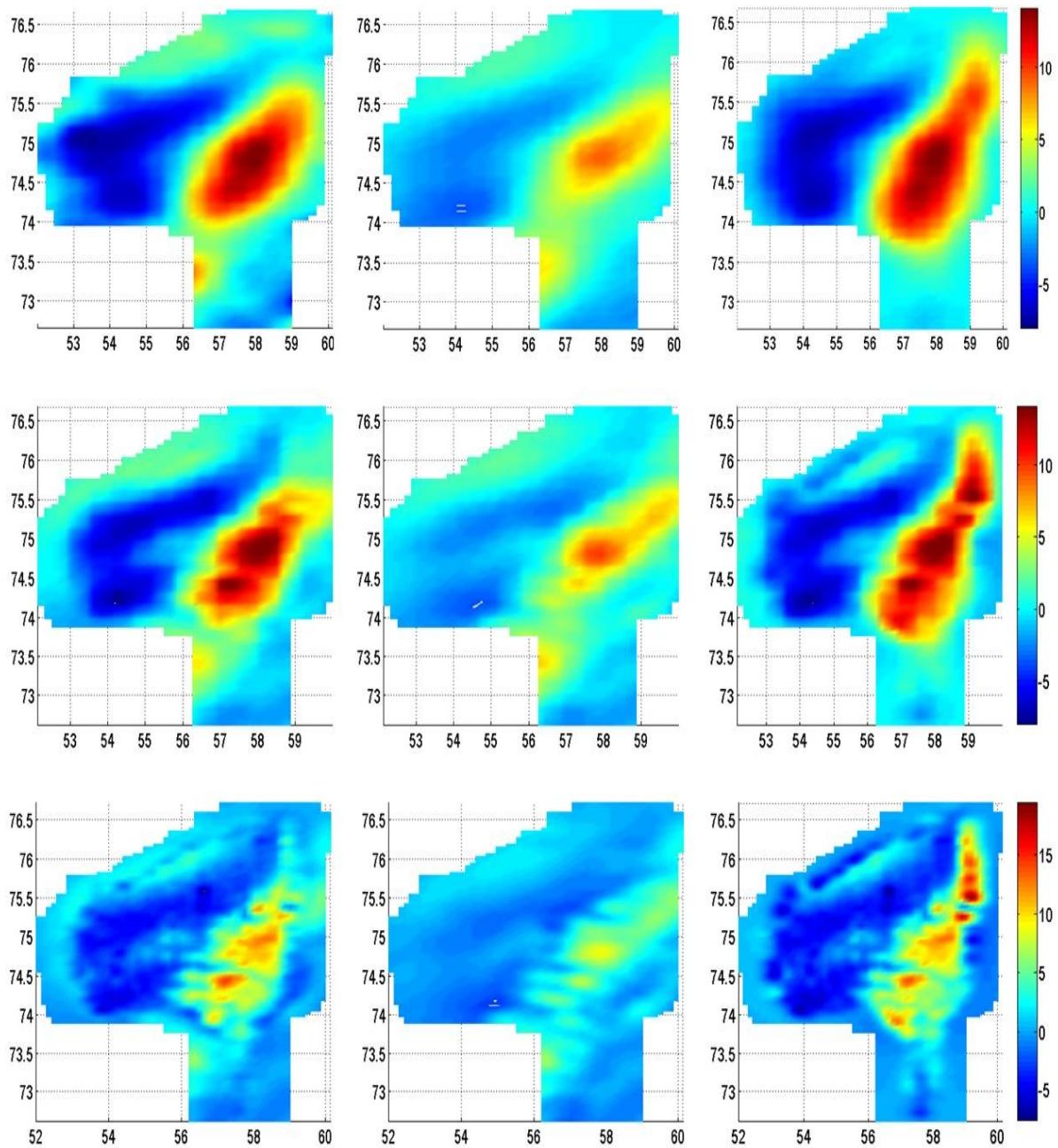


Рис. 5: ВК на уровнях 7-9 (по строкам); в каждой строке: комбинированные ВК (слева), глобальные ВК (в центре), авиационные ВК (справа), мГал.

Работы автора по теме диссертации

1. Болотин Ю.В., Вязьмин В.С. *Сферический вейвлет-анализ аэрогравиметрических данных* // Геофизические исследования. 2012. Т. 13. №2. С. 33-49.
2. Vyazmin V.S. *Refinement of a global model for the Earth's gravitational field using airborne gravimetry data* // Moscow University Mechanics Bulletin. 2013. V. 68. №4. P. 97-100.
3. Bolotin Yu. V., Vyazmin V.S. *Estimation of coefficients of the gravity spherical wavelet transform from airborne gravimetry data* // In: Proceedings of IAG International symposium on terrestrial gravimetry: static and mobile measurements (TG-SMM 2013). Concern CSRI Elektropribor, St. Petersburg. 2014. P. 84-88.
4. Болотин Ю.В., Вязьмин В.С. *Локальное многомасштабное оценивание аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии* // Геофизические исследования. 2014. Т. 15. №3.
5. Вязьмин В.С. *Минимаксное оценивание в задаче комбинирования данных аэрогравиметрии и глобальной модели гравитационного поля Земли в многомасштабном представлении* // Тезисы докладов XXIII международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации». Алушта. 2014. (В печати).