

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Вязьмин Вадим Сергеевич

**ЛОКАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ АНОМАЛИИ
СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПО ДАННЫМ АЭРОГРАВИМЕТРИИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СФЕРИЧЕСКОГО
ВЕЙВЛЕТ-РАЗЛОЖЕНИЯ**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. Ю.В. Болотин

Москва, 2014 г.

Оглавление

Список сокращений	3
Введение	4
Глава 1. Задача обработки данных аэрогравиметрии	8
§ 1.1. История гравиметрии	8
История и современное состояние аэрогравиметрии	11
§ 1.2. Модели поля силы тяжести	15
Аномалия силы тяжести	18
Гармоническое разложение потенциала притяжения	19
Глобальные модели гравитационного поля	22
Трансформации поля силы тяжести	23
§ 1.3. Аэрогравиметрические измерения	25
Обработка данных аэрогравиметрии	26
§ 1.4. Обзор методов комбинирования локальных и глобальных данных	27
Глава 2. Многомасштабное представление аномалии силы тяжести на основе сферического вейвлет-разложения	32
§ 2.1. Вводные обозначения	32
§ 2.2. Сферическое вейвлет-разложение в L^2	34
Многомасштабное представление функции	38
Об ортогональности суммы детализирующих подпространств	40
§ 2.3. Сферическое вейвлет-разложение гармонических функций	42
Определение максимального уровня детализации	44
Оценка погрешности интегрирования в малой зоне	46
Дискретный вид вейвлет-разложения	47
Трансформации поля силы тяжести	48

§ 2.4. Выводы к главе 2	50
Глава 3. Оценивание аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии с использованием многомасштабного представления	51
§ 3.1. Оценивание коэффициентов сферического вейвлет-разложения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии	52
Постановка задачи оценивания скейлинг-коэффициентов на максимальном уровне детализации	54
Алгоритм оценивания скейлинг-коэффициентов	58
Регуляризация оценок скейлинг-коэффициентов	60
Вычисление вейвлет-коэффициентов	61
§ 3.2. Комбинирование вейвлет-коэффициентов данных аэрогравиметрии и глобальной модели на основе МНК	63
§ 3.3. Комбинирование вейвлет-коэффициентов данных аэрогравиметрии и глобальной модели в постановке задачи гарантировующего оценивания	65
Модели погрешностей данных и обсуждение	65
Определение общего вида оценивателя	68
Оптимальный алгоритм оценивания	71
§ 3.4. Выводы к главе 3	77
Глава 4. Обработка данных	78
§ 4.1. Обработка модельных данных	78
§ 4.2. Обработка реальных данных	82
§ 4.3. Выводы к главе 4	86
Заключение	95
Список работ автора	97
Литература	98

Список сокращений

ЛА – летательный аппарат

СНС – спутниковая навигационная система

ЧЭ – чувствительный элемент

СВР – сферическое вейвлет-разложение

ВК – вейвлет-коэффициент

СК – скейлинг-коэффициент

МНК – метод наименьших квадратов

СКО – среднеквадратическое отклонение

1 Гал – 10^{-2} м/с²

1 мГал – 10^{-5} м/с²

Введение

Данная работа является исследованием в области аэрогравиметрии. Аэрогравиметрические съемки предназначены для локального определения силы тяжести в исследуемом районе с целью разведки полезных ископаемых или вычисления геоида (эквипотенциальная поверхность поля силы тяжести). Точность и пространственное разрешение данных о силе тяжести, получаемые в настоящее время по результатам авиационных съемок, близки к достигаемым в наземной гравиметрии. Преимуществами аэрогравиметрии являются быстрота получения информации о силе тяжести и возможность исследований в труднодоступных районах (шельфы, горы, тропические леса, полярные районы).

Аэрогравиметрические съемки часто проводятся также для уточнения глобальной модели гравитационного поля Земли [29], рассчитывающейся, главным образом, по спутниковым наблюдениям. Методы уточнения глобальной модели хорошо развиты (интегральные методы, метод коллокаций) и основываются, как правило, на разложении поля силы тяжести в ряд по сферическим (шаровым) функциям.

Для локального определения силы тяжести по данным аэрогравиметрии, в свою очередь, требуется информация о глобальном гравитационном поле Земли. Требование вызвано тем, что данная задача часто включает вычисление характеристик поля – трансформации (например, продолжение силы тяжести, заданной на высоте полета, на поверхность Земли), для которых необходима нелокальная информация. Применение в этом случае глобальной модели в стандартном виде разложения в ряд по сферическим функциям технически сложно и не всегда корректно. Использование метода коллокаций, основанного на стохастических моделях поля силы тяжести, не всегда оправдано. Сравнительно новые подходы к локальному определению силы тяжести основаны на исполь-

зовании альтернативных разложений. К ним относятся многомасштабные представления на основе сферических вейвлет-разложений [55], [61], разложения по радиальным мультиполям [71], точечным массам [95] и др.

Цель работы

Целью данной работы является разработка методики локального определения силы тяжести и ее трансформаций по данным аэрогравиметрии и глобальной модели гравитационного потенциала Земли. Для локального комбинирования указанных разнородных данных используется метод многомасштабного представления на основе сферического вейвлет-разложения. Отличительным свойством метода является возможность пространственно-частотной локализации функции, что удобно при работе с аэрогравиметрическими данными. В работе используется сферическое вейвлет-разложение в концепции, представленной Техническим университетом Кайзерслаутерна (Германия) [55]. Вейвлеты данной концепции являются гармоническими функциями вне сферы и, таким образом, могут использоваться при решении разных задач трансформации. Задача комбинирования данных решается методами оптимального оценивания.

Структура работы

Работа состоит из введения и четырех глав.

Первая глава является вводной. Кратко изложены теоретические основы аэрогравиметрии, приведены состав измерительной аппаратуры, принципы проведения авиационных измерений и обработки данных; поставлена задача, изучаемая в диссертационной работе, и обозначено место, занимаемое ее в общей процедуре обработки результатов аэрогравиметрических съемок. Рассмотрены известные методы решения этой задачи, в частности, использующие многомасштабные представления потенциала силы тяжести с помощью сферических вейвлет-разложений.

Во **второй главе** описан метод многомасштабного представления на основе сферического вейвлет-разложения. Изложение проведено по ма-

териалам работ В. Фредена и др. [55], [56], [57], [54]. Получена оценка погрешности вычисления скейлинг-коэффициентов (СК) силы тяжести при интегрировании в ограниченной зоне, предложен вариант квадратурной формулы для аппроксимации интеграла по сфере при вычислении вейвлет-коэффициентов (ВК) силы тяжести, получена оценка степени «стлаженности» функции в результате вейвлет-преобразования на сфере, показано отсутствие прямой суммы детализирующих подпространств многомасштабного представления при использовании вейвлетов с неограниченным числом сферических гармоник.

В третьей главе излагается разработанная методика локального комбинирования данных аэрогравиметрии и глобальной модели. Методика состоит из трех этапов: оценивания СК силы тяжести на максимальном уровне детализации по данным аэрогравиметрии; вычисления ВК на разных уровнях детализации по оцененным на первом этапе СК; совместного оценивания ВК данных аэрогравиметрии и глобальной модели. На первом этапе используется рекуррентный метод наименьших квадратов (МНК) с шагом рекурсии по номеру галса (параллельного прямолинейного участка траектории) съемки, позволяющий учесть специфику данных аэрогравиметрии, в частности некоррелированность ошибок измерений на разных галсах. В силу плохой обусловленности задачи первого этапа применена информационная форма МНК с регуляризацией информационной матрицы СК на последнем шаге рекурсии. Комбинирование ВК данных аэрогравиметрии и глобальной модели на последнем этапе методики проводится с помощью ковариационного алгоритма МНК. В §3.3 рассмотрена возможность применения метода гарантирующего (минимаксного) оценивания в решении задачи комбинирования данных.

В четвертой главе проведен анализ результатов обработки алгоритмами методики модельных данных и данных реальной аэрогравиметрической съемки в Арктике и глобальной модели гравитационного поля Земли EGM2008.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора Юрия Владимировича Болотина за постановку задачи, внимание к ее решению и многочисленные обсуждения. Автор благодарен заведующему лабораторией управления и навигации А.А. Головану, профессору А.И. Ма-

тасову, профессору Н.А. Парусникову, старшим научным сотрудникам М.Ю. Попеленскому и А.В. Козлову за критические замечания и обсуждения.

Глава 1. Задача обработки данных аэрогравиметрии

В § 1.1 приводится краткий обзор развития и современного состояния аэрогравиметрии. В §§ 1.2-1.3 формулируются математические и геофизические основы метода аэрогравиметрии, а также принципы проведения авиационных измерений и их обработки. В конце § 1.3 ставится задача локального определения аномалии силы тяжести и ее трансформаций по данным аэрогравиметрии, изучаемая в диссертационной работе, и обозначается место, занимаемое ею в общей процедуре обработки авиационных измерений. В § 1.4 приведен обзор применяемых подходов к решению данной задачи. Подробно рассмотрены подходы, использующие параметризацию потенциала поля силы тяжести с помощью сферического вейвлет-разложения.

§ 1.1. История гравиметрии

Гравиметрия – наука об измерении силы тяжести на поверхности и близ поверхности Земли. Начало гравиметрии связывают с именем Г. Галилея, открывшего закон свободного падения и закон колебаний маятника. В конце XVII в. маятниковым методом была экспериментально обнаружена зависимость силы тяжести от местоположения, объясненная затем в работах И. Ньютона и Х. Гюйгенса. В 1687 г. Ньютоном открыт закон всемирного тяготения. Впоследствии Ньютоном и Гюйгенсом был установлен эффект полярного сжатия для фигур равновесия вращающейся жидкости и получена модель Земли в виде эллипсоида вращения с силой тяжести, возрастающей от экватора к полюсам. Дальнейший

вклад в область гидростатики Земли внесен К. Маклореном, П. Буге, К. Якоби, Л. Эйлером. В 1743 г. А.К. Клеро открыл возможность определения геометрических параметров Земли по информации о силе тяжести на ее поверхности, составивший суть гравиметрического метода в геодезии.

Завершение становления теоретических основ гравиметрии связано с именами П.С. Лапласа, А.М. Лежандра, С.Д. Пуассона, Д. Грина, Ж.Д. Лагранжа, К.Ф. Гаусса, разработавших теорию потенциала физического поля. Гауссом предложено в качестве математической фигуры Земли рассматривать эквипотенциальную поверхность, для которой И.Б. Листингом в 1873 г. введено название геоида. Дж.Г. Стоксом показана неединственность решения обратной задачи определения распределения масс внутри Земли по ее внешнему гравитационному полю и получена формула вычисления формы геоида по значениям силы тяжести.

Измерительными приборами, использовавшимися при гравиметрических измерениях вплоть до середины XX в., были маятниковые гравиметры. С накоплением гравиметрических данных стало возможным первое вычисление по формуле Клеро сжатия Земли как $1 : 330$, выполненное Лапласом в 1799 г. В XIX в. маятниковыми методами начинают проводиться систематические относительные измерения, позволяющие определять приращения силы тяжести между пунктами наблюдений. С развитием относительной гравиметрии потребовалось высокоточное определение абсолютного значения силы тяжести. На основе абсолютных измерений, проведенных в Потсдаме в 1909 г., была принята Потсдамская гравиметрическая система и получена Ф.Р. Гельмертом формула для вычисления нормальной силы тяжести.

К 1930-му г. входят в пользование пружинные гравиметры, постепенно вытеснившие маятниковые приборы. Одно из преимуществ этих гравиметров – возможность быстрой съемки больших площадей. Пружинные гравиметры основаны на наблюдении положения равновесия пробной массы в поле силы тяжести (удерживающая сила создается металлической или электрической пружиной). В середине 1930-х гг. Л.Дж.Б. ЛаКостом создан известный прецизионный гравиметр, применяемый и в настоящее время. Примерно с 1939 г. гравиметры используются при раз-

ведке нефтяных месторождений.

В 1920-х гг. начинают проводиться интенсивные гравиметрические съемки на океанах с использованием разработанного Ф.А. Венинг-Мейнесом двухмаятникового прибора для измерений на подвижном основании. В 1950-х гг. при относительных измерениях на океанах начинают применяться морские гравиметры, в которых гравиметрический датчик с вертикальной осью чувствительности установлен на гиростабилизированную платформу.

В 1950–1960-х гг. ведутся интенсивные международные работы по созданию мировой опорной гравиметрической сети. В результате работ создана Международная гравиметрическая стандартизационная сеть (МГСС-71, IGSN-71), принятая в 1971 г. вместо Потсдамской системы. Новая сеть построена в основном по абсолютным измерениям силы тяжести с баллистическими гравиметрами (основанными на наблюдении свободного падения пробной массы) и относительным измерениям с гравиметрами Ла Коста–Ромберга. С 1970-х гг. сеть совершенствуется благодаря новым измерениям с баллистическими абсолютными гравиметрами и пружинными гравиметрами.

Начиная с 1960-х гг. выполняются спутниковые измерения в геодезии. Внедрение ЭВМ сделало более интенсивным использование гравиметрических данных в геодезии и геофизики. Значительно развиваются методы обработки измерений в связи со становлением информационного подхода. Основы методов заложены в работах А.Н. Колмогорова, Н. Винера, К. Шеннона, Р. Калмана, В.А. Котельникова и др. в области теории вероятностей и математической статистики, теории информации, оптимального оценивания, обработки сигналов.

В настоящее время измерения силы тяжести выполняют многочисленные государственные и частные организации. Координацию международного сотрудничества в этой области осуществляет Международная ассоциация геодезии (IAG).

В СССР первым научным институтом геофизического профиля стал созданный в 1928 г. Сейсмологический институт Академии наук (СИАН) в Ленинграде. Наряду с сейсмологией в нем были организованы работы по гравиметрии. В 1930 г. осуществляются первые в СССР морские гравиметрические измерения (Черное море) на подводной лодке, выполнен-

ные Государственным астрономическим институтом им. П.К. Штернberга (ГАИШ) с использованием четырехмаятникового прибора собственной разработки (Л.В. Сорокин). Систематические наблюдения на надводных судах начались в 1951 г., в которых участвовали сотрудники ГАИШ, геологического факультета МГУ, Всесоюзного научно-исследовательского института геофизических методов разведки (ВНИИГеофизика), Института физики Земли (ИФЗ АН СССР, созданного в 1956 г. на базе бывшего СИАНа), ЦНИИГАиКа и других организаций. Во второй половине 1950-х гг. для гравиметрических измерений на океанах начинают применяться специальные морские гравиметры. Теория морских гравиметров в СССР разрабатывалась К.Е. Веселовым (ВНИИГеофизика), В.Л. Пантелеевым (ГАИШ) [27] и др. В дальнейшем конструированием гравиметров занимались ГАИШ, ВНИИГеофизика, ИФЗ АН СССР, Всесоюзный институт разведочной геофизики (ВИРГ) и др. На основе накопленного к 1989 г. объема гравиметрических данных в СССР введена система геодезических «Параметров Земли 1990 г.».

История и современное состояние аэрогравиметрии

В настоящее время аэрогравиметрия подразделяется на скалярную, векторную, а также градиентометрию. В скалярной аэрогравиметрии измеряется вертикальная компонента вектора силы тяжести, в векторной – все три компоненты. В авиационной градиентометрии измеряются компоненты тензора градиента гравитационного потенциала. Ограничимся здесь рассмотрением скалярной аэрогравиметрии.

В 1959–1960 гг. в СССР и США были проведены первые попытки гравиметрических съемок с самолета. В СССР использовались демпфированные кварцевый и струнный гравиметры, помещенные на гиростабилизированную платформу, в США – морской гравиметр Ла Коста–Ромберга S-5 [90]. Траектория самолета измерялась инерциальной навигационной системой, вертикальная скорость – радиовысотомером и баровысотомером. Результаты гравиметрических измерений имели низкую точность, недостаточную для практических применений [25], [90]. Основные трудности на тот момент были вызваны неточностями в позиционировании, навигации и определении высоты самолета, в неучтенном

влиянии эффекта Этвёша, узком динамическом диапазоне гравиметров.

В 1980-х гг. возобновляются испытания в авиационной гравиметрии. Осмысяются возможности применения GPS для решения навигационных задач (например, в работах J.M. Brozena et al. [39], K.P. Schwartz et al. [84]). Усовершенствованы гравиметры под широкий динамический диапазон ускорений, возникающих во время полета. Аэрогравиметрические съемки, проведенные в 1991 и 1992 гг. Naval Research Laboratory (США) и Техническим университетом Дании в Гренландии, доказали возможность построения высокоточных карт поля силы тяжести по данным аэрогравиметрии [40].

В начале 1990-х гг. происходит качественное изменение в авиационной гравиметрии, вызванное окончанием развертывания GPS, прогрессом в микропроцессорной технике, новыми возможностями ЭВМ, появлением новых способов приборной интеграции инерциальных систем навигации с гравиметрами, разработкой новых методов и алгоритмов обработки данных и продолжения поля силы тяжести на поверхность геоида [12]. Точность карт поля силы тяжести, получаемых по данным аэрогравиметрии, на сегодняшний день достигает 0.5–1 мГал при пространственном разрешении до 2–5 км [9]. В настоящее время аэрогравиметрия широко применяется при решении разных геологических задач, является одним из основных методов разведочной геофизики, имеет большое значение при разведке нефти и газа [12].

В аэрогравиметрии выделяют как гравиметры платформенного типа, в которых гравиметрический датчик помещается вертикально на горизонтируемую платформу ИНС, так и бесплатформенные, интегрированные с БИНС. Достоинствами последних являются малые габариты и меньшая по сравнению с платформенными гравиметрами цена. Из зарубежных платформенных гравиметров выделим систему AIRGrav разработки Sander Geophysics Ltd. [48], гравиметр Ла Коста–Ромберга. Первые в мире разработки бесплатформенных гравиметров начаты в университете г. Калгари (Канада) [85]. В настоящее время известные за рубежом системы этого типа – SAGS4 (Баварская Академия наук [35]), бесплатформенный вариант гравиметра Ла Коста – Ромберга [94], GAIN (Делфтский технический университет [30]). Сравнение точностных характеристик платформенных и бесплатформенных систем обсуждается,

например, в [30]. Отметим, что бесплатформенный гравиметр может использоваться и как скалярный, и как векторный.

В России авиационная гравиметрия с использованием системы GPS развивается с середины 1990-х гг., когда был подготовлен к испытаниям аэрогравиметрический комплекс АГК разработки МИЭА и Лаборатории управления и навигации МГУ имени М.В. Ломоносова [13], а также гравиметр Гравитон разработки ОАО «ВНИИГеофизика».

Существенный вклад в создание и совершенствование аэрогравиметрических систем в России внесен коллективами НТЦ «Инерциальная техника», лаборатории инерциальных геодезических систем МГТУ имени Баумана (Салычев О.С. [28]), лаборатории гравиинерциальных измерений ИФЗ имени О.Ю. Шмидта РАН (Конешев В.Н., Железняк Л.К. и др. [18], [67]), лаборатории управления и навигации МГУ им. М.В. Ломоносова (Парусников Н.А., Болотин Ю.В., Голован А.А. и др. [12]), ЗАО НТП «Гравиметрические технологии», ЦНИИ «Дельфин» (Юрист С.Ш., Ильин В.Н., Смоллер Ю.Л., Бержицкий В.Н., Савельев Е.Б. [20]), ЦНИИ «Электроприбор» (Пешехонов В.Г., Несенюк Л.П., Элинсон Л.С., Соколов А.В. [6]), ОАО «ВНИИГеофизики» (Лозинская А.М., Яшайев И.Л. и др. [23]), МИЭА (Поляков Л.Г.). Опытный образец бесплатформенного гравиметра (GTX) в России разработан и испытан ЗАО НТП «Гравиметрические технологии» совместно с лабораторией управления и навигации МГУ [5].

На сегодняшний день ведущими разработчиками аэрогравиметрических систем в России являются

- ЗАО НТП «Гравиметрические технологии», ведущее с 2000 г. совместно с ЦНИИ «Дельфин» и лабораторией управления и навигации МГУ имени М.В. Ломоносова работы по созданию и усовершенствованию гравиметров GT-1A, GT-2A и GT-X [10], [5];
- ОАО Концерн ЦНИИ «Электроприбор», разрабатывающий аэроморскую мобильную гравиметрическую систему Чекан-АМ [19], [69].

Аэрогравиметрические съемки в России и в странах СНГ в настоящее время выполняют ИФЗ имени О.Ю. Шмидта РАН [17], [21] (с гравиметрами GT-1A, Чекан-АМ), ЗАО ГНПП «Аэрогеофизика» (с гравиметрами GT-1A/GT-2A), НПЦ «Геокен» (гравиметры Scintrex CG-5 типа Ла Коста–Ромберга и GT-1A/GT-2A) и др.

С начала 1990-х в мире активно ведутся спутниковые измерения характеристик внешнего гравитационного поля Земли. К ним относятся измерения спутниковой альtimетрии, градиентометрии, системы «спутник–спутник» (satellite-to-satellite tracking). Путем совместной обработки данных спутниковых наблюдений с данными наземных, морских и авиационных гравиметрических съемок рассчитываются глобальные модели гравитационного поля Земли (EGM96 и др.), задаваемые в виде разложений в ряд по сферическим (шаровым) функциям. С 2000-х гг. действуют спутниковые низкоорбитальные миссии CHAMP (Challenging Minisatellite Payload, с 2000 по 2010 гг.), GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment, с 2002 г.), GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer, с 2009 по 2013 гг.), нацеленные на изучение гравитационного поля Земли, динамики океанов, изменения климата и пр. На основе получаемых измерений градиентометрии (GOCE), системы «спутник–спутник» (CHAMP, GRACE), альtimетрии (TOPEX/Poseidon, OSTM/Jason-2 и др.) рассчитываются новые глобальные модели (EGM2008, EIGEN-CHAMP03S, EIGEN-GRACE01S и др.) и уточняются старые.

В настоящее время активно проводятся аэрогравиметрические съемки, предназначенные для локального уточнения глобальных моделей (например, [38]). Методами аэрогравиметрии исследуются районы, на которых данные глобальных моделей обладают низкой точностью [47], [49]. С 1998 по 2008 гг. выполнялось масштабное гравиметрическое исследование Арктики ArcGP (Arctic Gravity Project) [50], организованное Техническим университетом Дании и Национальным агентством геопространственной разведки США (NGA). Данные собраны методами наземной, подводной и аэрогравиметрии приведены к сетке $5' \times 5'$ аномалий в свободном воздухе в более чем 1.3 млн. пунктах. В то же время сравнительно мало гравиметрической информации имеется относительно Антарктики. Результаты недавних аэрогравиметрических исследований в этом районе изложены в [43], [63], [82], [73].

Основные направления развития на сегодняшний день в аэрогравиметрии, как отмечается в [9] и [12], состоят в использовании многоантенных систем спутниковой навигации, в снижении требований к инерциальной части системы, во включении измерительной информации СНС

ГЛОНАСС, в усовершенствовании чувствительных элементов гравиметров, а также, в разработке ИНС или БИНС высокой точности и приемлемой цены. Кроме того, в связи с трудностями математических задач аэрогравиметрии (выделение полезного сигнала – аномалии силы тяжести – на фоне сильных помех, вычисление характеристик аномального поля силы тяжести) продолжают разрабатываться новые подходы к их решению. Также ввиду действия спутниковых миссий (GRACE и др.) актуальной задачей является комбинирование разнородных гравиметрических данных, для решения которой в последние годы предложено множество подходов (подробнее в § 1.4).

В заключение отметим развитие аэроградиентометрических систем, предназначенных для измерения приращений силы тяжести. Широкую известность приобрели приборы разработки BHP Billiton [70] и Bell Geospace [78].

§ 1.2. Модели поля силы тяжести

Поле силы тяжести Земли характеризуется скалярным потенциалом силы тяжести W , состоящим из суммы потенциала силы притяжения (гравитационного потенциала) V и потенциала центробежной силы инерции, вызванной вращением Земли вокруг своей оси [60], [29]. Потенциал силы тяжести W и гравитационный потенциал V в точках внутри Земли удовлетворяют уравнениям Пуассона

$$\Delta_x W(x) = -4\pi\rho(x) G + 2\omega^2, \quad (1)$$

$$\Delta_x V(x) = -4\pi\rho(x) G, \quad (2)$$

где Δ_x – оператор Лапласа, $x \in \mathbb{R}^3$ – точка в геоцентрической системе координат, G – гравитационная постоянная, $\rho(x)$ – плотность распределения притягивающей массы в данной точке, ω – угловая скорость вращения Земли. Оператор Лапласа в сферических координатах r, λ, θ (где $\theta \in [0, \pi]$ – ко-широта) записывается в виде [60]:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Во внешнем пространстве Земли ($\rho = 0$) уравнения (1)-(2) принимают вид

$$\Delta_x W(x) = 2\omega^2, \quad (4)$$

$$\Delta_x V(x) = 0. \quad (5)$$

Потенциал притяжения V удовлетворяет условию регулярности на бесконечности, то есть $|V(x)| = O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$, откуда и из (5) следует, что V является гармонической функцией во внешнем пространстве [60].

Градиент потенциала силы тяжести W называют вектором силы тяжести $\mathbf{g} = \text{grad } W$. Вектор \mathbf{g} в каждой точке направлен вдоль внутренней нормали к уровенной поверхности потенциала W . Поверхность уровня (эквипотенциальная поверхность) потенциала W , примерно совпадающая со средним уровнем Мирового океана, называется геоидом [60], [29].

В геодезии и навигации принятой моделью Земли является уровненный эллипсоид вращения, близкий к поверхности Земли. Центр эллипсоида, ось и угловая скорость вращения ω , его масса (обозначим ее через M) совпадают с соответствующими параметрами Земли. Поле силы тяжести уровенного эллипса полностью и однозначно определяется пятью параметрами: ω , M , большой полуосью a , сжатием f , гравитационной постоянной G и не зависит от внутреннего распределения масс (теорема Стокса [60]). В аэрогравиметрии чаще всего используется референц-эллипсоид WGS-84 со значениями $a = 6378137.0$ м и $f = 1/298.257\,223\,563$.

Потенциал поля силы тяжести референц-эллипса U называется нормальным потенциалом силы тяжести (или потенциалом нормально-го поля силы тяжести) и складывается из потенциала нормальной силы притяжения V_0 и потенциала центробежной силы инерции. Вектором нормальной силы тяжести \mathbf{g}_0 называется градиент U . С эллипсоидом связывают географические координаты φ , λ , h , где φ – угол между плоскостью экватора и нормалью к эллипсоиду, λ – долгота, отсчитываемая в восточном направлении, h – высота над эллипсоидом. Вектор нормальной силы тяжести на поверхности эллипса записывается в географических координатах как $\mathbf{g}_0 = (0, 0, -g_0(\varphi, 0))$, где $g_0(\varphi, 0)$ – абсолютное значение нормальной силы тяжести при $h = 0$, зависящее только от шир-

роты и определяемое по формуле Сомильяны (1929) [29]:

$$g_0(\varphi, 0) = \frac{ag_0^a \cos^2 \varphi + bg_0^b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (6)$$

где g_0^a , g_0^b – значения нормальной силы тяжести на экваторе и на полюсе соответственно, b – малая полуось.

На практике часто пользуются приближенной формулой, полученной из (6) разложением в степенной ряд относительно сжатия $f = (a - b)/a$ и величины $\beta = (g_0^b - g_0^a)/g_0^b$ с удержанием членов второго порядка малости, которая имеет вид [29]:

$$g_0(\varphi, 0) = g_0^a(1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi), \quad (7)$$

где численные значения g_0^a , β , β_1 определяются эмпирически и утверждаются Международным геофизическим и геодезическим союзом.

Для расчета силы тяжести вблизи поверхности референц-эллипсоида применяют высотную поправку к (7), получаемую из разложения $g(\varphi, h)$ в ряд Тейлора по h в значении $h = 0$. В аэрогравиметрии обычно ограничиваются линейным приближением:

$$g_0(\varphi, h) \doteq g_0(\varphi, 0) + h \left(\frac{\partial g_0(\varphi, h)}{\partial h} \right)_{h=0}. \quad (8)$$

Производная рассчитывается по формуле [29]:

$$\left(\frac{\partial g_0(\varphi, h)}{\partial h} \right)_{h=0} = -g_0^a \left(\frac{1}{R_N} + \frac{1}{R_E} \right) - 2\omega^2 \doteq -2\frac{g_0^a}{a}. \quad (9)$$

где приближение имеет точность порядка $O(f)$, R_N , R_E – главные радиусы кривизн эллипсоида:

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{a^2}{b} (1 + e'^2 \cos^2 \varphi)^{-3/2}, \\ R_E &= \frac{a^2}{b} (1 + e'^2 \cos^2 \varphi)^{-1/2}, \\ e'^2 &= (1 - f)^2. \end{aligned}$$

Для приведенных выше численных значений g_0^a и a высотная поправка в (8) часто используется в виде

$$h \left(\frac{\partial g_0(\varphi, h)}{\partial h} \right)_{h=0} = -0.3086 h \text{ мГал}, \quad (10)$$

где $1 \text{ мГал} = 10^{-5} \text{ м}/\text{с}^2$.

В России общеприняты значения параметров в формуле (7), определенные Гельмертом в 1901–1909 гг.:

$$g_0^a = 978030 \text{ мГал}, \beta = 0.005 302, \beta_1 = 0.000 007. \quad (11)$$

Параметры (11) приведены к Потсдамской системе. Вследствие того, что система является завышенной, при использовании (11) в формуле (7) вводится поправка -14 мГал. Таким образом, принятая формула для вычисления нормальной силы тяжести вблизи поверхности Земли (называемая формулой Гельмерта) имеет вид

$$\begin{aligned} g_0(\varphi, h) &= 978030 (1 + 0.005 302 \sin^2 \varphi - 0.000 007 \sin^2 2\varphi) - \\ &- 0.3086 h - 14 \text{ мГал}. \end{aligned} \quad (12)$$

Аномалия силы тяжести

Аномальным полем силы тяжести называется отклонение реального поля силы тяжести от нормального, вызванное неравномерностью распределения масс в Земле. Потенциал T аномального поля (или возмущающий потенциал) определяется равенством:

$$T(x) = W(x) - U(x) = V(x) - V_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (13)$$

Вне притягивающих масс возмущающий потенциал является гармонической функцией, то есть удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta_x T(x) = 0,$$

а также условию регулярности на бесконечности: $|T(x)| = O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Вектор аномалии силы тяжести (чистой аномалии, возмущения силы тяжести) в данной точке определен формулой:

$$\Delta \mathbf{g}(x) = \mathbf{g}(x) - \mathbf{g}_0(x) = \operatorname{grad} T(x).$$

В скалярной аэрогравиметрии рассматривается только вертикальная составляющая вектора $\Delta \mathbf{g}$ (проекция на географическую вертикаль), которую далее в работе всюду будем обозначать через Δg [60]:

$$\Delta g(\varphi, \lambda, h) = g(\varphi, \lambda, h) - g_0(\varphi, h), \quad (14)$$

где $g(\varphi, \lambda, h)$ — проекция на географическую вертикаль вектора силы тяжести, взятая с обратным знаком.

Так как на поверхности геоида $g = -\partial W/\partial \nu_+$, где ν_+ — внешняя нормаль к геоиду, $g_0 = -\partial U/\partial h$ и направления нормалей к геоиду и эллипсоиду почти совпадают, имеет место приближенная формула для аномалии: $\Delta g = -\partial T/\partial h$, с относительной точностью порядка квадрата отклонения отвесной линии.

Если нормальная сила тяжести $g_0(\varphi, h)$ рассчитана по (7) с высотной поправкой (10), то говорят, что в (14) определена аномалия силы тяжести в свободном воздухе. Известно, что коротковолновые составляющие аномалий в свободном воздухе искажаются влиянием рельефа, обусловленным топографическими массами. Чтобы его скомпенсировать, вводят топографическую поправку, основанную на том или ином допущении о локальном распределении масс. При наличии сложного рельефа (горы, впадины) вычисление топографической поправки является трудоемкой задачей, на повышение численной эффективности методов ее решения направлены усилия многих научных групп [87].

Основная цель при внесении перечисленных и других поправок (см. [29]) к аномалиям силы тяжести — выявить влияние притягивающих масс ниже уровня геоида и выделить притяжение залежей полезных ископаемых (в основном, нефти, газа и руд) на фоне окружающих пород в данном регионе.

Гармоническое разложение потенциала притяжения

Потенциал притяжения V является гармонической функцией во внешнем пространстве. Поэтому имеет место разложение V в ряд по сферическим (шаровым) функциям, являющимся собственными функциями оператора Лапласа, которое записывается в геоцентрических координатах φ_0, λ, r в виде [29]:

$$\begin{aligned} V(\theta, \lambda, r) &= \\ &= \frac{GM}{r} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \right), \end{aligned} \tag{15}$$

где $\theta = \pi/2 - \varphi_0$ — ко-широта, GM — геоцентрическая гравитационная постоянная, a — большая полуось уровенного эллипсоида, \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} — безразмерные нормированные коэффициенты гармонического разложения потенциала, \bar{P}_{nm} — нормированные присоединенные полиномы Лежандра степени n порядка m :

$$\bar{P}_{nm}(\cos \theta) = \kappa_{nm} P_{nm}(\cos \theta),$$

где $P_{nm}(t)$ с аргументом $t = \cos \theta$ выражаются через полиномы Лежандра $P_n(t)$ степени n нулевого порядка $m = 0$:

$$P_{nm}(t) = (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t), \quad (16)$$

определяемые формулой:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n.$$

Нормировочный коэффициент κ_{nm} определяется из условия равенства единице среднеквадратического значения по сфере $r = a$ и имеет вид:

$$\kappa_{nm} = \sqrt{\frac{\delta_m (2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}}, \quad (17)$$

где $\delta_m = 1$ при $m = 0$ и $\delta_m = 2$ при $m \neq 0$.

Гармоники при $m = 0$ зависят только от ко-широты θ и называются зональными. Отсутствие гармонических коэффициентов степени $n = 1$ в разложении потенциала притяжения (15) объясняется геоцентричностью выбранной системы координат.

Потенциал нормального поля притяжения V_0 является гармонической функцией во внешнем пространстве эллипсоида и раскладывается в ряд по шаровым функциям, при этом в разложении участвуют только зональные гармоники четных степеней [29], [60]:

$$V_0(\theta, r) = \frac{GM}{r} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} \bar{C}_{2n}^0 \bar{P}_{2n}(\cos \theta) \right), \quad (18)$$

где \bar{C}_{2n}^0 — нормированные коэффициенты разложения степени $2n$ и нулевого порядка, \bar{P}_{2n} — нормированные полиномы Лежандра степени $2n$ и нулевого порядка. Ряд (18) сходится во внешнем пространстве вплоть

до поверхности эллипсоида [29]. В разложении (18) используются, как правило, не более четырех первых четных зональных гармоник.

С помощью (15) и (18) может быть получено гармоническое разложение возмущающего потенциала, являющегося гармонической функцией вне притягивающих масс:

$$\begin{aligned} T(\theta, \lambda, r) &= \\ &= \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\Delta \bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \bar{C}_{n0}^0$ при четных n и при $m = 0$. Гармоники с коэффициентами \bar{C}_{20} и \bar{C}_{40} почти полностью вычтены нормальным полем.

В сферическом приближении (с точностью до величины сжатия) верно представление для аномалии силы тяжести Δg :

$$\Delta g(\theta, \lambda, r) = -\frac{\partial T(\theta, \lambda, r)}{\partial r}. \quad (20)$$

Тогда, дифференцируя ряд (19), получают разложение аномалии силы тяжести:

$$\begin{aligned} \Delta g(\theta, \lambda, r) &= \\ &= \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (21)$$

Ошибка представления аномалии силы тяжести в сферическом приближении рядом (21) не превосходит 0.1 мГал [29]. Коэффициенты гармонического разложения гравитационного потенциала \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} могут быть определены по значениям аномалии силы тяжести.

Разложения (15) и (19) в сходящийся ряд можно проводить вплоть до сферы, лежащей внутри масс вблизи поверхности Земли (так называемая сфера Бьерхаммера) [29]. Возможность такого разложения основывается на известной теореме К. Рунге (1885) [81] о приближении функций, голоморфных в области на комплексной плоскости. На случай гармонических функций в области в n -мерном пространстве теорема была распространена Дж.Л. Уолшем (1929) [97]. Применение теоремы к гравитационному потенциальному Земли рассмотрено в работах А. Бьерхаммера [34], Т. Краупа [68] и Г. Морица [76].

Глобальные модели гравитационного поля

Информация о внешнем гравитационном поле Земли может быть получена по цифровым глобальным моделям гравитационного потенциала (EGM96, EGM2008 или др.). Данные глобальных моделей содержат конечный набор безразмерных нормированных коэффициентов гармоник \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} , позволяющих приблизенно вычислять разные функционалы гравитационного потенциала Земли во внешнем пространстве.

Коэффициенты гармоник в моделях рассчитаны по результатам наблюдений спутниковой гравиметрии в сочетании с морской, наземной и аэрогравиметрией. Большинство моделей позволяют выявлять, главным образом, длинноволновые составляющие аномалий. Так, в модели EGM96 максимальная степень n гармоники в разложении по шаровым функциям равна 360, эквивалентное пространственное разрешение на экваторе примерно 100 км.

Моделью с наивысшим пространственным разрешением и наибольшей точностью данных о глобальном гравитационном поле на сегодняшний день является EGM2008. Модель содержит коэффициенты \bar{C}_{mn} , \bar{S}_{mn} гармонического разложения потенциала притяжения V до степени $n = 2159$ вместе с дисперсиями ошибок коэффициентов $\sigma^2[\delta\bar{C}_{mn}]$, $\sigma^2[\delta\bar{S}_{mn}]$ ¹. Общее число коэффициентов гармонического разложения в модели порядка $4 \cdot 10^6$. Максимальное пространственное разрешение модели EGM2008 составляет около 10 км на экваторе. Реальное разрешение модели, как показывают исследования, существенно ниже.

Коэффициенты гармоник EGM2008 получены в результате комбинирования по МНК данных низкочастотной глобальной модели ITG-GRACE03S и усредненных аномалий в свободном воздухе в узлах эквиангулярной сетки $5' \times 5'$ на референц-эллипсоиде [80]. Эти аномалии рассчитаны по измерениям спутниковой альtimетрии, а также наземным, авиационным, подводным и морским гравиметрическим измерениям, аналитически продолженным на поверхность референц-эллипсоида. При решении задачи комбинирования глобальная матрица ковариаций

¹Данные модели EGM2008 предоставлены на веб-сайте Национального агентства геопространственной разведки (NGA) США: <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/index.html>

ошибок измерений принятая диагональной, матрица системы нормальных уравнений была аппроксимирована блочно-диагональной. Выдаваемые оценки коэффициентов разложения сопровождаются диагональной матрицей ковариаций ошибок оценивания, являющейся весьма приближенной, в частности, дисперсии и ковариации ошибок оценки коэффициентов высших гармоник являются малодостоверными.

Трансформации поля силы тяжести

В гравиметрии требуется по наблюдениям аномалии силы тяжести определять такие характеристики аномального поля силы тяжести, как возмущающий потенциал T , уклонения отвесной линии на поверхности геоида, высота геоида, аномалия силы тяжести на заданной высоте и др. (см [29]). Нахождение одних характеристик по другим называют трансформациями поля, сами характеристики – трансформантами. Для большинства трансформаций существуют известные интегральные формулы (Стокса, Венинг – Мейнеса, Хотина, Брунса и др.), получаемые из решения соответствующих краевых задач [60], [29].

В аэрогравиметрии основными задачами трансформаций являются определение возмущающего потенциала T , аномалии силы тяжести на заданной высоте, уклонения отвесной линии, высот геоида по измерениям аномалии силы тяжести в свободном воздухе, сделанным на высоте полета h (как правило, постоянной) над референц-эллипсоидом. Задачи трансформаций сводятся к решению краевой задачи определения потенциала:

$$\begin{aligned} \Delta_x T(x) &= 0, \quad \text{при } x \in \Sigma_{ext}, \\ -\frac{\partial T(x)}{\partial n} &= \Delta g(x), \quad \text{при } x \in \mathcal{E}_h, \end{aligned} \tag{22}$$

где $T(x)$ – регулярная на бесконечности функция (то есть $|T(x)| = O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$), $x \in \mathbb{R}^3$, $\Sigma_{ext} \subset \mathbb{R}^3$ – внешнее пространство Земли Σ , n – внешняя нормаль к референц-эллипсоиду, \mathcal{E}_h – замкнутая поверхность (поверхность полета), охватывающая Σ .

Для решения задач трансформаций часто используется аппроксимационная теорема Рунге – Уолша (Рунге – Крапупа). Согласно этой теореме, возмущающий потенциал может быть сколь угодно точно приближен

вне поверхности Земли функцией, гармонической вне произвольной сферы внутри Земли (так называемая сфера Бьерхаммера [34]). А именно, имеет место

Теорема 1. (*Рунге, Уолш, Крапун, [68], [57]*) Пусть $F(x)$ – гармоническая в Σ_{ext} и регулярная на бесконечности функция и Ω_R – сфера произвольного радиуса R , погруженная внутрь Σ так, что $\Omega_R \subset \bar{\Sigma}_{int}$. Тогда существует гармоническая вне сферы Ω_R и регулярная на бесконечности функция $H(x)$ такая, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ выполнено $|F(x) - H(x)| < \varepsilon$ во всех точках x вне произвольной замкнутой поверхности конечной кривизны $\Sigma' \neq \Sigma$, охватывающей поверхность Σ так, что $\Sigma \subset \bar{\Sigma}'_{int}$, где $\bar{\Sigma}'_{int} = \Sigma'_{int} \cup \Sigma'$.

В рамках этой теоремы задача трансформации (22) сводится к решению вспомогательной задачи, записываемой в виде интегрального уравнения Фредгольма

$$\Delta g(x) = - \int_{\Omega_R} \frac{\partial \Pi(x, y)}{\partial |x|} T(y) d\omega(y), \quad \text{где } x \in \mathcal{E}_h, \quad (23)$$

где Ω_R – сфера Бьерхаммера, $\Pi(x, y)$ – ядро Пуассона:

$$\Pi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{|x|^2 - R^2}{(|x|^2 - 2R|x| \cos(\xi^T \eta) + R^2)^{3/2}}, \quad (24)$$

где $\xi = x/|x|$, $\eta = y/R$. В (23) используется сферическое приближение (20) для аномалии силы тяжести. Для уменьшения погрешности такого приближения вводят специальные поправки к значениям аномалий [60]. Решив уравнение (23) и определив значения возмущающего потенциала T на сфере Бьерхаммера Ω_R , можно вычислить значения T вне поверхности Σ с помощью операции поднятия поля.

Уравнение для отыскания аномалии силы тяжести на поверхности сферы Бьерхаммера по значениям $\Delta g(x)$ на поверхности \mathcal{E}_h имеет вид:

$$\Delta g(x) = -\frac{R}{|x|} \int_{\Omega_R} \Pi(x, y) \Delta g(y) d\omega(y), \quad \text{где } x \in \mathcal{E}_h. \quad (25)$$

Функция $\Delta g(x)$, стоящая в левой части уравнений (23) и (25), предполагается принадлежащей гильбертову пространству интегрируемых на \mathcal{E}_h функций. Неизвестные функции в уравнениях (23) и (25) (потенциал и

аномалия на поверхности сферы Бьерхаммера) предполагаются принадлежащими гильбертову пространству интегрируемых на Ω_R функций. Проблема, возникающая в данных трансформациях, состоит в том, что задачи (23) и (25) относятся к классу обратных некорректно поставленных по Адамару задач [57]. Это вызвано тем, что обратные операторы в (23) и (25) не ограничены. Требуется регуляризация задач.

§ 1.3. Аэрогравиметрические измерения

В данном параграфе кратко рассматривается процесс проведения и обработки измерений в скалярной аэрогравиметрии с использованием гравиметра платформенного типа. Измерения проводятся с борта летательного аппарата (ЛА), как правило, на постоянной высоте над референц-эллипсоидом. Траектория движения ЛА над исследуемым участком земной поверхности представляет собой набор параллельных отрезков (галсов) и разворотов между ними. В большинстве случаев галсы проектируются в направлениях север-юг или запад-восток. Авиационные измерения проводятся вдоль галсов, на которых аномалию силы тяжести удобно рассматривать как функцию времени. Часто выполняются дополнительные измерения вдоль так называемых секущих галсов, пересекающих основные.

На борту ЛА установлена измерительная гравиметрическая система, которая включает в себя гиростабилизированную платформу в кардановом подвесе, на которую вертикально установлен одноосный гравиметрический датчик; приемники сигналов спутниковой навигационной системы (СНС). Также требуется наземный приемник сигналов СНС (базовая станция) для обработки измерений СНС в фазово-дифференциальном режиме.

Гравиметрический датчик измеряет проекцию удельной силы, действующей на его чувствительный элемент (ЧЭ) со стороны подвеса, на ось чувствительности датчика. Движение ЧЭ описывается основным уравнением аэрогравиметрии в проекции на географическую вертикаль [12]:

$$\ddot{h} = -g_0 - \Delta g + g_E + f_3, \quad (26)$$

где \dot{h} – вертикальная составляющая скорости ЧЭ; g_0 – абсолютное значение нормальной силы тяжести, вычисляемое по (12); Δg – вертикальная составляющая вектора аномалии силы тяжести; f_3 – вертикальная составляющая удельной силы, действующей на ЧЭ со стороны подвеса гравиметра; g_E – поправка Этвёша для учета центробежного и кориолисова ускорений во время движения. Формула для g_E имеет вид:

$$g_E = \frac{V_E^2}{R_E} + \frac{V_N^2}{R_N} + 2\omega V_E \cos \varphi, \quad (27)$$

где V_E , V_N – восточная и северная компоненты скорости ЛА, R_E , R_N – главные радиусы кривизны референц–эллипсоида, ω – угловая скорость вращения Земли, φ – географическая широта.

Искомой величиной в уравнении (26) является аномалия Δg . Величина вертикальной проекции f_3 удельной силы измеряется гравиметром. Величины g_E , g_0 , \dot{h} определяются по измерениям СНС [12]. Для решения уравнения требуется выделить полезный сигнал Δg на фоне сильных инерциальных и инструментальных погрешностей (отношение шум–сигнал свыше 10^3). Отметим, что к числу инструментальных погрешностей относится влияние горизонтальных ускорений, вызванных ошибками горизонтизации платформы [12]. Существенный вклад в ошибки измерений вносит дифференцирование измерений высоты по СНС.

Обработка данных аэрогравиметрии

Вычисления, проводимые по измерениям аэрогравиметрической системы, выполняются в режиме пост-обработки и разделяются на следующие этапы:

- 1) определение координат и скоростей ЧЭ по измерениям СНС и гироплатформы;
- 2) определение углов наклона гироплатформы по измерениям акселерометров, датчиков угловой скорости и СНС;
- 3) определение аномалии силы тяжести на траектории полета из решения основного уравнения аэрогравиметрии (26);
- 4) уравнивание галсов;

- 5) построение карты аномалии силы тяжести в свободном воздухе на высоте полета;
- 6) вычисление трансформаций поля.

В диссертации результаты обработки измерений на этапах 1-3 рассматриваются как первичные аэрогравиметрические данные. Отметим лишь, что при решении (26) используются методы оптимальной фильтрации [59], [64]. В [37] подробно обсуждается гравиметрический фильтр, используемый в системе GT-1A. Распространенным является метод стохастического оценивания гравитационной аномалии на траектории, основанный на задании модели аномалии и погрешностей измерений в виде случайных процессов [26], [51], [12], [79], [30], [14].

Уравнивание галсов (этап 4) проводится с целью исключения долго-периодической составляющей ошибки измерений, вызванной смещением нулевого сигнала гравиметра и состоит в оценивании параметров смещения по измерениям в точках пересечений основных и секущих галсов [15]. Построение карты аномалий на высоте полета (этап 5) ведется без привлечения какой-либо геофизической информации на участке съемки. Измерения аномалии силы тяжести при этом редуцируются на заданную на постоянной высоте сетку узлов карты. Карта характеризуется разрешением – половиной минимальной выявляемой длины волны аномалии. Точность съемок оценивают по расхождениям в точках пересечения галсов и сравнением с имеющимися наземными данными.

Вычисление трансформант поля силы тяжести составляет последний этап пост-обработки результатов аэрогравиметрической съемки. Трансформации сводятся к решению вспомогательных задач (23) и (25). Особенность задач заключается в том, что для корректности трансформаций требуется нелокальная информация об аномалии силы тяжести. В связи с чем данные аэрогравиметрии целесообразно комбинировать с данными глобальной модели гравитационного поля Земли.

§ 1.4. Обзор методов комбинирования локальных и глобальных данных

Методы комбинирования данных аэрогравиметрии с данными глобальных моделей зависят от цели конкретных аэрогравиметрических съемок, в одних случаях предназначенных для локального определения аномалии силы тяжести в исследуемом районе, в других – для уточнения глобальной модели гравитационного поля Земли.

Методы уточнения глобальной модели хорошо развиты и основываются, как правило, на определении коэффициентов разложения аномалии силы тяжести или возмущающего потенциала в ряд по сферическим (шаровым) функциям. Широко применяемым методом является метод среднеквадратической коллокации, позволяющий оптимально комбинировать данные на основе статистической информации об ошибках в измерениях и введении стохастической модели аномалии или возмущающего потенциала. Метод коллокаций точечных данных представлен в работах Морица [75], Чернинга [93], Денкера [42]. Для быстроты вычисления оценок при этом часто используется одномерное [58] или двумерное преобразование Фурье [53], [86], для которого требуется предварительное задание наблюдений в узлах регулярной сетки. В [98], [88], [65] рассмотрены модификации метода коллокаций для оптимального сочетания данных в спектральной области. Метод коллокаций активно применяется при уточнении глобальных моделей, получаемых по данным современных космических миссий GOCE, GRACE и CHAMP [65]. Слабым местом в методе является зависимость оценки от стохастической модели поля силы тяжести, которая может оказаться недостоверной.

Диссертация, как уже сказано, посвящена построению локальных моделей поля. Для локального определения аномалии силы тяжести на поверхности Земли по данным аэрогравиметрии обычно требуется информация о глобальном гравитационном поле. Причина этого заключается в том, что данная задача, как обсуждалось в § 1.2, включает трансформации поля. Распространены интегральные методы ее решения, основанные на применении формул Стокса, Пиццетти, Хотина, Венинг-Мейнеса и др. [76]. В интегральных методах, как правило, требуется предварительное приведение измерений к регулярной сетке, а также их доопределение вне участка съемки. Часто применяемым приемом здесь является техника «вычитания-восстановления» (remove-restore technique) [52], которая заключается в вычитании из измерений длинноволновой

составляющей аномалии, взятой из данных глобальной модели; доопределении аномалии вне участка съемки (например, с помощью интерполяции); трансформации остаточных аномалий на ограниченном участке и возвращении длинноволновой составляющей. Основная методическая погрешность такой методики вызвана влиянием краевых эффектов, аналогичных эффекту Гиббса на прямой. Кроме этого, в методе не учитывается имеющаяся статистическая информация.

Другим распространенным методом решения задачи является метод среднеквадратической коллокации, применение которого затруднено необходимостью привлечения достоверной статистической информации об аномалии или возмущающем потенциале. Сравнение интегрального метода и метода коллокаций проведено в [92], [31].

Сравнительно новые подходы к решению задачи локального комбинирования данных основаны на аппроксимациях с помощью специальных разложений поля силы тяжести. К ним относятся сферические вейвлет-разложения, независимо разрабатываемые разными научными группами. Теория вейвлет-разложения хорошо развита в одномерном и плоском двумерном случаях [72], [41], и ей посвящена обширная литература. Приведем вкратце суть этого метода.

Вейвлеты на прямой или на плоскости – базисные функции гильбертова пространства (обычно L^2), являющиеся сдвигами и растяжениями одной заданной функции (материнского вейвлета). Различают непрерывное вейвлет-преобразование и дискретное (быстрое) вейвлет-преобразование, в котором растяжения проводятся в 2^j раз (j – уровень детализации). В качестве вейвлетов выбираются функции с компактным носителем или достаточно быстро убывающие до нуля. Вейвлеты локализованы в частотной области. Свертка функций с вейвлетом является полосовой фильтрацией. В силу локализации вейвлета во временной (или в пространственной) области коэффициенты вейвлет-разложения функции (определенные как свертки функции с вейвлетом в некоторой точке) зависят лишь от ее значений в ограниченной области. Основанное на вейвлет-разложении многомасштабное представление функций (также называемое многомасштабным или кратномасштабным анализом) позволяет выделять и анализировать различные частотные компоненты локально заданной функции. В силу перечисленных свойств

вейвлет-разложение стало альтернативой разложения в ряд Фурье на прямой или на плоскости в разных задачах обработки сигналов.

Теория вейвлет-разложения на плоскости не может быть естественно распространена на случай двумерной сферы в силу ее другой топологии. В отличие от одномерного или плоского случая имеются разные способы задания растяжения на сфере (например, используя стереографическую проекцию). Этим отчасти объясняется многообразие известных на сегодняшний день конструкций вейвлетов на сфере (например, [32], [54], [61]). Кроме того, вейвлеты на сфере не имеют компактного носителя, в случае если они являются гармоническими вне сферы функциями. Другие трудности связаны с наличием особенностей на полюсах в стандартной сферической системе координат и численными проблемами, возникающими при аппроксимации функций на сфере по дискретному набору точек.

Техническим университетом Кайзерслаутерна (В. Фреден и др.) разработан метод сферического вейвлет-разложения (СВР), использующий гармонические вейвлеты. В основе метода лежат элементы теории сингулярных интегралов на сфере типа Абеля-Пуассона. Определяющими понятиями являются *скейлинг-функции*, зависящие от уровня детализации j и сходящиеся в L^2 к дельта-функции Дирака на сфере с ростом j , и *уравнение уточнения* (refinement equation), определяющее вейвлет и его двойственный вейвлет. Метод СВР позволяет выделять разные частотные (в смысле разложений по сферическим гармоникам) компоненты исследуемой функции и приводит к ее многомасштабному представлению. С помощью этого метода его авторами [56] получено многомасштабное представление глобальной модели EGM96, а также построены оригинальные глобальные модели по данным спутниковых миссий CHAMP и GRACE.

Также распространены методы аппроксимации с использованием разложений по радиальным мультиполям [71], мультипольным вейвлетам [61] и [66], точечным массам [95] и гармоническим сплайнам [45], [77]. В [66], [71] предложены алгоритмы адаптивной аппроксимации, в которых выполняется подбор параметров базисных функций (сферической широты, долготы и глубины залегания точечной массы или мультиполя) по вариации поля силы тяжести. Распространение перечисленных конструкций при решении задачи локального комбинирования данных в

физической геодезии связано с гармоничностью базисных функций вне сферы, с возможностью работы с локальными данными за счет свойства пространственной локализации. Относительно мало литературы посвящено сравнению различных подходов на основе перечисленных разложений [89].

В диссертационной работе для локального определения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии используется метод СВР на основе гармонических вейвлетов типа Абеля-Пуассона в концепции В. Фредена [55]. Метод позволяет регуляризовать некорректно поставленные задачи трансформаций (23) и (25), удобен при работе с локальными данными аэрогравиметрии, при этом вейвлет имеет выражение в виде элементарной функции, что существенно упрощает алгоритмы.

Глава 2. Многомасштабное представление аномалии силы тяжести на основе сферического вейвлет-разложения

В главе 2 вводится метод СВР и основанное на нем многомасштабное представление функций на сфере. Более подробно метод изложен в [55], [56]. § 2.1 является вводным, где определяется разложение в ряд по сферическим функциям. В §§ 2.2-2.3 излагается метод СВР функций из гильбертова пространства L^2 на сфере и функций, гармонических вне сферы. Вводится многомасштабное представление с использованием скейлинг-функции и вейвлета Абеля-Пуассона. Предложен вариант доказательства того факта, что подпространства L^2 , определяемые таким многомасштабным представлением, не обладают структурой ни прямой, ни ортогональной суммы. Вопросы численной реализации метода СВР рассматриваются в § 2.3: вводится дискретное СВР, обсуждается выбор максимального уровня детализации J , узловой сетки и весов квадратурной формулы, радиуса зоны интегрирования. Получены оценка погрешности интегрирования в выбранной зоне и оценка величины ошибки «сглаживания» функции в результате СВР на уровне детализации J . Показана возможность регуляризации задачи трансформации поля силы тяжести с помощью СВР. Результаты главы опубликованы в работе [7].

§ 2.1. Вводные обозначения

Обозначим через $L^2(\Omega_R)$ гильбертово пространство функций f : $\Omega_R \rightarrow \mathbb{R}$, определенных на сфере $\Omega_R \subset \mathbb{R}^3$ радиуса R и интегрируемых с квадратом, со скалярным произведением в нем:

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(\Omega_R)} = \int_{\Omega_R} f_1(x) f_2(x) d\omega(x), \quad (28)$$

где $f_1, f_2 \in L^2(\Omega_R)$, $d\omega(x)$ — элемент поверхности сферы, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $x \in \Omega_R$. Норма в $L^2(\Omega_R)$ определяется как

$$\|f\|_{L^2(\Omega_R)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2(\Omega_R)}}. \quad (29)$$

Стандартным ортонормированным базисом в $L^2(\Omega_R)$ служит система сферических функций $\frac{1}{R}Y_{nk}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $|k| = 0, 1, 2, \dots, n$ [60]:

$$\left\langle \frac{1}{R}Y_{nk}, \frac{1}{R}Y_{ml} \right\rangle_{L^2(\Omega_R)} = \delta_{nm}\delta_{kl}, \quad (30)$$

где δ_{nm} — символ Кронекера, n — степень, k — порядок сферической функции. Тогда для любой функции $f \in L^2(\Omega_R)$ справедливо однозначное представление в виде ряда (аналог ряда Фурье на сфере):

$$f(x) = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n f_{nk} Y_{nk}(x),$$

где коэффициенты разложения определяются как

$$f_{nk} = \left\langle f, \frac{1}{R}Y_{nk} \right\rangle_{L^2(\Omega_R)}. \quad (31)$$

Сходимость ряда понимается в смысле сходимости в $L^2(\Omega_R)$. Имеет место равенство Парсеваля:

$$\|f\|_{L^2(\Omega_R)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n f_{nk}^2. \quad (32)$$

В сферических координатах r , λ , φ_0 сферические функции выражаются через присоединенные полиномы Лежандра $P_{nk}(\cos \theta)$ (где $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ — ко-широта) по формуле [60]:

$$Y_{nk}(\lambda, \theta) = \begin{cases} \kappa_{nk} P_{nk}(\cos \theta) \cos k\lambda, & k \geq 0, \\ \kappa_{n|k|} P_{n|k|}(\cos \theta) \sin |k|\lambda, & k < 0, \end{cases} \quad (33)$$

где $\kappa_{n|k|}$ — нормировочный коэффициент (17). Сферические функции являются собственными функциями оператора Лапласа.

По теореме о сложении сферических функций справедливо равенство [60]:

$$\sum_{k=-n}^n Y_{nk}(x)Y_{nk}(y) = \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\xi^T \eta), \quad (34)$$

где $P_n(\cdot)$ — полином Лежандра степени n (16); $\xi = x/R$, $\eta = y/R$, $x, y \in \Omega_R$. Через $x^T y$ обозначено стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^3 : $x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

§ 2.2. Сферическое вейвлет-разложение в L^2

Сферическое вейвлет-разложение в концепции В. Фредена основывается на скейлинг-функциях уровня детализации $j \in \mathbb{N}_0$ (множество неотрицательных целых чисел) [55]:

$$\Phi_j(x, y) = \frac{1}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j(n) \sum_{k=-n}^n Y_{nk}(x)Y_{nk}(y), \quad (35)$$

где $\varphi_j(n)$ — символ или генератор скейлинг-функции, $x, y \in \Omega_R$. Символ скейлинг-функции уровня j должен удовлетворять следующим условиям [55]: а) $\varphi_j(0) = 1$; б) $\varphi_j(n)$ монотонно убывает по n до 0; а также условию:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \varphi_j^2(n) < \infty. \quad (36)$$

Из а) - б) следует, что символ неотрицателен. Кроме того, требуется, чтобы для каждого n последовательность $\varphi_j(n)$ монотонно возрастала по j и существовал предел:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j(n) = 1. \quad (37)$$

На основании теоремы сложения сферических функций (34) выражение для скейлинг-функции (35) можно переписать в виде:

$$\Phi_j(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} P_n(\xi^T \eta). \quad (38)$$

Откуда следует, что $\varphi_j(n)$ являются коэффициентами разложения скейлинг-функции в ряд по полиномам Лежандра. Из (38) также следует осесимметричность скейлинг-функции, то есть $\Phi_j(x, y)$ зависит от только сферического расстояния между точками x и y .

В силу (37) скейлинг-функция стремится при $j \rightarrow \infty$ к дельта-функции Дирака на сфере. Откуда имеет место предел для любой функции $f \in L^2(\Omega_R)$:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - \Phi_j * f\|_{L^2(\Omega_R)} = 0, \quad (39)$$

где свертка определяется равенством:

$$(\Phi_j * f)(x) = \langle \Phi_j(x, \cdot), f \rangle_{L^2(\Omega_R)} = \int_{\Omega_R} \Phi_j(x, y) f(y) d\omega(x), \quad (40)$$

и является функцией из $L^2(\Omega_R)$. При этом, если f_{nk} — коэффициенты разложения $f(x)$ по сферическим функциям, то коэффициентами разложения функции $(\Phi_j * f)(x)$ являются произведения $\varphi_j(n) f_{nk}$.

В диссертационной работе используется скейлинг-функция типа Абеля-Пуассона с символом (рис. 1):

$$\varphi_j(n) = e^{-2^{-j}n}. \quad (41)$$

В этом случае сумма ряда (38) записывается в виде элементарной функции, что уменьшает вычислительную сложность алгоритмов [56]:

$$\Phi_j(x, y) = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{1 - b_j^2}{(1 + b_j^2 - 2b_j \xi^T \eta)^{3/2}}, \quad b_j = e^{-2^{-j}}, \quad (42)$$

где $\xi = x/R$, $\eta = y/R$.

Скейлинг-функция Абеля-Пуассона $\Phi_j(x, y)$ (рис. 2) обладает следующими свойствами: $\Phi_j(x, y)$ строго положительна в области определения и интеграл от $\Phi_j(x, y)$ по сфере равен 1. Имеют место оценки для норм свертки [57]:

$$\|\Phi_j * f\|_{C(\Omega_R)} \leq \|f\|_{C(\Omega_R)}, \quad \text{для всех } f \in C(\Omega_R), \quad (43)$$

$$\|\Phi_j * f\|_{L^2(\Omega_R)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega_R)}, \quad \text{для всех } f \in L^2(\Omega_R), \quad (44)$$

где $\|f\|_{C(\Omega_R)} = \max_{x \in \Omega_R} |f(x)|$.

Отметим, что скейлинг-функция Абеля-Пуассона является функцией с неограниченной полосой частот (non-bandlimited). С точки зрения

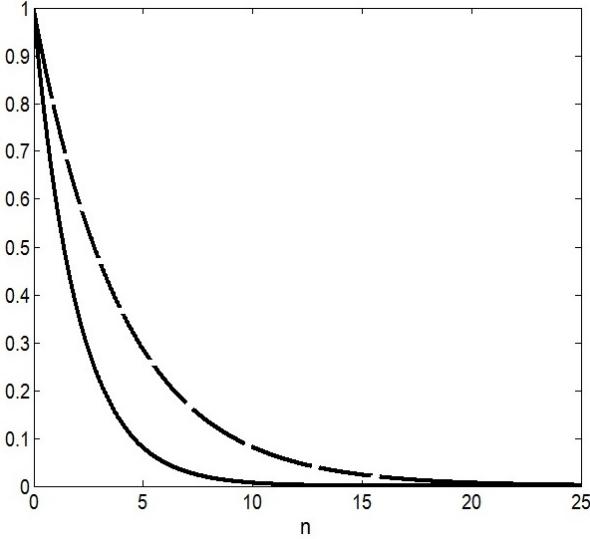


Рис. 1: Символ скейлинг-функции Абеля-Пуассона для $j=1$, $j=2$ (пунктир).

принципа неопределенности соотношение пространственной и частотной локализации скейлинг-функции Абеля-Пуассона близко к оптимальному [54]. Из скейлинг-функций с ограниченной частотной полосой (для которых ряд в (35) конечен) назовем скейлинг-функций Шеннона, Блэкмана, Бернштейна, кубические полиномиальные и др. [83]. Скейлинг-функции этого типа имеют пространственные осцилляции.

Функции $\psi_j(n)$ и $\tilde{\psi}_j(n)$ называются *символами вейвлета и двойственного вейвлета* уровня детализации j , если для каждого n они удовлетворяют *уравнению уточнения* (refinement equation):

$$\tilde{\psi}_j(n)\psi_j(n) = \varphi_{j+1}^2(n) - \varphi_j^2(n). \quad (45)$$

Рассмотрим класс вейвлетов и двойственных вейвлетов, порождаемых символами $\psi_j(n) = \varphi_{j+1}(n) - \varphi_j(n)$ и $\tilde{\psi}_j(n) = \varphi_{j+1}(n) + \varphi_j(n)$ соответственно. В этом случае вейвлет и двойственный вейвлет выражаются через скейлинг-функцию по формулам:

$$\Psi_j(x, y) = \Phi_{j+1}(x, y) - \Phi_j(x, y), \quad (46)$$

$$\tilde{\Psi}_j(x, y) = \Phi_{j+1}(x, y) + \Phi_j(x, y). \quad (47)$$

Формулы для символов вейвлета и двойственного вейвлета Абеля-

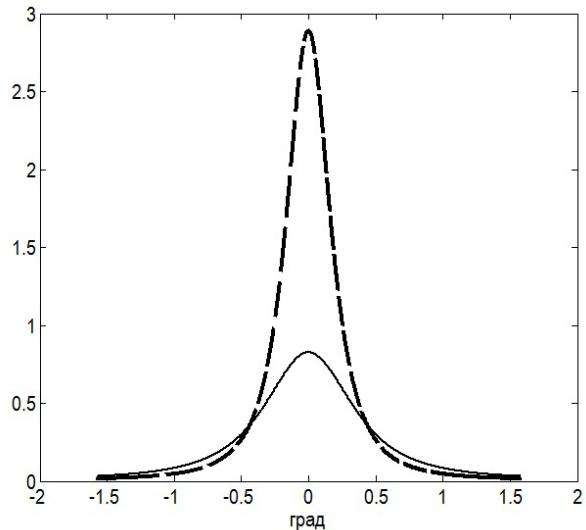


Рис. 2: Скейлинг-функция Абеля-Пуассона для $j=1$, $j=2$ (пунктир).

Пуассона:

$$\psi_j(n) = e^{-2^{-j-1}n} - e^{-2^{-j}n}, \quad (48)$$

$$\tilde{\psi}_j(n) = e^{-2^{-j-1}n} + e^{-2^{-j}n}. \quad (49)$$

Символ вейвлета $\psi_j(n)$ и вейвлет Абеля-Пуассона $\Psi_j(x, y)$ изображены на рис. 3-4.

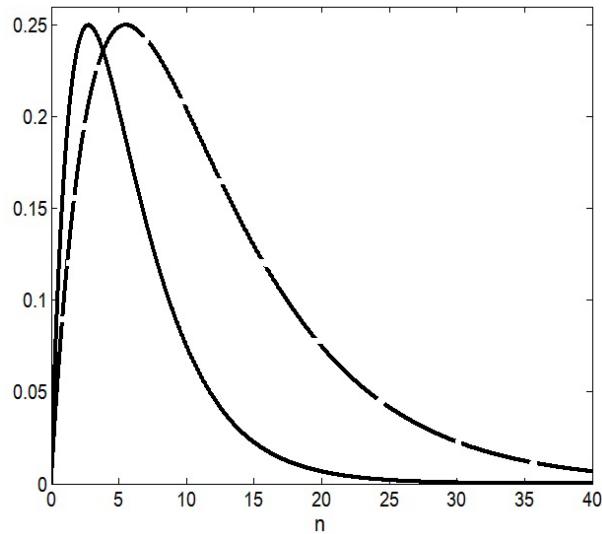


Рис. 3: Символ вейвлета Абеля-Пуассона для $j=1$, $j=2$ (пунктир).

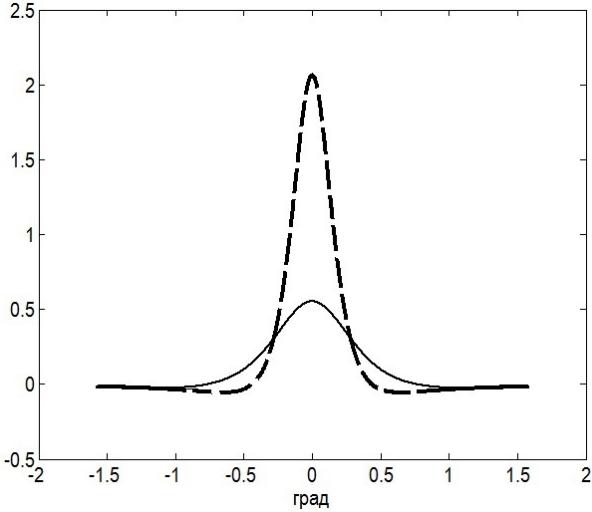


Рис. 4: Вейвлет Абеля-Пуассона для $j=1$, $j=2$ (пунктир).

Многомасштабное представление функции

Многомасштабное представление функции $f(x)$ из $L^2(\Omega_R)$ состоит в *вейвлет-разложении* (вычислении скейлинг-коэффициентов (СК) и вейвлет-коэффициентов (ВК) на разных уровнях детализации) и *вейвлет-восстановлении* (вычислении сглаженной и детальных компонент функции на разных уровнях детализации). Скейлинг-коэффициент $a_J(y)$ функции f на уровне детализации J в точке $y \in \Omega_R$ определяется формулой [55]:

$$a_J(y) = (\Phi_J * f)(y) = \int_{\Omega_R} \Phi_J(y, x) f(x) d\omega(x). \quad (50)$$

Вейвлет-коэффициенты $c_j(y)$ в точке $y \in \Omega_R$ на разных уровнях детализации $0 \leq j < J$ определяются как:

$$c_j(y) = (\Psi_j * f)(y). \quad (51)$$

Отметим, что в терминах теории фильтров СК и ВК интерпретируются как результаты низкочастотной и полосовой фильтрации соответственно.

Формула *вейвлет-восстановления* $f_J(x)$ функции $f(x)$ на уровне детализации J по ВК на уровнях $j_0, \dots, J-1$ и по СК на уровне j_0 имеет

вид [55]:

$$\begin{aligned} f_J(x) &= f_{j_0}(x) + \sum_{j=j_0}^{J-1} g_j(x), \\ f_{j_0}(x) &= (\Phi_{j_0} * a_{j_0})(x), \\ g_j(x) &= (\tilde{\Psi}_j * c_j)(x), \end{aligned} \quad (52)$$

где $f_{j_0}(x)$ — сглаженная компонента $f(x)$, $g_j(x)$ — детальная компонента $f(x)$. При этом $f_J(x)$ может быть записана как

$$f_J(x) = (\Phi_J * a_J)(x). \quad (53)$$

В силу (39) результат вейвлет-восстановления $f_J(x)$ при $J \rightarrow \infty$ оказывается сколь угодно близок к $f(x)$ в метрике L^2 .

Имеет место оценка скорости равномерной сходимости. А именно, если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой c_f , то есть $|f(x) - f(y)| \leq c_f \rho(x, y)$ для любых $x, y \in \Omega_R$, ρ — сферическое расстояние, то верна оценка:

$$\|f - f_J\|_{C(\Omega_R)} \leq \sqrt{2}(c_f + h_0^{-1}\|f\|_{C(\Omega_R)})\sqrt{1 - b_J^2}, \quad (54)$$

где $h_0 \in (0, 1)$ — произвольная константа.

Приведем также приближенную формулу (51), позволяющую вычислить ВК по СК некоторого (максимального) уровня детализации J :

$$\begin{aligned} c_j(y) &= (\Psi_j * f)(y) \doteq \\ &\doteq (\Psi_j * a_J)(y) = \int_{\Omega_R} \Psi_j(y, x) a_J(x) d\omega(x), \quad j < J. \end{aligned} \quad (55)$$

Многомасштабное представление (52) определяет следующую структуру в $L^2(\Omega_R)$. Вейвлет-разложению сопоставляется оператор

$$P_J : L^2(\Omega_R) \rightarrow L^2(\Omega_R), \quad (56)$$

такой, что $P_J f = f_J$. Подпространство $V_J = \text{Im } P_J \subset L^2(\Omega_R)$ (образ оператора) называется *масштабирующим пространством*:

$$V_J = \{\Phi_J * a_J \mid \text{где } a_J = \Phi_J * f, f \in L^2(\Omega_R)\}. \quad (57)$$

Пространства V_j образуют систему вложенных подпространств для $j \in \mathbb{N}_0$, а их объединение (замкнутое по норме L^2) совпадает с L^2 :

$$\bullet \quad V_0 \subset \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots \subset L^2(\Omega_R); \quad (58)$$

$$\bullet \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} V_j}^{\|\cdot\|_{L^2(\Omega_R)}} = L^2(\Omega_R). \quad (59)$$

Также, вводятся операторы $D_j : L^2(\Omega_R) \rightarrow L^2(\Omega_R)$, $j \in \mathbb{N}_0$, такие, что $D_j f = g_j$, где g_j – детальные компоненты f , определенные в (52). Образ оператора D_j , обозначаемый через W_j , называется *детализирующими пространствами*:

$$W_j = \{\tilde{\Psi}_j * c_j \mid \text{где } c_j = \Psi_j * f, f \in L^2(\Omega_R)\}. \quad (60)$$

Справедливы разложения масштабирующих пространств в сумму подпространств:

$$\bullet \quad V_{j+1} = V_j + W_j; \quad (61)$$

$$\bullet \quad V_J = V_{j_0} + \sum_{j=j_0}^{J-1} W_j. \quad (62)$$

Об ортогональности суммы детализирующих подпространств

Сумма подпространств (62) не является ни прямой, ни ортогональной в общем случае произвольных вейвлетов, удовлетворяющих (45) [55]. Выявим структуру суммы подпространств в случае вейвлетов Абеля-Пуассона. Рассмотрим более общий случай произвольных вейвлетов с неограниченной частотной полосой и покажем, что сумма детализирующих пространств не является прямой (ни, следовательно, ортогональной). Для этого достаточно показать, что существует такое j' , $j_0 \leq j' \leq J - 1$, что

$$W_{j'} \cap \sum_{j=j_0, j \neq j'}^{J-1} W_j \neq \{0\}, \quad (63)$$

то есть существуют функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ такие, что

$$f_1(x) \in W_{j'}, \quad f_2(x) \in \sum_{j=j_0, j \neq j'}^{J-1} W_j, \quad f_1(x) = f_2(x) \neq 0.$$

В качестве прообраза $f_1(x)$ в L^2 выберем сферическую функцию $Y_{nk}(x)$ произвольной степени n и порядка k . Тогда $f_1(x) = \tilde{\psi}_{j'}(n)\psi_{j'}(n)Y_{nk}(x)$, при этом $f_1(x) \neq 0$, так как для функций с неограниченной частотной полосой $\tilde{\psi}_{j'}(n)\psi_{j'}(n) > 0$ для всех n (в силу (45), строгой положительности $\varphi_{j'}(n)$ и возрастания $\varphi_{j'}(n)$ по j'). В качестве прообраза $f_2(x)$ в L^2 возьмем функцию $\left(\sum_{j=j_0, j \neq j'}^{J-1} \tilde{\psi}_j(n)\psi_j(n)\right)^{-1} f_1(x)$. Тогда, очевидно, $f_2(x) = f_1(x) \neq 0$, что и требовалось доказать.

Исследуем структуру суммы детализирующих подпространств в случае вейвлетов с конечной полосой частот (то есть носитель символа скейлинг-функции конечен: $\text{supp } \varphi_j(n) < \infty$). Известно, что в случае вейвлетов Шеннона ($\varphi_j(n) = 1$ при $0 \leq n \leq 2^j$ и $\varphi_j(n) = 0$ при $n > 2^j$, $\tilde{\psi}_j(n) = \psi_j(n)$) сумма подпространств ортогональна [55].

Покажем, что для произвольных вейвлетов с конечной полосой частот из наличия в (62) прямой суммы следует ортогональность этой суммы. Действительно, если сумма прямая, то для любого j' , $j_0 \leq j' \leq J - 1$, верно, что

$$\text{supp } \tilde{\psi}'_j(n)\psi'_j(n) \cap \text{supp } \sum_{j=j_0, j \neq j'}^{J-1} \tilde{\psi}_j(n)\psi_j(n) = \emptyset. \quad (64)$$

Поскольку значения $\tilde{\psi}_j(n)\psi_j(n)$ неотрицательны при всех n и j , то

$$\text{supp } \sum_j \tilde{\psi}_j(n)\psi_j(n) = \bigcup_j \text{supp } \tilde{\psi}_j(n)\psi_j(n),$$

откуда и из (64) следует, что:

$$\text{supp } \tilde{\psi}_{j'}(n)\psi_{j'}(n) \cap \text{supp } \tilde{\psi}_j(n)\psi_j(n) = \emptyset. \quad (65)$$

Возьмем две произвольные функции $u(x) \in W_j$ и $v(x) \in W_{j'}$. Имеют место разложения $u(x)$ и $v(x)$ по сферическим функциям:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{R} \sum_{n \in \text{supp } \tilde{\psi}_j\psi_j} \tilde{\psi}_j(n)\psi_j(n) \sum_{k=-n}^n u_{nk} Y_{nk}(x), \\ v(x) &= \frac{1}{R} \sum_{n \in \text{supp } \tilde{\psi}_{j'}\psi_{j'}} \tilde{\psi}_{j'}(n)\psi_{j'}(n) \sum_{k=-n}^n v_{nk} Y_{nk}(x). \end{aligned}$$

Тогда, рассматривая скалярное произведение $u(x), v(x)$ и используя выписанные выше разложения, получим в силу (65) и ортогональности сферических функций, что:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega_R)} = 0,$$

то есть прямая сумма в (62) является ортогональной, что и требовалось доказать.

Легко показать, что из всех вейвлетов с конечной полосой частот, носитель символа которых при этом является односвязным (то есть представляет собой конечный набор последовательных целых чисел), ортогональную сумму детализирующих подпространств порождают вейвлеты Шеннона и только они.

В заключение данного раздела объединим полученные выше результаты в следующее

Утверждение 1. 1. Пусть $\psi_j(n)$ – символ вейвлета такой, что его носитель $\text{supp } \psi_j$ бесконечен, тогда сумма детализирующих подпространств $\sum W_j$ не является ни прямой, ни ортогональной.

2. Пусть $\psi_j(n)$ – символ вейвлета такой, что его носитель конечен и односвязен. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- a) $\sum W_j$ – прямая сумма;
- b) $\sum W_j$ – ортогональная сумма;
- c) $\psi_j(n)$ – символ вейвлета Шеннона.

§ 2.3. Сфериическое вейвлет-разложение гармонических функций

Во внешнем пространстве сферы скейлинг-функция $\Phi_j(x, y)$ (38) задается формулой [55]:

$$\Phi_j(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R}{|x|} \right)^{n+1} P_n(\xi^T \eta), \quad (66)$$

где $x \in \Omega_{r_j}^{ext}$, $y \in \Omega_R$, $\xi = x/|x|$, $\eta = y/R$. Множество $\Omega_{r_j}^{ext}$ – внешность сферы: $\Omega_{r_j}^{ext} = \{x : |x| > r_j = R \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\varphi_j(n)}\} \subset \mathbb{R}^3$.

Скейлинг-функция (66) является гармонической функцией в $\Omega_{r_j}^{ext}$, то есть $\Delta_x \Phi_j(x, \cdot) = 0$ для $x \in \Omega_{r_j}^{ext}$, где Δ_x – оператор Лапласа (3). Аналогичным (66) образом продолжаются гармонически во внешнее пространство сферы вейвлет (46) и двойственный вейвлет (47).

Формула для скейлинг-функции Абеля-Пуассона во внешнем пространстве имеет вид:

$$\Phi_j(x, y) = \frac{1}{4\pi R|x|} \frac{1 - b_j^2}{(1 + b_j^2 - 2b_j \xi^T \eta)^{3/2}}, \quad b_j = e^{-2^{-j}} \frac{R}{|x|}, \quad (67)$$

где $\xi = x/|x|$, $\eta = y/R$, $|x| > R b_j$, $y \in \Omega_R$.

В [55] вводится вейвлет-разложение гармонических в Ω_R^{ext} функций. А именно, рассматривается пространство всех функций $f(x)$ гармонических в Ω_R^{ext} , регулярных на бесконечности (то есть $|f(x)| = O(|x|^{-1})$, $|\nabla_x f(x)| = O(|x|^{-2})$ при $|x| \rightarrow \infty$) и гладких на сфере так, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2s} \sum_{k=-n}^n f_{nk}^2 < \infty, \quad (68)$$

для некоторого $s \in \mathbb{R}$, где $f_{nk} = \langle f, B_{nk} \rangle_{L^2(\Omega_R)}$, $B_{nk}(x) = \frac{1}{R} \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n+1} Y_{nk}(x)$.

Функции $B_{nk}(x)$ называются шаровыми функциями [60].

Задав скалярное произведение на данном множестве функций как

$$\langle f, g \rangle_{H_s(\overline{\Omega}_R^{ext})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2s} \sum_{k=-n}^n f_{nk} g_{nk}, \quad (69)$$

вводят пространство Соболева $H_s(\overline{\Omega}_R^{ext})$, получаемое замыканием описанного множества функций по индуцированной скалярным произведением норме, $\overline{\Omega}_R^{ext} = \Omega_R^{ext} \cup \Omega_R$.

В $H_s(\overline{\Omega}_R^{ext})$ вводится вейвлет-разложение функции $f(x)$, в котором СК и ВК вычисляются с помощью (50) и (51) по граничным значениям $f(x)$ на сфере. Вейвлет-восстановление $f_J(x)$, вычисляемое по (52), определено во всем внешнем пространстве сферы. Доказывается, что $f_J(x)$ и ее производные порядка, зависящего от s , равномерно сходятся в $\overline{\Omega}_R^{ext}$ при $J \rightarrow \infty$ к $f(x)$ и ее соответствующим производным [57]. Более точно, имеет место

Теорема 2. (Преден, [57]) $\nabla^l f_J(x)$ равномерно сходится к $\nabla^l f(x)$ при $J \rightarrow \infty$ для всех $f \in H_s(\overline{\Omega}_R^{ext})$, $s > l + 1$, где $\nabla^l = \partial^l / (\partial x_1)^{l_1} (\partial x_2)^{l_2} (\partial x_3)^{l_3}$, $l_1 + l_2 + l_3 = l$, $l_i \geq 0$.

Определение максимального уровня детализации

Рассмотрим функцию $T(x)$ (возмущающий потенциал) из пространства гармонических вне сферы функций $H_s(\overline{\Omega_R^{ext}})$, введенного в (68)-(69), при $s=1$. Пусть функция $\Delta g(x)$ (аномалия силы тяжести) определена в $\overline{\Omega_R^{ext}}$ и связана с $T(x)$ соотношением (20) в области определения:

$$\Delta g(x) = -\frac{\partial T(x)}{\partial |x|}. \quad (70)$$

Определим максимальный уровень детализации J вейвлет-разложения аномалии $\Delta g(x)$. С одной стороны, как было показано выше, чем больше J , тем точнее результат вейвлет-восстановления $\Delta g(x)$ (в метрике рассматриваемого пространства). Однако на практике имеется ограничение. В работе [56] предлагается следующая методика выбора J . Пусть M – максимальная значимая частота сферической гармоники функции $\Delta g(x)$ и $\varphi_J(n)$ – символ скейлинг-функции Абеля-Пуассона. СВР (52) является низкочастотной фильтрацией, значимая полоса пропускания частот гармоник состоит из целых неотрицательных n , для которых $\varphi_J(n) > \gamma$, где $\gamma > 0$ – уровень среза, задаваемый пользователем. С ростом J полоса пропускания частот увеличивается. Тогда возникает ограничение на выбор J : фильтр (52) должен пропускать значимые частоты вплоть до M и подавлять более высокие частоты. То есть максимальный уровень детализации J следует определять как наибольшее целое, удовлетворяющее неравенству:

$$\varphi_J^2(M) \leq \gamma, \quad (71)$$

где γ – задано. Откуда имеет место явная формула для нахождения J :

$$J = \left\lceil \log_2 \left| \frac{M}{\log \gamma} \right| \right\rceil + 1. \quad (72)$$

Найдем зависимость степени «сглаживания» функции $\Delta g(x)$ в результате вейвлет-восстановления от величины параметра γ (данний вопрос в работе [56] не обсуждается). Представим $\Delta g(x)$ в виде суммы низкочастотной составляющей, содержащей сферические гармоники вплоть до степени M , и высокочастотной составляющей (обозначим ее через $\Delta g^{high}(x)$), содержащей высшие гармоники (со степенями $n > M$). Сформулируем и докажем

Утверждение 2. Имеет место неравенство

$$\max_{x \in \Omega_R^{ext}} |\Delta g_J^{high}(x)| \leq \gamma \max_{x \in \Omega_R} |\Delta g^{high}(x)|. \quad (73)$$

Доказательство. Обозначим через T_{nk} коэффициенты разложения возмущающего потенциала $T(x)$ по шаровым функциям. Получим оценку сверху для квадрата L^2 -нормы функции $\Delta g_J^{high}(x)$, используя равенство Парсеваля (32) и неравенство (71):

$$\begin{aligned} \|\Delta g_J^{high}\|_{L^2(\Omega_R)}^2 &= \|\Phi_J * (\Phi_J * \Delta g^{high})\|_{L^2(\Omega_R)}^2 = \\ &= \left(\frac{GM}{R}\right)^2 \sum_{n=M+1}^{\infty} \varphi_J^4(n)(n+1)^2 \sum_{n=-k}^k T_{nk}^2 \leq \\ &\leq \max_{n>M} \varphi_J^4(n) \left(\frac{GM}{R}\right)^2 \sum_{n=M+1}^{\infty} (n+1)^2 \sum_{n=-k}^k T_{nk}^2 = \\ &= \varphi_J^4(M) \|\Delta g^{high}\|_{L^2(\Omega_R)}^2 \leq \gamma^2 \|\Delta g^{high}\|_{L^2(\Omega_R)}^2 \leq \\ &\leq \gamma^2 \max_{x \in \Omega_R} |\Delta g^{high}(x)|^2 4\pi R^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, для квадрата нормы $\Delta g_J^{high}(x)$ в силу теоремы о среднем имеем:

$$\|\Delta g_J^{high}\|_{L^2(\Omega_R)}^2 = |\Delta g_J^{high}(\xi)|^2 4\pi R^2,$$

где $\xi \in \Omega_R$. Сопоставляя это выражение с предыдущим неравенством и переходя в нем к максимуму по ξ , получим:

$$\max_{\xi \in \Omega_R} |\Delta g_J^{high}(\xi)| \leq \gamma \max_{x \in \Omega_R} |\Delta g^{high}(x)|. \quad (74)$$

Осталось доказать, что

$$\max_{x \in \overline{\Omega}_R^{ext}} |\Delta g_J^{high}(x)| \leq \max_{\xi \in \Omega_R} |\Delta g_J^{high}(\xi)|,$$

откуда и из (74) будет вытекать исходное утверждение.

Последнее неравенство доказывается с помощью принципа максимума для функции $|x|\Delta g^{high}(x)$, гармонической вне сферы Ω_R и регулярной на бесконечности, записываемого в виде:

$$|x||\Delta g_J^{high}(x)| \leq R \max_{x \in \Omega_R} |\Delta g_J^{high}(x)|, \quad x \in \overline{\Omega}_R^{ext},$$

а именно

$$\begin{aligned} \max_{x \in \Omega_R^{ext}} |\Delta g_J^{high}(x)| &= \max_{x \in \Omega_R^{ext}} \frac{1}{|x|} |x| |\Delta g_J^{high}(x)| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{R} \max_{x \in \Omega_R^{ext}} |x| |\Delta g_J^{high}(x)| \leqslant \max_{x \in \Omega_R} |\Delta g_J^{high}(x)|, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Оценка погрешности интегрирования в малой зоне

В практических расчетах интегрирование по сфере в формуле свертки (40) в силу пространственной локализации скейлинг-функции Абеля-Пуассона $\Phi_j(x, y)$ (67) может быть заменено на интегрирование в круге $D_\rho(x) \subset \Omega_R$ (сферическая шапка) с центром в точке $R x/|x|$:

$$D_\rho(x) = \{y \in \Omega_R : \xi^T \eta \geqslant \rho\}, \quad (75)$$

где ρ — косинус сферического радиуса круга, $\xi = x/|x|$, $\eta = y/R$. Оценим погрешность «обрезания» интеграла свертки $\Phi_j * f$, где f предполагается непрерывной функцией на Ω_R . Справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_R \setminus D_\rho(x)} \Phi_j(x, y) f(y) d\omega(y) \right| &\leq \|f\|_{C(\Omega_R)} \int_{\Omega_R \setminus D_\rho(x)} \Phi_j(x, y) d\omega(y) = \\ &= \|f\|_{C(\Omega_R)} 2\pi R^2 \int_{\rho}^1 \Phi_j(t) dt = \|f\|_{C(\Omega_R)} \int_{\rho}^1 \frac{1 - b_j^2}{2(1 + b_j^2 - 2b_j t)^{3/2}} dt = \\ &= \|f\|_{C(\Omega_R)} \left(\frac{1 + b_j}{2b_j} - \frac{1 - b_j^2}{2b_j(1 + b_j^2 - 2b_j \rho)^{1/2}} \right), \end{aligned} \quad (76)$$

где $b_j = \frac{R}{|x|} e^{-2^{-j}}$. Таким образом, доказано

Утверждение 3. Погрешность вычисления свертки $(\Phi_j * f)(x)$ при интегрировании в круге (75), где $\Phi_j(x, y)$ — скейлинг-функция Абеля-Пуассона, $(x, y) \in \overline{\Omega}_R^{ext} \times \Omega_R^{ext}$, f — непрерывная на Ω_R функция, по абсолютной величине не превосходит (76).

Дискретный вид вейвлет-разложения

При вычислении СК (50), ВК (51), (55) и вейвлет-восстановления (52) интегральные свертки могут быть аппроксимированы с помощью квадратурных формул. В качестве сетки узлов часто используют эквиангулярную сетку (другие типы сеток обсуждаются в [83]). Квадратурная формула для ВК в точке x имеет вид:

$$c_j(x) = \int_{\Omega_R} \Psi_j(x, y) a_J(y) d\omega(y) \approx \sum_{s=1}^{N_j} \omega_{sj} \Psi_j(x, y_{sj}) a_J(y_{sj}), \quad (77)$$

где $\Psi_j(x, y)$ –вейвлет Абеля-Пуассона, y_{sj} – узлы эквиангулярной сетки уровня j на сфере Ω_R вида:

$$y_{sj} = R \begin{pmatrix} \cos \lambda_{mj} \cos \theta_{kj} \\ \sin \lambda_{mj} \cos \theta_{kj} \\ \sin \theta_{kj} \end{pmatrix} \quad (78)$$

В [57] предлагается использовать узлы квадратурной схемы, предложенной в [44], в которой ко-широта θ_{kj} и долгота λ_{mj} узлов (78) определяются как:

$$\begin{aligned} \theta_{kj} &= \frac{\pi k}{2M_j}, \quad k = 0, \dots, 2M_j, \\ \lambda_{mj} &= \frac{\pi m}{M_j}, \quad m = 0, \dots, 2M_j - 1, \end{aligned} \quad (79)$$

тогда $N_j = 2M_j(2M_j + 1)$ в (77). Здесь M_j – половина максимальной степени восстанавливаемой гармоники подынтегральной функции, то есть произведения $\Psi_j(x, y)a_J(y)$.

Веса квадратурной формулы зависят только от ко-широты и задаются в виде [44]:

$$\omega_{kj} = \frac{2\pi R^2}{M_j^2} \sin \theta_{kj} \sum_{l=0}^{M_j-1} \frac{1}{2l+1} \sin(2l+1)\theta_{kj}. \quad (80)$$

Если аппроксимируемая функция f и вейвлеты имеют конечный спектр с максимальной частотой гармоники M_j квадратурная формула (77)-(80) является точной (то есть алгебраический порядок точности $2M_j$). Ошибки дискретизации в остальных случаях оцениваются в [44].

Получим квадратурную схему с меньшим в 2 раза числом узлов эквидистантной сетки, определяемыми равенствами [7]:

$$\begin{aligned}\theta_{kj} &= \frac{\pi k}{M_j}, \quad k = 0, \dots, M_j, \\ \lambda_{mj} &= \frac{\pi m}{M_j}, \quad m = 0, \dots, 2M_j - 1.\end{aligned}\tag{81}$$

Формулы для весов:

$$\omega_{kj} = \left(\frac{\pi R}{M_j}\right)^2 \sin \theta_{kj}.\tag{82}$$

Квадратурная схема (81)-(82) получена дискретизацией интеграла в (77) по широте по формуле Гаусса-Чебышева [3] и дискретизацией по долготе по формуле трапеций. Алгебраическая точность формулы равна $2M_j$.

Выпишем теперь формулу для вейвлет-восстановления (52) в дискретном виде:

$$f_J(x) \doteq \sum_{s=1}^{N_{j_0}} \omega_{sj_0} \Phi_{j_0}(x, y_{sj_0}) a_{j_0}(y_{sj_0}) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{s=1}^{N_j} \omega_{sj} \tilde{\Psi}_j(x, y_{sj}) c_j(y_{sj}).\tag{83}$$

Замечание. В силу пространственной локализации скейлинг-функции и вейвлета суммирование в (77) и в (83) можно проводить лишь для узлов в ограниченной области на сфере согласно утверждению 3 (76).

Трансформации поля силы тяжести

В § 1.2 было показано, что задачи трансформаций в аэрогравиметрии сводятся к решению вспомогательных задач, а именно к интегральным уравнениям (23), (25), в которых требуется определить аномалию силы тяжести или возмущающий потенциал на так называемой сфере Бьерхаммера по аномалии силы тяжести на постоянной высоте полета h над референц-эллипсоидом. Здесь будем предполагать, что аномалия $\Delta g(x)$ задана на постоянной высоте h над сферой Бьерхаммера Ω_R и что $\Delta g(x) \in L^2(\Omega_{R+h})$. Рассмотрим уравнение (23):

$$\Lambda T(x) = - \int_{\Omega_R} \frac{\partial \Pi(x, y)}{\partial |x|} T(y) d\omega(y) = \Delta g(x),\tag{84}$$

где $y \in \Omega_R$, $x \in \Omega_{R+h}$, Λ – интегральный оператор трансформации, $\Lambda : L^2(\Omega_R) \rightarrow L^2(\Omega_{R+h})$, $\Pi(x, y)$ – ядро Пуассона (24). Оператор Λ компактен, имеет бесконечный ранг $\dim \text{Im } \Lambda = \infty$, откуда следует, что обратный оператор Λ^{-1} не ограничен и задача трансформации является некорректно поставленной по Адамару [57]. Сингулярные числа оператора Λ имеют вид

$$s_n = (n+1) \left(\frac{R}{R+h} \right)^n.$$

Вейвлет-аппроксимация $\Delta g_J(x)$ функции $\Delta g(x)$ регуляризует задачу, так как в этом случае сингулярные числа регуляризованного оператора $\Lambda^{-1}P_J$, где P_J – оператор вейвлет-преобразования (56), имеют вид

$$s_n^{-1} \varphi_J^2(n) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{R+h}{R} \right)^n e^{-n2^{-J+1}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{R+h}{R} e^{-2^{-J+1}} \right)^n.$$

Здесь $\varphi_J(n)$ – символ скейлинг-функции Абеля-Пуассона (41), квадрат символа $\varphi_J^2(n)$ суть сингулярные числа оператора P_J . Сходимость нормы обратного регуляризованного оператора $\Lambda^{-1}P_J$ имеет место в случае, если

$$\frac{R+h}{R} e^{-2^{-J+1}} < 1.$$

Рассматривая уравнение (25), также приDEM к условию (85). Таким образом, вейвлет-аппроксимация аномалии на уровне детализации J , выбранном с учетом (85), регуляризует вспомогательные задачи трансформаций (23), (25). Получим формулу приближенного решения $T_J(x)$ задачи (23), аппроксимировав аномалию $\Delta g(x)$ с помощью формулы дискретного вейвлет-преобразования (83):

$$\begin{aligned} T_J(x) &= \sum_{s=1}^{N_{j_0}} \omega_{sj_0} a_{j_0}(y_{sj_0}) \Lambda^{-1} \Phi_{j_0}(x, y_{sj_0}) + \\ &+ \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{s=1}^{N_j} \omega_{sj} c_j(y_{sj}) \Lambda^{-1} \tilde{\Psi}_j(x, y_{sj}), \end{aligned} \quad (85)$$

где $a_{j_0}(y_{sj_0})$, $c_j(y_{sj})$ – СК и ВК аномалии силы тяжести соответственно в узлах y_{sj_0} , $y_{sj} \in \Omega_{R+h}$. Функции $\Lambda^{-1} \Phi_{j_0}(x, y_{sj_0})$ и $\Lambda^{-1} \tilde{\Psi}_j(x, y_{sj})$ опреде-

ляются выражениями:

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}\Phi_{j_0}(x, y_{sj_0}) &= - \int_{\Omega_R} K_{\Lambda^{-1}}(x, y) \Phi_{j_0}(y, y_{sj_0}) d\omega(y), \\ \Lambda^{-1}\tilde{\Psi}_j(x, y_{sj}) &= \Lambda^{-1}\Phi_{j+1}(x, y_{sj}) + \Lambda^{-1}\Phi_j(x, y_{sj}),\end{aligned}$$

где $K_{\Lambda^{-1}}(x, y)$ – ядро обратного оператора, $\Phi_{j_0}(y, y_{sj_0})$, $\tilde{\Psi}_j(y, y_{sj})$ – скейлинг-функция и двойственный вейвлет Абеля-Пуассона соответственно. Функция $\Lambda^{-1}\Phi_j(y, y_{sj})$ имеет представление в виде элементарной функции (функция Хотина [74]):

$$\Lambda^{-1}\Phi_j(x, y_{sj}) = \frac{u(R+h)}{2\pi\Upsilon^{1/2}} - \frac{R+h}{4\pi} \ln\left(\frac{\Upsilon^{1/2} + u - \cos(\xi^T\eta)}{1 - \cos(\xi^T\eta)}\right), \quad (86)$$

где $\Upsilon = 1 - 2u \cos(\xi^T\eta) + u^2$, $u = b_j(R+h)/R$, $x \in \Omega_R$, $\xi = x/R$, $\eta = y_{sj}/(R+h)$.

§ 2.4. Выводы к главе 2

В главе 2 изложен метод многомасштабного представления на основе гармонического СВР [55], с помощью которого в следующей главе разрабатывается методика оценивания аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии. Выбраны вейвлеты типа Абеля-Пуассона, задаваемые элементарной функцией. Приведен вариант доказательства того, что многомасштабное представление в случае выбранных вейвлетов не является ни прямым, ни ортогональным. Получены оценка погрешности интегрирования в малой зоне при вычислении СК, оценка погрешности «сглаживания» функции при вейвлет-восстановлении, выписаны квадратурные формулы для дискретного СВР.

Глава 3. Оценивание аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии с использованием многомасштабного представления

В данной главе содержится теоретическое описание разработанной методики локального оценивания аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии и глобальной модели гравитационного поля Земли с помощью метода многомасштабного представления на сфере, изложенного в главе 2. Методика предназначена для построения локальной модели аномального поля силы тяжести и возможности определения характеристик поля (трансформант) с использованием данной модели. Применяемый метод многомасштабного представления основан на гармоническом СВР, который позволяет работать с локальными аэрогравиметрическими данными и регуляризует обратные задачи трансформаций (за счет ограничения спектра аномалии в разложении по шаровым функциям). Метод дает возможность оптимально сочетать данные аэрогравиметрии и глобальной модели для корректного решения задач трансформаций. Результаты применения методики к модельным и реальным данным обсуждаются в главе 4.

Структура главы 3 следующая. В § 3.1 рассматривается первый этап методики – оценивание ВК аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии. Аномалия силы тяжести предполагается функцией ограниченного спектра, что позволяет ее аппроксимировать с помощью скейлинг-функций Абеля-Пуассона некоторого (максимального) уровня детализации. Далее ставится задача оптимального оценивания СК аномалии си-

лы тяжести по данным аэрогравиметрии, решаемая с привлечением статистической информации об ошибках измерений. Решение проводится с помощью рекуррентного МНК в информационной форме с шагом рекурсии по номеру галса съемки. Для полученной на последнем шаге рекурсии информационной матрицы СК, являющейся плохо обусловленной, проводится регуляризация. Найденная оценка СК позволяет вычислить оценку ВК данных аэрогравиметрии на разных уровнях детализации.

В § 3.2 рассматривается задача уточнения оценки ВК данных аэрогравиметрии по ВК глобальной модели на общих уровнях детализации, составляющая второй этап методики. Задача решается с помощью алгоритма МНК в предположении о некоррелированности ошибок ВК данных аэрогравиметрии и глобальной модели на разных уровнях детализации. В § 3.3 исследуется задача комбинирования ВК данных аэрогравиметрии и глобальной модели в постановке метода гарантирующего оценивания. Показано, что при некоторых соотношениях на «бортиках» ошибок данных комбинирование ВК нецелесообразно.

Материалы главы опубликованы в работах [8], [36], [16], [96].

§ 3.1. Оценивание коэффициентов сферического вейвлет-разложения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии

Введем модель сглаженных авиационных измерений на галсе полета. Напомним, галсом называется прямолинейный отрезок траектории движения ЛА над поверхностью референц-эллипсоида. В ходе аэрогравиметрической съемки галсы образуют систему почти параллельных равноотстоящих отрезков примерно на одной высоте. Каждый галс Γ_k будем представлять как образ непрерывной параметризованной временем кривой в \mathbb{R}^3 :

$$\Gamma_k = \{x_k(t) = (\varphi_k(t), \lambda_k(t), h_k(t)) | t \in I_k \subset \mathbb{R}\}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (87)$$

где $\varphi_k(t), \lambda_k(t), h_k(t)$ – географические координаты ЛА на k -ом галсе, I_k – интервал времени движения по k -му галсу, K – общее число галсов.

Сглаживание авиационных измерений на галсе проводится с помощью так называемого гравиметрического фильтра [37]. Фильтр имеет следующие заданные характеристики: импульсную переходную функцию, частоту среза и длину носителя [59], которые обозначим через $h_f(t)$, ω_{cut} и $2M + 1$ соответственно. Разрешающая способность в пространстве гравиметрического фильтра равна половине выявляемой длины волны L аномалии силы тяжести, амплитуда которой в результате фильтрации подавляется вдвое. Величина L определяется выражением $L = 2\pi V/\omega_{cut}$. Здесь V — средняя скорость движения ЛА вдоль галса.

Модель сглаженных авиационных измерений на галсе запишем в виде [37]:

$$\Delta g'_k(t_{ik}) = \sum_{m=i-M}^{i+M} h_f(t_{ik} - t_{mk}) \Delta g(x_k(t_{mk})) + \delta g_k(t_{ik}), \quad (88)$$

где $i = 1, \dots, M_k$, $\Delta g(x_k(t_{mk}))$ — аномалия силы тяжести в свободном воздухе в точке измерения $x_k(t_{mk}) \in \mathbb{R}^3$, заданной в гринвичской системе координат; $t_{mk}, t_{ik} \in I_k$ — дискретные моменты времени, относящиеся к k -ому галсу; $\Delta g'_k(t_{ik})$ — измерение аномалии силы тяжести на k -ом галсе, $\delta g_k(t_{ik})$ — ошибка измерения на галсе, M_k — число измерений на k -ом галсе. Дискретные моменты времени и координаты точек измерений предполагаются известными.

Введем предположения об ошибках авиационных измерений $\delta g_k(t_{ik})$. Будем считать, что ошибка измерения на k -ом галсе как функция полетного времени является случайным процессом с нулевым математическим ожиданием и известной корреляционной функцией $C_k(t_{ik} - t_{mk})$, определяемой погрешностями «сырых» измерений и свойствами гравиметрического фильтра. Ошибки измерения на разных галсах не коррелированы:

$$E[\delta g_k(t_{ik})\delta g_l(t_{ml})] = 0, \quad k \neq l. \quad (89)$$

Об аномалии $\Delta g(x)$ предположим, что функция $|x|\Delta g(x)$ принадлежит пространству Соболева $H_0(\overline{\Omega_R^{ext}})$, т. е. является гармонической в $\overline{\Omega_R^{ext}}$ и удовлетворяет (68) при $s = 0$. Здесь $\overline{\Omega_R^{ext}} = \Omega_R^{ext} \cup \Omega_R$, где Ω_R — сфера, центр которой совпадает с центром Земли, радиус R равен минимальному значению длины $|x_k(\cdot)|$ по всем точкам измерений на галсах. Дополнительно предположим, что $\Delta g(x)$ имеет ограниченный спектр (в

разложении по сферическим гармоникам). Пусть J – максимальный уровень детализации, отвечающий максимальной частоте гармоники (72). Тогда $\Delta g(x)$ может быть аппроксимирована сверткой скейлинг-функции Абеля-Пуассона с СК на уровне детализации J . Теорема 2 гарантирует равномерную ограниченность ошибки аппроксимации всюду в $\overline{\Omega_R^{ext}}$.

Уравнение (88), таким образом, может быть переписано в виде

$$\Delta g'_k(t_{ik}) = \sum_{m=i-M}^{i+M} h_f(t_{ik} - t_{mk})(\Phi_J * a_J)(x_k(t_{mk})) + \delta g_k(t_{ik}), \quad (90)$$

где $i = 1, \dots, M_k$. Интегральная свертка в (90), напомним, определяется выражением:

$$(\Phi_J * a_J)(x_k(t_{mk})) = \int_{\Omega_R} \Phi_J(x_k(t_{mk}), y) a_J(y) d\omega(y), \quad (91)$$

где $a_J(y)$ – СК аномалии силы тяжести на максимальном уровне детализации J в точке $y \in \Omega_R$. В силу нормировки скейлинг-функции СК имеют размерность аномалии силы тяжести (мГал).

Следует отметить, что уравнения (90) могут быть переписаны с использованием многомасштабного представления, введенного в (52) и имеющего вид

$$(\Phi_J * a_J)(x) = (\Phi_{j_0} * a_{j_0})(x) + \sum_{j=j_0}^{J-1} (\tilde{\Psi}_j * c_j)(x).$$

Проведя в нем дискретизацию сверток, можно поставить задачу оптимального оценивания ВК $c_j(\cdot)$ и СК $a_{j_0}(\cdot)$ по авиационным измерениям (90). Однако, как было показано в конце § 2.2, в такой постановке задача некорректна (или, по меньшей мере, крайне плохо обусловлена) из-за сильной коррелированности ВК на разных уровнях детализации. Поэтому далее для (90) ставится задача оценивания СК на максимальном уровне детализации J , по найденным оценкам которых затем пересчитываются ВК. На рис. 5 изображена схема алгоритмов методики.

Постановка задачи оценивания скейлинг-коэффициентов на максимальном уровне детализации

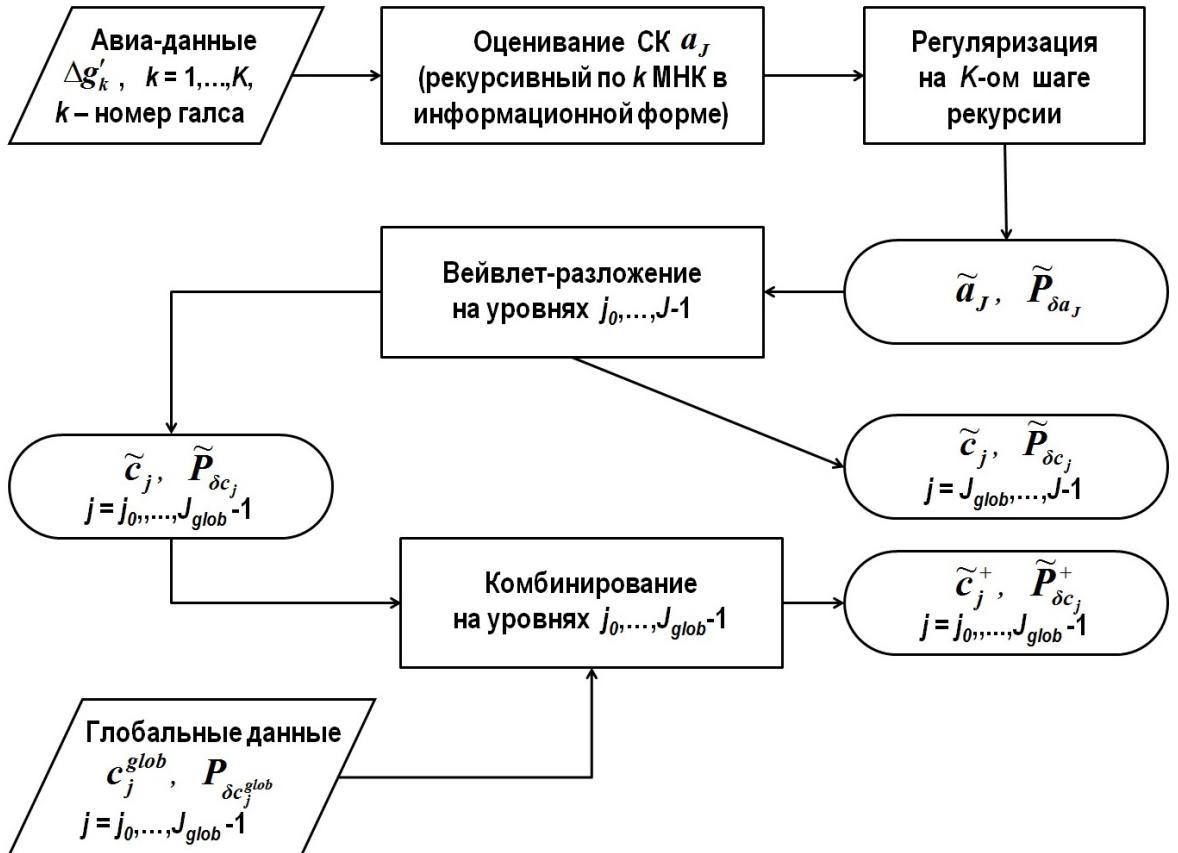


Рис. 5: Схема алгоритмов методики

Дискретизируем значения интегральной свертки в (91) с помощью квадратурной формулы:

$$(\Phi_J * a_J)(x_k(t_{mk})) \doteq \sum_{n,s} \omega_{ns} \Phi_J(x_k(t_{mk}), y_{ns}) a_J(y_{ns}), \quad (92)$$

где y_{ns} — узлы эквивалентной сетки на сфере Ω_R ,

$$y_{ns} = R \begin{pmatrix} \cos \lambda_s \cos \theta_n \\ \sin \lambda_s \cos \theta_n \\ \sin \theta_n \end{pmatrix}, \quad (93)$$

θ_n — сферическая ко-широта, λ_s — долгота (другие типы сеток приведены в [83]).

Значения шагов по долготе $\Delta\lambda = \lambda_{s+1} - \lambda_s$ и по ко-широте $\Delta\theta = \theta_{n+1} - \theta_n$ определим по величине Δ , равной минимуму из двух величин: расстояния между галсами и половины разрешающей способности

в пространстве $L/2$ гравиметрического фильтра. А именно, положим

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta}{R \cos \theta_{min}}, \quad \Delta\theta = \frac{\Delta}{R}, \quad (94)$$

где θ_{min} — минимальная сферическая ко-широта на участке съемки, размерности величин $\Delta\lambda$, $\Delta\theta$ — в радианах.

Веса интегрирования ω_{ns} зададим формулой [7]

$$\omega_{ns} = R^2 \Delta\lambda \Delta\theta \sin \theta_n, \quad (95)$$

получаемой в результате дискретизации интеграла в (92) по долготе по формуле трапеций, по широте — по формуле Гаусса-Чебышева [3]. В силу пространственной локализации скейлинг-функции суммирование в (92) достаточно проводить по узлам y_{ns} из некоторой окрестности $D(x_k(t_{mk})) \subset \Omega_R$ точки $x_k(t_{mk})R/|x_k(t_{mk})|$ на сфере. Сферический радиус этой окрестности выберем, минимизируя методическую погрешность «обрезания» суммы (76).

В результате множество узлов y_{ns} , используемых для вычисления (92) в точках измерений на всех галсах съемки (обозначим его через Y и пусть $N = |Y|$ — количество узлов в нем), состоит из узлов внутри участка съемки и узлов вне его на расстоянии, не большем радиуса окрестности суммирования, образуя почти равномерную сетку на сфере.

Представим Y в виде объединения его подмножеств Y_k , $k = 1, \dots, K$:

$$Y = \bigcup_{k=1}^K Y_k, \quad Y_k \subset Y, \quad N_k = |Y_k|, \quad (96)$$

где каждое подмножество Y_k состоит из узлов Y , заметаемых окрестностями суммирования точек измерений k -го галса, N_k — количество узлов в Y_k . В силу построения подмножества Y_k имеют по крайней мере попарные пересечения, то есть

$$Y_k \cap Y_l \neq \emptyset, \quad k, l = 1, \dots, K, \quad (97)$$

хотя бы для всех пар (k, l) таких, что $|k - l| = 1$.

Далее, используя (92) и пренебрегая методической погрешностью квадратурной формулы (92), запишем модель авиационных измерений на галсе (90) в матричной форме:

$$\Delta g'_k = H_k a_k + \delta g_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (98)$$

где $\Delta g'_k = (\Delta g'_k(t_{1k}), \dots, \Delta g'_k(t_{M_k k}),)^T$ и $\delta g_k = (\delta g_k(t_{1k}), \dots, \delta g_k(t_{M_k k}),)^T$ — соответственно векторы измерений на k -ом галсе и их ошибок размерности $M_k \times 1$, a_k — вектор размерности $N_k \times 1$ неизвестных СК $a_J(\cdot)$ в узлах множества Y_k . Через H_k обозначена матрица размера $M_k \times N_k$, элементами которой являются суммы произведений значений весовой функции гравиметрического фильтра в (90), весов квадратурной формулы и значений скейлинг-функции в узлах Y_k :

$$H_k = \begin{pmatrix} S_{n_1 s_1}(t_{1k}) & S_{n_2 s_2}(t_{1k}) & \dots & S_{n_{N_k} s_{N_k}}(t_{1k}) \\ S_{n_1 s_1}(t_{2k}) & S_{n_2 s_2}(t_{2k}) & \dots & S_{n_{N_k} s_{N_k}}(t_{2k}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n_1 s_1}(t_{M_k k}) & S_{n_2 s_2}(t_{M_k k}) & \dots & S_{n_{N_k} s_{N_k}}(t_{M_k k}) \end{pmatrix}. \quad (99)$$

Здесь введено обозначение

$$S_{n_p s_p}(t_{ik}) = \omega_{n_p s_p} \sum_{m=i-M}^{i+M} h_f(t_{ik} - t_{mk}) \Phi_J(x_k(t_{mk}), y_{n_p s_p}), \quad (100)$$

где $p = 1, \dots, N_k$, $i = 1, \dots, M_k$. В каждой строке матрицы (99) содержатся нулевые элементы (матрица является разреженной), так как суммирование в (92) для каждого m проводится по узлам y_{ns} из некоторой окрестности $D(x_k(t_{mk}))$.

Введем матрицу ковариаций случайного вектора ошибок измерений на k -ом галсе

$$R_k = E[\delta g_k \delta g_k^T]. \quad (101)$$

Элементы матрицы R_k определяются как

$$E[\delta g_k(t_{ik}) \delta g_k(t_{mk})] = C(t_{ik} - t_{mk}), \quad i, m = 1, \dots, M_k.$$

Ошибки измерений на разных галсах не коррелированы:

$$E[\delta g_k \delta g_l^T] = 0, \quad k \neq l. \quad (102)$$

Теперь поставим задачу оценивания вектора СК на максимальном уровне детализации J в виде задачи МНК:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \|\Delta g'_k - H_k a_k\|_{R_k^{-1}}^2 &= \\ &= \sum_{k=1}^K (\Delta g'_k - H_k a_k)^T R_k^{-1} (\Delta g'_k - H_k a_k) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (103)$$

где минимизация проводится по $a_k \in \mathbb{R}^{N_k}$, $k = 1, \dots, K$. При этом, учитывая (97), векторы a_k , $k = 1, \dots, K$, имеют хотя бы попарно общие элементы.

В силу построения множества узлов Y (103) часто является задачей неполного ранга, а также каждая из матриц H_k может иметь неполный ранг в силу построения Y_k .

Алгоритм оценивания скейлинг-коэффициентов

Задача (103) может быть решена с помощью алгоритма рекуррентного МНК в информационной форме [1], [64]:

$$\begin{aligned} Q_k &= Q_{k-1} + I_k^T H_k^T R_k^{-1} H_k I_k, & k = 1, \dots, K, \\ b_k &= b_{k-1} + I_k^T H_k^T R_k^{-1} \Delta g'_k, \end{aligned} \quad (104)$$

с начальными условиями $Q_0 = 0$, $b_0 = 0$, где I_k – матрица оператора, проектирующего вектор $a \in \mathbb{R}^N$, состоящий из всех СК на данном участке съемки, на вектор $a_k \in \mathbb{R}^{N_k}$ СК, коррелированных с k -ым галсом:

$$a_k = I_k a, \quad (105)$$

размер $I_k = N_k \times N$. Матрица Q_k размера $N \times N$ – информационная матрица вектора СК a , вектор b_k размера $N_{(1)} \times 1$ – информационная оценка вектора СК a по k галсам. Имеет место уравнение для определения a на последнем K -ом шаге рекурсии:

$$b_K = Q_K a.$$

Алгоритм (104) записан в форме для заданного набора из K галсов $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$. Распространим формулы алгоритма на случай, когда заранее число галсов неизвестно и, следовательно, размер оцениваемого вектора СК a не определен.

Введем матрицу \mathcal{I}_k размера $N_k \times N_{(k)}$ оператора, проектирующего вектор $a_{(k)} \in \mathbb{R}^{N_{(k)}}$ СК, определенных галсами $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ (то есть СК в узлах множества $Y_1 \cup \dots \cup Y_k$, через $N_{(k)}$ обозначена мощность этого множества), на вектор $a_k \in \mathbb{R}^{N_k}$:

$$a_k = \mathcal{I}_k a_{(k)}. \quad (106)$$

Запишем формулы алгоритма (104) на последнем K -ом шаге рекурсии для случаев $K = 1, K = 2, K = 3$ и т. д. Имеем для $K = 1$:

$$Q_1 = H_1^T R_1^{-1} H_1, \quad (107)$$

$$b_1 = H_1^T R_1^{-1} \Delta g'_1, \quad (108)$$

где матрица Q_1 – размера $N_{(1)} \times N_{(1)}$, вектор b_1 – размера $N_{(1)} \times 1$.

Для случая $K = 2$:

$$Q'_2 = Q'_1 + \mathcal{I}_2^T H_2^T R_2^{-1} H_2 \mathcal{I}_2, \quad (109)$$

$$b'_2 = b'_1 + \mathcal{I}_2^T H_2^T R_2^{-1} \Delta g'_2, \quad (110)$$

где матрица Q'_2 – размера $N_{(2)} \times N_{(2)}$, вектор b'_2 – размера $N_{(2)} \times 1$,

Для случая $K = 3$:

$$Q''_3 = Q''_2 + \mathcal{I}_3^T H_3^T R_3^{-1} H_3 \mathcal{I}_3, \quad (111)$$

$$b''_3 = b''_2 + \mathcal{I}_3^T H_3^T R_3^{-1} \Delta g'_3, \quad (112)$$

где матрица Q''_3 – размера $N_{(3)} \times N_{(3)}$, вектор b''_3 – размера $N_{(3)} \times 1$. И так далее.

Рассмотрим формулы (109)–(110) для случая $K = 2$. Матрица Q'_1 и вектор b'_1 в них определены галсом Γ_1 . В формулах (107)–(108) для случая $K = 1$ матрица Q_1 и вектор b_1 определены также галсом Γ_1 . Размерности Q'_1 и b'_1 выше размерностей Q_1 и b_1 в силу того, что вектор неизвестных СК для случая $K = 2$ имеет большую размерность за счет СК, коррелированных с галсом Γ_2 и не коррелированных с Γ_1 (то есть СК, определенных в узлах разности множеств $Y_2 \setminus Y_1$). Без ограничения общности можно считать, что элементы в векторе СК для случая произвольного K упорядочены так, что сначала следуют СК в узлах Y_1 , затем – СК в узлах $Y_2 \setminus Y_1$, СК в узлах $Y_3 \setminus Y_2$ и так далее, и, наконец, СК в узлах $Y_K \setminus Y_{K-1}$. Тогда, как легко видеть, матрицы Q'_1 , Q_1 и векторы b'_1 , b_1 связаны соотношениями:

$$Q'_1 = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b'_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (113)$$

В формулах (111)–(112) для случая $K = 3$ согласно проведенным рассуждениям получаем, что матрица Q''_2 и вектор b''_2 выражаются через Q'_1 , b'_1 из (109)–(110) с помощью выражений, аналогичных (113):

$$Q''_2 = \begin{pmatrix} Q'_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b''_2 = \begin{pmatrix} b'_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Продолжим этот процесс дальше и введем обозначения: $Q_{(1)} = Q_1$, $b_{(1)} = b_1$, $Q_{(2)} = Q'_2$, $b_{(2)} = b'_2$, $Q_{(3)} = Q''_3$, $b_{(3)} = b''_3$ и так далее. В результате получим следующие рекуррентные формулы алгоритма оценивания:

$$Q_{(k)} = \begin{pmatrix} Q_{(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{I}_k^T H_k^T R_k^{-1} H_k \mathcal{I}_k, \quad k = 2, \dots, K, \quad (114)$$

$$b_{(k)} = \begin{pmatrix} b_{(k-1)} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{I}_k^T H_k^T R_k^{-1} \Delta g'_k, \quad (115)$$

с начальными условиями

$$Q_{(1)} = H_1^T R_1^{-1} H_1, \quad (116)$$

$$b_{(1)} = H_1^T R_1^{-1} \Delta g'_1, \quad (117)$$

где $Q_{(k)}$ — информационная матрица вектора СК $a_{(k)}$ размера $N_{(k)} \times N_{(k)}$, $b_{(k)}$ — информационная оценка вектора СК $a_{(k)}$ размера $N_{(k)} \times 1$, \mathcal{I}_k — проекционная матрица размера $N_k \times N_{(k)}$, определенная в (106).

Полученные на последнем K -ом шаге рекурсии информационная матрица вектора СК $Q_{(K)}$ и информационная оценка вектора СК $b_{(K)}$ имеют размеры $N \times N$ и $N \times 1$ соответственно. Матрица $Q_{(K)}$ и вектор $b_{(K)}$ связаны соотношением:

$$b_{(K)} = Q_{(K)} a. \quad (118)$$

Регуляризация оценок скейлинг-коэффициентов

Из уравнения (118), полученном на последнем K -ом шаге рекурсии, может быть определена оценка \tilde{a} вектора СК. По информационной матрице $Q_{(K)}$ вектора СК размера $N \times N$ вычисляется ковариационная матрица ошибок оценки СК $P_{\delta a_J}$. Матрица $Q_{(K)}$ часто является плохо обусловленной, в связи с чем требуется ее регуляризация. В данной работе методика регуляризации информационной матрицы состоит в следующем. Сначала проводится редукция матрицы $Q_{(K)}$, в ходе которой обнуляются ее информационно мало значимые строки и столбцы. А именно, в случае если все элементы n -ой строки и n -ого столбца по модулю меньше $\varepsilon^2 \sigma_{glob}^{-2}$ (где σ_{glob} — информация о среднеквадратической погрешности данных глобальной модели, ε — настроенный безразмерный параметр), то n -ая строка и n -ый столбец обнуляются. Для полученной в результате такой

процедуры матрицы затем проводится регуляризация вида $\mu_0 I$, и обратная к регуляризованной матрице принимается за оценку ковариационной матрицы ошибок оценки СК $\tilde{P}_{\delta a_J}$. В качестве параметра регуляризации μ_0 выбирается величина

$$\mu_0 = \mu^2 d_{glob}^{-2}, \quad (119)$$

где d_{glob}^2 — вариация СК аномалии силы тяжести в регионе съемки, рассчитываемая по глобальной модели; μ — безразмерный настроочный параметр регуляризации.

Таким образом, с точностью до перестановки строк и столбцов оценка ковариационной матрицы $\tilde{P}_{\delta a_J}$, $N \times N$, имеет вид:

$$\tilde{P}_{\delta a_J} = \begin{pmatrix} (\bar{Q}_{(K)} + \mu^2 d_{glob}^{-2} I)^{-1} & 0 \\ 0 & \mu^{-2} d_{glob}^2 I \end{pmatrix}, \quad (120)$$

где $\bar{Q}_{(K)}$ — подматрица $Q_{(K)}$, строки и столбцы которой содержат хотя бы один элемент по модулю больший $\varepsilon^2 \sigma_{glob}^{-2}$; I — единичная матрица порядка N .

Оценка вектора СК определяется выражением (с точностью до перестановки элементов в векторе):

$$\begin{aligned} \tilde{a} = \tilde{P}_{\delta a_J} \begin{pmatrix} \bar{b}_{(K)} \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\bar{Q}_{(K)} + \mu^2 d_{glob}^{-2} I)^{-1} & 0 \\ 0 & \mu^{-2} d_{glob}^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_{(K)} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\bar{Q}_{(K)} + \mu^2 d_{glob}^{-2} I)^{-1} \bar{b}_{(K)} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (121)$$

где $\bar{b}_{(K)}$ — часть вектора $b_{(K)}$, соответствующая подматрице $\bar{Q}_{(K)}$. Поясним геометрический смысл редукции информационной матрицы $Q_{(K)}$. Можно показать, что в результате редукции обнуляются СК в дальних узлах (в узлах, отстоящих от участка съемки).

Вычисление вейвлет-коэффициентов

Далее по найденным оценкам вектора СК \tilde{a} и матрицы ковариации их ошибок $\tilde{P}_{\delta a_J}$ вычисляются оценки векторов ВК \tilde{c}_j и матрицы ковариации их ошибок $\tilde{P}_{\delta c_j}$ на уровнях детализации $j = j_0, \dots, J - 1$ с помощью

квадратурной формулы (77):

$$\tilde{c}_j(y_{pl}^j) \doteq \sum_{n,s} \omega_{ns} \Psi_j(y_{pl}^j, y_{ns}) \tilde{a}_J(y_{ns}), \quad (122)$$

где $\tilde{a}_J(y_{ns})$ – элемент вектора \tilde{a} (оценка СК в узле y_{ns}), $\Psi_j(y_{pl}^j, y_{ns})$ – вейвлет Абеля-Пуассона. Узлы y_{ns} и веса ω_{ns} определены в (93)–(95),

Множество узлов y_{pl}^j ВК на уровне j определено на эквиангулярной сетке на сфере Ω_R в результате прореживания в 2^{J-1-j} раз по сферической ко-широте и долготе узлов множества Y (96), а также включения дополнительных узлов вне участка, содержащего узлы Y , из-за удвоения радиуса пространственной локализации вейвлета при уменьшении j на единицу. Обозначим число узлов сетки на уровне j через L_j .

Таким образом, узлы y_{pl}^j имеют вид

$$y_{pl}^j = R \begin{pmatrix} \cos \lambda_l^j \cos \theta_p^j \\ \sin \lambda_l^j \cos \theta_p^j \\ \sin \theta_p^j \end{pmatrix}, \quad j = j_0, \dots, J-1. \quad (123)$$

Сферическая ко-широта θ_p^j и долгота λ_l^j имеют вид $\theta_p^j = p \Delta\theta^j$ и $\lambda_l^j = l \Delta\lambda^j$. Шаги по ко-широте $\Delta\theta^j$ и долготе $\Delta\lambda^j$ определяются формулами:

$$\Delta\lambda^j = 2^{J-1-j} \Delta\lambda, \quad \Delta\theta^j = 2^{J-1-j} \Delta\theta, \quad (124)$$

где $\Delta\lambda$, $\Delta\theta$ введены в (94).

Перепишем (122) в векторном виде:

$$\tilde{c}_j = A_j \tilde{a}. \quad (125)$$

Здесь через A_j обозначена матрица размерности $L_j \times N$ из произведений весов (95) и значений вейвлета $\Psi_j(y_{pl}^j, y_{ns})$ в узлах y_{pl}^j сетки уровня j и узлах y_{ns} множества Y :

$$A_j = \begin{pmatrix} A_{n_1 s_1}(y_{p_1 l_1}^j) & A_{n_1 s_2}(y_{p_1 l_1}^j) & \dots & A_{n_N s_N}(y_{p_1 l_1}^j) \\ A_{n_1 s_1}(y_{p_1 l_2}^j) & A_{n_1 s_2}(y_{p_1 l_2}^j) & \dots & A_{n_N s_N}(y_{p_1 l_2}^j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n_1 s_1}(y_{p_{L_j} l_{L_j}}^j) & A_{n_1 s_2}(y_{p_{L_j} l_{L_j}}^j) & \dots & A_{n_N s_N}(y_{p_{L_j} l_{L_j}}^j) \end{pmatrix}, \quad (126)$$

где

$$A_{ns}(y_{pl}^j) = \omega_{ns} \Psi_j(y_{pl}^j, y_{ns}).$$

Матрица A_j является разреженной, некоторые из элементов $A_{ns}(y_{pl}^j)$ равны нулю, так как суммирование в (122) для каждого y_{pl}^j проводится по узлам y_{ns} из некоторой окрестности точки y_{pl}^j .

Элементы матрицы ковариаций ошибок ВК $\tilde{P}_{\delta c_j}$ размерности $L_j \times L_j$ вычисляются как

$$\begin{aligned} E[\delta c_j(y_{pl}^j)\delta c_j(y_{p'l'}^j)] &= \\ &= \int_{\Omega_R} \int_{\Omega_R} \Psi_j(y_{pl}^j, u) \Psi_j(y_{p'l'}^j, v) E[\delta a_J(u)\delta a_J(v)] d\omega(u)d\omega(v), \end{aligned} \quad (127)$$

где $\delta c_j(y_{pl}^j)$, $\delta c_j(y_{p'l'}^j)$ – ошибки ВК, y_{pl}^j , $y_{p'l'}^j$ – узлы сетки на уровне j , $\delta a_J(u)$, $\delta a_J(v)$ – ошибки оценивания СК.

Аппроксимировав интегралы в (127) с помощью квадратурной формулы (93)-(95), получим выражение для матрицы ковариаций $\tilde{P}_{\delta c_j}$ через матрицу $\tilde{P}_{\delta a_J}$:

$$\tilde{P}_{\delta c_j} = A_j \tilde{P}_{\delta a_J} A_j^T. \quad (128)$$

С помощью формулы дискретного вейвлет-восстановления (83) по найденным оценкам ВК авиационных данных \tilde{c}_j может быть аппроксимирована аномалия силы тяжести в свободном воздухе в любой точке $x \in \overline{\Omega_R^{ext}}$. Веса квадратурной формулы в (83) в этом случае определяются по аналогии с (95) как

$$\omega_{pl}^j = R^2 \Delta \lambda^j \Delta \theta^j \sin \theta_p^j. \quad (129)$$

Далее рассматривается задача уточнения оценки ВК авиационных данных по глобальным данным.

§ 3.2. Комбинирование вейвлет-коэффициентов данных аэрогравиметрии и глобальной модели на основе МНК

Поставим задачу уточнения оценок ВК данных аэрогравиметрии $\tilde{c}_j \in \mathbb{R}^{L_j}$ с матрицами ковариаций их ошибок $\tilde{P}_{\delta c_j}$ по данным глобальной модели гравитационного поля Земли. Будем предполагать, что данные

глобальной модели представлены в виде набора ВК $c_j^{glob} \in \mathbb{R}^{L_j}$ (вычисленных на том же множестве узлов, что и \tilde{c}_j) и матриц ковариаций их ошибок P_j^{glob} на уровнях детализации $j = j_0, \dots, J_{glob} - 1$. Ввиду более высокого пространственного разрешения данных аэрогравиметрии спра-ведливо соотношение $J_{glob} \leq J$. Предполагается некоррелированность ошибок ВК как данных аэрогравиметрии δc_j^{air} , так и глобальных дан-ных δc_j^{glob} на разных уровнях детализации:

$$E[\delta c_j^{air} (\delta c_{j'}^{air})^T] = 0, \quad E[\delta c_j^{glob} (\delta c_{j'}^{glob})^T] = 0, \text{ при всех } j \neq j' \quad (130)$$

Тогда задачу оптимального оценивания ВК на общих уровнях дета-лизации $j = j_0, \dots, J_{glob} - 1$ можно поставить в виде задачи МНК:

$$\begin{aligned} \|c_j - \tilde{c}_j\|_{\tilde{P}_{\delta c_j}^{-1}}^2 + \|c_j - c_j^{glob}\|_{P_{\delta c_j}^{glob-1}}^2 &= (c_j - \tilde{c}_j)^T \tilde{P}_{\delta c_j}^{-1} (c_j - \tilde{c}_j) + \\ &+ (c_j - c_j^{glob})^T (P_{\delta c_j}^{glob})^{-1} (c_j - c_j^{glob}) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (131)$$

где $c_j \in \mathbb{R}^{L_j}$ — вектор искомых ВК.

Решение (131) возможно в информационной форме по алгоритму, за-даваемому формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\delta c_j}^+ &= [\tilde{P}_{\delta c_j}^{-1} + (P_{\delta c_j}^{glob})^{-1}]^{-1}, \\ \tilde{c}_j^+ &= \tilde{P}_{\delta c_j}^+ [\tilde{P}_{\delta c_j}^{-1} \tilde{c}_j + (P_{\delta c_j}^{glob})^{-1} c_j^{glob}], \quad j = j_0, \dots, J_{glob} - 1, \end{aligned} \quad (132)$$

где через \tilde{c}_j^+ обозначен результат совместного оценивания ВК данных аэрогравиметрии и глобальной модели, $\tilde{P}_{\delta c_j}^+$ — соответствующая матрица ковариации ошибок оценки.

Отметим, что помимо (132) может быть использована ковариационная форма МНК:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\delta c_j}^+ &= (I - S_j) \tilde{P}_{\delta c_j}, \\ \tilde{c}_j^+ &= (I - S_j) \tilde{c}_j + S_j c_j^{glob}, \\ S_j &= \tilde{P}_{\delta c_j} [\tilde{P}_{\delta c_j} + (P_{\delta c_j}^{glob})]^{-1}. \end{aligned} \quad (133)$$

По поводу предположения (130) о некоррелированности ошибок ВК на разных уровнях детализации заметим следующее. Задача комбиниро-вания ВК может быть рассмотрена в постановке метода гарантирующего оценивания в предположении о том, что корреляции ошибок ВК на раз-ных уровнях детализации неизвестны, а матрицы ковариаций ошибок

$P_{\delta c_j}^{glob}$ и $\tilde{P}_{\delta c_j}$ заданы точно. Можно показать, что оптимальный (в смысле минимума дисперсии ошибки оценки) алгоритм оценивания в этом случае совпадает с алгоритмом (132).

§ 3.3. Комбинирование вейвлет-коэффициентов данных аэрогравиметрии и глобальной модели в постановке задачи гарантирующего оценивания

Согласно теории МНК, комбинирование оценки ВК, полученной по авиационным данным, с ВК глобальной модели улучшает оценку. Но на практике это не всегда так. В данном параграфе рассматривается постановка метода гарантирующего оценивания [24], [22], [4] в задаче комбинирования ВК авиационных и глобальных данных. Предполагается, что статистические характеристики ошибок ВК неизвестны, но заданы множества, описывающие их неопределенность. Рассмотрена задача поиска линейного оценивателя, оптимального по критерию минимума дисперсии ошибки оценки, для случая наихудшего из допустимых распределений ошибок ВК [22]. При этом исследуется, при каких условиях на ошибки ВК комбинирование проводить нецелесообразно.

Модели погрешностей данных и обсуждение

Поставим задачу комбинирования ВК данных аэрогравиметрии и глобальных данных. Данные обоих типов представлены в виде наборов ВК уровней j_{min}, \dots, j_{max} , вычисленных на общем множестве узлов сетки интегрирования. Ограничимся частным случаем одного уровня: $j_{min} = j_{max} = j$. Общий случай может быть сведен к частному случаю.

Введем векторы ВК данных аэрогравиметрии c'_{air} и данных глобальной модели c'_{glob} уровня детализации j размерности $L_j \times 1$, которые представим в виде:

$$c'_{air} = c + \Delta c^{air} + \delta c^{air}, \quad (134)$$

$$c'_{glob} = c + \Delta c^{glob}, \quad (135)$$

где c — вектор истинных ВК, δc^{air} — случайный вектор ошибок ВК с нулевым математическим ожиданием и неотрицательно определенной ковариационной матрицей P_{air} такой, что дисперсии ошибок авиационных ВК ограничены, а их ковариации неизвестны:

$$E[\delta c^{air}] = 0, \quad E[\delta c^{air} \delta c^{air T}] = P_{air}, \quad (136)$$

$$D[\delta c_i^{air}] \leq (\rho_i^{air})^2, \quad |E[\delta c_i^{air} \delta c_k^{air}]| \leq \rho_i^{air} \rho_k^{air}, \quad (137)$$

где ρ_i^{air} — заданные положительные числа, $i = 1, \dots, L_j$. Через Δc^{air} , Δc^{glob} в (134)-(135) обозначены методические погрешности ВК, предполагаемые детерминированными. Для них заданы ограничения («бортники»):

$$|\Delta c_i^{air}| \leq \varepsilon_i^{air}, \quad |\Delta c_i^{glob}| \leq \varepsilon_i^{glob}, \quad i = 1, \dots, L_j, \quad (138)$$

где ε_i^{air} , ε_i^{glob} — положительные числа.

Обсудим сделанные ограничения. Глобальная модель, как правило, задается в виде гармонического разложения. Коэффициенты гармоник выдаются совместно с дисперсиями их ошибок. Коэффициенты высших гармоник часто малодостоверны, приводимые дисперсии их ошибок $\sigma^2[\delta \bar{C}_{mn}]$, $\sigma^2[\delta \bar{S}_{mn}]$ сильно завышены. Ковариации ошибок коэффициентов в некоторых моделях не выдаются пользователю, поскольку являются недостоверными в силу несовершенства применяемых методик расчета коэффициентов (например, коэффициенты гармоник модели EGM2008 определены по алгоритму МНК, в котором матрица ковариаций ошибок измерений приближена диагональной, а матрица системы нормальных уравнений вследствие большой размерности аппроксимирована некоторой блочно-диагональной матрицей [80]). ВК глобальной модели c_i^{glob} связаны с коэффициентами гармоник линейным преобразованием, вследствие чего ошибки ВК Δc_i^{glob} являются случайными величинами с дисперсиями $\sigma_i^2 = D[\Delta c_i^{glob}]$, определяемыми по дисперсиям и ковариациям ошибок $\delta \bar{C}_{mn}$, $\delta \bar{S}_{mn}$. Существенный вклад в ошибки коэффициентов гармоник $\delta \bar{C}_{mn}$, $\delta \bar{S}_{mn}$, а следовательно и в ошибки ВК Δc_i^{glob} , внесен методическими погрешностями. В связи с чем в данном параграфе ошибки Δc_i^{glob} рассматриваются как полностью детерминированные, ограниченные по абсолютной величине «бортниками» ε_i^{glob} (значения ε_i^{glob} могут быть положены равными, например, $3\sigma_i$).

Ограничения (137) обусловлены тем, что дисперсии ошибок авиационных ВК δc_i^{air} определены по дисперсиям и ковариациям ошибок оце-

нивания СК по (128), зависящих, в свою очередь, от априорно заданной дисперсии шума в «сырых» аэрогравиметрических измерениях. Здесь предполагается, что априорная дисперсия шума завышена. Детерминированные методические погрешности Δc_i^{air} в (138) вызваны погрешностями квадратурной формулы (122) и «обрезания» вейвлета (76) при расчете авиационных ВК.

Перепишем уравнения (134)-(135) в виде:

$$c' = Hc + \xi, \quad (139)$$

где введены вектор измерений $c' \in \mathbb{R}^{2L_j}$:

$$c' = \begin{pmatrix} c'_{air} \\ c'_{glob} \end{pmatrix};$$

матрица $H = (I \ I)^T$ размера $2L_j \times L_j$, I – единичная матрица; вектор $\xi \in \mathbb{R}^{2L_j}$, который имеет вид:

$$\xi = \delta c + \Delta c = \begin{pmatrix} \delta c^{air} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta c^{air} \\ \Delta c^{glob} \end{pmatrix}. \quad (140)$$

В силу сделанных предположений об ошибках ВК (137)-(138) элементы ξ_i вектора ξ при $i \leq L_j$ являются случайными величинами со средним $E[\xi_i]$ таким, что

$$|E[\xi_i]| \leq \varepsilon_i^{air}, \quad i \leq L_j. \quad (141)$$

Дисперсии $D[\xi_i]$ и ковариации $E[(\xi_i - E[\xi_i])(\xi_k - E[\xi_k])]$ образуют матрицу P_{air} при $i, k \leq L_j$ и удовлетворяют ограничениям (137). Элементы ξ_i при $i > L_j$ являются неслучайными величинами такими, что

$$|\xi_i| \leq \varepsilon_i^{glob}, \quad i > L_j. \quad (142)$$

Обозначим через \mathcal{R} множество всех векторов $\xi \in \mathbb{R}^{2L_j}$, удовлетворяющих условиям (141)-(142) и (137).

Будем искать оценку вектора ВК $c \in \mathbb{R}^{L_j}$ с помощью линейного оценивателя $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{2L_j} \rightarrow \mathbb{R}^{L_j}$ в виде $\tilde{c} = \mathcal{F}c'$. Введем гарантированное значение для второго момента ошибки оценки

$$d_\xi(\mathcal{F}) = \sup_{c \in \mathbb{R}^{N_j}} E[\|c - \tilde{c}\|^2], \quad (143)$$

которое преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
d_\xi(\mathcal{F}) &= \sup_{c \in \mathbb{R}^{N_j}} (\|(\mathcal{F}H - I)c\|^2 + E\|\mathcal{F}\xi\|^2) = \\
&= \sup_{c \in \mathbb{R}^{N_j}} (\|(\mathcal{F}H - I)c\|^2 + \text{tr}(\mathcal{F}E[\xi\xi^T]\mathcal{F}^T)) = \\
&= \text{tr}(\mathcal{F}E[\xi\xi^T]\mathcal{F}^T), \quad \text{если } \mathcal{F}H = I,
\end{aligned} \tag{144}$$

в противном случае $d_\xi(\mathcal{F}) = \infty$ и задача поиска оценки смысла не имеет. Здесь tr – след матрицы. Из условия несмешенности $\mathcal{F}H = I$ следует, что \mathcal{F} имеет вид:

$$\mathcal{F} = (F \ I-F), \tag{145}$$

где F – произвольная квадратная матрица порядка L_j .

Запишем условие оптимальности оценивателя \mathcal{F} в виде следующей вариационной проблемы

$$\mathcal{F}^* = \arg \min_{\mathcal{F}H=I} \max_{\xi \in \mathcal{R}} d_\xi(\mathcal{F}). \tag{146}$$

Определение общего вида оценивателя

Найдем максимум функционала (143). Преобразуем выражение (144), учитывая (136), (137), (140) и (145):

$$\begin{aligned}
d_\xi(\mathcal{F}) &= \text{tr}(\mathcal{F}E[\xi\xi^T]\mathcal{F}^T) = \\
&= \text{tr}(\mathcal{F}E[(\delta c + \Delta c)(\delta c + \Delta c)^T]\mathcal{F}^T) = \\
&= \text{tr}((F \ I-F)(E[\delta c \delta c^T] + \Delta c \Delta c^T)(F \ I-F)^T) = \\
&= \text{tr}(F(P_{air} + \Delta c^{air} \Delta c^{air^T})F^T) + \\
&\quad + \text{tr}((I - F)\Delta c^{glob} \Delta c^{glob^T}(I - F)^T) + \\
&\quad + 2\text{tr}(F \Delta c^{air} \Delta c^{glob^T}(I - F)^T) = \\
&= \text{tr}(F^T F P_{air}) + \text{tr}(F^T F \Delta c^{air} \Delta c^{air^T}) + \\
&\quad + \text{tr}((I + F^T F - F - F^T)\Delta c^{glob} \Delta c^{glob^T}) + \\
&\quad + 2\text{tr}((F - F^T F) \Delta c^{air} \Delta c^{glob^T}).
\end{aligned}$$

Введем вспомогательные функционалы:

$$\mathcal{J}_1(F, P_{air}) = \text{tr}(F^T F P_{air}), \quad (147)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2(F, \Delta c) &= \text{tr}(F^T F \Delta c^{air} \Delta c^{air^T}) + \\ &+ \text{tr}((I + F^T F - F - F^T) \Delta c^{glob} \Delta c^{glob^T}) + \\ &+ 2 \text{tr}((F - F^T F) \Delta c^{air} \Delta c^{glob^T}), \end{aligned} \quad (148)$$

тогда функционал (144) можно записать в виде:

$$d_\xi(\mathcal{F}) = \mathcal{J}_1(F, P_{air}) + \mathcal{J}_2(F, \Delta c). \quad (149)$$

Обозначим через $\bar{d}(F)$ результат внутренней максимизации в (146):

$$\bar{d}(F) = \max_{\xi \in \mathcal{R}} d_\xi(\mathcal{F}) = \max_{P_{air} \in \mathcal{P}} \mathcal{J}_1(F, P_{air}) + \max_{\Delta c \in \mathcal{C}} \mathcal{J}_2(F, \Delta c), \quad (150)$$

где через \mathcal{P} обозначено множество неотрицательно определенных матриц P_{air} , элементы которых удовлетворяют ограничениям (137), а через \mathcal{C} – множество векторов Δc с ограничениями на элементы (138).

Воспользуемся приемом, примененным в [46] при решении мимнимаксной задачи. А именно, покажем, что функционал $\bar{d}(F)$ инвариантен относительно замены матрицы F на DFD для произвольной диагональной матрицы D с элементами $d_i = \pm 1$ на диагонали (отметим, что в [46] рассматривается отличная постановка задачи мимнимаксного оценивания от исследуемой в данном параграфе: вектор ошибок модели в ней предполагается случайным с нулевым средним и неизвестной положительно определенной матрицей ковариаций, принадлежащей заданному множеству, оцениваемый вектор предполагается детерминированным и

ограниченным по 2-норме). Учитывая, что $D^2 = I$, имеем:

$$\begin{aligned}
\bar{d}(DFD) &= \max_{P_{air} \in \mathcal{P}} \mathcal{J}_1(DFD, P_{air}) + \max_{\Delta c \in \mathcal{C}} \mathcal{J}_2(DFD, \Delta c) = \\
&= \max_{P_{air} \in \mathcal{P}} \text{tr}(DF^T F D P_{air}) + \\
&+ \max_{\Delta c \in \mathcal{C}} \text{tr}[(DF^T F D \Delta c^{air} \Delta c^{air^T}) + \\
&+ \text{tr}((I + DF^T F D - DFD - DF^T D) \Delta c^{glob} \Delta c^{glob^T}) + \\
&+ 2 \text{tr}((DFD - DF^T F D) \Delta c^{air} \Delta c^{glob^T})] = \\
&= \max_{P_{air} \in \mathcal{P}} \text{tr}(F^T F D P_{air} D) + \tag{151} \\
&+ \max_{\Delta c \in \mathcal{C}} \text{tr}[(F^T F (D \Delta c^{air}) (D \Delta c^{air})^T) + \\
&+ \text{tr}((I + F^T F - F - F^T) (D \Delta c^{glob}) (D \Delta c^{glob})^T) + \\
&+ 2 \text{tr}((F - F^T F) (D \Delta c^{air}) (D \Delta c^{glob})^T)].
\end{aligned}$$

Очевидно, что элементы матрицы $D P_{air} D$, имеющие вид $d_i r_{ik} d_k$, удовлетворяют ограничениям (137), равно как и элементы векторов $D \Delta c^{air}$, $D \Delta c^{glob}$ – ограничениям (138). то есть $D P_{air} D \in \mathcal{P}$ и $(\Delta c^{air^T} D \quad \Delta c^{glob^T} D)^T \in \mathcal{C}$.

Введем обозначения $P'_{air} = D P_{air} D$, $\Delta c' = (\Delta c^{air^T} D \quad \Delta c^{glob^T} D)^T$ и перепишем (151) в виде

$$\begin{aligned}
\bar{d}(DFD) &= \max_{P'_{air} \in \mathcal{P}} \text{tr}(F^T F P'_{air}) + \\
&+ \max_{\Delta c' \in \mathcal{C}} \text{tr}[(F^T F (\Delta c^{air'}) (\Delta c^{air'})^T) + \\
&+ \text{tr}((I + F^T F - F - F^T) (\Delta c^{glob'}) (\Delta c^{glob'})^T) + \\
&+ 2 \text{tr}((F - F^T F) (\Delta c^{air'}) (\Delta c^{glob'})^T)].
\end{aligned}$$

Тогда легко видеть, что

$$\bar{d}(DFD) = \bar{d}(F),$$

для всех диагональных матрицы D с элементами $d_i = \pm 1$ на диагонали.

Отсюда следует, что если F^* – решение задачи минимизации $\bar{d}(F)$ по всем квадратным матрицам F , то и DF^*D является решением этой задачи для всех указанных D . Если функционал $\bar{d}(F)$ (150) является строго выпуклым по F , то существует единственное решение F^* задачи минимизации $\bar{d}(F)$. Тогда $F^* = DF^*D$ для всех указанных D , откуда

получаем, что F^* – диагональная матрица. Решение F^* при этом, как легко видеть, определяет оптимальный оцениватель $\mathcal{F}^* = (F^* \ I - F^*)$ (146). Имеет место

Утверждение 4. *Функционал $\bar{d}(F)$ (150) является строго выпуклым на множестве всех квадратных матриц F порядка L_j .*

Доказательство приведено в конце параграфа.

Оптимальный алгоритм оценивания

Задача (146), таким образом, сводится к поиску оптимального оценивателя вида $\mathcal{F} = (F \ I - F)$, где F – диагональная матрица. Функционал $d_\xi(\mathcal{F}) = \mathcal{J}_1(F, P_{air}) + \mathcal{J}_2(F, \Delta c)$ в задаче (146), где $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ определены в (147) и (148) соответственно, в случае диагональной матрицы F имеет вид

$$\begin{aligned} d_\xi(\mathcal{F}) &= \text{tr}(F^2 P_{air}) + \text{tr}(F^2 \Delta c^{air} \Delta c^{air^T}) + \\ &+ \text{tr}((I - F)^2 \Delta c^{glob} \Delta c^{glob^T}) + 2 \text{tr}((F - F^2) \Delta c^{air} \Delta c^{glob^T}) = \\ &= \sum_{i=1}^{L_j} f_i^2 r_{ii} + \sum_{i=1}^{L_j} f_i^2 (\Delta c_i^{air})^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{L_j} (1 - f_i)^2 (\Delta c_i^{glob})^2 + 2 \sum_{i=1}^{L_j} (f_i - f_i^2) \Delta c_i^{air} \Delta c_i^{glob}, \end{aligned}$$

где через f_i обозначены диагональные элементы F .

Максимум функционала $d_\xi(\mathcal{F})$ по множествам (137) и (138) равен выражению

$$\begin{aligned} \bar{d}(F) &= \sum_{i=1}^{L_j} f_i^2 \rho_i^{air} + \sum_{i=1}^{L_j} f_i^2 (\varepsilon_i^{air})^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{L_j} (1 - f_i)^2 (\varepsilon_i^{glob})^2 + 2 \sum_{i=1}^{L_j} |f_i - f_i^2| \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob}, \end{aligned} \quad (152)$$

которое достигается при следующих «наихудших» возмущениях:

$$r_{ii}^* = (\rho_i^{air})^2, \quad i = 1, \dots, L_j, \quad (153)$$

$$\Delta c_i^{air*} = \pm \varepsilon_i^{air}, \quad \Delta c_i^{glob*} = \pm \varepsilon_i^{glob}, \quad (154)$$

где знаки в (154) выбираются так, что

$$\operatorname{sign}(\Delta c_i^{air*} \Delta c_i^{glob*}) = \operatorname{sign}(f_i - f_i^2), \quad (155)$$

если $f_i - f_i^2 \neq 0$, в противном случае знаки произвольны.

Найдя минимум функционала $\bar{d}(F)$, получим решение исходной минимаксной задачи (146).

Утверждение 5. Оптимальное значение d^* функционала $d_\xi(\mathcal{F})$ (144) в минимаксной задаче (146) достигается на одном из трех оценивателей вида $\mathcal{F} = (F \ I-F)$, где F – диагональная матрица порядка L_j , определяемых выражениями:

$$1) \quad d^* = \sum_{i=1}^{L_j} \frac{(\rho_i^{air})^2 (\varepsilon_i^{glob})^2}{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air} - \varepsilon_i^{glob})^2}, \quad (156)$$

если для каждого $i = 1, \dots, L_j$

$$\min\{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, (\varepsilon_i^{glob})^2\} > \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob}; \quad (157)$$

оптимальное значение (156) достигается при следующих значениях элементов F :

$$f_i = \frac{(\varepsilon_i^{glob})^2 - \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob}}{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air} - \varepsilon_i^{glob})^2}, \quad (158)$$

$$2) \quad d^* = \sum_{i=1}^{L_j} \min\{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, (\varepsilon_i^{glob})^2\}, \quad (159)$$

если для каждого $i = 1, \dots, L_j$

$$\varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob} \geq \min\{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, (\varepsilon_i^{glob})^2\}; \quad (160)$$

оптимальное значение (159) достигается при следующих значениях элементов F :

$$f_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sign}\left((\varepsilon_i^{glob})^2 - (\rho_i^{air})^2 - (\varepsilon_i^{air})^2\right), \quad (161)$$

$$3) \quad d^* = \sum_{i \in I_1} \frac{(\rho_i^{air})^2 (\varepsilon_i^{glob})^2}{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air} - \varepsilon_i^{glob})^2} + \\ + \sum_{i \in I_2} \min\{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, (\varepsilon_i^{glob})^2\}, \quad (162)$$

если для $i \in I_1$ выполнены условия (157), для $i \in I_2$ – условия (160); оптимальное значение (162) достигается при значениях элементов F (158) для $i \in I_1$ и при значениях (161) для $i \in I_2$; множества индексов I_1, I_2 не пусты, не пересекаются, $I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, L_j\}$.

Доказательство приведено в конце параграфа.

Оптимальная оценка \tilde{c} вектора ВК с определяется равенством:

$$\tilde{c} = F c'_{air} + (I - F) c'_{glob}. \quad (163)$$

В случае оценивателя (161) оптимальное значение ВК \tilde{c}_i для каждого $i = 1, \dots, L_j$ определяется выражением:

$$\tilde{c}_i = \begin{cases} c_i^{air}, & \text{если } (\varepsilon_i^{glob})^2 > (\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, \\ c_i^{glob}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отсюда имеет место

Следствие 1. *Оптимальный алгоритм оценивания \mathcal{F} в задаче (146) в случае, когда «бортники» ошибок ВК авиационных и глобальных данных удовлетворяют условиям:*

$$\varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob} > (\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, \quad i = 1, \dots, L_j, \quad (164)$$

имеет вид

$$\mathcal{F} = (I \ 0), \quad (165)$$

оптимальная оценка вектора ВК c_j имеет вид

$$\tilde{c}_j = c_j^{air}. \quad (166)$$

Другими словами, проведение комбинирования авиационных ВК с данными глобальной модели нецелесообразно при выполнении условия (164). Однако на практике это возможно лишь в редких случаях, когда ошибки ВК глобальной модели чрезвычайно высоки.

Доказательство утверждения 4

Выпишем функционал $\bar{d}(F)$ (150):

$$\bar{d}(F) = \max_{P_{air} \in \mathcal{P}} \mathcal{J}_1(F, P_{air}) + \max_{\Delta c \in \mathcal{C}} \mathcal{J}_2(F, \Delta c),$$

где $\mathcal{J}_1(F, P_{air})$, $\mathcal{J}_2(F, \Delta c)$ определены в (147) и (148) соответственно. Функционал $\mathcal{J}_1(F, P_{air})$ является выпуклым по F при каждой фиксированной матрице $P_{air} \in \mathcal{P}$. Поскольку множество \mathcal{P} состоит из неотрицательно определенных матриц (удовлетворяющих ограничениям (137)), имеет место лишь нестрогая выпуклость функционала $\mathcal{J}_1(F, P_{air})$, а следовательно, и функционала $\max_{P_{air} \in \mathcal{P}} \mathcal{J}_1(F, P_{air})$ по F .

Рассмотрим функционал $\mathcal{J}_2(F, \Delta c)$, который имеет вид:

$$\mathcal{J}_2(F, \Delta c) = \text{tr}(\mathcal{F} \Delta c \Delta c^T \mathcal{F}^T) = \|\mathcal{F} \Delta c\|^2,$$

где $\mathcal{F} = (F \ I - F)$. Введем обозначение для его максимума:

$$\vartheta(F) = \max_{\Delta c \in \mathcal{C}} \mathcal{J}_2(F, \Delta c). \quad (167)$$

Функционал $\mathcal{J}_2(F, \Delta c)$ является выпуклым по $\Delta c \in \mathcal{C}$. Множество \mathcal{C} представляет собой выпуклый многогранник (параллелепипед с центром в нуле) в \mathbb{R}^{2L_j} , задаваемый неравенствами (138). Тогда максимум $\mathcal{J}_2(F, \Delta c)$ достигается в одной из вершин \mathcal{C} , имеющей вид $\Delta c^* = (\pm \varepsilon_1^{air}, \dots, \pm \varepsilon_{L_j}^{air}, \dots, \pm \varepsilon_k^{glob})^T$, где все величины ε_i^{air} , ε_k^{glob} положительны. То есть $\vartheta(F) = \|\mathcal{F} \Delta c^*\|^2$. Так как квадрат нормы является строго выпуклым функционалом в нормированном пространстве, а вектор Δc^* не содержит нулевых элементов, то функционал $\vartheta(F)$ является строго выпуклым. Действительно, легко проверяется, что для любых $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$ и для любого $\alpha \in (0, 1)$ выполнено строгое неравенство

$$\|(\alpha \mathcal{F}_1 + (1 - \alpha) \mathcal{F}_2) \Delta c^*\|^2 < \alpha \|\mathcal{F}_1 \Delta c^*\|^2 + (1 - \alpha) \|\mathcal{F}_2 \Delta c^*\|^2. \quad (168)$$

Отсюда заключаем, что функционал $\bar{d}(F)$ (150), равный сумме выпуклого функционала $\max_{P_{air} \in \mathcal{P}} \mathcal{J}_1(F, P_{air})$ и строго выпуклого функционала $\vartheta(F)$, является строго выпуклым. Что и требовалось доказать.

Доказательство утверждения 5

Для доказательства утверждения необходимо лишь найти минимум функционала (152) по всем f_i . Перепишем (152) в виде:

$$\begin{aligned} \bar{d}(F) &= \\ &= \sum_{i=1}^{L_j} (f_i^2 \rho_i^{air} + f_i^2 (\varepsilon_i^{air})^2 + (1 - f_i)^2 (\varepsilon_i^{glob})^2 + 2|f_i - f_i^2| \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob}). \end{aligned} \quad (169)$$

Обозначим через $\vartheta_i(f_i)$ функцию, стоящую под знаком суммы в (169):

$$\vartheta_i(f_i) = f_i^2 \rho_i^{air} + f_i^2 (\varepsilon_i^{air})^2 + (1 - f_i)^2 (\varepsilon_i^{glob})^2 + 2|f_i - f_i^2| \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob}.$$

Легко видеть, что

$$\min_F \bar{d}(F) = \min_{f_1, \dots, f_{L_j}} \bar{d}(F) = \sum_{i=1}^{L_j} \min_{f_i} \vartheta_i(f_i), \quad (170)$$

то есть задача минимизации $\bar{d}(F)$ сводится к N_j независимым задачам минимизации функций $\vartheta_i(f_i)$.

Найдем минимум $\vartheta_i(f_i)$. Имеет место два случая в зависимости от знака подмодульного выражения:

$$\begin{aligned} \vartheta_i(f_i) &= (\rho_i^{air} + (\varepsilon_i^{air} - \varepsilon_i^{glob})^2) f_i^2 - \\ &- 2((\varepsilon_i^{glob})^2 - \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob}) f_i + (\varepsilon_i^{glob})^2, \end{aligned} \quad (171)$$

если

$$f_i(1 - f_i) \geq 0, \quad (172)$$

и во втором случае

$$\begin{aligned} \vartheta_i(f_i) &= ((\rho_i)^2 + (\varepsilon_i^{air} + \varepsilon_i^{glob})^2) f_i^2 - \\ &- 2(\varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob} + (\varepsilon_i^{glob})^2) f_i + (\varepsilon_i^{glob})^2, \end{aligned} \quad (173)$$

если

$$f_i(1 - f_i) < 0. \quad (174)$$

В первом случае возможны две ситуации: условный минимум достигается в вершине параболы (171), если ее координата по f_i принадлежит интервалу $(0, 1)$, или иначе в одном из значений $f_i = 0, f_i = 1$. Координаты вершины параболы (171) имеют вид

$$f_i^* = \frac{(\varepsilon_i^{glob})^2 - \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob}}{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air} - \varepsilon_i^{glob})^2}, \quad (175)$$

$$\vartheta_i(f_i^*) = \frac{(\rho_i^{air})^2 (\varepsilon_i^{glob})^2}{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air} - \varepsilon_i^{glob})^2}. \quad (176)$$

Значение f_i^* принадлежит интервалу $(0, 1)$, если выполнено неравенство

$$\frac{(\varepsilon_i^{glob})^2 - \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob}}{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air} - \varepsilon_i^{glob})^2} \frac{\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2 - \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob}}{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air} - \varepsilon_i^{glob})^2} > 0.$$

Неравенство равносильно следующему:

$$\left((\varepsilon_i^{glob})^2 - \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob} \right) \left((\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2 - \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob} \right) > 0, \quad (177)$$

что выполняется, когда оба множителя одного знака. Покажем, что они не могут быть одновременно отрицательными. Предположим противное: пусть $(\varepsilon_i^{glob})^2 < \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob}$ и $(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2 < \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob}$. Первое из этих неравенств эквивалентно неравенству $\varepsilon_i^{glob} < \varepsilon_i^{air}$. Домножая его на ε_i^{air} , получим, что $\varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob} < (\varepsilon_i^{air})^2$. Но тогда должно выполняться неравенство $(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2 < (\varepsilon_i^{air})^2$, что невозможно.

Таким образом, (177) верно только тогда, когда оба множителя положительны, то есть когда имеет место неравенство

$$\min\{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, (\varepsilon_i^{glob})^2\} > \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob}. \quad (178)$$

Следовательно, условный минимум параболы (171) достигается в ее вершине (175)-(176) при выполнении неравенства (178). Если неравенство (178) не выполняется, то, как было сказано выше, условный минимум параболы достигается на одном из концов отрезка $[0, 1]$, то есть равен значению

$$\begin{aligned} \min \vartheta_i(f_i) &= \min\{\vartheta_i(0), \vartheta_i(1)\} = \\ &= \min\{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, (\varepsilon_i^{glob})^2\}, \end{aligned} \quad (179)$$

если

$$\min\{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, (\varepsilon_i^{glob})^2\} \leq \varepsilon_i^{air} \varepsilon_i^{glob}. \quad (180)$$

Рассмотрим теперь функцию (173) и условие (174). Нетрудно проверить, что значения функции (173) на множестве, определяемом данным условием, строго больше значения (179).

В результате имеем, что минимум функционала (152) равен выражению

$$\begin{aligned} \min \bar{d}(F) &= \sum_{i \in I_1} \frac{(\rho_i^{air})^2 (\varepsilon_i^{glob})^2}{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air} - \varepsilon_i^{glob})^2} + \\ &+ \sum_{i \in I_2} \min\{(\rho_i^{air})^2 + (\varepsilon_i^{air})^2, (\varepsilon_i^{glob})^2\}, \end{aligned}$$

которое достигается в точках (175) при выполнении неравенства (178) для всех $i \in I_1$ и в точках $f_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sign}((\varepsilon_i^{glob})^2 - (\rho_i^{air})^2 - (\varepsilon_i^{air})^2)$ при

выполнении неравенства (180) для всех $i \in I_2$. Множества индексов I_1 , I_2 не пересекаются, $I_1 \cup I_2 = \{1, 2, \dots, L_j\}$, при этом одно из множеств может быть пустым. Доказательство закончено.

§ 3.4. Выводы к главе 3

В главе 3 изложена методика локального определения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии и глобальной модели. В § 3.1 ставится задача оценивания СК аномалии на максимальном уровне детализации по данным аэрогравиметрии. Решение проводится с помощью алгоритма рекуррентного МНК в информационной форме с шагом рекурсии по номеру галса. Ввиду плохой обусловленности задачи на последнем шаге рекурсии проводится регуляризация информационной матрицы СК. В § 3.2 ставится и решается с помощью алгоритма МНК задача комбинирование ВК данных аэрогравиметрии и глобальной модели. В § 3.3 рассмотрена задача комбинирования данных в постановке метода гарантирующего оценивания. Получены соотношения на «бортики» ошибок ВК авиационных и глобальных данных, при выполнении которых комбинирование данных проводить нецелесообразно.

Глава 4. Обработка данных

В данной главе анализируются результаты применения разработанной методики уточнения данных аэрогравиметрии, изложенной в §§ 3.1-3.2, к модельным данным в §4.1 и к результатам реальных аэрогравиметрических съемок в §4.2. Материалы главы опубликованы в работах [36], [8].

§ 4.1. Обработка модельных данных

В данном параграфе использованы реальные значения аномалии силы тяжести, измерения гравиметра моделируются.

Моделирование авиационных и глобальных данных

Исходными являются данные реальной карты аномалий в районе Черного моря (рис. 6). Данные представлены в виде значений аномалии силы тяжести на поверхности референц-эллипсоида в узлах эквиангулярной сетки $0.02^\circ \times 0.02^\circ$. Эквивалентное пространственное разрешение порядка 2.2 км. Выбран фрагмент данных на участке 60 км на 100 км в районе Кавказских гор ($42.0^\circ \leq \varphi_0 \leq 42.6^\circ$, $42.0^\circ \leq \lambda \leq 43.0^\circ$, где φ_0 , λ – географические координаты). Значения аномалии изменяются от -92.1 мГал до 113.5 мГал, среднее значение равно -10.4 мГал.

Данные разделены на 31 галс в долготном направлении. Расстояние между галсами 2.2 км. В данные внесена аддитивная случайная ошибка (центрированный гауссовский белый шум с СКО 0.5 мГал) с последующим проведением низкочастотной фильтрации на каждом галсе (сглаживатель Баттерворта первого порядка). Длина волны аномалии на выходе

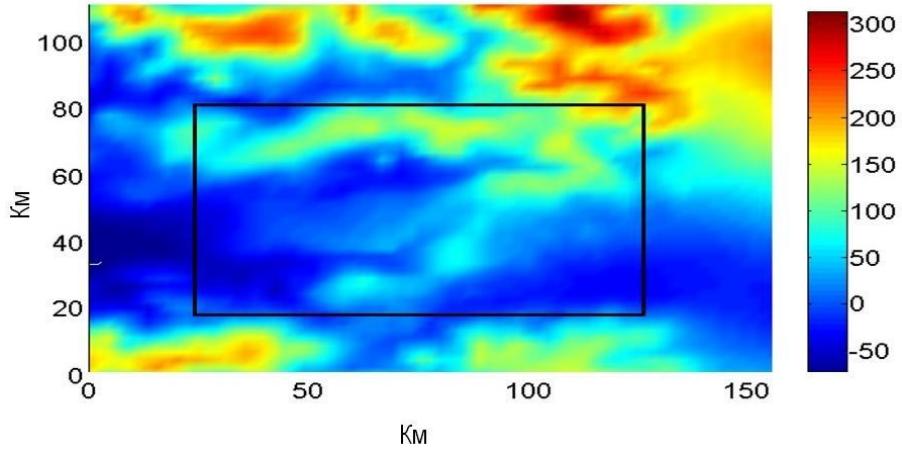


Рис. 6: Карта аномалий (исходные данные), мГал. Контуром выделен фрагмент для моделирования авиа-данных.

фильтра 4.4 км. Эквивалентный максимальный уровень детализации для вейвлет-разложения: $J = 13$. Минимальный уровень детализации определяется размерами участка: $j_0 = 9$. Радиус окрестности суммирования (зоны интегрирования) равен 9 км.

Имитация данных глобальной модели проведена по эталонным наблюдениям на участке размера 100 км на 150 км, включающем участок с модельными авиационными данными. По этим наблюдениям рассчитаны ВК c_j^{glob} на уровнях детализации $j=9-11$ (эталонные ВК). В c_j^{glob} внесена аддитивная случайная ошибка (центрированный гауссовский белый шум). СКО шума σ_j^{glob} рассчитано по известным дисперсиям σ_{nm}^2 ошибок гармонических коэффициентов глобальной модели EGM2008. В силу специфики данных EGM2008 СКО ошибки ВК зависят только от сферической широты. Формула для дисперсий ошибок ВК имеет вид:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_j^{glob}\right)^2 &= D[\delta c_j^{glob}(\theta, \lambda, R)] = \\ &= \left(\frac{GM}{R^2}\right)^2 \sum_{n=2}^N (n+1)^2 \psi_j^2(n) \left(\frac{a}{R}\right)^{2n} \sum_{m=0}^n \sigma_{nm}^2 \overline{P}_{nm}^2(\cos \theta), \end{aligned} \quad (181)$$

где θ, λ – сферическая ко-широта и долгота; $\psi_j(n)$ – символ вейвлета Абеля-Пуассона (48), $j = 9, 10$. Разложение проведено до степени $N = 1400$. Значения СКО σ_j^{glob} варьируются от 1.4 до 1.7 мГал на уровне детализации $j = 9$, от 1.6 до 2.2 мГал на уровне детализации $j = 10$ и от 1.0 до 1.3 мГал на уровне детализации $j = 11$.

Результаты оценивания и комбинирования ВК

Оценивание СК проведено на уровне детализации $J = 13$. Эквидистантная сетка узлов СК имеет равный шаг по широте и долготе $\Delta\theta = \Delta\lambda = 0.02^\circ$. Величина порога $\varepsilon^2 \sigma_{glob}^{-2}$ для редукции информационной матрицы СК на последнем шаге рекурсии рассчитана по среднеквадратической погрешности данных глобальной модели EGM2008 об аномалии силы тяжести. Значение σ_{glob} на широтах участка съемки порядка 3 мГал (в гармоническом разложении аномалии силы тяжести до степени 1400). Настроочный безразмерный параметр ε в (120) принят равным 1, откуда величина порога равна 0.1 мГал⁻². Вариация СК на рассматриваемом участке d_{glob}^2 , используемая при регуляризации информационной матрицы СК, рассчитана также по глобальной модели и равна $2 \cdot 10^3$ мГал². Настроенный параметр регуляризации μ в (120) взят равным 1. В результате редукции и регуляризации информационной матрицы обнулены все СК в узлах вне участка съемки.

Результаты анализа точности восстановления аномалии силы тяжести по оцененным СК модельных авиационных данных содержатся в таблице 1 и на рис. 7. В результатах практически отсутствуют эффекты Гиббса на краях участка. При сравнении с эталонными данными ошибка восстановления имеет СКО 1.8 мГал. Эта ошибка содержит как погрешности регуляризации, так и симитированную случайную ошибку модельных авиационных данных.

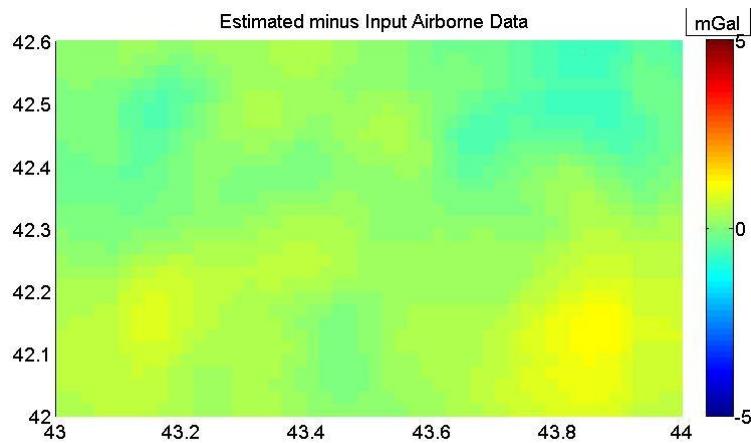


Рис. 7: Разность авиационной аномалии и восстановленной по оценкам СК, мГал

Таблица 1: Результаты оценивания СК по модельным авиационным данным: Δg_{true} – аномалия по эталонным данным; $\Delta g_{true} - \Delta g_{avia}^J$ – разность эталонной аномалии и аномалии, восстановленной по оценкам СК на уровне детализации $J = 13$; $\Delta g_{avia} - \Delta g_{avia}^J$ – разность авиационной аномалии и аномалии, восстановленной по оценкам СК на уровне детализации $J = 13$.

Статистика	Δg_{true} , мГал	$\Delta g_{true} - \Delta g_{avia}^J$, мГал	$\Delta g_{avia} - \Delta g_{avia}^J$, мГал
Максимум	242.0	8.9	1.2
Минимум	-62.2	-12.2	-0.8
Среднее	38.4	0.2	0.2
СКО	-	1.8	0.4

По оцененным СК модельных авиа-данных и матрице ковариации их ошибок рассчитаны ВК аномалии силы тяжести с соответствующими матрицами ковариаций их ошибок. Проведено комбинирование ВК авиационных и глобальных данных на уровнях детализации $j=9-11$ по алгоритму (133). На рис. 8 представлены карты авиационной аномалии силы тяжести на уровнях $j=9-11$. Соответствующие разрешения карт – 35.2 км, 17.6 км и 8.8 км. Графики ошибок ВК, оцененных по авиационным данным, представлены на рис. 9. На графиках ошибок ВК на уровнях 9 и 10 заметны незначительные краевые эффекты (до 5 мГал). На рис. 10 приведены графики ошибок комбинированных ВК, $j=9-11$. Влияние краевых эффектов существенно снижено (практически отсутствуют). Числовые результаты комбинирования содержатся в таблице 2. СКО ошибок комбинированных ВК не превосходит 0.5 мГал. Методика уточняет как авиационные, так и глобальные данные.

Таблица 2: Результаты комбинирования ВК модельных авиационных и глобальных данных: S_{LS} – СКО разности эталонных и комбинированных ВК; S_{avia} – СКО разности эталонных и авиационных ВК; S_{glob} – СКО разности эталонных и глобальных ВК.

Уровень	Разрешение, км	S_{LS} , мГал	S_{avia} , мГал	S_{glob} , мГал
9	35.2	0.4	1.8	1.2
10	17.6	0.5	1.4	1.4
11	8.8	0.4	0.8	1.0

§ 4.2. Обработка реальных данных

Авиационные данные

С помощью разработанной методики, изложенной в §§ 3.1-3.2, была проведена обработка результатов аэрогравиметрических измерений в районе Новой Земли, выполненных лабораторией гравиинерциальных измерений (заведующий – д.т.н. В.Н. Конешов) Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта в 2010 г. Съемки выполнены с использованием авиа-гравиметрической системы GT-1A [10]. Определение аномалии на галсах получено с помощью программного комплекса GTNAV/GTGRAV [33].

Длина волны гравиметрического фильтра в (88) $L = 10$ км. Фильтр близок к сглаживателю Баттерворт 3-го порядка. Частота выходных данных 1 Гц. Ошибки измерений примерно соответствуют модели белого шума на частоте 1 Гц с СКО 50 мГал, пропущенного через гравиметрический фильтр. При определении аномалии силы тяжести в свободном воздухе нормальная сила тяжести рассчитывалась по формуле Гельмерта (12). Регион съемки был покрыт сетью параллельных галсов. Для проверки алгоритмов был выбран 31 галс (характеристики приведены ниже). Схема галсов изображена на рис. 11

- Количество галсов: 31.
- Высота полета: 3500 - 4700 м.
- Средняя высота: 3900 м.
- Скорость самолета 100 м/с.
- Расстояние между галсами: 4 км.
- Азимуты полета: -5° и 175° .
- Географическая широта региона съемки: 74° - 76° .
- Максимальное значение аномалии: 82.6 мГал.
- Минимальное значение аномалии: -15.0 мГал.

Оценивание СК и ВК по авиационным данным

По авиационным данным с помощью алгоритма (114)-(121) проведено оценивание вектора СК a_J на уровне $J = 10$, соответствующем минимуму из $L/2$ и расстояния между галсами, который равен 4 км. Предварительно из авиационных данных вычтено методическое смещение, определенное с помощью глобальной модели EGM2008 и равное -17.2 мГал (среднее значение аномалии силы тяжести по EGM2008 на участке съемки 3.4 мГал, среднее значение авиационных измерений аномалии 20.6 мГал).

Узлы эквиангулярной сетки (93) определены на сфере Ω_R радиуса $R = 6360.8$. Шаг сетки по сферической ко-широте $\Delta\theta$ взят равным 0.045° , что эквивалентно половине минимальной длины волны $L/2$ гравитационной аномалии, определяемой на галсе ($L/2 = 5$ км). Шаг по долготе $\Delta\lambda$ равен 0.13° и эквивалентен расстоянию между галсами (4 км). Окрестность суммирования в (92) выбрана в виде прямоугольной области на плоскости широта-долгота. Множество узлов Y (96), определенное таким образом для данного участка съемки, изображено на рис. 12.

Величина порога для редукции информационной матрицы $Q_{(K)}$ на последнем шаге рекурсии $K = 31$ выбрана в соответствии с информацией

о среднеквадратической погрешности σ_{glob} данных глобальной модели EGM2008. Значение σ_{glob} на широтах участка съемки порядка 30 мГал (в гармоническом разложении аномалии силы тяжести до степени 1800). Настроочный безразмерный параметр ε в (120) принят равным 1. Откуда величина порога $\varepsilon^2 \sigma_{glob}^{-2}$ равна 0.001 мГал⁻².

Значение вариации СК аномалии силы тяжести в регионе съемки d_{glob}^2 , рассчитанное по глобальной модели, равно 140 мГал². Безразмерный параметр регуляризации μ в (120) взят равным 0.1. Значение μ настраивалось так, чтобы уменьшить ошибку восстановления аномалии силы тяжести по оцениваемым СК на галсах и чтобы в то же время уменьшить вариацию оцениваемых СК в регионе съемки. Отметим, что регуляризация в форме (120) сохраняет физический смысл ковариационной матрицы $\tilde{P}_{\delta a_j}$ ошибки оценки СК (плохо оцениваемые и обнуленные СК имеют большие дисперсии), что важно для корректного комбинирования данных.

На рис. 12 изображены галсы, множество узлов, в которых оценены СК и (окаймляющее) множество узлов, в которых СК обнулены в ходе редукции информационной матрицы. Как и ожидалось, обнулены лишь СК в дальних узлах.

По найденным СК \tilde{a}_J проведено восстановление аномалии силы тяжести на галсах по формуле (53). На рис. 13 представлен график среднеквадратического отклонения ошибки восстановления на каждом галсе: минимальное значение СКО – 0.03 мГал (1-ый галс), максимальное – 0.16 мГал (21-ый галс).

На рис. 14 приведен пример восстановления аномалии силы тяжести на одном галсе. В результатах практически отсутствуют эффекты Гиббса на краях галсов. Погрешности восстановления вызваны преимущественно регуляризацией.

Далее по найденным СК \tilde{a}_J авиационных данных и матрице ковариации их ошибок $\tilde{P}_{\delta a_j}$ были вычислены ВК \tilde{c}_j аномалии силы тяжести авиационных данных и матрицы ковариации их ошибок $\tilde{P}_{\delta c_j}$ на уровнях $j=7-9$ по формулам (122)-(128).

Вычисление ВК по глобальной модели EGM2008

Для уточнения данных аэрогравиметрии использовалась глобальная модель EGM2008 (см. § 1.2). По данным глобальной модели были рассчитаны ВК на уровнях $j=7-9$ в тех же узлах, как и ВК авиационных данных. Для расчета ВК использовался интегральный метод (55), для которого в качестве СК глобальной модели на уровне $J_{glob} = 10$ были взяты значения аномалии силы тяжести в свободном воздухе. Аномалии рассчитаны по гармоническим коэффициентам по формуле (77) до степени $n = 1800$ (рис. 15). При «обрезании» гармонического разложения для уменьшения эффекта Гиббса применено окно Блэкмана. Аномалии рассчитаны на сфере Ω_R в узлах θ_k, λ_s эквиангулярной сетки Y (96), использовавшейся при вычислении СК авиационных данных.

Матрица ковариаций ошибок измерения в данных об аномалии силы тяжести глобальной модели P_{glob} рассчитана по диагональной матрице ковариаций ошибок гармонических коэффициентов, предоставляемой моделью EGM2008. Диагональные элементы P_{glob} зависят только от широты и определяются формулой:

$$E[\delta g_{glob}^2(\theta_k, \lambda_s, R)] = \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \sigma_{nm}^2 \bar{P}_{nm}^2(\cos \theta_k), \quad (182)$$

где δg_{glob} – ошибки в глобальных данных об аномалии силы тяжести, $E[\delta g_{glob}(\theta_k, \lambda_s, R)] = 0$. В (183) обозначено

$$\sigma_{nm}^2 = \left(\frac{GM}{R^2} \right)^2 (n+1)^2 \left(\frac{a}{R} \right)^{2n} \sigma^2 [\delta \bar{C}_{mn}], \quad (183)$$

и учтено, что $\sigma^2 [\delta \bar{C}_{mn}] \simeq \sigma^2 [\delta \bar{S}_{mn}]$ для каждого n, m .

Для недиагональных элементов P_{glob} имеет место формула:

$$\begin{aligned} E[\delta g_{glob}(\theta_k, \lambda_s, R) \delta g_{glob}(\theta_l, \lambda_q, R)] &= \\ &= \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \sigma_{nm}^2 \cos(\lambda_s - \lambda_q) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_k) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_l). \end{aligned} \quad (184)$$

Матрицы ковариаций ошибок ВК глобальной модели $P_{\delta c_j}^{glob}$ на уровнях $j=7-9$ рассчитаны на основе формул (127)-(128).

Комбинирование данных

Комбинирование ВК данных аэрогравиметрии и иодели EGM2008 на уровнях $j=7\text{--}9$ выполнено с помощью алгоритма МНК (133). Результаты комбинирования приведены в табл. 3 и на рис. 16. На графиках результатов комбинирования на каждом уровне детализации прослеживается коррекция алгоритмом множества авиационных ВК на краях области по ВК глобальной модели. Это связано с тем, что авиационные ВК в узлах на краях малодостоверны, так как в ходе редукции информационной матрицы СК на максимальном уровне J были «обнулены» СК на краях области. Алгоритмом скорректированы также «выбросы», вызванные регуляризацией.

§ 4.3. Выводы к главе 4

В главе 4 обсуждаются результаты обработки модельных и реальных данных с помощью предложенной методики локального оценивания аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии и глобальной модели, основанной на сферическом многомасштабном представлении. Алгоритмы методики позволяют корректно обрабатывать данные полетов, проводимых на разных высотах. Наблюдается существенное снижение эффектов Гиббса в результатах оценивания и восстановления аномалии на краях участка съемки. С помощью алгоритмов методики проведено комбинирование аэрогравиметрических данных района Новой Земли и данных модели EGM2008.

Таблица 3: Результаты комбинирования данных: S_{glob} – СКО разности комбинированных и глобальных ВК, S_{avia} – СКО разности комбинированных и авиационных ВК.

Уровень	Разрешение, км	S_{glob} , мГал	S_{avia} , мГал
7	16	2.3	2.0
8	8	2.3	2.0
9	4	2.0	2.2

Следует отметить, что алгоритмы содержат методические погрешности, основную из них вносит регуляризация (до 0.16 мГал в результатах восстановления аномалии на галсах).

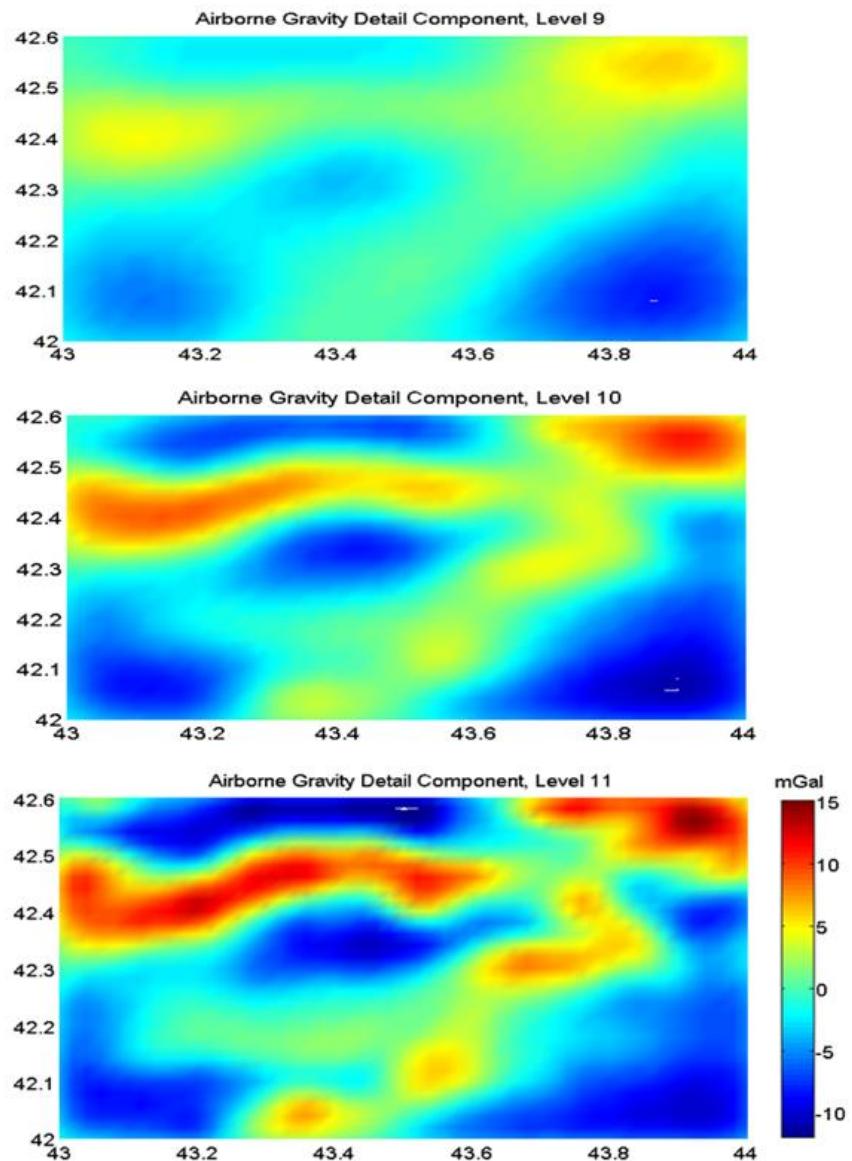


Рис. 8: Детальные компоненты модельных авиационных данных на уровнях детализации $j=9-11$ (сверху вниз), мГал

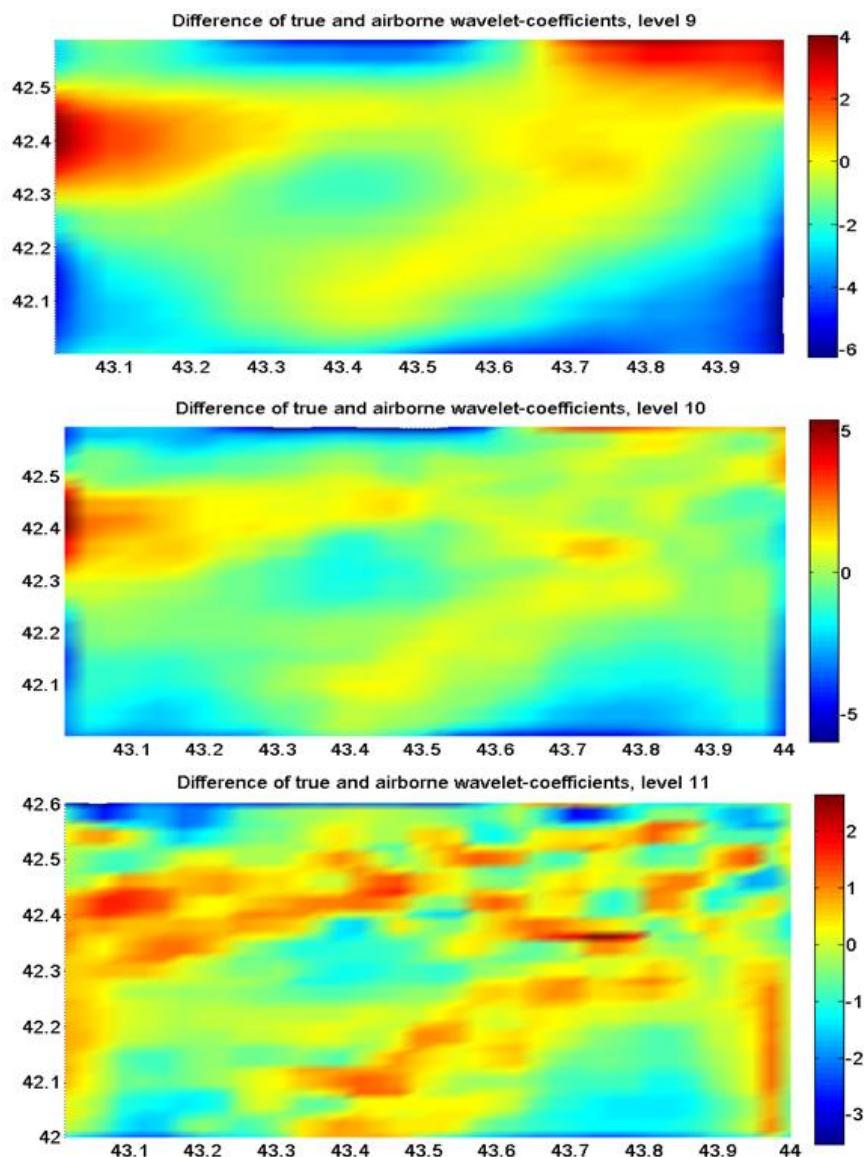


Рис. 9: Ошибки ВК модельных авиационных данных на уровнях детализации $j=9-11$ (сверху вниз), мГал

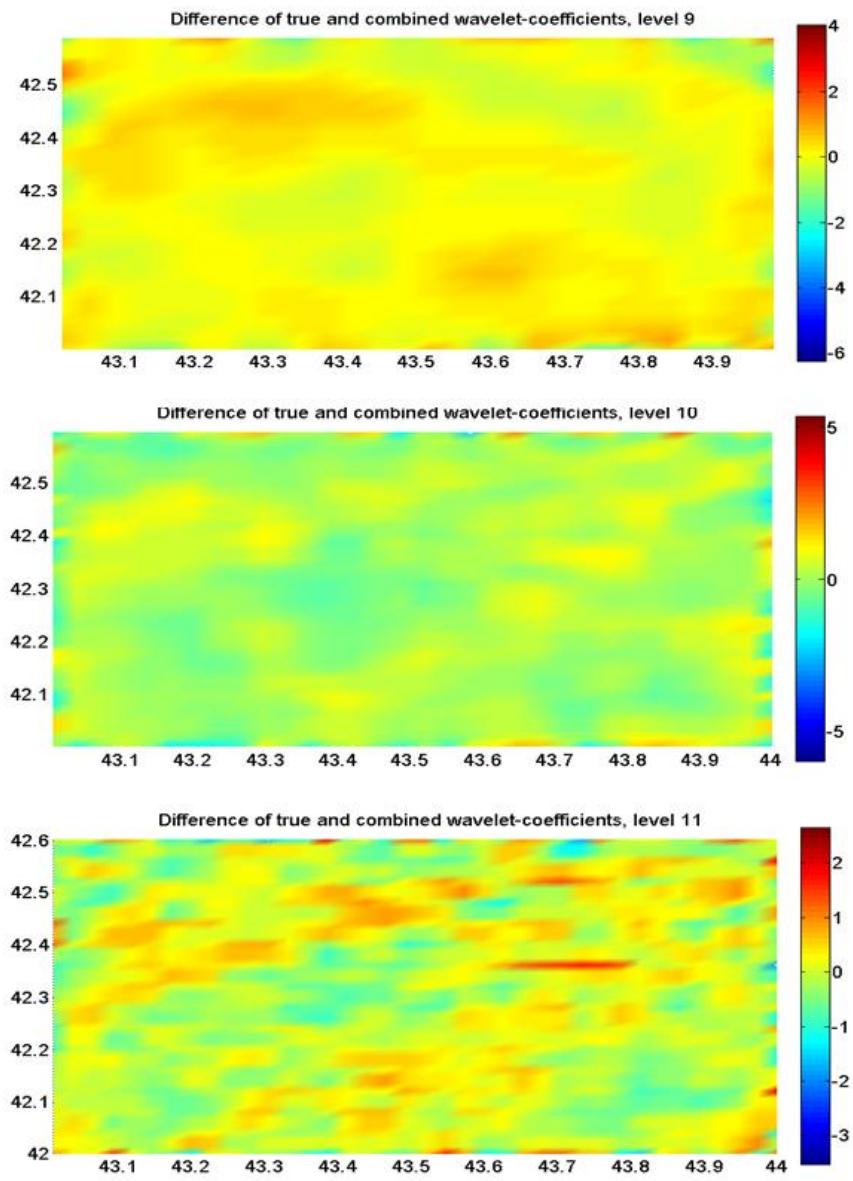


Рис. 10: Ошибки ВК комбинированных данных на уровнях детализации $j=9-11$ (сверху вниз), мГал

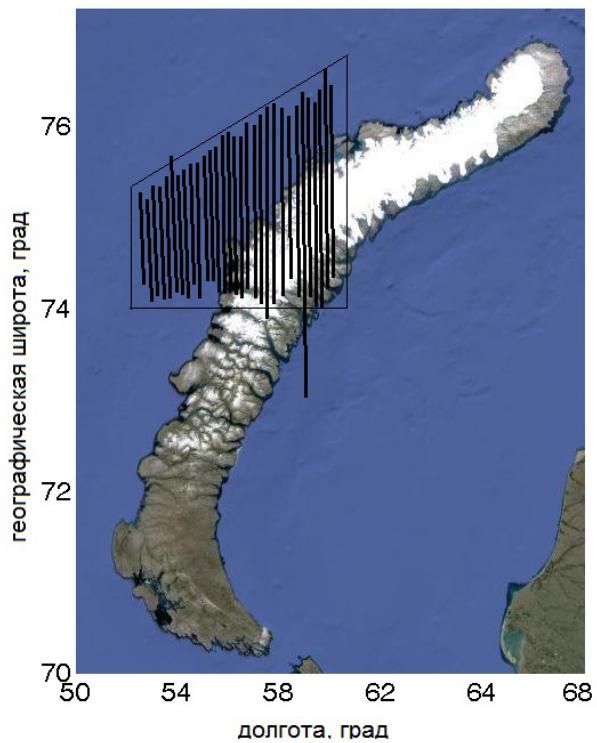


Рис. 11: Схема галсов аэрогравиметрической съемки.

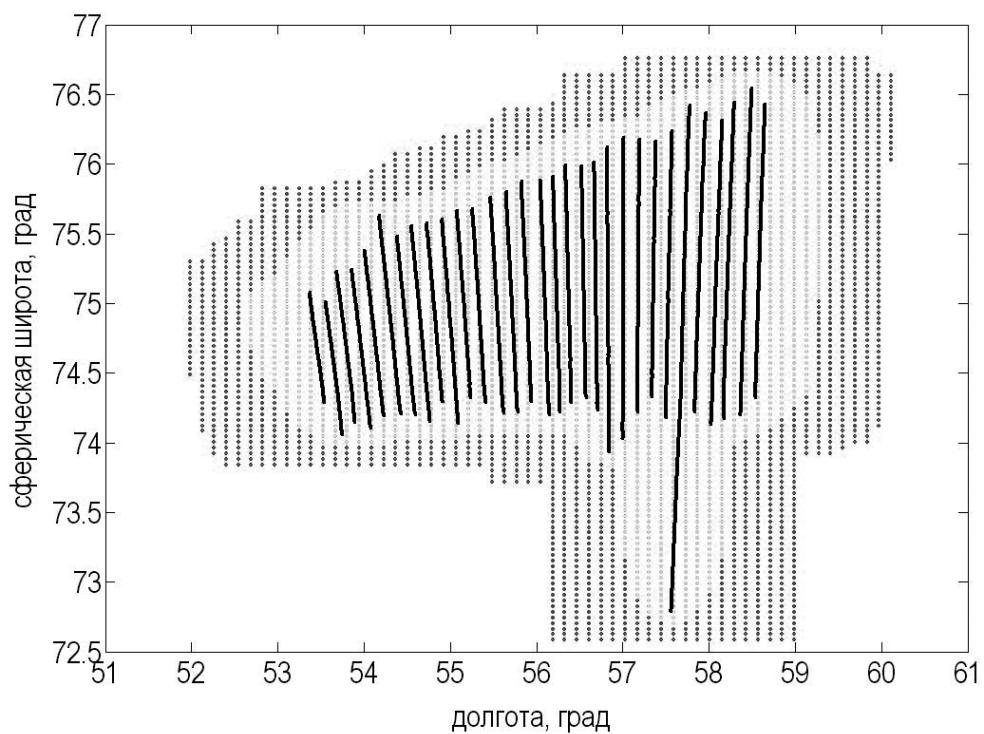


Рис. 12: Схема галсов; множество узлов, в которых оценены СК (светлая область); множество узлов, в которых обнулены СК (темная область).

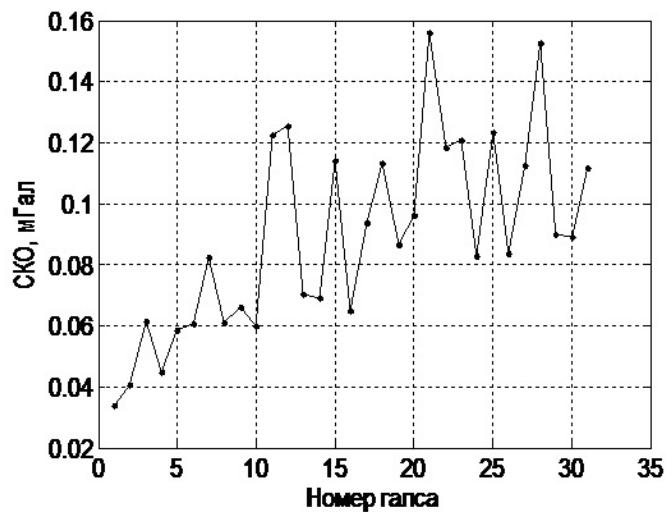


Рис. 13: СКО ошибки восстановления аномалии на каждом галсе, мГал.

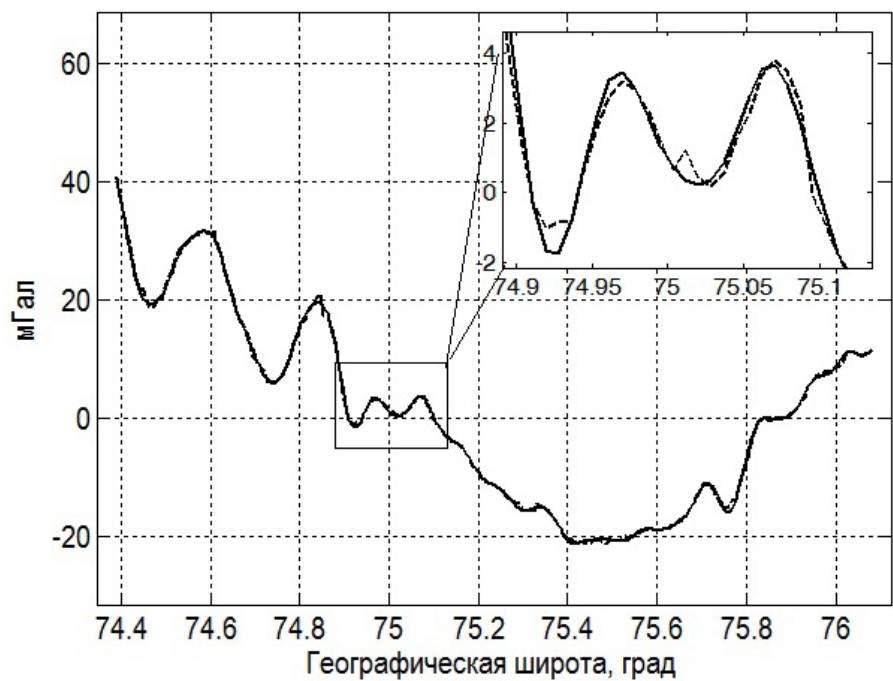


Рис. 14: Аномалия силы тяжести на галсе по авиационным данным (сплошная линия) и восстановленная по оценкам СК на максимальном уровне детализации $J=10$ (пунктирная линия), мГал.

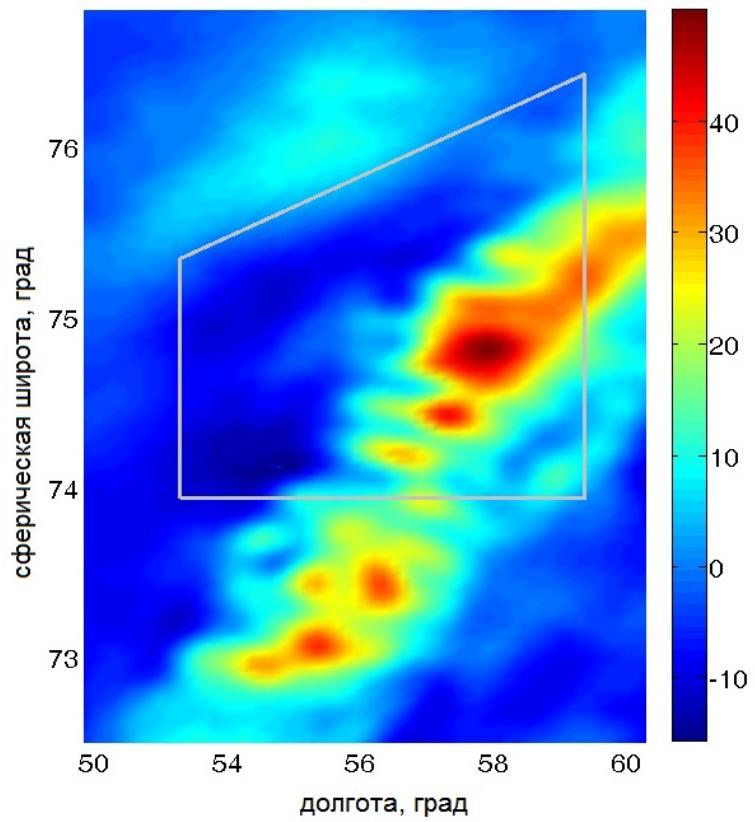


Рис. 15: Аномалия силы тяжести по данным модели EGM2008 (1800 гармоник), мГал. Контуром выделен участок авиа-съемки.

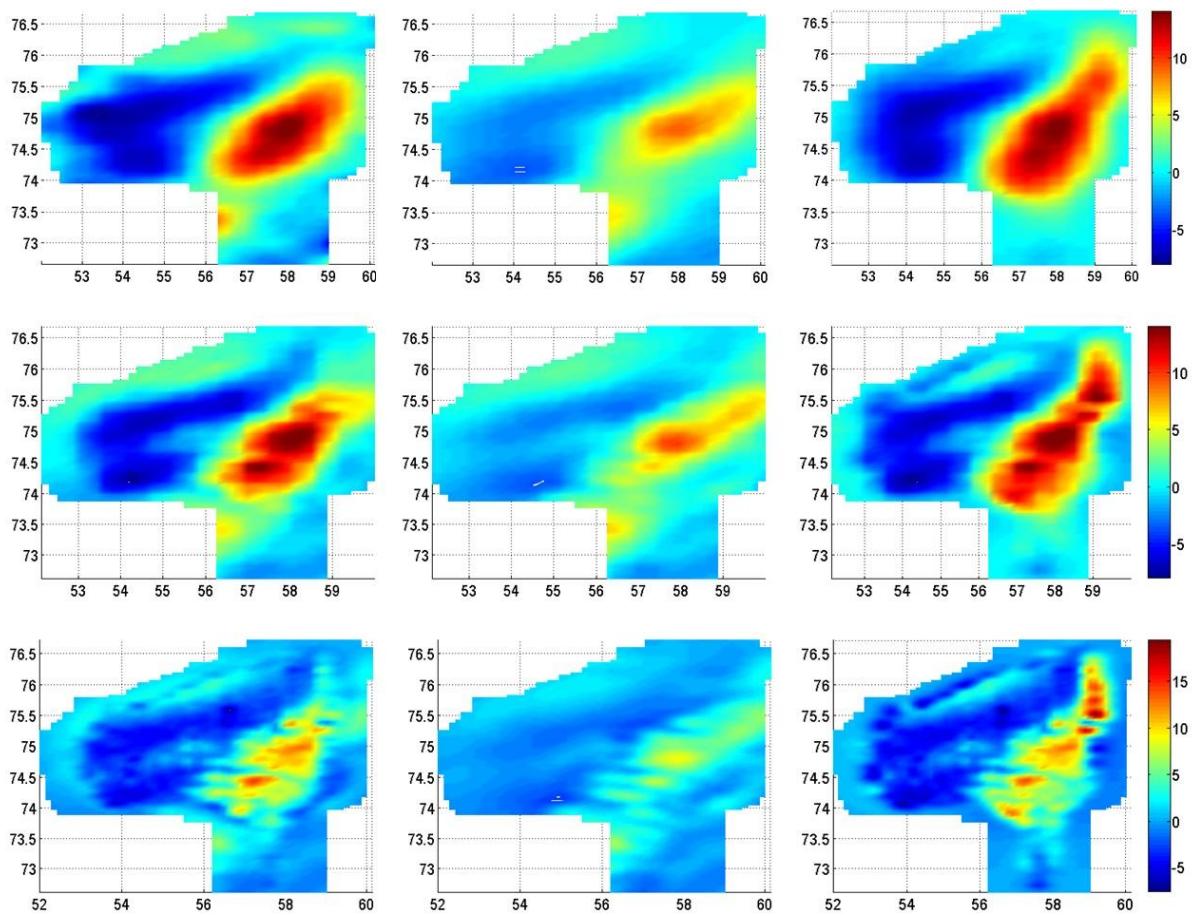


Рис. 16: BK на уровнях 7-9 (по строкам); в каждой строке: комбинированные BK (слева), глобальные BK (в центре), авиационные BK (справа), мГал.

Заключение

В диссертационной работе получены следующие основные результаты.

1. Поставлена и решена задача локального определения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии и глобальной модели гравитационного поля Земли с использованием метода сферического вейвлет-разложения. Предложена методика решения, включающая этапы: 1) оценивания скейлинг-коэффициентов (СК) аномалии силы тяжести на максимальном уровне детализации по данным аэрогравиметрии, 2) вычисления оценок вейвлет-коэффициентов (ВК) на разных уровнях детализации по оцененным СК, 3) уточнения оценок ВК данных аэрогравиметрии по ВК глобальной модели.
2. Для решения задачи оценивания СК (первый этап методики) применен рекуррентный алгоритм МНК в информационной форме с шагом рекурсии по номеру галса. Аномалия предполагается детерминированной гладкой функцией ограниченного спектра (в разложении по сферическим функциям).
3. Разработана методика регуляризации информационной матрицы СК, получаемой на последнем шаге рекурсии. Сначала проводится редукция матрицы, в ходе которой обнуляются информационно мало значимые элементы матрицы. Затем выполняется стандартная регуляризация полученной после редукции матрицы с параметром регуляризации, взятым равным вариации аномалии на участке съемки по данным гло-

бальной модели. Матрица, обратная к регуляризованной, принимается за оценку ковариационной матрицы ошибок оценивания СК. Проведение редукции приводит к обнулению оценок СК на краях участка съемки.

4. Задача уточнения оценок ВК по данным глобальной модели (третий этап методики) поставлена как задача оптимального оценивания ВК. Алгоритм решения – ковариационная форма МНК.

5. Проведено тестирование алгоритмов методики на модельных данных. В результате комбинирования уточнены как авиационные, так и глобальные данные.

6. Алгоритмы методики опробованы на результатах реальной авиационной съемки и данных глобальной модели EGM2008. Алгоритмы позволяют корректно обрабатывать данные полетов, проводимых на разных высотах. Основную методическую погрешность вносит регуляризация информационной матрицы СК (СКО до 0.2 мГал в результатах вейвлет-восстановления аномалии). В отличие от метода коллокаций алгоритмы методики не используют стохастическую модель аномалии.

7. Задача уточнения авиационных ВК по глобальным данным рассмотрена также в постановке метода гарантирующего оценивания. Исследованы условия на ошибки ВК, при которых комбинирование проводить нецелесообразно. Сделан вывод, что на практике комбинирование следует проводить всегда.

Список работ автора

1. Болотин Ю.В., Вязьмин В.С. *Сферический вейвлет-анализ аэрогравиметрических данных* // Геофизические исследования. 2012. Т. 13. №2. С. 33-49.
2. Vyazmin V.S. *Refinement of a global model for the Earth's gravitational field using airborne gravimetry data* // Moscow University Mechanics Bulletin. 2013. V. 68. №4. P. 97-100.
3. Bolotin Yu. V., Vyazmin V.S. *Estimation of coefficients of the gravity spherical wavelet transform from airborne gravimetry data* // In: Proceedings of IAG International symposium on terrestrial gravimetry: static and mobile measurements (TG-SMM 2013). Concern CSRI Elektropribor, St. Petersburg. 2014. P. 84-88.
4. Болотин Ю.В., Вязьмин В.С. *Локальное многомасштабное оценивание аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии* // Геофизические исследования. 2014. Т. 15. (В печати).

Литература

- [1] Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. М.: Физматлит, 2005. 376 с.
- [2] Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации (корректируемые системы). Москва: Изд-во «Наука», 1967. 648 с.
- [3] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Физматлит Москва, 2001. 630 с.
- [4] Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е. Определение и коррекция движения (гарантирующий подход). М.: Наука. 1980. 360 с.
- [5] Бержицкий В.Н., Болотин Ю.В., Голован А.А., Парусников Н.А., Смоллер Ю.Л., Юрист С.Ш. и др. Бескарданный авиационный гравиметр GT-X. Труды международного симпозиума «Наземная, морская и аэрогравиметрия: измерения на неподвижных и подвижных основаниях». Санкт-Петербург, 2010.
- [6] Блажнов Б.А., Несенюк Л.П., Пешехонов В.Г., Соколов А.В., Элинсон Л.С., Железняк Л.К. Интегрированный мобильный гравиметрический комплекс. Результаты разработки и испытаний. Применение гравиинерциальных технологий в геофизике // Под ред. Пешехонова В.Г. Санкт-Петербург: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор». 2002. С. 33-44.
- [7] Болотин Ю.В., Вязьмин В.С. Сферический вейвлет-анализ аэрогравиметрических данных // Геофизические исследования, 13(2), 33–49, 2012.

- [8] Болотин Ю.В., Вязьмин В.С. Локальное многомасштабное оценивание силы тяжести по данным аэрогравиметрии // Геофизические исследования. 2014. Т. 15. (В печати).
- [9] Болотин Ю.В., Голован А.А. О методах инерциальной гравиметрии. Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 5. 2013.
- [10] Болотин Ю.В., Голован А.А., Конешов В.Н. и др. Использование аэрогравиметра GT2A в полярных областях // Труды Симпозиума Международной ассоциации по геодезии (IAG): Наземная, морская и аэрогравиметрия: измерения на неподвижных и подвижных основаниях. Санкт-Петербург. 2013. С.21-23.
- [11] Болотин Ю.В., Голован А.А., Парусников Н.А. Математические модели аэрогравиметрической системы на базе корректируемого гироинерциального блока // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика, 4-12, 2003.
- [12] Болотин Ю.В., Голован А.А., Парусников Н.А. Уравнения аэрогравиметрии. Алгоритмы и результаты испытаний. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2002. 120 с.
- [13] Болотин Ю.В., Голован А.А., Кручинин П.А., Парусников Н.А., Тихомиров В.В., Трубников С.А. Задача авиационной гравиметрии. Некоторые результаты испытаний. Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1, Математика. Механика. 1999. №2.
- [14] Болотин Ю.В., Дорошин Д.Р. Адаптивная фильтрация данных авиа-гравиметрии с использованием скрытых марковских моделей. // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика, 2011, №3, с. 36-42.
- [15] Болотин Ю.В., Попеленский М.Ю. Анализ точности решения задачи авиагравиметрии при идентификации параметров гравиметра в полете // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. 11(7). С. 167-180.
- [16] Вязьмин В.С. Минимаксное оценивание в задаче комбинирования данных аэрогравиметрии и глобальной модели гравитационного по-

ля Земли в многомасштабном представлении // Труды XXIII международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации». Алушта. 2014. (В печати).

- [17] Дробышев Н.В., Конешов В.Н., Погорелов В.В. и др. Особенности проведения высокоточной аэрогравиметрической съемки в приполярных районах // Физика Земли. 2009. №8. С. 36-41.
- [18] Железняк Л.К., Конешов В.Н. Современная аппаратура и методика морской гравиметрической съемки. Развитие методов и экспериментальных средств. Геофизика, 1993, №1.
- [19] Железняк Л.К., Краснов А.А., Соколов А.В. Влияние инерционных ускорений на точность гравиметра Чекан-АМ. Физика Земли. 2010. 7. С. 29-32.
- [20] Ильин В.Н., Смоллер Ю.Л., Юрист С.Ш. Результаты разработки и испытаний мобильного наземного гравиметра. Гирокопия и навигация, 2001. №4(32).
- [21] Конешов В.Н., Абрамов Д.В., Клевцов В.В., Макушин А.В. Аэрогравиметрические съемки ИФЗ РАН в Арктике // Современные методы и средства океанологических исследований: Материалы XIII Международной научно-технической конференции. 2013. 1. 220-222
- [22] Лидов М.Л. Минимаксные методы оценивания. Препринты ИПМ, 2010, 071, 87 с.
- [23] Лозинская А.М., Яшайев И.Л. Аппаратура, методика и результаты опытных авиагравиметрических измерений над Каспийским морем. Изв. АН СССР, «Физика Земли». Вып. 3, 1971.
- [24] Матасов А.И. Метод гарантирующего оценивания. М.: Изд-во МГУ, 2009.
- [25] Миронов В.С. Курс гравиразведки. Л.: Недра, 1972. 512 с.
- [26] Никитин А.А. Статистические методы выделения геофизических аномалий. М.: Недра, 1979. 280 с.

- [27] Пантелейев В.Л. Основы морской гравиметрии. М.: Недра. 1983. 255 с.
- [28] Салычев О.С. Инерциальная гравиметрия: Теория. Проблемы. Решения. Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, М.: 1995.
- [29] Торге В. Гравиметрия. М.: Мир, 1999.
- [30] Alberts B. Regional gravity field modelling using airborne gravimetry data. PhD thesis, TU Delft, 2009. 199 p.
- [31] Alberts B., Klees R. A comparison of methods for the inversion of airborne gravity data. J. Geod. 2004. 78(1-2). P. 55-65.
- [32] Antoine J.-P., Vandergheynst P. Wavelets on the 2-Sphere: A Group-Theoretical Approach. Appl. Comput. Harmon. Anal., 1999. 7(3). P. 262-291.
- [33] Berzhitsky V.N., Bolotin Y. V., Golovan A.A. et al. GT-1A inertial gravimeter system. Results of flight tests. Moscow State University. 2002. P. 32.
- [34] Bjerhammar A. On an explicit solution of the gravimetric boundary value problem for an ellipsoidal surface of reference. Stockholm. Royal Institute of Technology, Geodesy Division. 1962.
- [35] Boedecker G., Stürze A. SAGS4 StrapDown Airborne Gravimetry System Analysis // Observation of the Earth System from Space. Springer; Berlin/Heidelberg, 2006. P. 463-478.
- [36] Bolotin Yu. V., Vyazmin V.S. Estimation of coefficients of the gravity spherical wavelet transform from airborne gravimetry data // IAG Symposium on terrestrial gravimetry: static and mobile measurements. Papers. Concern CSRI Elektropribor, Saint Petersburg. 2014. (В печати).
- [37] Bolotin Y.V., Yurist S.S. Suboptimal smoothing filter for the marine gravimeter GT-2M // Gyroscopy and Navigation. 2011. V. 2 (3). P. 152-155.
- [38] Bouman J., Koop R. Quality improvement of global gravity field models by combining satellite gradiometry and airborne gravimetry,

- in: Bencolini B (ed.) IV Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2001. P. 21-32.
- [39] Brozena J.M., Mader G.L., Peters M.F. Interferometric Global Positioning System: three-dimensional positioning source for airborne gravimetry. *Journal of Geophysical Research*, 1989. 94(B9). P. 12153-12162.
- [40] Brozena J.M. The Greenland Aerogeophysics Project - Airborne gravity, topographic and magnetic mapping of an entire continent. In: From Mars to Greenland: Charting gravity with space and airborne instruments - Fields, tides, methods, results. 1992. P. 203-214.
- [41] Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. SIAM, Philadelphia, PA. 1992.
- [42] Denker H. Hochauflösende regionale Schwerefeldbestimmung mit gravimetrischen und topographischen Daten. Wiss Arb Uni Hannover, №156. Institut für Erdmessung, Hannover. 1988.
- [43] Diehl T.M., Holt J.W., Blankenship D.D., Young D.A., Jordan T.A., Ferraccioli F. First airborne gravity results over the Thwaites Glacier catchment, West Antarctica, *Geochemistry Geophysics Geosystems* 9, Q04011, 2008.
- [44] Driscoll J. R., Healy D. M. Computing Fourier Transforms and Convolutions on the 2-Sphere // *Adv. Appl. Math.*, Vol. 15, P. 202-250, 1994.
- [45] Eicker A., Mayer-Gürr T., Ilk K.H. An Integrated Global/Regional Gravity Field Determination Approach based on GOCE Observations. In: *Observation of the Earth System from Space*, pp. 225-237. 2006.
- [46] Eldar E.C. Minimax MSE estimation of deterministic parameters with noise covariance uncertainties // *IEEE Transaction on signal processing*. 2006. 54(1). P. 138-145.
- [47] Featherstone W. E. Satellite and airborne gravimetry: their role in geoid determination and some suggestions. Lane R. (ed) *Airborne Gravity, Geoscience Australia*, pp 58-70. 2010.

- [48] Ferguson S.T., Hammada Y. Experiences with AIRGrav: results from a new airborne gravimeter // Proceedings of the IAG Symposium «Gravity, Geoid and Geodynamics 2000», Canada. 123. 2001.
- [49] Forsberg R., Olesen A.V., Yildiz H., Tscherning C.C. Polar Gravity Fields from GOCE and airborne gravity. Proceedings 4th Int. GOCE user workshop, München. ESA SP-696, 2011.
- [50] Forsberg R., Kenyon S., Coakley B. New gravity field for the Arctic, Eos: Transactions of the American Geophysical Union 89(32). 2008.
- [51] Forsberg R. A new covariance model for inertial gravimetry and gradiometry. J. Geophys. Res., 92, 1305-1310. 1987.
- [52] Forsberg R. Modelling the fine-structure of the geoid: methods, data requirements and some results, Surv. Geophys. 14. P. 403-418.
- [53] Forsberg R., Sideris M.G. Geoid computations by the multi-band spherical FFT approach. Paper submitted to Manuscripta Geodaetica. 1992.
- [54] Freeden W., Windheuser U. Combined spherical harmonic and wavelet expansion – A future concept in Earth's gravitational determination. Appl. Comput. Harmon. Anal., 1997. 4. 1-37
- [55] Freeden W., Schneider F. Wavelet approximation on closed surfaces and their application to boundary-value problems of potential theory // Math. Meth. in the Appl. Sci. 1998.
- [56] Fengler M.J., Freeden W., Gutting M. Multiscale modeling from EIGEN-1S, EIGEN-2, EIGEN-GRACE01S, GGM01S, UCPH2002_0.5, EGM96: wavelet coefficients, variances and reconstruction // Proceedings of the 2nd CHAMP Science Meeting, Springer Berlin, Heidelberg, New York, 2004. 145-150.
- [57] Freeden W., Michel V. Multiscale Potential Theory (With Applications to Geoscience), Birkhäuser Verlag, Boston, 2004. 509 p.
- [58] Haagmans R., de Min E., van Gelderen M. Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using ID FFT, and comparison with existing

- methods for Stokes' integral. *Manuscripta geodaetica*, 18 (1993), pp. 227-241. 1993.
- [59] Hamming R.W. *Digital Filters*. Dover Publications, 1989. 284.
- [60] Heiskanen W., Moritz H. *Physical geodesy* // San Francisco: Freeman, 1967.
- [61] Holschneider M., Chambodut A., Mandea M. From global to regional Analysis of the magnetic field on the sphere using wavelet frames // *Phys. Earth. Planet. Int.*, 135, 107-124. 2003.
- [62] Jekeli C., Kwon J.H. Results of airborne vector (3-D) *Geophys. Res. Lett.* 1999. 26. 3533-3536.
- [63] Jordan T.A., Ferraccioli F., Jones P.C., Smellie J.L., Ghidella M., Corr H. Airborne gravity reveals interior of Antarctic volcano, *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 175, 127-136. 2009.
- [64] Kailath T. *Linear systems*. Prentice Hall International, 2000.
- [65] Kern M., Schwarz K.P., Sneeuw N. A study on the combination of satellite, airborne and terrestrial gravity data// *J. Geod.* 2003. V. 77. P. 217-225.
- [66] Klees R., Tenzer R., Prutkin I., Wittwer T. A data-driven approach to local gravity field modeling using spherical radial basis functions. *Journal of Geodesy*, 82: 457-471, 2008.
- [67] Koneshov V.N. Airbone gravity measurements on the Black sea region // International technical conference «Airbone and marine gravimetry» Saint Petersburg. 1994.
- [68] Krarup T. A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. *Danish Geod. Inst. Public.*, №44, Copenhagen, 1969.
- [69] Krasnov A.A., Sokolov A.V., Usov S.V. The results of regional airborne gravimetric surveys with a Chekan-AM gravimeter in the Arctic. // Proc. IAG Symposium on terrestrial gravimetry: static and mobile measurements. Concern CSRI Elektropribor, Saint Petersburg, 27–33, 2010.

- [70] Lee J.B., Downey M.A., Turner R.J., Boggs DB et al. First test survey results from the Falcon helicopter-borne airborne gravity gradiometer system. In: Extended abstracts of the Australian Earth Sciences Convention 2006, Melbourne, Australia.
- [71] Marchenko A.N., Barthelmes F., Meyer U., Schwintzer P. Regional Geoid Determination: an application to airborne gravity data in the Skagerrak, (Scientific Technical Report STR, 01/07), Potsdam, Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ, 48 S. 2001.
- [72] Mallat S.G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Transactions on Pattern Recognition and Machine Intelligence 11(7). P. 674-693. 1989.
- [73] McLean M.A., Wilson C.J.L., Boger S.D., Betts P.G., Rawling T.J., Damaske D. Basement interpretations from airborne magnetic and gravity data over the Lambert Rift region of East Antarctica. Journal of Geophysical Research - Solid Earth 114, B06101. 2009.
- [74] Moritz H., Hofmann-Wellenhof B. Physical Geodesy, Springer-Verlag Wien, 2005.
- [75] Moritz H.. Least-Squares Collocation, Reihe A 75, DGK, München, 1973.
- [76] Moritz H. Integral formulas and Collocation, Man. Geod. 1, 1-40, 1976.
- [77] Mueller F., Mayer-Gürr T., Makhloof A.A. Downward Continuation of Airborne Gravimetry and Gradiometry Data Using Space Localizing Spline Functions. IAG Symposia; 133; 143-154. 2009.
- [78] Murphy C.A. The Air-FTG // In: Abstracts from the ASEG-PESA Airborne Gravity Workshop. 2004. 18. P. 7-14.
- [79] Olesen A.V. Improved airborne scalar gravimetry for regional gravity field mapping and geoid determination. Ph.D. dissertation, National Survey and Cadastre of Denmark Technical Report 24, 123 p. 2002.
- [80] Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008) // J. Geophys. Res. 2012. V. 117 (B04406). P. 1-38.

- [81] Runge C. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen, *Acta Math.* 6 (1885), 229-244.
- [82] Scheinert M., Müller J., Dietrich R., Damaske D., Damm V. Regional geoid determination in Antarctica utilizing airborne gravity and topography data, *Journal of Geodesy* 82, 403-414. 2008.
- [83] Schmidt M, Fengler M., Mayer-Gürr T., Eicker A., Kusche J., Sanchez L., Han S.-C. Regional gravity modeling in terms of spherical base functions // *J. Geod.* 2007. V. 81. P.17–38.
- [84] Schwarz K.P., Cannon M.E., Wong R.V.C. A comparison of GPS kinematic models for the determination of position and velocity along a trajectory. *Man. Geod.* 1989. 14. P. 345-353.
- [85] Schwarz K.P., Colombo O., Hein G., Knickmeyer E.T. Requirements for Airborne Vector Gravimetry // Proc. of the IAG Symposia 110 «From Mars to Greenland: Charting Gravity with Space and Airborne Instruments», Vienna 1991, Springer-Verlag, 1992.
- [86] Schwarz K.P., Sideris M.G., Forsberg R. The use of FFT techniques in physical geodesy. *Geophysical Journal International*, 100. 1990. P. 485-514.
- [87] Sjöberg L.E., The terrain correction in gravimetric geoid computation-is it needed? // *Geophys. J. Int.* 176:14-18.
- [88] Sjöberg L.E., Least squares modification of Stokes' and Vening-Meinesz' formulas by accounting for truncation and potential coefficient errors // *Man. Geod.* 9:209-229. 1984.
- [89] Tenzer R., Klees R. The choice of the spherical radial basis functions in local gravity field modeling // *Stud. Geoph. Geod.* 2008. 52(3). 287-304.
- [90] Thompson L.G.D., LaCoste L.J.B. Aerial gravity measurements. *Journal of Geophysical Research*, 65(1). 1960. 305-322.
- [91] Todhunter I. A history of the mathematical theories of attraction and of the figure of the earth from the time of Newton to that of Laplace. London, Macmillan (New York, Dover Publications, 1962). 1873.

- [92] Tscherning C.C. Comparison of some methods for the detailed representation of the Earth's gravity field // Rev. Geophys., 1981. 19(1), 213-221
- [93] Tscherning C.C. Local approximation of the gravity potential by least squares collocation // Proceedings of the International Summer School on Local Gravity Field Approximation. Calgary. 1985. P.277-362.
- [94] Verdun J., Klingele E.E. Airborne gravimetry using a strapped-down LaCoste and Romberg air/sea gravity meter system: A feasibility study. Geophys. Prospect. 2005. 53:91-101.
- [95] Vermeer M. The use of point mass models for describing the Finnish gravity field, Proc. Ninth Nordic Geodetic Commission, Sept. 13-17, Gävle, Sweden. 1982.
- [96] Vyazmin V.S. Refinement of a global model for the earth's gravitational field using airborne gravimetry data // Moscow University Mechanics Bulletin, 2013. 68(4). P. 97-100.
- [97] Walsh J.L. The approximation of harmonic functions by harmonic rational functions. Amer. Math. Soc. 1, 35, 1929. P. 499-544.
- [98] Wenzel H.-G. Zur Geoidbestimmung durch Kombination von Schwerkraftanomalien und einem Kugelfunktionsmodell mit Hilfe von Integralformeln. Z/V. 106(3), 102-111. 1981.