ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Раскин Михаил Александрович

Сверхслова, меры на них и их полупрямые произведения

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор
Николай Константинович Верещагин

Москва – 2014

Содержание

Введение

0.1. Регуляторы почти периодических последовательностей

В первой главе диссертации изучается вопрос о нижних оценках для регулятора почти периодичности автоматного образа почти периодической последовательности, в частности, прямого произведения периодической и почти периодической последовательности.

Нестрого говоря, последовательность называется почти периодической, если для всякого слова, которое в ней встречается, расстояние между соседними вхождениями ограничено сверху некоторой функцией (*регулятором*) от длины слова. Понятие почти периодичности было введено А. Туэ в начале XX века.

В работах к.ф.-м.н. Ан. А. Мучника, акад. РАН проф. А.Л. Семёнова и к.ф.-м.н. М.А. Ушакова, а позже к.ф.-м.н. Притыкина, изучалось действие конечно-автоматных преобразователей на почти периодических последовательностях. Было известно, что образ почти периодической последовательности под действием конечно-автоматного преобразования является почти периодическим, но верхняя оценка на регулятор образа казалась избыточной.

В первой главе доказывается нижняя оценка аналогичная ранее известной верхней.

Основные определения

Определение 0.1. Пусть дан некоторый алфавит Σ. *Словом* над этим алфавитом называется конечная последовательность букв (элементов алфавита). *Сверхсловом* называется бесконечная последовательность букв. Мы считаем, что буквы в сверхслове занумерованы элементами $\mathbb{N}$; в последующих главах мы будем называть *двусторонними сверхсловами* бесконечные двусторонние последовательности букв, то есть отображения из $\mathbb{Z}$ в Σ.

Сверхслово $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется *периодическим*, если для некоторого целого положительного числа T при всех n выполняется равенство $a_n = a_{n+T}$. Как обычно, наименьшее такое число T называется *периодом.*

Определение 0.2. Слово *w входит в сверхслово A с ограниченными интервалами*, если существует такое число k, что каждый отрезок сверхслова A длины k содержит вхождение слова w.

Сверхслово A называется *почти периодическим*, если любое входящее в него слово w входит в A с ограниченными интервалами. *Регулятором почти периодичности* называется функция, сопоставляющая каждому натуральному числу n минимальное натуральное число k, такое что любое слово длины не больше n либо не входит в A, либо входит на каждом отрезке длины k.

Конечный преобразователь с входным алфавитом Σ и выходным алфавитом Δ задаётся множеством внутренних состояний Q, начальным состоянием $q_0 \in Q$ и функцией перехода $F : Q \times \Sigma \to Q \times \Delta$. Конечный преобразователь получает на вход символы из алфавита Σ по одному; функция перехода по состоянию на каждом шаге и входному символу возвращает состояние на следующем шаге и выходной символ. Таким образом, подавая на вход некоторое сверхслово $A = a_0 a_1 \ldots$ мы получаем последовательность состояний $q_0 q_1 \ldots$ и выходных символов $b_0 b_1 \ldots$ такие, что $F(q_n, a_n) = (q_{n+1}, b_n)$; выходное слово при этом будет $B = b_0 b_1 \ldots$.

Замечание 0.1. Мы рассматриваем здесь то же определение, что используется в работах Ю.Л. Притыкина.

История рассматриваемых понятий

Понятие почти периодичности сверхслов было введено в рассмотрение А. Туэ в начале XX века как ослабление понятия периодичности. В частности, А.Туэ использовал это понятие при описании свойств последовательности Туэ-Морса $0110100110010110\ldots$. Это сверхслово получается, если начать со слова 0 и бесконечное число раз приписывать к уже имеющемуся слову результат замены в нём 1 на 0 и 0 на 1.

Другим известным примером почти периодических сверхслов являются последовательности Штурма. По определению, каждая последовательность Штурма описывает последовательность пересечений некоторого луча с иррациональным тангенсом угла наклона с вертикальными и горизонтальными линиями на бесконечной клетчатой бумаге: идя вдоль луча от его начала, мы записываем ноль, когда пересекается горизональный отрезок, и записываем единицу, когда пересекается вертикальный отрезок. Если тангенс угла наклона рационален, то возникающая таким образом последовательность нулей и единиц периодична. Иначе она не периодична, но является почти периодической. Сверхслова Штурма имеют следующее интересное свойство: для каждого натурального числа n любая последовательность Штурма содержит ровно $n+1$ различных подслов длины n. Более того, любая последовательность с этим свойством обязательно есть последовательность Штурма (см., например, учебник [1]).

Легко проверить, что понятие почти периодичности является ослаблением понятия периодичности. В частности, регулятор почти периодичности периодической последовательности с периодом T ограничен сверху функцией $n \mapsto T + n - 1$.

Для последовательностей Штурма и для последовательности Туэ-Морса регулятор пости периодичности ограничен сверху линейной функцией. Впрочем, регулятор может расти намного быстрее. В первой главе приводится конструкция, позволяющая по функции построить сверхслово, регулятор которого бесконечно много раз превышает эту функцию.

Понятие почти периодичности тоже можно обобщить.

Определение 0.3. Сверхслово называется *заключительно (почти) периодическим*, если при удалении из него некоторого начала остаётся (почти) периодическое сверхслово.

Сверхслово A называется *обобщённо почти периодическим*, если каждое слово w либо встречается в A конечное число раз, либо входит в A с ограниченными интервалами. При этом для обобщённо почти периодических слов регулятор надо определять немного не так, как для почти периодических. *Регулятором* в общем случае называется минимальная такая функция $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая что для каждого n любое слово длины n либо входит в каждый отрезок сверхслова A длины $l(n)$ либо не входит в сверхслово A, начиная с позиций с номерами, большими чем значение $l(n)$. Легко видеть, что регулятор любой почти периодической последовательности совпадает с регулятором её почти периодичности, определённым ранее.

Например, сверхслово $0111\ldots$ является заключительно периодическим, но не почти периодическим. А сверхслово $0000110100110010110\ldots$ (полученное добавлением четырех нулей к последовательности Туэ–Морса) является заключительно почти периодическим, но не является заключительно периодическим. В работе [2] показано существование обобщённо почти периодического слова, не являющегося почти периодическим и даже заключительно почти периодическим.

В работах Ан.А. Мучника, А.Л. Семёнова, М.А. Ушакова и Ю.Л. Притыкина изучался вопрос сохранения почти периодичности под действием различных преобразований.

В [3] показано, что если подавать конечному автомату на вход обобщенно почти периодическое сверхслово, то на выход он будет выдавать обобщенно почти периодическое сверхслово. В [2] доказан аналог этого результата для более узкого класса: показано, что заключительно почти периодические сверхслова под действием конечного автомата переходят в заключительно почти периодические.

Эти результаты сделали естественным вопрос о том, как при этом изменяется регулятор. Если рассмотреть проекцию, то есть конечно-автоматное преобразование с одним состоянием, то регулятор не может увеличиться. В [3, 4] фактически получена в общем случае верхняя оценка регулятора конечно-автоматного образа через регулятор исходного сверхслова. Но эта оценка очень быстро растет.

Будем обозначать через $f^{\circ n}(\cdot)$ функцию, являющуюся n-кратной композицией функции $f(\cdot)$ с собой: $f^{\circ n}(k) = \underbrace{f(f(\ldots f(}_{n \text{ раз}} k)\ldots))$.

Теорема 0.1 ([3, 4])**.** *Если у заключительно почти периодического сверхслова регулятор не превосходит $G(l) - 1$ и автомат имеет n состояний, то у его образа под действием автомата регулятор (в смысле определения 0.3) не превосходит $G^{\circ n}(l)$.*

Определение 0.4. Прямым произведением двух сверхслов $a = a_1 a_2 \ldots$ и $b = b_1 b_2 \ldots$ называется сверхслово $a \otimes b$, состоящее из пар соответствующих символов в сверхсловах a и b, то есть сверхслово $(a_1, b_1)(a_2, b_2)\ldots$ Аналогично определяется прямое произведение конечных слов одной длины. Алфавитом прямого произведения сверхслов является декартово произведение исходных алфавитов.

Оценка теоремы 0.1 имеет место для регулятора прямого произведения заключительно почти периодического сверхслова и периодического сверхслова с периодом n. Действительно, такое сверхслово может быть получено применением автомата с n состояниями к исходному сверхслову (автомат переходит по циклу от состояния к состоянию независимо от входных букв).

На докладе [5], в котором были доказаны основные результаты [2, 4], М.Н. Вялый поставил вопрос о возможности уменьшения верхней оценки.

После того, как ответ на этот вопрос был дан автором диссертации, А.Л. Семёнов поставил вопрос о том, для какого класса конечных автоматов можно провести аналогичное рассуждение.

В первой главе для регулятора прямого произведения периодического сверхслова и почти периодического сверхслова доказывается нижняя оценка, отличающаяся от верхней только множителем в количестве итераций. При этом регулятор исходного почти периодического сверхслова может быть сколь угодно быстрорастущей функцией.

Основной результат главы

Основной результат, представленный в первой главе — существование почти периодического слова с регулятором $l(\cdot)$, прямое произведение которого с периодическим словом с периодом n имеет регулятор вида $l^{\circ\Theta(n)}$.

К сожалению, теорема в такой формулировке тривиальна (например, слово из одних нулей имеет в качестве регулятора тождественную функцию). Поэтому используется формулировка, которая позволяет потребовать быстрого роста регулятора и при этом избежать технических трудностей, связанных с оценкой регулятора почти периодичности для всех длин слов.

Теорема 0.2. *(опубликовано в [16]) Если задана возрастающая функция натурального аргумента F, то существует почти периодическое сверхслово A нулей и единиц со следующими свойством. Для всех $n > 100$ и бесконечно многих l значение на l регулятора почти периодичности сверхслова $A \otimes \mathrm{Cycle}_n$ превышает $(\max\{F, f\} + 1)^{\circ\left\lfloor \frac{n}{30} \right\rfloor}(l)$, где Cycle_n обозначает сверхслово $(k \bmod n)$, а f — регулятор почти периодичности сверхслова A.*

Данные свойства сохраняются и при выкидывании произвольного начала из сверхслова A.

Эту теорему можно и усилить. В сформулированном результате дана нижняя оценка на число итераций, равная $\frac{n}{30}$. Можно добиться и нижней оценки, равной $n-3$ (напомним, что верхняя оценка равна n). Мы несколько меняем условия быстрого роста регулятора, но для бесконечно многих длин регулятор превышает результат $n-3$ итераций частично определённой функции, которая превышает и регулятор, и заданную в качестве параметра конструкции функцию F.

Теорема 0.3. *Пусть задана возрастающая функция $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Тогда найдётся почти периодическое сверхслово B с регулятором почти периодичности f_B и следующими свойствами.*

1) Для бесконечного количества аргументов f_B превышает F. Более того, эти аргументы выстроены в цепочку: существует последовательность натуральных чисел L_i, такая что

$$F(L_i) < \frac{1}{6}L_{i+1} \leqslant f_B(L_i) \leqslant L_{i+1}.$$

2) Для любого $n > 2$ и любого i регулятор почти периодичности $B \otimes \mathrm{Cycle}_n$ удовлетворяет неравенствам $f_{B\otimes\mathrm{Cycle}_n}(L_i) > L_{i+n-2} \geqslant f_B^{\circ n-2}(L_i)$.

3) Для любого достаточно большого n регулятор почти периодичности всё того же прямого произведения $B \otimes \mathrm{Cycle}_n$ на всех достаточно больших значениях аргументов превышает $f_B^{\circ n-3}$.

При этом данная нижняя оценка на регулятор сохранится и при рассмотрении выходной последовательности как заключительно почти периодической или обобщённо почти периодической.

0.2. Вычислимость полупрямых произведений вычислимых мер, согласованных с отношением порядка

Во второй главе изучается вопрос о вычислимости полупрямого произведения вычислимых мер на сверхсловах, согласованного с отношением порядка, индуцированного порядком на алфавите. Данный вопрос был поставлен А. Шенём на докладе [6]. Доказывается существование двух конкретных вычислимых мер, у которых есть полупрямое произведение, согласованное с отношением порядка, но любое такое полупрямое произведение невычислимо.

Основные определения

Определение 0.5. Пусть имеются вероятностные меры μ, ν на пространствах X, Y. Напомним, что прямым произведением мер μ, ν называется мера $\mu \times \nu$ на прямом произведении пространств X, Y такая, что для любых измеримых множеств $A \subset X$ и $B \subset Y$ выполнено равенство

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B).$$

Говорят, что мера λ на пространстве $X \times Y$ является *полупрямым произведением* μ и ν, если ее проекции равны μ и ν, то есть, для любого измеримого $A \subset X$ выполнено

$$\lambda(A \times Y) = \mu(A),$$

а также, для любого измеримого $B \subset Y$ выполнено

$$\lambda(X \times B) = \nu(B).$$

Примером полупрямого произведения мер μ, ν является их прямое произведение.

Определение 0.6. Пусть заданы конечные множества X, Y и распределения вероятностей μ и ν на X и Y, соответственно. Пусть также задано некоторое бинарное отношение $M \subset X \times Y$. Будем говорить, что *распределение μ находится в отношении M с ν*, если существует полупрямое произведение μ и ν, относительно которого множество пар M имеет вероятность 1. Такое полупрямое произведение будем называть *согласованным с M*.

В терминах случайных величин μ находится в отношении M с ν (обозначается $\mu M \nu$), если существуют две случайные величины ξ и η на одном вероятностном пространстве со значениями в X, Y, распределения которых равны μ и ν, соответственно, и для которых ξ находится в отношении M с η (во всех точках вероятностного пространства).

Определение 0.7. Напомним стандартное определение вычислимой меры.

Рассмотрим множество $\Sigma = \{0, 1\}$. Через $\Sigma^{\mathbb{N}}$ обозначим пространство сверхслов из нулей и единиц. Введем на нем покомпонентный частичный порядок: $x_0 x_1 x_2 \ldots \leqslant y_0 y_1 y_2 \ldots$, если $x_i \leqslant y_i$ при всех i. Будем рассматривать меры, заданные на сигма-алгебре, порожденной множествами сверхслов, являющихся продолжениями заданных конечных слов. Мера μ на пространстве $\Sigma^{\mathbb{N}}$ называется вычислимой, если существует алгоритм, который по $\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$, и конечному слову x в алфавите Σ находит с точностью ε меру множества всех бесконечных продолжений x (см., например, [7]). Аналогично определяются меры и их вычислимость на пространстве $\Sigma^{\mathbb{N}} \times \Sigma^{\mathbb{N}}$: измеримыми являются элементы сигма-алгебры, порожденной множествами пар сверхслов, первое из которых является продолжением одного слова, а второе — другого слова. Алгоритм должен по $\varepsilon > 0$ и словам x, y находить с точностью ε меру множества всех пар, в которых первая компонента продолжает слово x, а вторая — слово y.

Для вычислимости вероятностной меры достаточно существования алгоритма порождения этого распределения как выхода вероятностного алгоритма. Точнее, распределение μ на $\Sigma^{\mathbb{N}}$ вычислимо, если существует вероятностный алгоритм (алгоритм, имеющий доступ к независимым бросаниям симметричной монеты) без входа, который на выходной ленте печатает случайную бесконечную последовательность с распределением μ.

Существование полупрямых произведений, согласованных с отношениями

Из теоремы Форда–Фалкерсона [8] о максимальном потоке и разрезе следует следующий простой критерий того, что распределение μ находится в отношении M с ν, приведённый, например, в работе [9]:

Теорема 0.4. *[Автор неизвестен] Распределение μ находится в отношении M с ν, тогда и только тогда, когда не существует подмножеств $A \subset X$, $B \subset Y$, таких что все M-соседи A лежат в B и $\mu(A) > \nu(B)$.*

Если же $X = Y$ и M — отношение порядка (транзитивное рефлексивное отношение), то критерий можно переформулировать так: $\mu(A) \leqslant \nu(A)$ для всякого замкнутого вверх множества $A \subset X$. (В самом деле, можно считать, что B состоит только из соседей, тогда оно замкнуто вверх в силу транзитивности отношения порядка и содержит A в силу рефлексивности, а значит можно замкнуть A вверх.)

Применение полупрямых произведений мер и история рассматриваемого вопроса

Полупрямые произведения, согласованные с отношением порядка, являются одним из примеров применения полупрямых произведений, не являющихся прямыми. Например, нам может понадобиться, чтобы случайная пара (x, y) с большой вероятностью относительно полупрямого произведения обладала некоторым “хорошим” свойством. Мы приведём три таких примера,

Пример 1. Даны распределения вероятности μ, ν на одном и том же конечном множестве X. Требуется найти их полупрямое произведение λ, для которого вероятность события “первая координата совпадает со второй” максимальна. Эта задача возникает при доказательстве некоторого неравенства, ограничивающего разницу между шенноновской энтропией μ и ν в терминах статистического расстояния между μ и ν (см. [7]).

Пример 2. Одним из двух известных методов получения не шенноновских информационных неравенств является «метод независимизации», примененный в [9, 10]. Мы изложим этот метод вкратце, а для более подробного знакомства отсылаем читателя к книге [7]. В простейшей ситуации метод состоит в следующем: пусть дано некоторое неравенство, в которое входит шенноновские энтропии случайных величин α, β и γ, шенноновская энтропия пары случайных величин (α, β) и шенноновская энтропия пары случайных величин (α, γ) (например, $2H(\alpha) + 2H(\beta) + 2H(\gamma) \leqslant 3H(\alpha, \beta) + 3H(\alpha, \gamma)$). Допустим, удалось доказать это неравенство для любых трёх совместно распределённых случайных величин α, β, γ таких, что случайные величины β и γ независимы при всяком известном исходе случайной величины α. Тогда это неравенство истинно и для любых вообще совместно распределённых случайных величин α, β, γ.

В самом деле, пусть даны произвольные совместно распределённые случайные величины α, β, γ с исходами в некоторых множествах X, Y, Z, соотсветственно. Обозначим через μ распределение случайной величины (α, β) (с исходами в $X \times Y$), а через ν — распределение пары случайной величины (α, γ) (с исходами в $X \times Z$). Несложно убедиться, что существует полупрямое произведение λ распределений μ и ν (на множестве $X \times Y \times X \times Z$), относительно которого с вероятностью 1 первая и третья координаты совпадают, а вторая и четвёртая координаты независимы при любой известной первой ($=$ третьей) координате. Обозначим через $\alpha', \beta', \alpha', \gamma'$ случайные величины, равные первой, второй, третьей и четвёртой координате четвёрки, выбранной случайно по распределению λ. Тогда γ' и β' независимы при всяком известном исходе случайной величины α', поэтому исходное неравенство выполнено для этой тройки случайных величин. С другой стороны, распределение пары

(α', γ') такое же, как и у пары (α, γ). То же самое верно и для пары (α, β) и для каждой из случайных величин α, β, γ. Поэтому шенноновская энтропия пары (α', γ') та же, что и у пары (α, γ), и то же самое верно для пары (α, β) и для α, β, γ по отдельности. Следовательно, исходное неравенство верно и для данной (произвольной) тройки α, β, γ.

В этом примере нам было нужно не только, чтобы случайная пара (x, y) с большой вероятностью относительно полупрямого произведения обладала некоторым свойством, но также, чтобы и само полупрямое произведение обладало некоторым свойством.

Пример 3. Из этого примера и возник вопрос, изученный во второй главе. Пусть $X = Y$ есть пространство всех сверхслов из нулей и единиц. Пусть μ есть бернуллиевская мера на X с рациональным параметром p_1, а ν есть бернуллиевская мера на Y с рациональным параметром $p_2 > p_1$. (Бернуллиевская мера с параметром p определяется, как распределение вероятностей на последовательностях, полученных в результате бесконечного числа независимых бросаний монетки, выдающей 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1-p$.) Будем рассматривать бесконечные 0-1-последовательности, случайные по Мартин-Лёфу относительно распределения μ (определение случайности по Мартин-Лёфу можно найти, например, в [7]). В работе [9] доказано, что в любой такой последовательности можно заменить некоторые нули на единицы так, чтобы полученная последовательность была случайна по Мартин-Лёфу по распределению ν. Это доказывается с помощью рассмотрения вычислимого полупрямого произведения распределений μ и ν, относительно которого с вероятностью 1 последовательность x покомпонентно меньше последовательности y (несложно доказать, что у бернуллиевских распределений с вычислимыми параметрами $p_2 > p_1$ такое полупрямое произведение в самом деле существует). Точнее, в [9] доказан следующий общий факт: если у вычислимых распределений μ и ν на пространстве бесконечных 0-1-последовательностей существует *вычислимое* полупрямое произведение λ, относительно которого с вероятностью 1 последовательность x покомпонентно меньше последовательности y, то в любой бесконечной последовательности, случайной по Мартин-Лёфу относительно распределения μ можно заменить некоторые нули на единицы так, чтобы полученная последовательность была случайна по Мартин-Лёфу по распределению ν.

В этой связи был поставлен вопрос, можно ли в этой теореме убрать условие вычислимости полупрямого произведения. Точнее, верно ли, что если существует полупрямое произведение λ вычислимых мер μ и ν такое, что относительно него с вероятностью 1 последовательность x покомпонентно меньше последовательности y, то существует и *вычислимое* такое полупрямое произведение. Во второй главе дается отрицательный ответ на этот вопрос.

Основной результат главы

Теорема 0.5. *(опубликовано в [17]) Существуют две вычислимые меры μ и ν на $\Sigma^{\mathbb{N}}$, которые имеют полупрямое произведение, согласованное с отношением $\leqslant$, но не имеют вычислимого полупрямого произведения, согласованного с отношением $\leqslant$.*

0.3. Транзитивность отношения Тоома на мерах на сверхсловах

В третьей главе изучаются отношения на мерах на двусторонних сверхсловах, в частности доказывается транзитивность отношения на мерах на двусторонних сверхсловах в алфавите из двух символов, предложенного проф. А.Л. Тоомом и позволяющего сравнить больше мер, чем стандартное продолжение на меры отношения $\geqslant$ на алфавите, рассмотренное во второй главе.

Данное отношение было введено с целью изучения вероятностных одномерных клеточных автоматов с возможностью стирания и добавления клеток.

Во второй главе мы рассматриваем отношение порядка на мерах на односторонних сверхсловах. В третьей главе рассматриваются двусторонние сверхслова и меры на них, инвариантные относительно сдвига. Рассмотренный во второй главе способ продолжения на меры отношения порядка не позволяет нам, например, сравнить меры, сконцентрированные на сдвигах сверхслов $\ldots(\oplus\ominus\oplus\ominus)^{\infty}\ldots$ и $\ldots(\oplus\oplus\ominus\oplus\oplus\ominus)^{\infty}\ldots$. При этом неформально можно сказать, что одна из мер получается из другой в каком-то смысле добавлением лишних плюсов. Рассматриваемое в третьей главе отношение было предложено А.Л. Тоомом для рассмотрения операторов, позволяющих вычёркивание. В частности, оно позволяет сказать, что вторая мера в новом смысле больше первой.

Общей чертой клеточных автоматов является представление системы в виде набора просто устроенных клеток, состояние каждой из которых со временем меняется в зависимости от состояния небольшого количества её ближайших соседей. Исторически клеточные автоматы восходят к физическим моделям на решётках (таким как модель Изинга намагничивания кристалла). С середины XX века их также рассматривают и в качестве вычислительных моделей.

Вопрос сохранения вероятностным клеточным автоматом разницы между двумя конфигурациями представляет интерес при разных подходах к изучению клеточных автоматов. Этот вопрос может быть интерпретирован и как хранение информации в вычислительной системе с помехами, и как моделирование фазового перехода, и как изучение условий эргодичности с точки зрения теории динамических систем. Для двумерных клеточных автоматов сохраняющий информацию при помехах клеточный автомат был построен в работе [11]. В работе [12] приводится пример одномерного клеточного автомата, в котором все вероятности перехода положительны и который способен надёжно сохранять один бит информации несмотря на помехи.

К сожалению, требуемая для этого конструкция оказывается очень сложной. В связи с этим представляют интерес родственные задачи с более слабыми требованиями. В работе [13] построен достаточно простой пример одномерного клеточного автомата с возможностью стирания клеток, который сохраняет один бит информации несмотря на положительные вероятности почти всех переходов, и исследуются параметры фазового перехода между эргодичностью и неэргодичностью для этого автомата.

Неформально говоря, построенный клеточный автомат можно описать следующим образом. На ленте стоят плюсы и минусы, причём за шаг каждый минус может с некоторой вероятностью превратиться в плюс. После этого пары соседних противоположных символов с некоторой (большей, чем вероятность появления ошибки) вероятностью стираются. (При строгом определение этого оператора требуется указать, что происходит с нумерацией позиций сверхслова, когда в нём выполняется бесконечно много стираний. Строгое определение этого оператора требует определять его как действующий на мерах, инвариантных относительно сдвига.) Этот автомат, который мы называем асимметричным автоматом Toома, имеет следующее свойство. Если в начальный момент времени на ленте стоят одни минусы, то в любой момент времени с большой вероятностью в случайно выбранной клетке ленты будет стоять минус. (Мы упрощаем формулировку, точное утверждение будет дано позднее.) С другой стороны, если в начальный момент времени на ленте стоят одни плюсы, то в любой момент времени в любой клетке ленты будет стоять плюс. Это свойство и означает, что автомат способен сохранять один бит информации.

После этого возник вопрос, можно ли полученный результат перенести на случай двусторонней ошибки, то есть, на симметричный автомат Тоома. В симметричном автомате Тоома помехи могут менять как минус на плюс, так и наоборот. В качестве начального рассмотрим, например, состояние из всех минусов. Хотелось бы и для симметричного автомата установить, что в любой момент времени с большой вероятностью в случайно выбранной клетке ленты будет стоять минус. При этом было бы предпочтительно не повторять все вычисления из [13], а использовать этот результат и соображения сравнения распределений. Казалось естественным, что односторонняя ошибка должна только ухудшать ситуацию, так как мы запретили случайно заменять неправильный символ на правильный. Действительно, начиная с двустороннего сверхслова из одних минусов, мы ожидаем получить ещё большую вероятность минуса в каждой клетке в каждый момент времени. Вопрос сохранения преобладания плюсов перестаёт быть тривиальным (под действием асимметричного оператора Тоома сверхслово из одних плюсов не изменяется никогда), но оказывается равносильным сохранению преобладания минусов. Однако стандартное отношение сравнения на мерах на двусторонних сверхсловах не позволяет доказать монотонность рассматриваемых операторов из-за возможности стирания.

Для преодоления этой трудности А.Л. Тоом предложил рассмотреть другое отношение сравнения, определённое только на мерах, инвариантных относительно сдвига, и являющееся на них продолжением стандартного отношения порядка. Нестрого его можно описать так: мера μ больше меры ν, если из меры μ можно вычёркиванием плюсов, добавлением минусов и заменой плюсов на минусы получить меру ν. Разумеется, можно обратными операциями (вычёркивание минусов, добавление плюсов и заменой минусов на плюсы) получать из меры ν меру μ или пытаться получить одну и ту же меру из μ и ν вычёркиванием плюсов из μ и минусов из ν. В таких терминах стандартное отношение порядка требует получить из одной меры другую только заменами плюсов на минусы.

В частности, данное отношение А.Л. Тоом упоминал и определял в курсе

[14].

Нетрудно понять, что достаточно существования отношения $\succcurlyeq$ со следующими свойствами:

1. Отношение $\succcurlyeq$ транзитивно.

2. $T_{\text{асим}} \succcurlyeq T_{\text{сим}}$, где $T_{\text{сим}}, T_{\text{асим}}$ обозначают, соответственно симметричный и асимметричный операторы Тоома.

3. Если $\mu \succcurlyeq \nu$, то μ-вероятность плюса в данной клетке больше или равна ν-вероятности плюса в данной клетке.

4. Хотя бы один из двух операторов Тоома обладает следующим свойством монотонности:
$$\mu \succcurlyeq \nu \Rightarrow A(\mu) \succcurlyeq A(\nu).$$

Действительно, пусть эти условия выполняются. Обозначим исходную меру, сосредоточенную на двустороннем сверхслове из одних минусов, μ_0. Предположим для примера, что симметричный оператор Тоома монотонен. Тогда рассмотрим результаты n-кратных итераций по индукции. База очевидна: $T^0_{\text{асим}}(\mu_0) = T^0_{\text{сим}}(\mu_0) = \mu_0$. Далее, по второму и четвёртому свойству

$$\begin{aligned} T^n_{\text{асим}}(\mu_0) = T_{\text{асим}}(T^{n-1}_{\text{асим}}(\mu_0)) \succcurlyeq \\ (\text{неравенство между операторами}) \succcurlyeq T_{\text{сим}}(T^{n-1}_{\text{асим}}(\mu_0)) \succcurlyeq \\ (\text{монотонность и предположение индукции}) \succcurlyeq T_{\text{сим}}(T^{n-1}_{\text{сим}}(\mu_0)) = T^n_{\text{сим}}(\mu_0). \end{aligned}$$

По первому свойству такую цепочку неравенств можно заменить на одно неравенство, откуда следует $T^n_{\text{асим}}(\mu_0) \succcurlyeq T^n_{\text{сим}}(\mu_0)$. Требуемое утверждение после этого следует из теоремы для ассимметричного оператора и третьего свойства (отношение между мерами гарантирует отношение между рассматриваемыми вероятностями).

Достаточность этих условий будет более аккуратно доказана в третьей главе.

Однако А.Л. Toomy не удалось доказать транзитивность такого отношения на мерах, его транзитивность осталась открытым вопросом. Это не позволяло использовать его для доказательство возможности сохранения одного бита информации в автомате Toomа с двусторонней ошибкой (= симметричном автомате Toomа). В третьей главе доказывается транзитивность этого отношения и монотонность оператора вычёркивания части пар относительно этого отношения (опубликовано в [18]).

Второе и третье свойство будут следовать непосредственно из точных определений рассматриваемых отношения и оператора. Транзитивность, доказываемая в диссертации, является первым свойством. Кроме того, в диссертации доказана монотонность оператора Duel относительно рассматриваемого отношения.

Для доказательства гипотезы Toomа о неэргодичности симметричного оператора с помощью соображений монотонности и рассмотренного отношения порядка остаётся доказать монотонность хотя бы одного из операторов внесения ошибок (симметричного или асимметричного) относительно такого отношения, другими словами, проверить четвёртое свойство отношения. Этот вопрос остаётся открытым.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность к.ф.-м.н. доценту М.Н. Вялому, к.ф.-м.н. А. Шеню, профессору А. Л. Toomy, и особенно своему научному руководителю профессору Н.К. Верещагину за огромную помощь в работе над текстом статей и диссертации.

Автор благодарен академику РАН А.Л. Семёнову, к.ф.-м.н. доценту М.Н.

Вялому, к.ф.-м.н. А. Шеню и профессору А. Л. Тоому за постановку вопросов, рассмотренных в диссертации.

Автор благодарит всех участников Колмогоровского семинара, а особенно к.ф.-м.н. Ю.Л. Притыкина, к.ф.-м.н. А.Ю. Румянцева и PhD Л. Бьянвеню за обсуждения, как связанные, так и не связанные непосредственно с темой диссертации.

Глава 1

Действие конечного автомата на почти периодическом сверхслове

1.1. Поведение регулятора почти периодичности

Непосредственно из определения 0.2 следует, что регулятор почти периодичности — монотонно неубывающая функция. Действительно, каждое слово, входящее в сверхслово, можно продолжить до слова любой большей длины, также входящего в заданное сверхслово. Вхождения продолжения будут содержать вхождения более короткого слова.

Ясно, что регулятор почти периодичности не может принимать на каком-то аргументе значение меньше этого аргумента. Для периодической последовательности с периодом T значение регулятора почти периодичности на входе n не превышает $n + T - 1$, как замечено выше.

Впрочем, регулятор почти периодичности может расти и намного быстрее. В этой главе, например, для любой заданной функции приводится пример сверхслова, у которого регулятор почти периодичности бесконечное число раз превышает выбранную функцию.

1.2. Почти периодические сверхслова и конечные автоматы

В [3, 4] фактически получена верхняя оценка регулятора конечно-автоматного образа через регулятор исходного сверхслова. Но эта оценка очень быстро растет.

Напомним формулировку теоремы 0.1.

Будем обозначать через $f^{\circ n}(\cdot)$ функцию, являющуюся n-кратной композицией функции $f(\cdot)$ с собой: $f^{\circ n}(k) = \underbrace{f(f(\dots f(}_{n\text{ раз}}k)\dots))$.

Теорема. *(0.1) [[3, 4]] Если у заключительно почти периодического сверхслова регулятор не превосходит $G(l)-1$ и автомат имеет n состояний, то у его образа под действием автомата регулятор не превосходит $G^{\circ n}(l)$.*

Эта же оценка имеет место для регулятора прямого произведения заключительно почти периодического сверхслова и периодического сверхслова с периодом n.

1.3. Основной результат о почти периодических сверхсловах

Аккуратная формулировка утверждения относительно точности верхней оценки регулятора образа чуть сложнее, чем хотелось бы. Простая формулировка могла бы выглядеть следующим образом.

Существуют почти периодическое сверхслово A из нулей и единиц и положительная константа ε такие, что прямое произведение A и некоторого периодического сверхслова B с достаточно большим периодом n имеет регулятор, который для почти всех l (или для бесконечно многих l) превосходит $G^{\circ\varepsilon n}(l)$, где $G(l)-1$ обозначает регулятор A.

Это утверждение верно, но оно не гарантирует, что значения регулятора почти периодичности прямого произведения существенно больше значений регулятора почти периодичности исходного сверхслова на многих аргументах. Действительно, регулятор почти периодичности может быть медленно растущей функцией. Например, для последовательности из одних нулей регулятор почти периодичности равен тождественной функции. Если регулятор почти периодичности исходного слова A является тождественной функцией, то указанная формулировка гарантирует всего лишь, что регулятор произведения сверхслова A и некоторого периодического сверхслова B с периодом n принимает на l значение, большее $l + \varepsilon n$.

Поэтому в формулировку необходимо добавить условие, гарантирующее, что регулятор почти периодичности прямого произведения существенно больше регулятора почти периодичности исходного сверхслова, даже если последний растёт медленно. Например, можно потребовать, чтобы он был больше, чем $\max\{F, f\}^{\circ \varepsilon n}(l)$, где F — любая наперед заданная возрастающая функция. Условие, что регулятор быстро растёт, можно сформулировать по-разному. Докажем сначала, что сформулированное неравенство выполняется для бесконечно многих длин l.

Напомним формулировку теоремы 0.2.

Теорема. *(0.2) Если задана возрастающая функция натурального аргумента F, то существует почти периодическое сверхслово A нулей и единиц со следующими свойством. Для всех $n > 100$ и бесконечно многих l значение на l регулятора обобщённой почти периодичности сверхслова $A \otimes \mathrm{Cycle}_n$ превышает $(\max\{F, f\}+1)^{\circ \lfloor \frac{n}{30} \rfloor}(l)$, где Cycle_n обозначает сверхслово $(k \bmod n)$, а f — регулятор почти периодичности сверхслова A.*

Эта теорема показывает, что в теореме 0.1 количество итераций функции G должно расти линейно с ростом n.

1.4. Конструкция требуемого сверхслова

Мы определим сверхслово A вместе с числовой последовательностью R_m, так что

1) $R_{m+1} > F(R_m)$;

2) для регулятора f сверхслова A выполнено неравенство $R_{m+1} > f(R_m)$;

3) для $m > n > 100$ значение на R_m регулятора почти периодичности сверхслова $A \otimes \mathrm{Cycle}_n$ превышает $R_{m+\left\lfloor \frac{n}{30} \right\rfloor}$.

Сначала убедимся, что этого будет достаточно для доказательства теоремы. Из первого и второго свойств следует, что $R_{m+k} \geqslant (\max\{F, f\}+1)^{\circ k}(R_m)$. Подставив в это неравенство $k = \left\lfloor \frac{n}{30} \right\rfloor$ и применив третье свойство последовательности R_m и сверхслова A, мы получим утверждение теоремы для $l = R_m$ и произвольного $m > n$.

Рассмотрим следующие слова из нулей единиц:

$$A_0 = 100000010,$$

$$B_0 = 1000000110,$$

$$C_0 = 10000001110,$$

$$A_{i+1} = A_i A_i A_i B_i A_i (B_i)^{10k_{i+1}-10} C_i A_i C_i C_i C_i,$$

$$B_{i+1} = A_i A_i A_i B_i B_i (B_i)^{10k_{i+1}-10} C_i A_i C_i C_i C_i,$$

$$C_{i+1} = A_i A_i A_i B_i C_i (B_i)^{10k_{i+1}-10} C_i A_i C_i C_i C_i.$$

В этих формулах $k_1, k_2, \ldots$ — некоторая последовательность натуральных чисел.

Для дальнейшего нам важны следующие свойства слов A_i, B_i, C_i:

- длины слов A_0, B_0, C_0 образуют арифметическую прогрессию с разностью 1, и то же самое верно для всех i (чуть ниже мы докажем это),

- любое вхождение любого из слов A_0, B_0, C_0 в любое слово, составленное из блоков A_0, B_0, C_0, является целым блоком (чуть позже мы уточним, что это значит, и докажем это),

- слова $A_{i+1}, B_{i+1}, A_{i+1}$ начинаются с достаточно большого количества вхождений слова A_i (самого короткого из слов A_i, B_i, C_i),

- в каждое из слов $A_{i+2}, B_{i+2}, A_{i+2}$ входят все 9 возможных пар блоков A_i, B_i, C_i.

При этом мы выбрали более длинные слова A_0, B_0, C_0, чем это необходимо, чтобы упростить вычисления.

Так как для всех i слово A_i является префиксом A_{i+1}, существует сверхслово A_ω, содержащее все A_i в качестве префиксов. Оно и будет искомым сверхсловом A_ω. Последовательности $k_1, k_2, \ldots$ и $R_1, R_2, \ldots$ мы зафиксируем позднее. А сейчас установим некоторые свойства построенного сверхслова A_ω.

1.5. Базовые свойства конструкции

Определение 1.1. *Каждое слово с индексом i (A_i, B_i или C_i) определено как конкатенация копий слов с индексом $i-1$. Разворачивая рекуррентное соотношение, это слово можно представить как конкатенацию копий слов с индексами $i-2$, копий слов с индексами $i-3$ и так далее. Вхождения копий слов с некоторым индексом в слово с бóльшим индексом, которое можно найти с помощью этого представления, назовем* корректными.

Лемма 1.1. *Для всех $m \leqslant l$ все вхождения слов A_m, B_m, C_m в A_l, B_l, C_l корректны.*

Доказательство. Утверждение почти очевидно из-за наличия уникальных фрагментов в словах каждого уровня. Доказательство проведем индукцией по m.

База: слова с индексом 0 могут входить только корректно. В самом деле, каждое слово с индексом нуль начинается с последовательности 100. Эта последовательность не является подсловом никакого слова с индексом нуль (за исключением начала) и не может быть представлена как конкатенация некоторого непустого конца слова с индексом нуль и некоторого начала слова с индексом нуль (это легко проверяется, глядя на слова A_0, B_0, C_0). Поэтому любое вхождение слова с индексом нуль в A_l, B_l или C_l начинается с некоторой позиции, с которой начинается некоторое корректное вхождение (возможно другого слова). С другой стороны, ни одно из слов индекса нуль не является началом никакого другого. Следовательно, любое вхождение слова с индексом нуль в A_l, B_l или C_l корректно. База индукции доказана.

Индуктивный переход: по предположению индукции любое вхождение слова с индексом $m+1$ должно состоять из корректных вхождений слов с индексом m. Если считать блоки $A_mA_mA_mB_m$, составляющие слова с индексом $m+1$, отдельными буквами, то слова с индексом $m+1$ имеют те же свойства, которые были использованы в базе индукции. А именно, каждое из слов индекса $m+1$ начинается со слова $A_mA_mA_mB_m$, которое не является подсловом никакого слова с индексом $m+1$ (за исключением начала) и не может быть представлено как конкатенация некоторого непустого конца слова с индексом $m+1$ и некоторого начала слова с индексом $m+1$. Кроме того, никакое слово с индексом $m+1$ не является началом другого слова с индексом $m+1$. Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. *Длина слова B_i вычисляется по формуле $|B_i| = L_i = 10^{i+1}\prod\limits_{j=1}^{i} k_j$. Кроме того, $|A_i| = |B_i| - 1$ и $|C_i| = |B_i| + 1$.*

Доказательство. Проверим это по индукции. При $i = 0$ утверждение очевидно.

Индуктивный переход: B_{i+1} является конкатенацией $10k_{i+1} - 8$ слов длины $10^{i+1}\prod\limits_{j=1}^{i} k_j$, а также 4 слов длины на единицу меньше, и 4 слов длины на единицу больше. В сумме получаем как раз в $10k_{i+1}$ раз больше, чем на предыдущем шаге, что и требовалось.

Слова A_{i+1} и C_{i+1} отличаются от B_{i+1} только заменой одного слова в конкатенации на слово, которое на один символ короче или длиннее соответственно.

1.6. Позиции вхождений слов в сверхслово и их остатки от деления на n

Нам нужно показать, что регулятор сверхслова A_ω относительно маленький, а регулятор сверхслова $A_\omega \otimes \mathrm{Cycle}_n$ — большой. Точнее, нам нужно оценить сверху или снизу значения этих функций на числе R_m, которое мы можем выбрать по своему усмотрению. Мы выберем в качестве R_m длину слова B_{3m}, равную L_{3m}. Таким образом, нам нужно будет показать две вещи: регулятор сверхслова A_ω принимает на L_{3m} значение, меньшее L_{3m+3}, а регулятор сверхслова $A_\omega \otimes \mathrm{Cycle}_n$ — большее $L_{3m+\lfloor n/10 \rfloor}$.

Мы начнём со второго. Чтобы установить это, нужно предъявить слово длины не больше L_{3m}, которое встречается в $A_\omega \otimes \mathrm{Cycle}_n$ бесконечно много раз, но расстояния между соседними вхождениями велики. Мы будем считать, что слово Cycle_n записано в алфавите остатков от деления на n (например, -1 и $n-1$ являются обозначениями одного и того же символа). Таким словом будет произведение слова A_{3m} и слова

$$\lfloor -n/2 \rfloor, \lfloor -n/2 \rfloor + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor \ldots .$$

Чтобы доказать, что оно встречается в $A_\omega \otimes \mathrm{Cycle}_n$ достаточно редко, нам нужно понять, с каких позиций могут начинаться вхождения слова A_{3m} в слово A_ω, и показать, что номера таких позиций, сравнимые с $\lfloor -n/2 \rfloor$ по модулю n, встречаются достаточно редко.

Лемма 1.3. *В любом слове с индексом $k+m$ слово A_k входит, начиная с позиций, дающих все остатки от $-m$ до 0 по модулю L_k (и, возможно,* *другие). При этом никакое слово с индексом k (то есть A_k, B_k, C_k) не входит ни в какое слово с индексом $k+m$ начиная с позиций с остатками по модулю L_k, не лежащими от $-4m$ до 0 (данное утверждение нетривиально только при $L_k > 4m$).*

Доказательство. Докажем индукцией по m. База $m = 1$ почти очевидна: с одной стороны первое и второе вхождения A_k в слова с индексом $k+1$ дают остатки 0 и -1. С другой стороны, мы знаем, что все вхождения слов с индексом k в слова с индексом $k+1$ корректны. И можно непосредственно убедиться, что номера позиций начал корректных вхождений слов с индексом k в слова с индексом $k+1$ суть $0, -1, -2, -3, -4$ по модулю L_k.

Пусть для $m = l$ это верно. Рассмотрим теперь $m = l + 1$, и пусть дано любое слово с индексом $k + l + 1$. Сначала докажем первое утверждение. По предположению индукции в данном слове есть вхождение A_{k+1} на позиции с остатком $-l$ по модулю L_{k+1}, а значит, и по модулю L_k, так как $L_{k+1} \vdots L_k$. Это вхождение A_{k+1} начинается со вхождения A_k; так мы получим вхождение A_k с остатком $-l$ по модулю L_k. Аналогичным образом доказывается существование вхождений A_k с остатками от $-l+1$ до 0 по модулю L_k. Остаток $-l-1$ даст второе вхождение A_k во вхождение A_{k+1}, начинающееся с позиции с остатком $-l$ по модулю L_k.

Перейдем к доказательству второго утверждения. По предположению индукции в данном слове индекса $k + l + 1$ все вхождения слов с индексом $k+1$ имеют начальные позиции с остатками от $-4l$ до 0 по модулю L_{k+1} (а значит, и по модулю L_k). Рассмотрим отдельно любое из таких вхождений. Остатки от деления на L_k позиций вхождений слов с индексом k в слово с индексом $k+1$ относительно его начала лежат от -4 до 0, а само начало по предположению индукции имеет позицию с остатком от $-4l$ до 0 при делении на L_k. Складывая остатки, получаем второе утверждение леммы.

1.7. Нижняя оценка на регулятор почти периодичности прямого произведения построенного сверхслова и периодического сверхслова

Лемма 1.4. *Пусть $k_i \vdots i$ и $s > n > 100$. Тогда регулятор почти периодичности сверхслова $A_\omega \otimes \mathrm{Cycle}_n$ на L_s принимает значение большее $L_{s+\lfloor \frac{n}{10} \rfloor}$. Более того, регулятор любого суффикса $A_\omega \otimes \mathrm{Cycle}_n$ обладает этим свойством.*

Доказательство. Заметим, что $L_m \vdots n$ при $m \geqslant n$, и остаток от деления позиции на n можно считать как остаток от деления на n остатка от деления на L_m.

Рассмотрим произвольное $N > n + s$. По лемме 1.3 в слове A_N есть вхождения A_s, начинающиеся с позиций, дающих все возможные остатки от деления на n, так как разность $N - s$ не меньше n. В частности, там есть и вхождение A_s с остатком $\lfloor n/2 \rfloor$ по модулю n. Заметим, что A_ω содержит бесконечно много непересекающихся вхождений A_N. Поэтому любой суффикс сверхслова $A_\omega \otimes \mathrm{Cycle}_n$ содержит вхождение прямого произведения слова A_s и слова

$$\lfloor -n/2 \rfloor, \lfloor -n/2 \rfloor + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor - 1 \ldots$$

(имеется в виду, что мы продолжаем эту последовательность с периодом n, пока её длина не станет равной длине слова A_s).

Чтобы завершить доказательство первого утверждения леммы 1.4, покажем, что некоторое подслово длины $L_{s+\lfloor \frac{n}{10} \rfloor}$ в $A_\omega \otimes \mathrm{Cycle}_n$ не содержит вхождений рассматриваемого произведения. Таким подсловом будет, например, начало этого слова длины $L_{s+\lfloor \frac{n}{10} \rfloor}$. Действительно, нетрудно убедиться, что при $n > 100$ выполнено неравенство $|A_{s+\lfloor \frac{n}{9} \rfloor}| > L_{s+\lfloor \frac{n}{10} \rfloor}$. Поэтому рассматриваемое начало является префиксом прямого произведения сверхслова $A_{s+\lfloor\frac{n}{9}\rfloor}$ и начала сверхслова Cycle_n подходящей длины. По лемме 1.3 слово $A_{s+\lfloor\frac{n}{9}\rfloor}$ может содержать только вхождения A_s, начинающиеся с позиций $-4\left\lfloor\frac{n}{9}\right\rfloor, \ldots, 0$ по модулю n. Поскольку $4\left\lfloor\frac{n}{9}\right\rfloor < \lfloor n/2\rfloor$, среди этих остатков отсутствует $\lfloor n/2\rfloor$.

Для доказательства второго утверждения леммы 1.4 осталось заметить, что слово A_ω содержит бесконечно много вхождений слова $A_{s+\lfloor\frac{n}{9}\rfloor}$, начинающихся в позициях, кратных n (опять же по лемме 1.3).

1.8. Верхняя оценка регулятора построенного сверхслова

Лемма 1.4 устанавливает нужную нижнюю оценку регулятора почти периодичности сверхслова $A_\omega \otimes \mathrm{Cycle}_n$. Осталось получить верхнюю оценку регулятора почти периодичности самого сверхслова A_ω. Здесь мы будем использовать то обстоятельство, что слова с индексом $i+2$ содержат все возможные пары слов с индексом i.

Лемма 1.5. *Любое слово, которое является подсловом конкатенации двух слов с индексом i, входит в каждое слово с индексом $i+2$.*

Доказательство. Любая комбинация рядом стоящих слов с индексом i встречается хотя бы в одном из слов уровня $i+1$. В каждом из слов A_{i+2}, B_{i+2} и C_{i+2} встречается каждое из слов предыдущего уровня, что и требовалось.

Заметим, что усложнив немного конструкцию слов A_i, B_i и C_i, можно сделать, чтобы доказанная лемма была справедлива для $i+1$ вместо $i+2$. Мы не делаем этого, поскольку не стремимся (пока) к уменьшению константы 30 в формулировке теоремы 0.2. Как мы увидим ниже, при более аккуратной формулировке и при немного другом условии на нижнюю оценку роста регулятора константа 30 может быть уменьшена почти до 1. Что означает “почти” мы уточним позже.

Лемма 1.6. *Сверхслово A_ω почти периодическое и регулятор его почти периодичности можно оценить следующим образом:*

$$\frac{1}{2}L_{i+1} \leqslant f(L_i) \leqslant 2L_{i+2} + 1 < L_{i+3}$$

Доказательство. Первое неравенство: левая половина слова A_{i+1} не содержит C_i, хотя все слово A_{i+1} содержит C_i и встречается в сверхслове бесконечно много раз.

Второе неравенство: любой участок длины $2L_{i+2} + 1$ содержит целиком хотя бы одно слово уровня $i+2$. Такое слово, как уже доказано, содержит любое слово, которое можно покрыть двумя непересекающимися словами с индексом i (а участок длины L_i не может пересекаться сразу с тремя вхождениями слов с индексом i).

Поскольку любое слово, входящее в A_ω, входит и в некоторое A_i, мы тем самым доказали и почти периодичность сверхслова A_ω.

1.9. Завершение доказательства

Закончим построение искомых сверхслова A_ω и последовательности R. Пусть задана функция F. Построим последовательность $k_1, k_2, \ldots$ по формулам $k_1 = 3F(1)$, $k_{i+1} = 3(i+1)F(L_i)$. В качестве R_m возьмем $R_m = L_{3m}$. Проверим выполнение условий теоремы: $R_{m+1} = L_{3m+3} > L_{3m+1} > F(L_{3m}) = F(R_m)$, регулятор последовательности почти периодичности сверхслова A_ω на R_m принимает значение меньшее R_{m+1}, а при $m > n$ регулятор последовательности $A_\omega \otimes \mathrm{Cycle}_n$ на R_m принимает значение, превосходящее $L_{3m+\lfloor \frac{n}{10} \rfloor} \geqslant R_{m+\lfloor \frac{n}{30} \rfloor}$, что и требовалось.

Замечание. Как видно из приведённых оценок, регулятор f сверхслова A_ω принимает на R_m значение, большее $F(R_m)$. Поэтому возникает искушение усилить утверждение теоремы 0.2, добавив условие $f \geqslant F$ и заменив $\max\{f, F\}$ на f. Этого нельзя делать, поскольку мы не доказали, что неравенство $f \geqslant F$ имеет место для всех аргументов.

1.10. Улучшение нижней оценки теоремы 0.2

В приведённой конструкции и доказательстве имеется большой запас и константу 30 можно понизить, существенно не меняя конструкции.

В этом разделе, в качестве примера усиления оценки, будет доказана теорема 0.3.

Теорема 1.1. *Пусть задана возрастающая функция $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Тогда найдётся почти периодическое сверхслово B с регулятором почти периодичности f_B и следующими свойствами.*

1) Для бесконечного количества аргументов f_B превышает F. Более того, эти аргументы выстроены в цепочку: существует последовательность натуральных чисел L_i, такая что

$$F(L_i) < \frac{1}{6}L_{i+1} \leqslant f_B(L_i) \leqslant L_{i+1}.$$

2) Для любого $n > 2$ и любого i регулятор почти периодичности $B \otimes \mathrm{Cycle}_n$ удовлетворяет неравенствам $f_{B\otimes\mathrm{Cycle}_n}(L_i) > L_{i+n-2} \geqslant f^{\circ n-2}(L_i)$.

3) Для любого достаточно большого n регулятор почти периодичности всё того же прямого произведения $B \otimes \mathrm{Cycle}_n$ на всех достаточно больших значениях аргументов превышает $f^{\circ n-3}$.

Доказательство. Для доказательства изменим немного конструкцию слов A_i, B_i, C_i. Слова A_0, B_0, C_0 менять не будем, а $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ определим по-другому:

$$A_{i+1} = B_iA_iB_iC_iB_iB_i(B_i^{k_i}A_iB_iC_iB_i)^5A_iB_iB_iB_i,$$
$$B_{i+1} = B_iA_iB_iC_iB_iB_i(B_i^{k_i}A_iB_iC_iB_i)^5B_iB_iB_iB_i,$$
$$C_{i+1} = B_iA_iB_iC_iB_iB_i(B_i^{k_i}A_iB_iC_iB_i)^5C_iB_iB_iB_i.$$

Из определения видно, что для любого i длины слов A_i, B_i, C_i отличаются на 1: как и раньше, обозначим длину B_i через L_i, тогда длина A_i есть $L_i - 1$, а длина C_i есть $L_i + 1$. Последовательность $k_1, k_2, \ldots$ подберём из того расчёта, чтобы для всех n при всех достаточно больших i число L_i было кратно n и чтобы L_{i+1} было больше $100F(L_i)$. Кроме того, сделаем $k_i > 100$.

Слова $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ выбраны такими, чтобы:

(а) каждое из них содержало пары B_iA_i, A_iB_i, B_iC_i, C_iB_i и B_iB_i в любой своей четверти и конкатенация любых слов из $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ не содержала других пар из слов A_i, B_i, C_i;

(б) в каждом из них был фрагмент длины не менее одной шестой от всего слова, не содержащий A_i.

(в) в любом начале любого из слов $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ разница между количеством A_i и количеством C_i принимала оба значения 0 и 1 не менее одного раза и не принимала никаких других значений;

(г) в каждом из них ровно в одном месте входят $k_i + 2$ копии B_i подряд.

Из-за наличия уникального фрагмента $B_i^{k_i+2}$ в одном и том же месте каждого из слов уровня $i+1$ и того, что слова уровня $i+1$ не продолжают друг друга, следует аналог леммы 1.1: для всех $m \leqslant l$ все вхождения слов A_m, B_m, C_m в A_l, B_l, C_l корректны. Из свойства (в) следует такой аналог леммы 1.3:

Лемма 1.7. *В любом слове с индексом $k+m$ любое слово с индексом k входит начиная с позиций, дающих только остатки от $-m$ до 0 по модулю*

L_k, причём для каждого такого остатка и любого слова уровня $k+m$ некоторое слово с индексом k входит в это слово, начиная с позиции, дающей этот остаток. Слово B_k входит во все слова с индексом $k+m$ начиная с позиций, дающих только остатки от $-m$ до 0 по модулю L_k и все остатки реализуются (в любом слове с индексом $k+m$).

Из этой леммы следует оценка на регулятор f прямого произведения сверхслова B_ω и Cycle_n: а именно, выполнено неравенство

$$f(L_k) > L_{k+n-2}$$

(для всех k, для которых L_k кратно n). В самом деле, рассмотрим прямое произведение слова B_k и слова

$$-n+1, -n+2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$

Это слово входит в $B_\omega \otimes \mathrm{Cycle}_n$. Действительно, рассмотрим любое число m, удовлетворяющее неравенству

$$m \geqslant n-1.$$

Тогда B_k входит в B_{k+m}, начиная с некоторой позиции, сравнимой с $-n+1$ по модулю n.

С другой стороны, верно и обратное — если слово B_k входит в начало B_{k+m} начиная с некоторой позиции, сравнимой с $-n+1$ по модулю n, то m удовлетворяет этому неравенству. Таким образом, мы нашли слово длины L_k, не входящее в некоторые подслова B_ω длины L_{k+n-2}. При этом оно входит в наше сверхслово бесконечно много раз. Таким образом, значение регулятора на L_k больше L_{k+n-2}.

Теперь докажем, что для регулятора f сверхслова B_ω выполнено неравенство

$$f(L_i) \leqslant L_{i+1}.$$

Любое слово длины L_i (или меньше), входящее в сверхслово B_ω, покрывается двумя словами уровня i. По первому и второму свойству любая возможная в нашем сверхслове комбинация рядом стоящих слов с индексом i встречается в каждом из слов уровня $i+1$; более того, она встречается в любой четверти каждого из слов уровня $i+1$. Любой участок длины L_{i+1} пересекается с одним из слов уровня $i+1$ хотя бы по половине его длины (возможно, минус один или два символа), что намного больше четверти длины и включает первый или последний из пяти повторов блока в середине слова уровня $i+1$ целиком.

Теперь установим, что

$$\frac{1}{6}L_{i+1} \leqslant f(L_i).$$

Слово A_i длины L_i-1 не встречается между своими двумя вхождениями в два соседних повтора пятикратно повторяемого блока в середине слова уровня $i+1$, что позволяет указать подслово длины $L_{i+1}/6$ без вхождений данного слова длины L_i-1.

Вспоминая, что $F(L_i) < \frac{1}{6}L_{i+1}$, мы можем заключить, что для регулятора f сверхслова B_ω выполняются неравенства

$$F(L_i) < \frac{1}{6}L_{i+1} \leqslant f(L_i) \leqslant L_{i+1},$$

при всех значениях i. Поскольку регулятор f_B не убывает, индукцией по n легко доказывается, что $f_B^{\circ n-2}(L_i) \leqslant L_{i+n-2}$, что, напомним, меньше $f_{B\otimes \mathrm{Cycle}_n}(L_i)$.

Теперь рассмотрим произвольную длину $L_i < l < L_{i+1}$. Заметим, что $f_B(l) \leqslant f_B(L_{i+1}) \leqslant L_{i+2}$, и при этом $f_{B\otimes \mathrm{Cycle}_n}(l) \geqslant f_{B\otimes \mathrm{Cycle}_n}(L_i) \geqslant L_{i+n-2} \geqslant f_B^{\circ n-4}(L_{i+2}) \geqslant f_B^{\circ n-4}(f_B(l)) = f_B^{\circ n-3}(l)$.

Таким образом, теорема 0.3 доказана полностью.

Можно посмотреть на конструкцию при конкретном выборе k_j. Длина слова B_n равна $10 \times 5^n \times \prod_1^n (k_j+6)$. Пусть, скажем, $k_{n+1} = n \times \lceil \frac{|B_n|}{n} \rceil$. Тогда на некоторой подпоследовательности длин регулятор B ведёт себя как $\Theta(l^2)$, а регулятор $B \otimes \mathrm{Cycle}_n$ как $\Omega(l^{2^{n-3}})$.

Глава 2

Полупрямые произведения вычислимых мер на сверхсловах

2.1. Основные свойства полупрямых произведений, согласованных с отношением

В качестве примера использования определения 0.6 докажем сначала наличие полупрямого произведения, согласованного с отношением, для двух конкретных мер. Рассмотрим меру μ, сконцентрированную на последовательности с периодом

$$\oplus \ominus \oplus \ominus \oplus \oplus \oplus \ominus \ominus\ominus,$$

и меру ν, сконцентрированную на последовательности с периодом

$$\oplus \oplus \oplus \ominus \oplus \oplus \oplus \ominus \ominus \ominus\ .$$

Ясно, что $\mu \leqslant \nu$. Действительно, мера, сконцентрированная на последовательности с периодом

$$\begin{matrix} \oplus\oplus\oplus\ominus\oplus\oplus\oplus\ominus\ominus\ominus \\ \oplus\ominus\oplus\ominus\oplus\oplus\oplus\ominus\ominus\ominus \end{matrix}.$$

приписывает нулевую вероятность слову $\substack{\ominus \\ \oplus}$, отсутствие в сверхслове вхождений этого слова обеспечивает выполнение нестрогого покомпонентного неравенства между проекциями и имеет проекции, равные рассматриваемым мерам.

Как уже было упомянуто во введении, из теоремы Форда–Фалкерсона [8] о максимальном потоке и минимальном разрезе следует простой критерий того, что распределение μ находится в отношении M с ν. Авторство данного критерия достоверно неизвестно.

Напомним формулировку теоремы 0.4.

Теорема. *(0.4) Распределение μ находится в отношении M с ν, тогда и только тогда, когда не существует подмножеств $A \subset X$, $B \subset Y$, таких что все M-соседи A лежат в B и $\mu(A) > \nu(B)$.*

Для полноты изложения приведём доказательство этого критерия. Ясно, что если распределение μ находится в отношении M с ν, то таких подмножеств нет. В самом деле, рассмотрим полупрямое произведение λ, для которого $\lambda(M) = 1$. Предположим, что все M-соседи A лежат в B. Тогда

$$\mu(A) = \lambda(A \times Y) = \lambda((A \times Y) \cap M) =$$
$$= \lambda((A \times B) \cap M) \leqslant \lambda(A \times B) \leqslant \lambda(X \times B) = \nu(B).$$

Второе равенство здесь выполнено, поскольку носитель распределения λ включен в M, а третье — поскольку все M-соседи A лежат в B.

Теперь докажем обратное утверждение. Для этого рассмотрим следующую сеть (рис. 2.1). Из источника s выходит $|X|$ рёбер, они ведут в вершины,

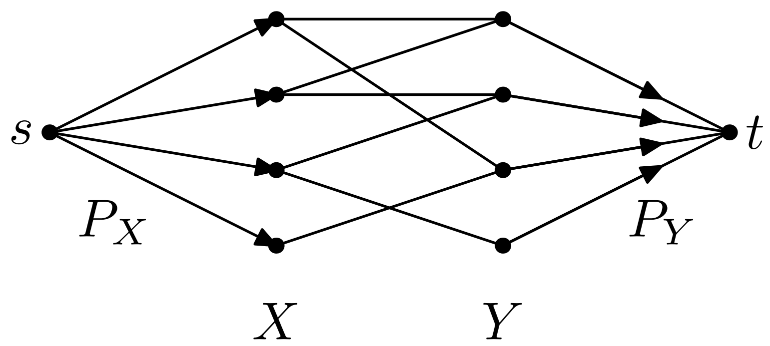

Рис. 2.1. Пример сети, соответствующей заданному отношению M.

соответствующие элементам X. Их пропускные способности равны значениям μ на соответствующих элементах X. Рёбра, ведущие в сток t, выходят из вершин, соответствующих элементам Y, а их пропускные способности равны значениям ν. Ребра сети между вершинами X и Y соответствуют элементам бинарного отношения M — их пропускные способности не ограничены.

По построению, в этой сети можно пропустить поток мощности 1 из истока в сток тогда и только тогда, когда существует полупрямое произведение λ, для которого $\lambda(M) = 1$: значение λ на паре (x, y) соответствует количеству жидкости, проходящей из x в y, наличие в сети рёбер только из M ограничивает носитель распределения λ отношением M. Теорема Форда–Фалкерсона утверждает, что для произвольной сети, если из источника в сток невозможно пропустить поток мощности ρ, то к этому есть следующее препятствие: все вершины сети можно разделить на два множества U, V (разрез) так, чтобы исток попал в U, сток попал в V, и сумма пропускных способностей всех рёбер сети, ведущих из U в V, (величина разреза) была меньше ρ. В нашем случае множество U, существующее по этой теореме, вместе с любой своей вершиной должно содержать и всех её соседей (иначе величина разреза будет неограниченной). Возьмем в качестве A множество всех вершин из U, лежащих в X, а в качестве B — множество всех вершин из U, лежащих в Y. Величина разреза равна $(1-\mu(A))+\nu(B)$ (первое слагаемое равно сумме пропускных способностей ребер из источника в V, а второе — сумме пропускных способностей ребер из U в сток). Поскольку эта сумма меньше 1, мы можем заключить, что $\mu(A) > \nu(B)$.

В определении 0.7 упоминалось, что для вычислимости распределения ν на $\Sigma^{\mathbb{N}}$ достаточно существования вероятностного алгоритма (алгоритма, имеющего доступ к независимым бросаниям симметричной монеты) без входа, который на выходной ленте печатает случайную бесконечную последовательность с распределением ν.

В самом деле, для оценки с точностью ϵ ν-меры множества Γ_u всех продолжений слова u, запустим алгоритм порождения распределения и будем пробовать всевозможные результаты бросаний и смотреть, на каких из них алгоритм напечатает целиком u (и возможно, что-то еще). Таким образом мы сможем приближать $\nu(\Gamma_u)$ снизу и наши приближения будут сходиться к

$\nu(\Gamma_u)$. Правда, мы не знаем, в какой момент у нас уже имеется приближение с точностью ϵ. Для этого надо вычислять приближения снизу также и для всех остальных слов u' той же длины, что и u. Когда сумма всех этих приближений снизу станет больше $1-\epsilon$, мы будем уверены, что точность каждого из них не хуже ϵ. Аналогичное верно и для вероятностных мер на $\Sigma^{\mathbb{N}} \times \Sigma^{\mathbb{N}}$.

2.2. Основной результат.

В этом разделе мы предъявим две вычислимые вероятностные меры на пространстве бесконечных 0-1-последовательностей, которые имеют полупрямое произведение, согласованное с отношением покомпонентного порядка, но все такие полупрямые произведения невычислимы.

Напомним формулировку теоремы 0.5.

Теорема. *(0.5) Существуют две вычислимые меры μ и ν на $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, которые имеют полупрямое произведение, согласованное с отношением $\leqslant$, но не имеют вычислимого полупрямого произведения, согласованного с отношением $\leqslant$.*

Доказательство. Вначале рассмотрим случай, когда в качестве Σ взято не множество $\{0,1\}$, а более сложно устроенное конечное частично упорядоченное множество. Оно будет содержать шесть элементов, называемых a, b, c, d, e, f с частичным порядком: $a < c$, $a < d$, $b < c$, $b < d$ (см. Рис. 2.2).

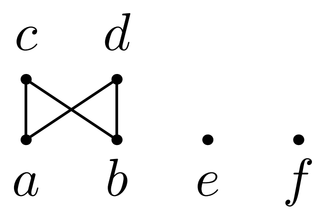

Рис. 2.2. Отношение частичного порядка

Сначала рассмотрим следующие два распределения на последовательностях из букв a, b, c, d. Пусть $u_0, u_1, u_2, \ldots$ независимы и принимают значения a и b с вероятностью $1/2$. Аналогичным образом пусть $v_0, v_1, v_2, \ldots$ независимы и принимают значения c и d с вероятностью $1/2$. У случайных величин $u = u_0u_1u_2\ldots$ и $v = v_0v_1v_2\ldots$ есть много различных полупрямых произведений. Можно считать, например, что $v_i = c$ при $u_i = a$ и $v_i = d$ при $u_i = b$; можно поменять c и d местами; наконец, можно считать u_i и v_i независимыми. Эти три варианта соответствуют трем матрицам совместного распределения для u_i и v_i:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.1}$$

Проекции у этих распределений (суммы по строкам и столбцам) одинаковы, хотя сами распределения разные.

Распределения на u и v будут играть в наших рассуждениях вспомогательную роль. А именно, для распределений μ и ν, которые мы построим, так будут распределены буквы на чётных позициях. Точнее, обозначим через x случайную относительно μ последовательность, а через y случайную относительно ν последовательность. Тогда x_{2n} принимает значения a, b с равными вероятностями $1/2$ (для всех n), и при разных n эти события независимы. Аналогично y_{2n} принимает значения c, d с равными вероятностями $1/2$, и при разных n эти события независимы.

Для того, чтобы определить распределения букв сверхслов x и y на нечётных позициях, нам понадобится пара A, B перечислимых неотделимых множеств натуральных чисел (см., например, [15]). Напомним, что это означает, что A и B перечислимы, не пересекаются и не существует алгоритма, который, получив на вход любое натуральное число n, выдаёт 0 или 1, причем, если $n \in A$, то он обязательно выдаёт 0, если $n \in B$, то он обязательно выдаёт

1. Такой алгоритм (когда он существует) называется *отделителем* множеств A, B. Перечислимость множества X означает, что существует вычислимая последовательность натуральных чисел, множество значений которой равно X (в этом случае говорят, что последовательность перечисляет X). Поскольку перечислимые неотделимые множества обязаны быть бесконечными, можно без ограничения общности считать, что последовательность, перечисляющая A, состоит из различных чисел, то есть, перечисляет A без повторений (и то же самое для B). В построении мер на x и y мы будем использовать последовательность, полученную соединением этих двух последовательностей. А именно, мы рассмотрим последовательность $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ такую, что последовательность чётных членов $t_0, t_2, \ldots$ перечисляет без повторений множество A, а последовательность нечётных членов $t_1, t_3, \ldots$ перечисляет без повторений множество B.

Нечётные члены последовательности x определяется через её четные члены следующим детерминированным правилом:

$$x_{2m+1} = \begin{cases} e, & \text{если } x_{2t_m} = a, \\ f, & \text{если } x_{2t_m} = b. \end{cases}$$

Напомним, что x_{2t_m} выбирается случайно среди букв a, b с равномерным распределением. Таким образом, первое распределение μ полностью задано. Нетрудно убедиться, что оно вычислимо. В самом деле, чтобы вычислить меру множества всех продолжений слова u нужно сделать следующее: если в слове u есть буквы, отличные от a, b, e, f, то мера равна нулю. Иначе, для каждой нечётной позиции $2m+1$ в u вычислим t_m. Если для хотя бы одного такого m позиция $2t_m$ входит в u, но пара букв слова u, стоящих в позициях $2m+1, 2t_m$, отлична от пар (e, a) и (f, b), то опять же мера равна нулю. А иначе мера равна 2^{-k}, где k обозначает количество свободных позиций в u — так мы называем все чётные позиции, а также все нечётные позиции $2m+1$, для которых позиция $2t_m$ не входит в u.

Нечётные члены последовательности y определяется похожим (также детерминированным) правилом. Только на этот раз нам важна еще чётность m (напомним, что от этого зависит, какому из двух множеств A, B принадлежит t_m). Для чётных m:

$$y_{2m+1} = \begin{cases} e, & \text{если } y_{2t_m} = c, \\ f, & \text{если } y_{2t_m} = d, \end{cases}$$

а для нечётных m — всё наоборот:

$$y_{2m+1} = \begin{cases} e, & \text{если } y_{2t_m} = d, \\ f, & \text{если } y_{2t_m} = c. \end{cases}$$

Распределение вероятностей ν теперь тоже полностью определено. Его вычислимость доказывается так же, как и вычислимость распределения μ.

Осталось понять, почему у распределений μ, ν есть полупрямое распределение, согласованное с покомпонентным частичным порядком, но нет такого вычислимого полупрямого произведения. Сначала докажем существование. В качестве полупрямого произведения распределений μ, ν можно взять распределение, порождаемое следующим процессом:

Для всех натуральных чисел n (независимо друг от друга):
если $n = t_m \in A$, то выбираем с равными вероятностями $1/2$ один из следующих двух случаев:
(а) $x_{2m+1} = y_{2m+1} = e$, $x_{2n} = a$, $y_{2n} = c$,
(б) $x_{2m+1} = y_{2m+1} = f$, $x_{2n} = b$, $y_{2n} = d$,
если $n = t_m \in B$, то выбираем с равными вероятностями $1/2$ один из следующих двух случаев:
(в) $x_{2m+1} = y_{2m+1} = e$, $x_{2n} = a$, $y_{2n} = d$,
(г) $x_{2m+1} = y_{2m+1} = f$, $x_{2n} = b$, $y_{2n} = c$,

наконец, если n не лежит ни в A, ни в B, то порождаем только пару букв x_{2n}, y_{2n} в соответствии с первой или второй из матриц (2.1) (можно использовать и любую их выпуклую комбинацию, например, третью матрицу).

В результате этого процесса мы определим не только все буквы с чётными номерами в x, y, но и все буквы с нечётными номерами. В самом деле, для каждого m существует (и притом единственное) n, для которого $n = t_m$. По построению это распределение согласовано с частичным порядком.

Нетрудно также проверить, что его проекции равны μ, ν. В самом деле, с точки зрения последовательности x случаи (а) и (в) одинаковы, так же как и случаи (б) и (г) и мы с вероятностью $1/2$ выбираем одно из двух решений $x_{2m+1} = e$, $x_{2n} = a$ или $x_{2m+1} = f$, $x_{2n} = b$ при $n = t_m$, и с вероятностью $1/2$ выбираем одно из двух решений $x_{2n} = a$ и $x_{2n} = b$ при n, не лежащем в объединении A и B, в полном соответствии с тем, как и положено делать по распределению μ. С точки зрения последовательности y все случаи уже различны. При $n = t_m$ и чётном m мы с вероятностью $1/2$ выбираем одно из двух решений $y_{2m+1} = e$, $y_{2n} = c$ или $y_{2m+1} = f$, $y_{2n} = d$, как и диктует распределение ν. Аналогичное происходит и для $n = t_m$ и нечётном m и при n, не лежащем в объединении A и B.

Заметим, что для того, чтобы сделать этот процесс алгоритмическим, нам достаточно было бы иметь разрешающие алгоритмы для A и B (алгоритм разрешает множество натуральных чисел, если для любого входного натурального числа он сообщает, принадлежит ли оно множеству или нет). Более того, достаточно иметь и любой отделитель множеств A, B. В этом случае вероятностный алгоритм, порождающий распределение λ таков: параллельно для всех n мы запускаем отделитель на входе n и порождаем пару x_{2n}, y_{2n}, выбрав для этого первую или вторую матрицу из (2.1) в соответствии с тем, что выдал отделитель на входе n. После этого мы начинаем искать то m, для которого $a_m = n$. Такого m может не быть, в этом случае процесс поиска для данного n никогда не остановится, не принеся никакого вреда. Но если такое m существует, то рано или поздно мы его найдём и сможем определить x_{2m} в соответствии с уже выбранным значением x_{2n}, y_{2n}. По замечанию перед формулировкой теоремы из существования порождающего распределение λ алгоритма следует существование и вычисляющего алгоритма.

Можно вычислять меру λ, задаваемую данным отделителем, и непосредственно. Пусть нам, скажем, надо найти вероятность того, что по мере λ последовательность x продолжает данное слово u, а последовательность y продолжает данное слово v. Тогда мы для всех чётных позиций $2n$, которые есть в u или v, применяем отделитель к n. Затем мы смотрим, нет ли среди позиций, имеющихся в u или v, такой позиции $2m+1$, для которой $n = t_m$. Если буквы в u и v в позициях $2n, 2m+1$ не согласованы с выходом отделителя (согласованность означает случаи (а) или (б), если отделитель выдал 0, и случаи (в) или (г), если он выдал 1; отсутствие указанной позиции $2m+1$ в словах u или v не мешает согласованности), то вероятность равна нулю. Иначе она равна 2^{-k}, где k обозначает количество свободных позиций в u, v — так мы называем все чётные позиции, которые присутствуют хотя бы в одном из слов, и все нечётные позиции $2m+1$, для которых позиция $2t_m$ не входит ни в u, ни в v.

Но нам нужно сделать обратное: из алгоритма, вычисляющего любое полупрямое произведение λ мер μ, ν, согласованное с покомпонентным порядком, надо изготовить отделитель множеств A, B. Для этого разберёмся, каким должно быть любое полупрямое произведение λ мер μ, ν, согласованное с покомпонентным порядком. Ключевую роль, здесь играет следующая лемма.

Лемма 2.1. *Для любого чётного m для $n = t_m$ вероятность каждого из событий (а) и (б) выше равна в точности 1/2. Аналогично, для любого нечётного m для $n = t_m$ вероятность каждого из событий (в) и (г) выше точности равна 1/2.*

Доказательство. Докажем первое утверждение (второе доказывается совершенно аналогично). Фиксируем чётное m и $n = t_m$. Во-первых, с единичной вероятностью выполнено $x_{2m+1} = y_{2m+1}$. В самом деле, относительно распределений μ, ν с вероятностью 1 на нечётных позициях в x и y могут быть только e и f, а они не сравнимы между собой. Теперь воспользуемся детерминированной связью между y_{2m+1} и y_{2n}. С половинной вероятностью $y_{2n} = c$, а значит $y_{2m+1} = e$, следовательно $x_{2m+1} = e$, а значит $x_{2n} = a$ (последнее следует из детерминированной связью между x_{2m+1} и x_{2n}). С оставшейся половинной вероятностью выполнено $y_{2n} = d$, следовательно, $x_{2m+1} = y_{2m+1} = f$ и $x_{2n} = b$.

Теперь мы можем доказать, что из любого алгоритма, вычисляющего некоторое полупрямое произведение λ мер μ, ν, согласованное с покомпонентным порядком, можно изготовить отделитель множеств A, B. Для этого заметим, что если $n \in A$, то по лемме вероятность события $x_{2n} = a$, $y_{2n} = d$ равна 0 (поскольку $a \neq b$ и $c \neq d$), а если $n \in B$, то опять же по лемме эта вероятность равна $1/2$. Руководствуясь этим, на входе n отделитель с точностью $1/4$ вычисляет вероятность события $x_{2n} = a$, $y_{2n} = d$. и выдаёт 0, если приближённое значение меньше $1/4$, и 1, иначе. Таким образом, из существования вычислимого полупрямого произведения следует существование отделителя A и B, что противоречит предположению об их неотделимости.

Осталось перейти от построенного нами шестиэлементного множества W к последовательностям нулей и единиц. Это легко сделать, вложив W в пятимерный булев куб с покоординатными сравнениями, например, так:

$$\begin{aligned} a &= 00010, \\ b &= 00100, \\ c &= 01110, \\ d &= 10110, \\ e &= 10001, \\ f &= 01001 \end{aligned}$$

(вместо каждой буквы мы пишем пять битов). Можно также обойтись и булевым квадратом:

$$a = 00, \quad b = c = e = 01, \quad d = 11, \quad f = 10$$

Это вложение не даёт в точности того порядка, как на Рис. 2.2. Но можно заметить, что в доказательстве были использовано только то, что $a \neq b$, $c \neq d$, каждое из a, b меньше или равно каждого из c, d и несравнимость e, f. Указанное вложение эти свойства сохраняет. Теорема доказана.

Глава 3

Меры на сверхсловах и клеточные автоматы

3.1. Постановка задачи

В своих работах А.Л. Тоом рассматривал следующие операторы на мерах.

Пусть заданы действительные числа ε, δ от 0 до 1. Рассмотрим следующие три оператора на инвариантных мерах (через них мы и определим операторы Тоома).

- Flip_δ^+ превращает каждый символ $\ominus$ в $\oplus$ независимо с вероятностью δ;
- Flip_δ превращает каждый символ в противоположный независимо с вероятностью δ;
- Ann_ε выделяет в сверхслове все вхождения $\oplus\ominus$ и вычеркивает каждое из них (независимо от прочих) с вероятностью ε.

Каждый из этих операторов для любого исходного сверхслова x задает некоторое распределение вероятностей на выходных сверхсловах. Чтобы применить их к произвольной мере, надо усреднить эти распределения по данной мере на x.

Симметричный оператор Тоома $T_{\text{сим}}$ задается как композиция Flip_δ и Ann_ε (в указанной последовательности), а асимметричный оператор $T_{\text{асим}}$ — как композиция Flip_δ^+ и Ann_ε.

На самом деле, это описание не определяет оператор Ann_ε. Более точное определение будет дано ниже.

В работе [13] сформулировано следующее предположение.

Гипотеза 1 (А.Л. Тоом) *Пусть исходное состояние (состояние в нулевой момент) процесса, порождённого симметричным оператором Тоома* *состоит из одних минусов. Тогда для любых положительных τ, ε найдется (достаточно малое) положительное δ, для которого выполнено следующее. Для каждого момента времени вероятность того, что в этот момент данная компонента находится в состоянии $\oplus$, меньше τ.*

Очевидно, что эта гипотеза эквивалентна симметричной гипотезе, получающейся из нее заменой $\oplus \leftrightarrow \ominus$.

Теорема 3.1 ([13]). *Гипотеза 1 верна для асимметричного оператора Тоома. Точнее, для всех ε, δ и всех моментов времени вероятность плюса в данной клетке не превосходит $300\delta/\varepsilon^2$.*

Напомним свойства 0.3 отношения сравнения мер $\succcurlyeq$, нужные нам для доказательства гипотезы.

1. Отношение $\succcurlyeq$ транзитивно.

2. $T_{\text{асим}} \succcurlyeq T_{\text{сим}}$, где $T_{\text{сим}}, T_{\text{асим}}$ обозначают, соответственно симметричный и асимметричный операторы Тоома.

3. Если $\mu \succcurlyeq \nu$, то μ-вероятность плюса в данной клетке больше или равна ν-вероятности плюса в данной клетке.

4. Хотя бы один из двух операторов Тоома обладает следующим свойством монотонности:
$$\mu \succcurlyeq \nu \Rightarrow A(\mu) \succcurlyeq A(\nu).$$

Точнее, нам нужно чтобы для любого положительного ε существовало положительное δ, для которого выполнено второе и четвертое свойство (напомним, что операторы Тоома задаются параметрами ε, δ).

Лемма 3.1. *Если существует отношение $\succcurlyeq$ на инвариантных мерах, удовлетворяющее перечисленным свойствам, то из утверждения теоремы 3.1 следует гипотеза 1.*

Доказательство. Обозначим через μ_n распределение, полученное n-кратным применением симметричного оператора Тоома к мере, сосредоточенной на сверхслове из одних минусов, а через ν_n — результат n-кратного применения к тому же распределению асимметричного оператора. Тогда по индукции нетрудно доказать, что $\mu_n \succcurlyeq \nu_n$.

База индукции: для $n = 1$ это верно по второму свойству.

Индуктивный переход: пусть нам известно, что $\mu_n \succcurlyeq \nu_n$. По четвертому условию хотя бы один из двух операторов монотонен, пусть это будет, скажем первый оператор. Тогда по монотонности $\mu_{n+1} = T_{\text{сим}}(\mu_n) \succcurlyeq T_{\text{сим}}(\nu_n)$. С другой стороны по второму свойству $T_{\text{сим}}(\nu_n) \succcurlyeq T_{\text{асим}}(\nu_n) = \nu_{n+1}$. По транзитивности (первое условие) получаем $\mu_{n+1} \succcurlyeq \nu_{n+1}$.

Из доказанного и третьего свойства следует, что для любого момента времени μ_n-вероятность плюса не меньше ν_n-вероятности плюса. Поэтому из теоремы 3.1 следует гипотеза 1. Лемма доказана.

В качестве кандидата на подходящее отношение $\succcurlyeq$ А.Л. Тоом выдвинул два отношения, которые мы обозначим $\geqslant$ и $\trianglerighteq$ (определения будут даны ниже). Первое из них удовлетворяет первому и третьему свойствам, но, как мы показываем в настоящей работе, не удовлетворяет четвертому свойству.

Непосредственно из определения следует, что второе отношение $\trianglerighteq$ удовлетворяет второму и третьему условиям. А вот транзитивность была сформулирована в качестве гипотезы и оставалась недоказанной. Доказательство этого факта и составляет основной результат настоящей главы. Выполнено ли четвертое свойство, в настоящий момент неизвестно. Если удастся его доказать, то гипотеза Тоома будет доказана.

3.2. Используемые базовые понятия и обозначения

Определение 3.1. *Двусторонним сверхсловом* (как и сказано во введении) над конечным *алфавитом* называется отображение из множества целых чисел в этот алфавит. (Далее в данной главе мы будем говорить просто *сверхслово.*) Множество всех сверхслов над алфавитом Σ будет обозначаться через

Σ^∞. *Сдвигом* называется любое отображение, которое сопоставляет сверхслову $i \mapsto w(i)$ сверхслово $i \mapsto w(i+j)$, где j произвольное целое число, называемое *величиной сдвига.* В большинстве случаев будут рассматриваться сверхслова в алфавитах $\{\oplus, \ominus\}$, $\{\oplus, \odot, \ominus\}$ и в алфавите пар символов

$$\left\{ \frac{\oplus}{\oplus}, \frac{\oplus}{\odot}, \frac{\oplus}{\ominus}, \frac{\odot}{\oplus}, \frac{\odot}{\odot}, \frac{\odot}{\ominus}, \frac{\ominus}{\oplus}, \frac{\ominus}{\odot}, \frac{\ominus}{\ominus} \right\}. \tag{3.1}$$

Использование этого обозначения для пары символов позволяет нам записывать последовательность пар символов как две последовательности, записанные одна под другой.

Будем называть *двусторонним словом* слово, в котором задано начало отсчёта, то есть отображение из конечного отрезка целых чисел в алфавит.

Будем использовать обозначение $u * v$ для конкатенации слов u и v, а также $a * u$ и $u * a$ для приписывания буквы a к слову u слева или справа.

Элементарным цилиндром, соответствующим символу x на позиции i, называется множество таких сверхслов, что на позиции i стоит x. *Тонким цилиндром* называется конечное пересечение элементарных цилиндров, то есть, множество сверхслов, имеющих заданные буквы на позициях из некоторого конечного списка. *Носителем* тонкого цилиндра называется множество позиций из этого списка. *Содержанием* тонкого цилиндра со связным носителем будем называть слово, образованное заданными символами на последовательных позициях. *Цилиндрически определимым множеством* называется любой элемент сигма-алгебры, порождённой тонкими цилиндрами. Будем рассматривать вероятностные сигма-аддитивные меры, заданные только на цилиндрически определимых множествах. Зададим сходимость на мерах следующим образом: $\mu_n \to \mu$ тогда и только тогда, когда для каждого тонкого цилиндра C верно $\mu_n(C) \to \mu(C)$.

При обсуждении порядка всегда предполагается, что $\oplus > \odot > \ominus$. В тексте мы будем называть $\oplus, \odot, \ominus$ плюсом, нулём и минусом соответственно.

При рассмотрении элементов алфавита пар символов первый элемент пары будем называть *верхней компонентой*, а второй — *нижней.* Будем называть верхней (соответственно, нижней) компонентой слова w (сверхслова ω)

слово (сверхслово), составленное из верхних (соответственно, нижних) компонент отдельных символов слова w (соответственно, сверхслова ω). *Верхней (нижней) проекцией* (или, что в данном случае то же самое, *маргинальной мерой*) меры на множестве сверхслов над алфавитом пар символов будем называть меру, приписывающую каждому множеству M сверхслов над алфавитом одиночных символов меру множества всех сверхслов над алфавитом пар символов, у которых верхняя (соответственно, нижняя) компонента лежит в множестве M.

Определение 3.1 закончено.

Определение 3.2. *Вероятностная мера, определенная на сигма-алгебре цилиндрически определимых множеств сверхслов, называется* инвариантной *(относительно сдвигов), если она приписывает одно и то же значение множествам сверхслов, отличающимся лишь сдвигом.*

3.3. Инвариантные меры и операторы на них

Очевидно, что мера μ на двусторонних сверхсловах в некотором алфавите Σ является инвариантной, если мера любого тонкого цилиндра не меняется при сдвиге его носителя. Чтобы задать инвариантную меру, достаточно сопоставить каждой конечной последовательности символов $w_1 \ldots w_n$ (то есть, слову) меру тонкого цилиндра

$$\{x\colon \mathbb{Z} \to \Sigma \mid x(0) = w_1, \ldots, x(n-1) = w_n\}.$$

В дальнейшем мы будем называть эту величину “мерой слова $w_1 \ldots w_n$” и обозначать через $\mu(w)$. Произвольная функция $w \mapsto \mu(w)$, отображающая слова над алфавитом Σ в неотрицательные действительные числа, задаёт инвариантную вероятностную меру тогда и только тогда, когда её значение на пустом слове равно 1 и для всех слов w выполнены два равенства:

$$\mu(w) = \sum_{\sigma\in\Sigma} \mu(w * \sigma), \qquad \mu(w) = \sum_{\sigma\in\Sigma} \mu(\sigma * w).$$

Пусть заданы действительные числа ε, δ от 0 до 1. Напомним построение операторов Тоома.

- Flip_δ^+ превращает каждый символ $\ominus$ в $\oplus$ независимо с вероятностью δ;
- Flip_δ превращает каждый символ в противоположный независимо с вероятностью δ;
- Ann_ε выделяет в сверхслове все вхождения $\oplus\ominus$ и вычеркивает каждое из них (независимо от прочих) с вероятностью ε.

Каждый из этих операторов для любого исходного сверхслова x задает некоторое распределение вероятностей на выходных сверхсловах. Чтобы применить их к произвольной мере, надо усреднить эти распределения по данной мере на x.

Симметричный оператор Тоома $T_{\text{сим}}$ задается как композиция Flip_δ и Ann_ε (в указанной последовательности), а асимметричный оператор $T_{\text{асим}}$ — как композиция Flip_δ^+ и Ann_ε.

На самом деле, мы пока еще не определили оператор Ann_ε. Тонкость в том, что в последовательности, полученной вычеркиванием, можно разными способами задать “начало отсчета”, то есть, член с нулевым номером. Нужно сделать это так, чтобы полученный оператор сохранял свойство меры быть инвариантной. Поясним, в чем здесь трудность.

Пусть, скажем, для определения начала отсчета мы берем первый невычеркнутый символ с неотрицательным номером. В качестве примера рассмотрим следующую инвариантную меру: она сопоставляет вероятности по $1/4$ периодическому сверхслову (с периодом 4)

$$\cdots \oplus \oplus \ominus \ominus \oplus \oplus \ominus \ominus \oplus \oplus \ominus \ominus \ldots$$

и трем его сдвигам:

$$\cdots \oplus \ominus \ominus \oplus \oplus \ominus \ominus \oplus \oplus \ominus \ominus \oplus \ldots$$
$$\cdots \ominus \ominus \oplus \oplus \ominus \ominus \oplus \oplus \ominus \ominus \oplus \oplus \ldots$$
$$\cdots \ominus \oplus \oplus \ominus \ominus \oplus \oplus \ominus \ominus \oplus \oplus \ominus \ldots$$

Ясно, что при правильном определении после стирания всех вхождений $\oplus\ominus$ (считаем для простоты, что $\varepsilon = 1$) должна получится инвариантная мера, которая сопоставляет вероятность $1/2$ обоим сверхсловам из чередующихся плюсов и минусов.

Однако при нашем определении получается вообще не инвариантная мера. В самом деле, будем для определенности считать, что в этих четырех сверхсловах самый левый из нарисованных символов имеет номер 0. После стирания всех вхождений $\oplus\ominus$ и выбора начала отсчета в соответствии с указанным правилом мы из четырех исходных сверхслов получим следующие четыре:

$$\cdots \oplus \ominus \oplus \ominus \oplus \ominus \ldots$$
$$\cdots \ominus \oplus \ominus \oplus \ominus \oplus \ldots$$
$$\cdots \ominus \oplus \ominus \oplus \ominus \oplus \ldots$$
$$\cdots \ominus \oplus \ominus \oplus \ominus \oplus \ldots$$

Поэтому после стирания сверхслово $\cdots \oplus \ominus \oplus \ominus \oplus \ominus \ldots$ будет иметь вероятность $1/4$, а сдвинутое сверхслово $\cdots \ominus \oplus \ominus \oplus \ominus \oplus \ldots$ — вероятность $3/4$.

3.4. Определение оператора Ann_ε.

Чтобы определить оператор Ann_ε, мы представим его как композицию двух операторов: первый из них, $\mathrm{Duel}_\varepsilon$, заменяет каждое вхождение $\oplus\ominus$ с вероятностью ε на пару новых символов $\odot\odot$, а второй, Clean, стирает все символы $\odot$. Определение оператора $\mathrm{Duel}_\varepsilon$ не представляет проблемы, поскольку можно сохранить исходное начало отсчета: полученный оператор коммутирует со сдвигом и поэтому сохраняет инвариантность. Трудности сосредоточены в определении оператора стирания Clean.

Определение 3.3. *Определим оператор $Clean$. Сделаем это сразу в общем случае — определим оператор стирания всех символов из множества $\Delta \subset \Sigma$ в сверхсловах над Σ. Мы предполагаем, что вероятность наличия на любой заданной позиции символа из Δ не равна 1.*

Вероятность по мере $Clean_\Delta \mu$ непустого слова $w_0 \dots w_n$ над алфавитом $\Sigma \setminus \Delta$ задается следующей формулой:

$$(Clean_\Delta \mu)(w_0 \dots w_n) =$$
$$= \tfrac{1}{1-\mu(\Delta)} \sum_{z_1,\dots,z_n \in \Delta^*} \mu(w_0 * z_1 * w_1 * z_2 * \dots * z_n * w_n).$$

В этой формуле w_i — произвольные символы из алфавита $\Sigma \setminus \Delta$. Другими словами, вхождению заданного слова w в любой данной позиции мера $Clean_\Delta \mu$ приписывает вероятность, равную сумме вероятностей всех слов, которые можно получить из w вставкой элементов Δ в произвольном количестве между буквами, поделённой на суммарную вероятность символов не из Δ.

Вероятность по мере $Clean_\Delta \mu$ пустого слова по определению равна 1.

Для мер, не являющихся вероятностными, можно говорить об операторе $Clean^\circ$ очистки без нормировочного множителя $\frac{1}{1-\mu(\Delta)}$.

Более того, это же определение можно применять и к функциям на словах. Желательно, чтобы слова, отличающиеся только добавлением и удалением нулевых символов, входили или не входили в область определения одновременно.

Определение 3.4. *Обозначим для всякого слова w в алфавите $\Sigma \setminus \Delta$ через $Splice_\Delta(w)$ множество всех слов, которые можно получить из w вставкой между символами символов из Δ в произвольном порядке и количестве.*

Замечание 3.1. *Можно определить оператор $Clean_\Delta$ и другим способом, дающим тот же результат на основании неформального описания оператора как “вычёркивания нулей”. Сначала рассмотрим условную меру μ_1,* *полученную ограничением* μ *на сверхслова, в которых в начале координат символ не из* Δ*. Для любого сверхслова с таким свойством корректно определено вычёркивание всех вхождений символов из* Δ *со сдвигом к началу координат. Нетрудно убедиться, что образ* μ_1 *под действием отображения вычёркивания равен* $Clean_\Delta \mu$*. Коэффициент* $1-\mu(\Delta)$ *в формуле для* $Clean_\Delta \mu(w)$ *есть как раз вероятность условия "в начале координат стоит символ не из* Δ*".*

Замечание 3.2. *Оператор Clean линеен.*

Лемма 3.2. *Определение 3.3 для любой инвариантной меры* μ *задаёт инвариантную вероятностную меру.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что вероятность по мере $\mathrm{Clean}_\Delta \mu$ любого слова (включая пустое) равна сумме мер всех слов, полученных приписыванием к исходному слову с заданной стороны одной буквы из $\Sigma \setminus \Delta$. Для пустого слова это требование обеспечивается нормирующим множителем $\frac{1}{1-\mu(\Delta)}$. Для непустых слов нам понадобится следующее определение.

С помощью обозначения 3.4 мы можем написать, что

$$(\mathrm{Clean}_\Delta \mu)(w) = \frac{1}{1-\mu(\Delta)} \sum_{w' \in \mathrm{Splice}_\Delta(w)} \mu(w').$$

Таким образом, для проверки того, что мера слова равна сумме мер всех слов, полученных приписыванием слева к исходному слову любой буквы из $\Sigma \setminus \Delta$, нам нужно установить следующее равенство:

$$\sum_{w' \in \mathrm{Splice}_\Delta(w)} \mu(w') = \sum_{a \in \Sigma \setminus \Delta} \sum_{w'' \in \mathrm{Splice}_\Delta(a*w)} \mu(w'').$$

Множество $\mathrm{Splice}_\Delta(a*w)$ состоит в точности из всех слов вида $a*z*w'$, где $z \in \Delta^*$ и $w' \in \mathrm{Splice}_\Delta(w)$. Поэтому нам достаточно доказать, что при любом фиксированном $w' \in \mathrm{Splice}_\Delta(w)$ имеет место равенство

$$\mu(w') = \sum_{a \in \Sigma \setminus \Delta} \sum_{z \in \Delta^*} \mu(a*z*w').$$

Чем отличаются левая и правая части этого равенства? В левой части стоит μ-вероятность события “сверхслово содержит подслово w', начиная с нулевой позиции”. В правой части стоит μ-вероятность пересечения того же события с событием “в какой-то позиции с отрицательным номером имеется символ из $\Sigma \setminus \Delta$”. Вероятности этих двух событий совпадают. В самом деле, мера инвариантна относительно сдвигов, вхождения слова из бесконечного конца нулевых символов и одного ненулевого символа на различных позициях образуют счётный набор взаимоисключающих событий.

Аналогичное рассуждение применимо для приписывания букв справа. Лемма 3.2 доказана.

Таким образом, мы определили оператор Clean. Операторы $\mathrm{Duel}_\varepsilon$, Flip_δ и Flip_δ^+ не требуют такого уточнения, а оператор Ann_ε определяется как $\mathrm{Clean}_\odot \circ \mathrm{Duel}_\varepsilon$.

3.5. Частичный порядок $\geqslant$ на инвариантных мерах

Определение 3.5. *Тонкий цилиндр над упорядоченным алфавитом Σ называется большим либо равным другому тонкому цилиндру с тем же носителем если на каждой позиции носителя первый цилиндр задаёт больший либо равный символ, чем второй цилиндр. Для инвариантных вероятностных μ и ν на сверхсловах над упорядоченным алфавитом Σ мы пишем $\mu \geqslant \nu$, если существует полупрямое произведение мер μ и ν (не обязательно инвариантное), согласованное с отношением порядка $\geqslant$ (здесь важно, что меры полностью определяются своими значениями на тонких цилиндрах). Другими словами, должна существовать мера ρ на сверхсловах над алфавитом из пар букв с проекциями, равными μ и ν соответственно, для которой вероятность того, что первый символ в паре больше или равен второму, равна 1. (Для слов в алфавите $\{\oplus, \ominus\}$ это означает, что по мере ρ сверхслово $\binom{\ominus}{\oplus}$ должно иметь нулевую вероятность).*

Проекция в этом определении понимается в следующем смысле. Каждому слову над декартовым квадратом данного алфавита (алфавита пар букв) соответствует пара слов одной длины над этим алфавитом. Например, слову $\begin{pmatrix} \oplus \odot \\ \odot \ominus \end{pmatrix}$ соответствует пара слов $(\oplus\odot, \odot\ominus)$. Такое же соответствие имеется и между последовательностями над декартовым квадратом алфавита и парами последовательностей над самим алфавитом. Благодаря этому каждой мере μ на последовательностях над декартовым квадратом соответствует мера на парах последовательностей над исходным алфавитом. Первой (второй) проекцией меры μ называется мера, по которой распределены первые (вторые) компоненты пар случайно выбранной по этой мере последовательности. Если исходная мера инвариантна, то и обе ее проекции инвариантны.

Теорема 3.2. *Отношение $\geqslant$ на мерах удовлетворяет первому и третьему условиям на стр. 20, но не удовлетворяет четвертому.*

Замечание 3.3. *Если считать, что в операторе Тоома $Flip_\delta$ происходит после Ann_ε, то выполнение второго условия очевидно: $Flip_\delta^+$ отличается от $Flip_\delta$ заменой некоторых минусов (обратно) на плюсы. Иначе вопрос становится достаточно сложным из-за немонотонности Clean и, соответственно, Ann_ε. Этот вопрос мы рассматривать в данной работе не будем.*

Доказательство. Докажем сначала первое условие (транзитивность).

Пусть даны инвариантные вероятностные меры μ, ν, λ такие, что $\mu \geqslant \nu \geqslant \lambda$. Значит, существует полупрямое произведение α мер μ, ν, согласованное с порядком, а также полупрямое произведение β мер ν, λ, согласованное с порядком. Нам нужно установить существование полупрямого произведения γ мер μ, λ, согласованного с порядком.

Это легко доказать для вероятностных мер на конечных множествах. А именно, пусть μ, ν, λ — распределения вероятностей на некотором конечном упорядоченном множестве A. Тогда можно определить распределение вероятностей δ на A^3 обладающие следующими двумя свойствами:

1) проекция δ на первую и вторую координаты равна α,

2) проекция δ на вторую и третью координаты равна β.

Например, можно определить δ формулой

$$\delta\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{\alpha\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\beta\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}}{\nu(b)}.$$

Это распределение соответствует такому процессу порождения слова $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: мы сначала выбираем случайно b, используя вероятностную меру ν. Затем мы выбираем a случайно по условному распределению α на первой координате при условии, что вторая координата равна уже выбранному b. Наконец, мы независимо выбираем c по условному распределению α на второй координате при известной первой.

Из свойств δ следует, что с вероятностью 1 относительно δ будут выполнены неравенства $a \geqslant b \geqslant c$. Поэтому в качестве искомой меры γ можно взять проекцию δ на первую и третью координаты.

Для дальнейшего важно понимать, что мера δ не определяется однозначно условиями 1) и 2). Пусть например $A = \{0, 1\}$ и обе меры α, β суть равномерное распределение на множестве A^2. Тогда построенная нами мера δ является равномерным распределением на A^3. При этом существует и другая мера δ со свойствами 1) и 2), например, равномерное распределение на множестве всех троек из A^3, у которых первая и третья координата совпадают.

Перейдем теперь к случаю мер на пространстве двусторонних последовательностей. Мы знаем два доказательства транзитивности и оба они неконструктивны в том смысле, что мера γ не строится явно по данным мерам α и β.

Неконструктивность возникает из-за применения следующей леммы (предельная точка, существование которой утверждает лемма, может быть не единственна).

Лемма 3.3. *Последовательность счётных последовательностей вещественных чисел из заданного отрезка имеет предельную точку (с точки зрения поточечной сходимости).*

Доказательство. Будем вычёркивать некоторые последовательности, а некоторые будем отбирать как участвующие в сходимости к предельной точке.

Вначале мы ничего не выбрали и не вычеркнули.

Мы будем бесконечно повторять один и тот же шаг, меняя множества выбранных и вычеркнутых последовательностей.

На n-м шаге шаге мы смотрим на элементы с номером n во всех невычеркнутых последовательностях. Это ограниченная последовательность, она имеет предельную точку. Вычеркнем из неё элементы так, чтобы предельная точка стала пределом. Вычеркнем все последовательности, в которых лежали вычеркнутые элементы. Выберем в окончательный ответ первую из оставшихся невычеркнутыми и невыбранными последовательностей.

По построению на каждой позиции элементы выбранных последовательностей имеют предел, что и требовалось. □

Следствием данного факта является следующая лемма:

Лемма 3.4. *Для любой последовательности ограниченных в совокупности функций, определённых на некоторых конечных словах над конечным или счётным алфавитом, существует подпоследовательность, имеющая предел значений для каждого слова, на котором определены почти все функции исходной последовательности.*

Доказательство. Действительно, область определения каждой функции не более, чем счётна, поэтому каждую функцию можно представить как счётную последовательность значений, учитывая только значения на словах, где определены почти все функции. После этого мы сможем применить лемму 3.3. □

Покажем теперь, что это же утверждение можно применять и к мерам.

Лемма 3.5. *Любая последовательность конечных мер на сверхсловах имеет предельную точку, являющуюся мерой.*

Если исходные меры были вероятностными, таковой будет и предельная точка.

Доказательство. Добавим в алфавит все целые числа. Будем сопоставлять мере функцию, определённую на словах с числом в первой позиции. Такое слово задаёт естественным образом тонкий цилиндр со связным носителем. А именно: число задаёт позицию самого левого символа носителя. При этом остаток слова задаёт символы, требуемые данным цилиндром в позициях, входящих в носитель.

Ясно, что предельная функция тоже будет определена на словах такого вида.

Проверим теперь, что значения полученной функции согласованы и задают меру. Во-первых, если исходные меры были вероятностными, то значение каждой из них на пустом слове равно единице, следовательно, это же выполнено и в пределе. Во-вторых, надо проверить условия согласования: значение функции на произвольном слове в произвольном месте равно сумме значений функции на всех продолжениях этого слова на один символ влево (аналогично и для продолжений вправо). При этом для продолжений влево надо будет уменьшать число в начале слова, задающее позицию. Для любого слова это является конечной суммой (так как алфавит, над которым исходно рассматривались сверхслова, конечен), а равенство конечных сумм сохраняется при переходе к пределу. □

Первое доказательство. Аналогично случаю конечных множеств, мы докажем существование вероятностной меры δ на сверхсловах над алфавитом $\Sigma \times \Sigma \times \Sigma$, проекция которой на первую и вторую координаты равна α, а проекция на вторую и третью координаты — β. В частности, в любой позиции с вероятностью 1 относительно δ первый символ будет не меньше второго, а второй не меньшего третьего, поэтому проекция меры δ на первую и третью координаты будет искомой мерой γ.

Значение δ на двустороннем слове u понимается как δ-мера тонкого цилиндра, заданного u, то есть множества всех бесконечных продолжений u влево и вправо.

Ослабим сначала ограничение на проекции. Для каждого n будем искать меру δ_n, согласованную с порядком на компонентах, проекции которой совпадают с α, β и γ только на цилиндрах с выпуклой оболочкой носителя длины не более n.

Определим множество A состоящим из всех двусторонних слов (x, y) над алфавитом Σ, в которых длина x и длина y равны ровно n. Множество A конечно. Сужение меры α на $A \times A$ (которое мы понимаем как множество двусторонних слов (x, y) над алфавитом $\Sigma \times \Sigma$, в которых длина x и длина y равны ровно n) задает распределение вероятностей на $A \times A$, которое мы обозначим через α_n. То же самое верно для сужения β_n меры β на $A \times A$. Причем, обе меры согласованы с покомпонентым порядком и вторая проекция меры α_n совпадает с первой проекцией меры β_n. Как уже объяснялось, отсюда следует, что можно построить распределение вероятностей δ_n на A^3, у которого проекция на первую и вторую координаты равны α_n, а проекция на вторую и третью координаты равны β_n.

Теперь рассмотрим предельную точку таких мер. Она и будет требуемой мерой δ. Транзитивность доказана.

Полезно понимать, что даже если меры α и β были инвариантными, указанное доказательство не гарантирует инвариантности построенной меры γ. Для получения инвариантной меры γ требуется дополнительная конструкция, которую мы приведём позже, в рамках доказательства леммы 3.12.

Второе доказательство.

Переформулируем определение порядка на мерах так, что транзитивность станет очевидной.

Определение 3.6. Верхним цилиндром *называется объединение всех тонких цилиндров, больших либо равных данному в смысле определения 3.5.* Верхним множеством *называется конечное объединение верхних цилиндров с общим носителем.*

Лемма 3.6. *$\mu \geqslant \nu$ тогда и только тогда, когда для любого верхнего множества M выполнено $\mu(M) \geqslant \nu(M)$.*

Доказательство. Везде в доказательстве будем использовать $\geqslant$ на последовательностях, цилиндрах (и словах, задающих цилиндры) для обозначения частичного покомпонентного порядка, а на мерах — для обозначения введённого порядка, транзитивность которого мы и доказываем.

Если $\mu \geqslant \nu$, и M — верхнее множество, то

$$\alpha(\{(x, y) \mid x \notin M, y \in M\}) = 0.$$

Отсюда следует

$$\mu(M) = \alpha(M \times \Sigma^\infty) \geqslant \alpha(M \times M) = \alpha(\Sigma^\infty \times M) = \nu(M)$$

(второе равенство здесь выполняется в силу $\mu \geqslant \nu$).

Пусть теперь вероятность любого верхнего множества по мере μ не меньше, чем по ν. Нам нужно построить полупрямое произведение α мер μ, ν, согласованное с порядком.

Пусть μ_{2n+1}, ν_{2n+1} — меры, являющиеся ограничением мер μ, ν на цилиндры длины $2n+1$ с серединой в нулевой позиции. Определим меру β_{2n+1} на парах слов длины $2n+1$ с серединой в нулевой позиции (эти слова задают тонкие цилиндры, у носителя которых середина находится в нулевой позиции и длина равна $2n + 1$), обладающую следующими двумя свойствами:
1) по мере β_{2n+1} могут иметь ненулевую вероятность только те пары слов длины $2n + 1$, у которых первая компонента больше или равна второй;
2) Проекция меры β_{2n+1} на первую координату равна μ_{2n+1}, а на вторую координату — ν_{2n+1}.

Существование такой меры β_{2n+1} следует из теоремы 0.4 из второй главы (которая позволяет явно построить меру на словах в алфавите пар символов с помощью теоремы Форда-Фалкерсона о потоке и разрезе).

Рассмотрим любую предельную точку α этой последовательности мер. Функция α определена на всех двусторонних словах над $\Sigma \times \Sigma$.

Докажем, что α задаёт искомое полупрямое произведение. Во-первых, условия, говорящие, что функция на словах задаёт вероятностную меру — это согласованность мер цилиндров, с носителями, отличающимися добавлением одной позиции. Каждое такое условие выполнено для α, поскольку оно выполнено для β_{2n+1} для всех достаточно больших n (точнее, для всех n, для которых это условие имеет смысл). По этой же причине выполнены условия, говорящие, что проекции меры α равны μ и ν (каждое такое условие означает, что сумма вероятностей для множеств слов в алфавите пар букв, у которых одна из проекций постоянна, равна данному числу и поэтому выполнено для β_{2n+1} для всех достаточно больших n).

Лемма 3.6 доказана. Из неё сразу следует, что отношение $\geqslant$ транзитивно (первое условие).

Третье условие (на стр. 0.3) следует из определения. Действительно, множество последовательностей, у которых в данной позиции стоит плюс, есть верхнее множество (и даже верхний цилиндр). Поэтому, если мера μ больше меры ν, то μ-вероятность этого множества не меньше его ν-вероятности.

Докажем невыполненность четвертого условия (при некоторых значениях параметров ε, δ). Причина немонотонности операторов Тоома кроется в немонотонности оператора Ann_ε. Докажем последнее для достаточно близких к 1 значений ε. Для этого рассмотрим меру μ, сконцентрированную на последовательностях с периодом

$$\oplus\ominus\oplus\ominus\oplus\oplus\oplus\ominus\ominus\ominus,$$

и меру ν, сконцентрированную на последовательностях с периодом

$$\oplus\oplus\oplus\ominus\oplus\oplus\oplus\ominus\ominus\ominus\,.$$

Ясно, что $\mu \leqslant \nu$ по тем же причинам, по которым верно было аналогичное неравенство для мер на односторонних сверхсловах (его мы доказали в начале второй главы). Но после применения к ним оператора Ann_ε с $\varepsilon = 1$ образ μ' меры μ сосредоточен на последовательностях с периодом $\oplus\oplus\ominus\ominus$, а образ ν' меры ν — на последовательностях с периодом $\oplus\oplus\oplus\oplus\ominus\ominus$. Вероятность верхнего цилиндра $\oplus\oplus**\oplus\oplus$ (звёздочка означает, что можно поставить любой символ алфавита) относительно μ' равна 1/4, в то время как его ν'-вероятность равна 1/6, что меньше 1/4. Поэтому $\mu' \not\leqslant \nu'$, что доказывает немонотонность оператора Ann_ε с $\varepsilon = 1$. (Заметим в скобках, что меры μ' и ν' несравнимы. В самом деле, μ'-вероятность верхнего цилиндра $\oplus\oplus\oplus$ равна нулю, в то время, как как его ν'-вероятность равна 1/3.) В силу непрерывности оператор Ann_ε не монотонен и при любых ε, достаточно близких к 1.

Этот пример доказывает немонотонность операторов Тоома при любых δ и ε достаточно близких к 0 и 1, соответственно. В самом деле положим $\delta = 0$ в операторах $\mathrm{Flip}_\delta, \mathrm{Flip}_\delta^+$. Тогда оба оператора Тоома выродятся в Ann_ε, а значит будут немонотонны. По непрерывности они будут немонотонны и при любых δ и ε достаточно близких к 0 и 1, соответственно.

Заметим, что немонотонность оператора Ann_ε является единственной причиной немонотонности асимметричного оператора Тоома $T_{\text{асим}}$. Напомним, что он определяется как композиция Flip_δ^+ и $\mathrm{Duel}_\varepsilon$. При этом оператор Flip_δ^+ монотонен. В самом деле, пусть $\mu \leqslant \nu$ и мера ρ есть полупрямое произведение μ и ν, согласованное с порядком $\leqslant$. Рассмотрим оператор, который действует на парах последовательностей, заменяя с вероятностью δ каждую пару соответствующих символов $\genfrac{}{}{0pt}{}{\ominus}{\ominus}$ на пару $\genfrac{}{}{0pt}{}{\oplus}{\oplus}$ (для разных пар независимо), а каждую пару $\genfrac{}{}{0pt}{}{\oplus}{\ominus}$ на пару $\genfrac{}{}{0pt}{}{\oplus}{\oplus}$ (так же с вероятностью δ). Применим этот оператор к мере ρ и обозначим полученную меру через ρ'. Ясно, что ρ' также, как и ρ, согласована с порядком $\leqslant$, причём ее маргинальные меры равны результату применения оператора Flip_δ^+ к μ и ν. Таким образом, если бы оператор Ann_ε был монотонен, то и оператор $T_{\text{асим}}$ был бы монотонным как композиция монотонных операторов.

Выполнено ли второе условие, неизвестно. Непосредственно из определения следует, что $\mathrm{Flip}_\delta \leqslant \mathrm{Flip}_\delta^+$. Если бы оператор Ann_ε был монотонен, то из этого бы сразу следовало неравенство между интересующими нас операторами: $T_{\text{сим}} \leqslant T_{\text{асим}}$, однако мы уже видели, что это не так.

3.6. Частичный порядок $\trianglerighteq$ на инвариантных мерах

Определим отношение $\trianglerighteq$.

Начнем со следующего наблюдения.

Лемма 3.7. *$Clean_{Z_1} Clean_{Z_2} \mu = Clean_{Z_1 \cup Z_2} \mu$.*

Доказательство. Рассмотрим формулу на странице 57, определяющую $\mathrm{Clean}_\Delta \mu(w)$. Рассмотрим отдельно сумму и нормирующий сомножитель перед суммой. В сумме для $\mathrm{Clean}_{Z_1}\mathrm{Clean}_{Z_2}\mu$ мы получаем сумму вероятностей слов, полученных вставкой между буквами слова w произвольных последовательностей символов из Z_1, а потом между буквами полученного слова — произвольных последовательностей символов из Z_2. Но такой парой операцией между двумя соседними символами w можно вставить произвольную последовательность символов из $Z_1 \cup Z_2$, причём единственным образом. Поэтому суммы для $\mathrm{Clean}_{Z_1}\mathrm{Clean}_{Z_2}\mu$ и $\mathrm{Clean}_{Z_1 \cup Z_2}\mu$ равны.

Теперь рассмотрим нормирующие множители. Они равны

$$\frac{1}{1 - (\mathrm{Clean}_{Z_2}\mu)(Z_1)} \cdot \frac{1}{1 - \mu(Z_2)}$$

в случае поочерёдного применения и

$$\frac{1}{1 - \mu(Z_1 \cup Z_2)}$$

в случае одновременного. Заметим, что

$$(\mathrm{Clean}_{Z_2}\mu)(Z_1) = \frac{1}{1 - \mu(Z_2)}\mu(Z_1).$$

Обозначим $\mu(Z_1) = x$, $\mu(Z_2) = y$. Остаётся проверить, что

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1-y}x\right)} \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-x-y},$$

что действительно является алгебраическим тождеством. Лемма 3.7 доказана.

Аналогичное утверждение верно и для Clean°.

Определение 3.7. *Будем писать* $\mu \trianglerighteq \nu$ *для инвариантных вероятностных мер над алфавитом* $\{\oplus, \ominus\}$, *если есть две инвариантные меры* $\mu' \geqslant \nu'$ *на сверхсловах над алфавитом* $\{\oplus, \odot, \ominus\}$, *и* $Clean_{\{\odot\}}$ *от которых даёт исходные меры:* $Clean_{\{\odot\}}\mu' = \mu$, $Clean_{\{\odot\}}\nu' = \nu$. *Другими словами, должна существовать мера* α *с инвариантными проекциями на парах сверхслов над алфавитом* $\{\oplus, \odot, \ominus\}$, *такая что оператор* $Clean_{\{\odot\}}$ *в применении к её маргинальным мерам даёт меры* μ *и* ν, *соответственно, а при этом по вероятностному распределению* α *первая компонента всегда больше либо равна второй относительно порядка* $\oplus > \odot > \ominus$.

Лемма 3.8. *Если* $\mu \trianglerighteq \nu$, *то* $\mu(\oplus) \geqslant \nu(\oplus)$, *причём равенство* $\mu(\oplus) = \nu(\oplus)$ *достигается только при равенстве мер.*

Доказательство. Действительно, пусть мера α имеет проекции μ', ν', $\mathrm{Clean}_{\{\odot\}}\mu' = \mu$, $\mathrm{Clean}_{\{\odot\}}\nu' = \nu$, $\mu' \geqslant \nu'$. Тогда

$$\mu(\oplus) = \frac{\mu'(\oplus)}{1-\mu'(\odot)} = \frac{\alpha\binom{\oplus}{\oplus} + \alpha\binom{\oplus}{\odot} + \alpha\binom{\oplus}{\ominus}}{\alpha\binom{\oplus}{\oplus} + \alpha\binom{\oplus}{\odot} + \alpha\binom{\oplus}{\ominus} + \alpha\binom{\ominus}{\ominus}},$$

$$\nu(\oplus) = \frac{\nu'(\oplus)}{1-\nu'(\odot)} = \frac{\alpha\binom{\oplus}{\oplus}}{\alpha\binom{\oplus}{\oplus} + \alpha\binom{\oplus}{\ominus} + \alpha\binom{\ominus}{\ominus} + \alpha\binom{\odot}{\ominus}}.$$

Разность этих выражений равна

$$\mu(\oplus) - \nu(\oplus) = \frac{\text{«числитель»}}{\text{«знаменатель»}}, \text{где}$$
$$\begin{aligned}\text{«числитель»} = \left(\alpha\binom{\oplus}{\ominus} + \alpha\binom{\odot}{\ominus}\right)\alpha\binom{\oplus}{\oplus} + \\ + \left(\alpha\binom{\oplus}{\ominus} + \alpha\binom{\odot}{\ominus} + \alpha\binom{\ominus}{\ominus}\right)\alpha\binom{\oplus}{\odot} + \\ + \left(\alpha\binom{\oplus}{\ominus} + \alpha\binom{\odot}{\ominus} + \alpha\binom{\ominus}{\ominus}\right)\alpha\binom{\oplus}{\ominus}\end{aligned}$$
и
$$\begin{aligned}\text{«знаменатель»} = \left(\alpha\binom{\oplus}{\oplus} + \alpha\binom{\oplus}{\odot} + \alpha\binom{\oplus}{\ominus} + \alpha\binom{\ominus}{\ominus}\right) \times \\ \times \left(\alpha\binom{\oplus}{\oplus} + \alpha\binom{\oplus}{\ominus} + \alpha\binom{\ominus}{\ominus} + \alpha\binom{\odot}{\ominus}\right).\end{aligned}$$

Это выражение всегда неотрицательно, поэтому $\mu(\oplus) \geqslant \nu(\oplus)$. Теперь нам достаточно доказать, что из равенства числителя нулю следует

$$\alpha\binom{\oplus}{\ominus} = 0, \quad \alpha\binom{\oplus}{\odot} = 0, \quad \alpha\binom{\odot}{\ominus} = 0$$

(эти равенства гарантируют, что Clean от двух проекций меры α совпадают). Первое равенство следует из того, что в числитель входит квадрат $\alpha\binom{\oplus}{\ominus}$. Кроме того, в числитель входит произведение

$$\left(\alpha\binom{\oplus}{\oplus} + \alpha\binom{\oplus}{\odot} + \alpha\binom{\oplus}{\ominus}\right)\alpha\binom{\odot}{\ominus},$$

а значит оно равно нулю. Сумма в скобках равна $\mu'(\oplus)$ и если она отлична от нуля, мы получаем желаемое следствие $\alpha\binom{\odot}{\ominus} = 0$. С другой стороны, если $\mu'(\oplus) = 0$, то и $\nu'(\oplus) = 0$, поскольку $\mu' \geqslant \nu'$. В этом случае обе меры μ, ν сосредоточены на последовательности из одних минусов и доказываемое утверждение очевидно.

Наконец, в числитель также входит произведение

$$\left(\alpha\binom{\ominus}{\ominus} + \alpha\binom{\odot}{\ominus}\right)\alpha\binom{\oplus}{\odot}.$$

Сумма в скобках равна $\nu'(\ominus)$ и если она отлична от нуля, мы получаем желаемое следствие $\alpha\binom{\oplus}{\odot} = 0$. С другой стороны, если $\nu'(\ominus) = 0$, то $\nu'(\oplus) + \nu'(\odot) = 1$. Но тогда и $\mu'(\oplus) + \mu'(\odot) = 1$, поскольку $\mu' \geqslant \nu'$. В этом случае обе меры μ, ν сосредоточены на последовательности из одних плюсов и доказываемое утверждение очевидно.

Лемма 3.9. *Отношение $\geqslant$ антисимметрично.*

Доказательство. Действительно, в силу предыдущей леммы, если $\mu \geqslant \nu \geqslant \mu$, то вероятности слов $\oplus$ и $\ominus$ по этим мерам равны, а тогда полупрямое произведение, согласованное с порядком, не может содержать слова $\genfrac{}{}{0pt}{}{\oplus}{\ominus}$ и обязано содержать только $\genfrac{}{}{0pt}{}{\oplus}{\oplus}$ и $\genfrac{}{}{0pt}{}{\ominus}{\ominus}$. □

Лемма 3.10. *Очистка и проекция коммутируют. Точнее, $\pi_1 Clean_{\Delta\times\Sigma}\alpha = Clean_\Delta \pi_1 \alpha$ (π_1 означает проекцию на первую компоненту).*

Доказательство. Рассмотрим меру произвольного слова w, то есть величину $(\pi_1 \mathrm{Clean}_{\Delta\times\Sigma}\alpha)(w)$. По определению проекции это можно переписать как $(\mathrm{Clean}_{\Delta\times\Sigma}\alpha)(w\times\Sigma^{|w|})$. Но по определению очистки это равно

$$\frac{1}{\alpha(\Delta\times\Sigma)}\sum_{u\in\mathrm{Splice}_{\Delta\times\Sigma}(v), v\in w\times\Sigma^{|w|}}\alpha(u).$$

Но так как множество $\{u\in\mathrm{Splice}_{\Delta\times\Sigma}(v)|v\in w\times\Sigma^{|w|}\}$ совпадает с $\{u\times\Sigma^{|u|}\mid u\in\mathrm{Splice}_{\Delta}(w)\}$. А тогда мы получили выражения для желаемого результата $(\mathrm{Clean}_{\Delta}\pi_1\alpha)(w)$ □

Лемма 3.11. *Пусть $\mu\trianglerighteq\nu$ и мера α является обоснованием этого неравенства. Будем рассматривать α как меру над алфавитом из пар символов (3.1) на с. 53. Тогда можно так изменить α, что она по-прежнему будет мерой, доказывающей неравенство между мерами, но символ $\binom{\odot}{\odot}$ имеет вероятность 0.*

Доказательство. Действительно, возьмём α и заменим все вхождения $\substack{\odot\\\odot}$ на пару новых символов $\substack{\odot'\\\odot'}$. Обозначим полученную меру через α'. Затем произведём $\mathrm{Clean}_{\{\substack{\odot'\\\odot'}\}}$ над α' и обозначим полученную меру через β. Ясно, что новых вхождений символов, у которых верхняя компонента меньше нижней (вхождения которых запрещены по определению $\geqslant$ на мерах), не появится, а значит β согласована с порядком. Образ проекций меры β под действием $\mathrm{Clean}_{\{\odot\}}$ такой же, как и у α. В самом деле, так как $\odot$ в каждой проекции исходной меры соответствует $\odot$ или $\odot'$ в новой до очистки, а затем производится две очистки (правда, одна из очисток происходит до перехода к проекции, а вторая после, но это не меняет результата по лемме 3.10), которые в силу леммы 3.7 эквивалентны одной.

Лемма 3.12. *В определении $\trianglerighteq$ можно считать, что мера α, доказывающая $\mu\trianglerighteq\nu$ инвариантна. Другими словами, если мера α доказывает $\mu\trianglerighteq\nu$, то по α можно построить инвариантную меру, доказывающую $\mu\trianglerighteq\nu$ (мера α приписывает слову $\substack{\odot\\\odot}$ вероятность 0).*

При этом если мера α приписывала вероятность 0 всем слова, содержащих $\odot$ в одной из компонент, то этим же свойством будет обладать результат преобразования.

Доказательство леммы 3.12.

Для доказательства воспользуемся леммой 3.5.

Рассмотрим последовательность мер α_n, где α_n является средним арифметическим сдвигов α на $-n, -n+1, \ldots -1, 0, 1, \ldots n-1, n$. Заметим, что проекции α_n равны проекциям α, так как проекция среднего равна среднему проекций, а среднее от сдвигов инвариантной меры равно ей самой.

Теперь заметим, что для любого слова w вероятности его вхождения в позициях 0 и 1 отличаются с точки зрения α_n не более, чем на $\frac{1}{2n+1}$, так как в среднем арифметическом будет лишь по одному отличающемуся слагаемому из $2n+1$. Значит, в предельной точке вероятности вхождения любого слова в позициях 0 и 1 равны, из чего очевидно следует инвариантность.

Ясно, если α доказывала не только $\mu \trianglerighteq \nu$, но и $\mu \geqslant \nu$, то и предельная точка мер α_n будет обладать этим же свойством.

Лемма 3.12 доказана.

Лемма 3.13. *В определении $\trianglerighteq$ можно считать, что проекции меры α, доказывающей неравенство $\mu \trianglerighteq \nu$, приписывают вероятность 0 сверхслову из всех нулей (а также является инвариантной и приписывает вероятность 0 слову $\genfrac{}{}{0pt}{}{\odot}{\odot}$).*

Доказательство леммы 3.13. Действительно, пусть это не так. Пусть, например, в первой проекции сверхслово из одних нулей имеет положительную вероятность. Заметим, что тогда мера α представима как выпуклая комбинация какой-то меры $\alpha_{nonzero}$ и меры α_{zero}, сосредоточенной на сверхслове $\ldots \genfrac{}{}{0pt}{}{\odot}{\ominus}$. В силу линейности проекции и очистки, очистка первой проекции меры $\alpha_{nonzero}$ равна μ.

Заменим меру α_{zero} на прямое произведение μ и меры, сосредоточенной на сверхслове $\ldots \ominus \ldots$ и рассмотрим выпуклую комбинацию с теми же коэффициентами. второй проекция будет такой же, как у меры α, а первая проекция будет выпуклой комбинацией двух мер с очисткой μ. При этом порядок между компонентами, очевидно, не мог нарушиться.

Таким образом, новая мера доказывает $\mu \trianglerighteq \nu$, но запрещает сверхслово $\ldots\odot\ldots$ в проекции, что и требовалось. Ясно, что использованное преобразование сохраняет свойства инвариантности и отсутствия вхождений слова $\substack{\odot\\\odot}$.

Лемма 3.13 доказана.

3.7. Основной результат

Теорема 3.3. *Отношение* $\trianglerighteq$ *транзитивно.*

3.7.1. Общий план доказательства

Доказательство. Обозначим 3 копии пространства сверхслов через X, Y и Z; на них определены меры $\mu \trianglerighteq \nu \trianglerighteq \lambda$. Мы будем считать, что алфавит этих сверхслов состоит из трёх символов, а меры, определённые исходно над алфавитом двух символов, приписывают словам содержащим символ $\odot$ меру 0. Рассмотрим меры α, β на пространствах $X \times Y$ и $Y \times Z$, подтверждающие эти неравенства. Обозначим проекции (маргинальные меры) меры α через μ_α и ν_α, а проекции меры β — через ν_β и λ_β. Тогда $\mathrm{Clean}_\odot\mu_\alpha = \mu$, $\mathrm{Clean}_\odot\nu_\alpha = \nu$, $\mathrm{Clean}_\odot\nu_\beta = \nu$, $\mathrm{Clean}_\odot\lambda_\beta = \lambda$. Меры ν_α и ν_β, заданные на Y, отличаются тем, из какой меры они получены: мера ν_α — проекция меры α на пространстве $X \times Y$, а ν_β — проекция меры β на пространстве $Y \times Z$.

По лемме 3.11, не ограничивая общности, можно считать, что и α, и β инвариантны, приписывают нулевую вероятность множеству сверхслов, содержащих $\binom{\odot}{\odot}$, а их проекции приписывают нулевую вероятность слову из одних нулей.

Опишем общий план доказательства.

Идея в том, чтобы построить нужную функцию в самом простом случае, а потом решать возникающие проблемы с помощью усреднений и перехода к предельной точке.

Мы построим объединённую меру θ в алфавите троек символов, такую что очистка от $\substack{\odot\\\odot}$ её проекции на первые две компоненты даёт меру α, а на вторые две — меру β. То есть, мы хотим добиться того, что $\mathrm{Clean}_{\substack{\odot\\\odot}}\pi_{XY}\theta = \alpha$ и $\mathrm{Clean}_{\substack{\odot\\\odot}}\pi_{YZ}\theta = \beta$.

Определение 3.8. *Слово в алфавите* $\{\oplus, \odot, \ominus\}$ *называется* существенным*, если оно не начинается и не заканчивается на* $\odot$.

Слово в алфавите пар или троек символов называется Y*-существенным, если его* Y*-компонента существенная. Такое слово называется* (Y, n)*-существенным, если количество ненулевых символов в* Y*-компоненте равно* n*. Если количество ненулевых символов в* Y*-компоненте существенного слова не превышает* n*, будем называть такое слово* $(Y, \leqslant n)$*-существенным.*

Проекции мер α и β на Y-компоненту отличаются только добавлением нулей в некоторых местах. Мы хотим так добавить в случайные по мерам α и β последовательности символы $\substack{\odot\\\odot}$, чтобы их Y-компоненты оказались одинаково распределены.

Сначала мы рассмотрим только слова с существенной Y-компонентой, так как для них легко определить количества нулей между соседними ненулевыми символами без рассмотрения краёв.

Пусть есть два Y-существенных слова u и v в алфавите пар символов (мы считаем, что у первого есть компоненты X и Y, а у второго слова — компоненты Y и Z). Пусть ещё очистка Y-компоненты от $\odot$ у них совпадает. Вставим после каждого ненулевого символа в Y-компоненте слова u столько копий символа $\substack{\odot\\\odot}$, сколько копий символа $\odot$ стоит в Y-компоненте слова v после такого же по счёту ненулевого символа, и наоборот.

После такой операции мы получим слова u' и v' с одинаковой Y-компонентой и можем соединить их в одно слово в алфавите троек символов.

Пусть теперь дано число n. Рассмотрим следующий случайный процесс порождения слова в алфавите троек символов. Породим случайное слово y длины n по мере ν. Заметим, что случайные (Y, n)-существенные слова по мерам α и β имеют одинаковую вероятность иметь слово y в качестве очистки Y-компоненты. Рассмотрим случайные (Y,n)-существенные слова по мерам α и β при условии, что очистка Y-компоненты равна y. Результатом процесса является их склейка через добавление $\substack{\odot \\ \odot}$ (описанным выше образом).

Разумеется, порождаемые таким процессом распределения вероятностей для разных значений n не будут согласованы между собой. Другими словами, непосредственное порождение слова данной длины и порождение его как суффикса или префикса более длинного слова дают разные распределения вероятностей.

Для преодоления этого препятствия мы рассмотрим порождение коротких слов как случайно выбранных Y-существенных подслов длинных слов. Мы будем порождать слово по n-му распределению и выбирать в нём (Y,k)-существенное подслово с началом в случайной позиции при $n > 2k$. Мы покажем, что при одном и том же значении n распределения для разных количеств k ненулевых символов в Y-компоненте будут согласованы с некоторой погрешностью, которая убывает с ростом n.

После этого мы рассмотрим произвольную предельную точку этих распределений при $n \to \infty$. Мы убедимся, что при переходе к предельной точке мы получим для каждого значения k распределение вероятностей на (Y,k)-существенных словах, причём эти распределения для разных k будут согласованы.

После этого мы продолжим меру уже на все слова.

3.7.2. Формальное описание конструкции

Опишем теперь конструкцию формально.

Определение 3.9. Будем обозначать проекцию меры λ на набор компонент C как $\pi_C(\lambda)$. В качестве иллюстрации скажем, что выполняются равенства $\pi_{X,Y}(\alpha) = \alpha$ и $\mathrm{Clean}_{\odot}\pi_Y(\alpha) = \mathrm{Clean}_{\odot}\pi_Y(\beta)$.

Аналогично будем обозначать и проекции слов.

Определение 3.10. Пусть дана инвариантная мера α на пространстве двусторонних бесконечных последовательностей пар символов. Будем называть Y-существенным ограничением меры α функцию, являющуюся ограничением меры α как функции на словах на множество Y-существенных слов. Будем обозначать такую функцию $\mathrm{Restr}^{Y-imp}\alpha$. Аналогично определяется (Y,n)-существенное ограничение, обозначаемое $\mathrm{Restr}^{Y,n-imp}\alpha$.

Нормированное (Y,n)-существенное ограничение меры α получается из её (Y,n)-существенного ограничения делением на меру наличия ненулевого символа в позиции 0 в Y-компоненте (то есть на $\alpha(\{y_0 \neq \odot\})$). Обозначение: $\mathrm{PRestr}^{Y,n-imp}\alpha$. (Буква P в обозначении от слова probabilistic).

Данное определение применимо для меры β с компонентами Y и Z (и меры θ с компонентами X, Y и Z).

Замечание 3.4. *Нормированное (Y,n)-существенное ограничение инвариантной меры является распределением вероятностей на множестве (Y,n)-существенных слов.*

Определение 3.11. Пусть функция F_n задаёт меру на (Y,n)-существенных словах. Отбрасывание префикса слова вплоть до второго ненулевого символа в Y-компоненте (не включительно) задаёт отображение (Y,n)-существенных слов на $(Y,n{-}1)$-существенные. Образ меры F_n при этом отображении будем называть левым сдвигом F_n и обозначать $\mathrm{LeftShift}F_n$.

То есть $\mathrm{LeftShift}F_n(u) = \sum\limits_{k,x_1,\ldots,x_k,y_k\neq\odot,z_1,\ldots,z_k} F_n\left(\begin{smallmatrix} x_k & x_{k-1} & \cdots & x_2 & x_1 & \\ y_k & \odot & \cdots & \odot & \odot & * u \\ z_k & z_{k-1} & \ldots & z_2 & z_1 & \end{smallmatrix}\right)$.

Аналогично определяется левый сдвиг, если из компонент X и Z присутствует только одна.

Мы будем применять это обозначение и к функциям, определённым на бóльших множествах слов. Пусть функция F определена на множестве (Y,n)-существенных слов, где параметр n пробегает какое-то множество натуральных чисел N. Тогда $\mathrm{LeftShift}F(u)$ определена на множестве (Y,n)-существенных слов для $n \in N$ той же самой формулой. При этом мы не требуем, чтобы при разных значениях параметра n значения функции $F(u)$ для (Y,n)-существенных слов u были как-то согласованы.

Аналогично определяется правый сдвиг F, обозначаемый $\mathrm{RightShift} F$.

Замечание 3.5. *Легко видеть, что левый и правый сдвиг коммутируют.*

Определение 3.12. Пусть дана мера F_n на (Y, n)-существенных словах. Определим её применение к $(Y, \leqslant n)$-существенным словам. Каждое такое слово будем отождествлять со множеством всех его продолжений вправо до (Y, n)-существенного слова. Иначе говоря, если слово u_k является (Y, k)-существенным, положим по определению $F_n(u_k) = (\mathrm{RightShift}^{n-k} F_n)(u_k)$.

Определение 3.13. Пусть дано (Y, n)-существенное слово u с компонентами X и Y и (Y, n)-существенное слово v с компонентами Y и Z, причём очистки их Y-компонент равны, $\mathrm{Clean}_{\odot} \pi_Y u = \mathrm{Clean}_{\odot} \pi_Y v$.

Будем называть их ноль-склейкой и обозначать $\mathrm{Join}_{\odot}(u, v)$ последовательность, полученную следующим алгоритмом. Для каждого $k < n$ после позиции k-го ненулевого символа в Y-компоненте слова u вставим в слово u столько символов $\substack{\odot \\ \odot}$, сколько символов $\odot$ стоит в Y-компоненте слова v после k-го ненулевого символа, и наоборот.

При этом мы получим два слова u', v' с одинаковой Y-компонентой. Отождествим их Y-компоненты и получим слово с компонентами X, Y, Z, которое обозначается $\mathrm{Join}_{\odot}(u, v)$.

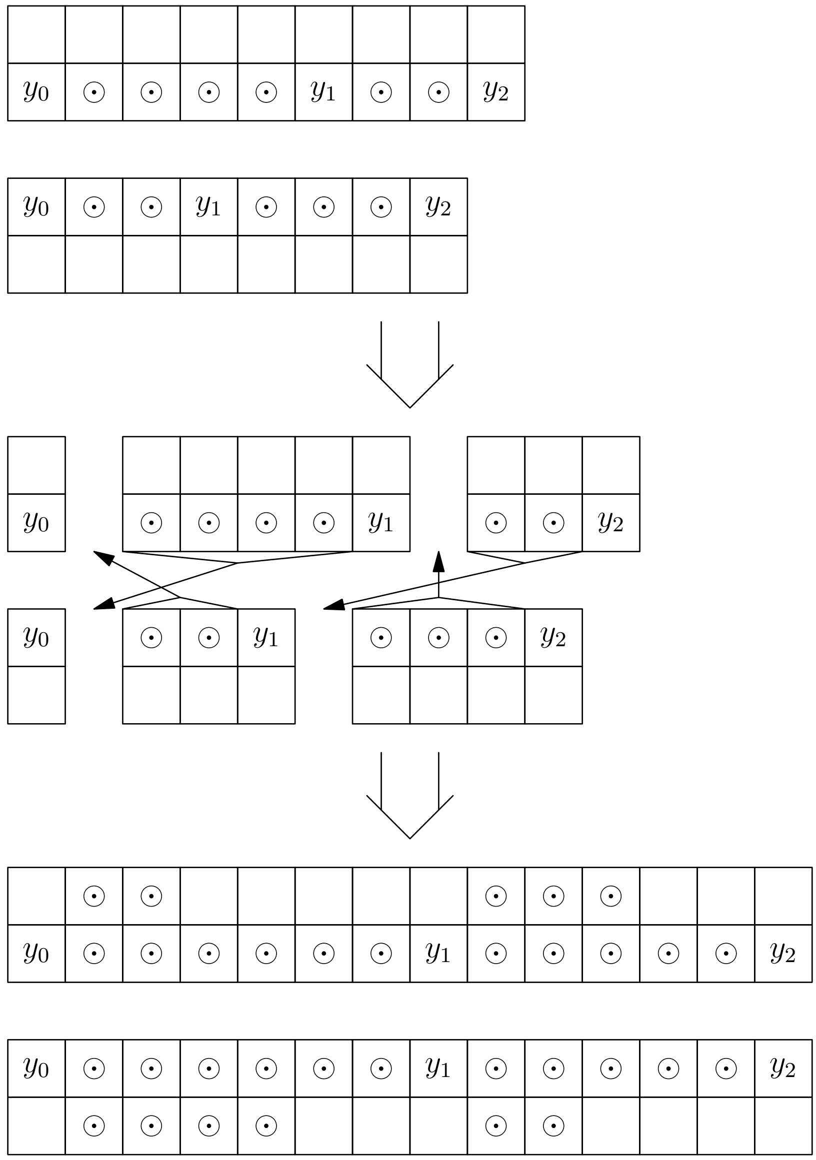

Иллюстрация действия $Join_{\odot}$

Определение 3.14. Пусть дана функция F_n на (Y,n)-существенных словах. Пусть ещё дано множество Δ, содержащее только наборы (пары или тройки) символов с нулевой Y-компонентой.

Будем называть Y-существенной очисткой функции F_n от элементов из множества Δ и обозначать $\mathrm{Clean}_{\Delta}^{\circ, Y-imp} F_n$ следующую функцию (по аналогии с Clean°).

На (Y,n)-существенных словах, содержащих элементы Δ, она равна нулю. На остальных (Y,n)-существенных словах она определяется (по аналогии с Clean) по формуле

$$(\mathrm{Clean}_{\Delta}^{\circ, Y-imp} F_n)(u) = \sum_{v \in \mathrm{Splice}_{\Delta}(u)} F_n(v).$$

Как и в случае со сдвигами, будем задавать той же формулой значение $(\mathrm{Clean}_{\Delta}^{\circ,Y-imp}F)(u)$ для F, определённой на множествах (Y,n)-существенных слов при $n\in N$.

Пусть заданы меры $\mu\trianglerighteq\nu\trianglerighteq\lambda$. Пусть меры α и β доказывают эти неравенства. Будем считать меры α и β инвариантными и приписывающими меру 0 слову $\genfrac{}{}{0pt}{}{\odot}{\odot}$ и сверхслову из одних нулей в каждой из компонент (как мы ранее показали, это не ограничивает общность).

Для каждого n мы рассмотрим нормированные (Y,n)-существенные ограничения мер α и β и обозначим их через α_n и β_n. Рассмотрим случайное слово y длины n по мере ν. После этого возьмём случайные слова u и v по условным распределениям α_n и β_n при условии равенства очистки Y-компоненты слову y. Рассмотрим $\mathrm{Join}_{\odot}(u,v)$. Обозначим распределение на словах $\mathrm{Join}_{\odot}(u,v)$, полученное таким образом, через T_n.

К сожалению, функции T_n могут оказаться не согласованы между собой (то есть $\mathrm{RightShift}T_{n+1}\neq T_n$) и не инвариантны (то есть $\mathrm{LeftShift}T_n\neq \mathrm{RightShift}T_n$). Поэтому мы рассмотрим $T'_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{RightShift}^k\mathrm{LeftShift}^{n-k}T_{2n}$.

Эти функции будут приблизительно инвариантны (с точностью $\frac{1}{n}$).

Рассматривая T'_n как функцию на $(Y,\leqslant n)$-существенных словах можно определить T как предельную точку T'_n, то есть функцию на Y-существенных словах, к которой поточечно сходится некоторая подпоследовательность последовательности T'_n. Эта функция будет Y-существенным ограничением некоторой инвариантной меры θ на тройках символов.

Из построения следует, что мера θ требует, чтобы в каждой позиции в X-компоненте стоял максимальный символ, а в Z-компоненте — минимальный (разумеется, имеются в виду нестрогие неравенства).

Кроме того, на каждом шаге построения функции T сохранялось следующее свойство. Рассмотрим Y-существенное слово u в алфавите пар символов, не содержащее пары символов $\genfrac{}{}{0pt}{}{\odot}{\odot}$. Рассмотрим суммарную вероятность всех слов из $\mathrm{Splice}_{\genfrac{}{}{0pt}{}{\odot}{\odot}}u$. Эта суммарная вероятность будет пропорциональна $\alpha(u)$. Аналогичное утверждение будет верно для Y-существенных слов с компонентами X,Y,Z. Точнее, X,Y-проекция Y-существенной очистки от

$\overset{\odot}{\odot}$ (или $\underset{*}{\overset{\odot}{\odot}}$) функций α_n, T_n, T'_n, T равна Y-существенному ограничению меры α.

Таким образом, очистка от символа $\overset{\odot}{\odot}$ X, Y-проекции меры θ будет равняться мере α.

Аналогичное утверждение будет верно для (Y, Z)-проекции меры θ и меры β. Тогда легко видеть, что X, Z-проекция меры θ доказывает неравенство $\mu \trianglerighteq \lambda$.

Перейдём к точным формулировкам. Сначала мы сформулируем некоторые леммы, потом мы объясним как из лемм следует теорема, и в самом конце мы докажем леммы.

3.7.3. Формулировки лемм

Лемма 3.14. Неотрицательная функция F на Y-существенных словах является Y-существенным ограничением какой-то инвариантной меры тогда и только тогда когда выполнены следующие условия:

Во-первых, функция F удовлетворяет условиям самосогласованности, аналогичным инвариантности и аддитивности, а именно

$$\mathrm{LeftShift} F = \mathrm{RightShift} F = F.$$

Другими словами, оба её сдвига равны самой функции.

Во-вторых, сумма значений функции на $(Y, 2)$-существенных словах, умноженных на их длину без единицы, должна быть конечна. Это соответствует тому, что сумма значений на всех продолжениях пустого слова должна быть конечна как мера всего пространства. (Продолжая пустое слово вправо и влево до первого ненулевого символа в Y-компоненте, мы получим $(Y, 2)$-существенное слово. При этом каждое $(Y, 2)$-существенное слово получится столькими способами, сколько имеется промежутков между его последовательными символами.)

Замечание 3.6. Разумеется, одной функции на Y-существенных словах может соответствовать много разных инвариантных мер. Изменение мер сверхслов без ненулевых символов в Y-компоненте никак не влияет на соответствующую функцию на Y-существенных словах.

Определение 3.15. *Функцию на (Y, n)-существенных словах будем называть имеющей лёгкие хвосты, если сумма значений на всех словах, содержащих k нулевых символов подряд в Y-компоненте, убывает с ростом k как $O(\frac{1}{k})$.*

Функция на Y-существенных словах имеет лёгкие хвосты, если при всех n её ограничение на (Y, n)-существенные слова имеет лёгкие хвосты.

Последовательность функций на Y-существенных словах имеет равномерно лёгкие хвосты, если для каждого m существует константа C_m, такая что для любой функции из последовательности сумма значений на всех (Y, m)-существенных словах, содержащих k нулевых символов подряд в Y-компоненте, не превышает $\frac{C_m}{k}$.

Лемма 3.15. Инвариантные меры с равными Y-существенными ограничениями и нулевой вероятностью сверхслова $\ldots \odot \ldots$ в Y-компоненте равны между собой.

Лемма 3.16. Y-существенное ограничение любой инвариантной меры имеет лёгкие хвосты.

Лемма 3.17. Функции T_n имеют равномерно лёгкие хвосты. Функции T'_n имеют равномерно лёгкие хвосты.

Лемма 3.18. Пусть дана последовательность F_n ограниченных в совокупности функций, причём функция F_n определена на $(Y, \leqslant n)$-существенных словах.

Тогда существует функция F на Y-существенных словах и подпоследовательность F_{n_k} такие, что для всех слов u значение $F(u)$ является пределом значений функций выбранной подпоследовательности, то есть $\lim F_{n_k}(u)$.

Лемма 3.19. Условия самосогласованности $\mathrm{RightShift} T'_n = T'_n$ и $\mathrm{LeftShift} T'_n = T'_n$ нарушаются не более, чем на величину $\frac{1}{n}$. (Левая часть определена на

$(Y, n-1)$-существенных словах, а правая на (Y, n)-существенных; сравниваются значения на пересечении областей определения). Существует предельная точка последовательности T'_n, и для неё эти условия выполнены в точности.

Лемма 3.20. Для всех $n \geqslant 2$ и $0 \leqslant k \leqslant n-2$ сумма значений функции $\mathrm{LeftShift}^k \mathrm{RightShift}^{n-k-2} T_{2n}$ на $(Y, 2)$-существенных словах, умноженных на длину, конечна при фиксированном k. То же верно и для T'_n. То же верно и для T.

Лемма 3.21. Пусть задана инвариантная мера α на $X \times Y$. Тогда Y-существенная очистка Y-существенного ограничения инвариантной меры равна Y-существенному ограничению очистки исходной меры.

Это можно записать таким равенством

$$\mathrm{Clean}^{\circ, Y-imp}_{\substack{\odot\\\odot}} \mathrm{Restr}^{Y-imp} \alpha = \mathrm{Restr}^{Y-imp} \mathrm{Clean}^{\circ}_{\substack{\odot\\\odot}} \alpha.$$

Лемма 3.22. Выполняются пропорциональности:

$$\pi_{XY} \mathrm{Clean}^{\circ, Y-imp}_{\left\{\substack{\odot\\\odot\\*}\right\}} T_n \sim \mathrm{Restr}^{Y, n-imp} \alpha,$$

$$\mathrm{LeftShift}^k \mathrm{RightShift}^l \pi_{XY} \mathrm{Clean}^{\circ, Y-imp}_{\left\{\substack{\odot\\\odot\\*}\right\}} T_{n+k+l} \sim \mathrm{Restr}^{Y, n-imp} \alpha,$$

$$\pi_{XY} \mathrm{Clean}^{\circ, Y-imp}_{\left\{\substack{\odot\\\odot\\*}\right\}} T'_n \sim \mathrm{Restr}^{Y, n-imp} \alpha$$

и

$$\pi_{XY} \mathrm{Clean}^{\circ, Y-imp}_{\left\{\substack{\odot\\\odot\\*}\right\}} T \sim \mathrm{Restr}^{Y-imp} \alpha.$$

Аналогичное верно и для β и (Y, Z)-проекций.

3.7.4. Доказательство теоремы

Покажем, что эти леммы достаточны для доказательства теоремы. Фактически мы будем непосредственно пользоваться только леммами 3.14, 3.15, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22. Остальные леммы нужны только для их доказательства.

По лемме 3.19 существует (хотя и не единственная) функция T, являющаяся предельной точкой последовательности T'_n. При этом для T выполнены условия самосогласованности $T = \mathrm{RightShift}T = \mathrm{LeftShift}T$.

По лемме 3.20 сумма по всем $(Y,2)$-существенным словами произведения длины слова и значения функции T на нём конечна.

Тогда по лемме 3.14 функция T является Y-существенным ограничением некоторой инвариантной меры θ: $T = \mathrm{Restr}^{Y-imp}\theta$. Очевидно, что меру θ можно выбрать так, чтобы вероятность последовательности из одних нулей в Y-компоненте равнялась нулю. Докажем, что $\mathrm{Clean}_{\substack{\odot\\ \odot}}\pi_{XY}\theta = \alpha$.

По лемме 3.22 X, Y-проекция Y-существенной очистки от $\substack{\odot\\ \odot}$ функции T пропорциональна Y-существенному ограничению меры α. Тогда и Y-существенное ограничение очистки от $\substack{\odot\\ \odot}$ X, Y-проекции меры θ пропорционально Y-существенному ограничению меры α по лемме 3.21. Действительно,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Restr}^{Y-imp}\alpha = \pi_{XY}\mathrm{Clean}^{\circ, Y-imp}_{\substack{\odot\\ \odot\\ *}}T = \\
= \mathrm{Clean}^{\circ, Y-imp}_{\substack{\odot\\ \odot}}\pi_{XY}T \sim \mathrm{Clean}^{\circ, Y-imp}_{\substack{\odot\\ \odot}}\pi_{XY}\mathrm{Restr}^{Y-imp}\theta = \\
= \mathrm{Clean}^{\circ, Y-imp}_{\substack{\odot\\ \odot}}\mathrm{Restr}^{Y-imp}\pi_{XY}\theta \sim (\text{по лемме 3.21}) \sim \\
\sim \mathrm{Restr}^{Y-imp}\mathrm{Clean}_{\substack{\odot\\ \odot}}\pi_{XY}\theta.
\end{aligned}
$$

Тогда $\mathrm{Clean}_{\substack{\odot\\ \odot}}\pi_{XY}\theta \sim \alpha$ по лемме 3.15 и $\mathrm{Clean}_{\substack{\odot\\ \odot}}\pi_{XY}\theta = \alpha$ так как две пропорциональные вероятностные меры равны.

По леммам 3.7 и 3.10 отсюда следуют пропорциональности

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Clean}_{\odot}\pi_X\theta \sim (\text{Лемма 3.10})\, \pi_X\mathrm{Clean}_{\substack{\odot\\ *}}\pi_{XY}\theta \sim \\
\sim (\text{Лемма 3.7})\, \pi_X\mathrm{Clean}_{\substack{\odot\\ *}}\mathrm{Clean}_{\substack{\odot\\ \odot}}\pi_{XY}\theta \sim \\
\sim (\text{Лемма 3.10}) \sim \mathrm{Clean}_{\odot}\pi_X\mathrm{Clean}_{\substack{\odot\\ \odot}}\pi_{XY}\theta \sim \mathrm{Clean}_{\odot}\pi_X\alpha \sim \mu.
\end{aligned}
$$

Аналогично можно убедиться в равенстве $\mathrm{Clean}_{\odot}\pi_Z\theta = \lambda$.

Осталось убедиться, что мера $\pi_{XZ}\theta$ согласована с покомпонентным порядком. Рассмотрим Y-существенные слова, в которых на какой-то позиции есть нарушение порядка компонент. Заметим, что α_n и β_n на таких словах принимают значение ноль как ограничения мер α и β. Операция $\mathrm{Join}_{\odot}$ добавляет только одну возможную пару символов в X, Y- и (Y, Z)-проекции, а именно $\substack{\odot \\ \odot}$, но это не создаёт нарушений порядка компонент. Усреднение и переход к пределу не создают новых возможных троек символов, так как при усреднении оказываются возможными слова, которые и раньше являлись подсловами возможных слов. Таким образом, мера θ требует упорядоченности компонент в каждой позиции.

Итак, мера $\pi_{XZ}\theta$ согласована с покомпонентым отношением порядка и имеет проекции, очистки которых равны мерам μ и λ соответственно. Тогда она доказывает $\mu \trianglerighteq \nu$, что и требовалось.

3.7.5. Доказательства лемм

Приведём теперь доказательства лемм 3.14–3.22.

Доказательство леммы 3.14.

Докажем сначала в простую сторону.

Пусть дана инвариантная мера θ; надо проверить, что её Y-существенное ограничение удовлетворяет условиям.

Заметим сначала, что мера сверхслов, в которых в одной компоненте сколько-то ненулевых символов, но потом с какого-то места будут только нули, равна нулю.

Действительно, все варианты расположения начала хвоста из одних нулей в этой компоненте несовместны и имеют одинаковую меру. Так как их счётное количество, все они имеют меру нуль.

Пусть $F = \mathrm{Restr}^{Y-imp}\theta$. Проверим, что выполнено одно из равенств, а именно $\mathrm{LeftShift} F = F$, после этого равенство $\mathrm{RightShift} F = F$ доказывается аналогично.

Фиксируем Y-существенное слово w и будем доказывать равенство

$$(\mathrm{LeftShift} F)(w) = F(w).$$

По мере θ вероятность того, что перед словом w в Y-компоненте только нулевые символы, равна нулю. Тогда с вероятностью единица перед словом

w будет идти какое-то количество троек с нулевой Y- компонентой и перед ними тройка с ненулевой Y-компонентой. Это можно представить как равенство

$$F(w) = \theta(w) = \sum_{n, x_1, \ldots, x_n, y_n \neq \odot, z_1, \ldots, z_n} \theta \left(\begin{smallmatrix} x_n & x_{n-1} & \cdots & x_2 & x_1 \\ y_n & \odot & \cdots & \odot & \odot \\ z_n & z_{n-1} & \ldots & z_2 & z_1 \end{smallmatrix} * w \right) =$$
$$= \sum_{n, x_1, \ldots, x_n, y_n \neq \odot, z_1, \ldots, z_n} F \left(\begin{smallmatrix} x_n & x_{n-1} & \cdots & x_2 & x_1 \\ y_n & \odot & \cdots & \odot & \odot \\ z_n & z_{n-1} & \ldots & z_2 & z_1 \end{smallmatrix} * w \right) = (\mathrm{LeftShift} F)(w).$$

Проверим второе условие. Рассмотрим все возможные тонкие цилиндры со связным носителем, содержащим 0 и 1 и у которых содержание (то есть задаваемое слово) является $(Y, 2)$-существенным. Все они задают несовместные события, поэтому сумма их θ-мер не больше θ-меры всего пространства (которая конечна). Теперь заметим, что мера тонкого цилиндра зависит только от содержания, а каждое слово длины $n \geqslant 2$ встречается в качестве содержания $n-1$ раз.

Аналогично можно провести рассуждения для случая слов в алфавите пар символов, а не троек символов.

Пусть теперь дана функция F и мы хотим построить по ней меру θ.

Определение 3.16. Пусть дано произвольное слово w. Будем называть тонкий цилиндр со связным носителем и Y-существенным содержанием продолжением слова w, если в позициях $0, \ldots, |w|-1$ он задаёт наличие слова w.

Элементарным продолжением будем называть каждое максимальное по включению цилиндров продолжение (то есть продолжение, содержание которого не содержит в качестве подслова содержание другого продолжения).

Другими словами, элементарное продолжение задаёт на всех позициях носителя, кроме краёв и позиций $0 \ldots |w|-1$, символ $\odot$ в Y-компоненте.

Аналогично определим элементарное продолжение тонкого цилиндра W. Им является каждый содержащийся в W тонкий цилиндр со связным носителем и Y-существенным содержанием.

У всякого Y-существенного слова есть единственное элементарное продолжение — оно само. Кроме того, никакие два элементарных продолжения слова w не пересекаются как цилиндры.

Аналогично элементарным продолжениям определим элементарные продолжения вправо и влево. Очевидно, что множество всех элементарных продолжений слова w — это множество всех элементарных продолжений влево всевозможных цилиндров, являющихся элементарными продолжениями вправо слова w.

Заметим, что мера, которую мы должны построить, должна иметь следующее свойство. Мера любого слова w равна сумме значений F на содержаниях всех его элементарных продолжений; притом разные элементарные продолжения с одинаковым содержанием (отличающиеся сдвигом) учитываются в сумме отдельно.

Таким образом, с помощью элементарных продолжений мы определили значения искомой меры на всех словах, в том числе тех, у которых Y-компонента не является существенной.

Заметим сразу, что полученная продолжением мера множества сверхслов, в которых после некоторого символа $\sigma \neq \odot$ идут одни нули подряд в Y-компоненте равна нулю. (Мы рассматриваем продолжения вправо, но то же самое верно для продолжений влево). Действительно, пусть эта мера больше некоторого положительного числа γ. Тогда при всех n сумма значений F на всех элементарных продолжениях слова σ вправо длины более n больше числа γ.

Но тогда мы получили бы, что сумма значений функции F на различных $(Y,2)$-существенных словах, умноженных на их длину без 1, не меньше $(n-1)\gamma$ для любого n.

Для проверки аддитивности и инвариантности полученной меры θ надо проверить, что мера слова w равна сумме мер всех его продолжений на один символ в какую-то одну сторону. Будем рассматривать, например, продолжения вправо. Сначала предположим, что самый левый символ Y-компоненты w ненулевой.

Если исходное слово w имеет в качестве последнего символа Y-компоненты $\odot$, то все его элементарные продолжения содержат хотя бы один символ справа от самого правого символа w, и сумма вероятностей элементарных продолжений односимвольных продолжений слова w состоит из тех же слагаемых, что и просто сумма всех элементарных продолжений слова w.

Если же Y-компонента w заканчивается на ненулевой символ, то в сумму по элементарным продолжениям, определяющую меру слова w, войдут меры всех способов приписать к Y-компоненте слова w сколько-то нулей и ненулевой символ, а к двум другим компонентам — столько же произвольных символов.

Но такая сумма по первому свойству функции F будет равна мере слова w (мы сравниваем буквально значения на w функции F и её правого сдвига).

Общий случай легко сводится к частному случаю ненулевого самого левого символа. Действительно, пусть $EC(w)$ — множество всех элементарных продолжений слова w, а $EC_L(w)$ и $EC_R(w)$ — множество всех элементарных продолжений слова w влево и вправо, соответственно. Нам надо доказать, что

$$\forall w : \theta(w) = \sum_{a \in \left\{ \begin{smallmatrix}\oplus\\ \oplus\\ \oplus\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}\oplus\\ \oplus\\ \odot\end{smallmatrix}, \ldots, \begin{smallmatrix}\ominus\\ \ominus\\ \ominus\end{smallmatrix} \right\}} \theta(w * a).$$

При этом нам уже известно, что если у слова w_0 ненулевой самый левый символ Y-компоненты, то

$$\theta(w_0) = \sum_{a \in \left\{ \begin{smallmatrix}\oplus\\ \oplus\\ \oplus\end{smallmatrix}, \ldots, \begin{smallmatrix}\ominus\\ \ominus\\ \ominus\end{smallmatrix} \right\}} \theta(w_0 * a).$$

Вспомним, что θ-мера множества последовательностей, в которых, начиная с какого-то места, идут одни нули, равна нулю. Тогда

$$\theta(w) = \sum_{w_0 \in EC_L(w)} \theta(w_0) = \sum_{w_0 \in EC_L(w)} \sum_{a \in \left\{ \begin{smallmatrix}\oplus\\ \oplus\\ \oplus\end{smallmatrix}, \ldots, \begin{smallmatrix}\ominus\\ \ominus\\ \ominus\end{smallmatrix} \right\}} \theta(w_0 * a) =$$

$$= \sum_{a \in \left\{ \begin{smallmatrix}\oplus\\ \oplus\\ \oplus\end{smallmatrix}, \ldots, \begin{smallmatrix}\ominus\\ \ominus\\ \ominus\end{smallmatrix} \right\}} \sum_{w_0 \in EC_L(w)} \theta(w_0 * a) = \sum_{a \in \left\{ \begin{smallmatrix}\oplus\\ \oplus\\ \oplus\end{smallmatrix}, \ldots, \begin{smallmatrix}\ominus\\ \ominus\\ \ominus\end{smallmatrix} \right\}} \sum_{u \in EC_L(w*a)} \theta(u) =$$

$$= \sum_{a \in \left\{ \begin{smallmatrix}\oplus\\ \oplus\\ \oplus\end{smallmatrix}, \ldots, \begin{smallmatrix}\ominus\\ \ominus\\ \ominus\end{smallmatrix} \right\}} \theta(w * a).$$

Теперь заметим, что если бы на каком-то слове мера θ была бы бесконечна, то по аддитивности мера пустого слова была бы тоже бесконечна, а это неверно по второму свойству F.

Лемма 3.14 доказана.

Доказательство леммы 3.15.

Пусть θ — инвариантная мера с данным Y-существенным ограничением F, такая что множество сверхслов с Y-компонентой, содержащей только нули, имеет θ-меру 0.

В доказательстве леммы 3.14 мы установили, что и θ-мера множества сверхслов с бесконечным хвостом или началом из нулей равна нулю

Для произвольного слова w с хотя бы одним ненулевым символом в Y-компоненте мера θ имеет единственное возможное значение, так как множество всех сверхслов, содержащих w и не содержащих бесконечного количества нулей подряд, является объединением элементарных продолжений слова w.

Лемма 3.15 доказана.

Доказательство леммы 3.16.

Фиксируем параметр n. Рассмотрим слова с хотя бы k нулевыми символами подряд после l-го ненулевого символа в Y-компоненте.

Сдвиги таких слов на $0, \ldots, k-1$ описывают непересекающиеся цилиндры, так как ненулевой символ оказывается на месте нулевого или же совмещаются разные ненулевые символы. Меры этих тонких цилиндров равны мере данного слова, а их сумма ограничена мерой всего пространства.

Всего возможных значений l имеется n штук, что не зависит от k.

Мера всего пространства, делённая на k и умноженная на n является $O(\frac{1}{k})$ при фиксированном n, что и требовалось доказать.

Лемма 3.16 доказана.

Доказательство леммы 3.17.

Чтобы при ноль-склейке двух слов получилось k нулей подряд в Y-компоненте, необходимо наличие хотя бы $\frac{k}{2}$ нулей подряд в Y-компоненте одного из склеиваемых слов. Более того, чтобы k нулей подряд были после

l-го ненулевого символа, это же требование должно быть выполнено и для исходных слов.

Таким образом, сумма значений функции T_n на всех словах, где в Y-компоненте между l-м и $l+m$-м ненулевыми символами есть хотя бы k нулей подряд, не более $4 \times \frac{m}{k}$, так как иначе мера всего пространства была бы больше единицы по хотя бы одной из исходных мер α и β.

Это свойство очевидно достаточно для равномерной лёгкости хвостов. Кроме того, оно сохраняется при усреднении в ходе построения функций T'_n. Лемма 3.17 доказана.

Доказательство леммы 3.18. Утверждение леммы является частным случаем утверждения леммы 3.5 о предельной точке. Лемма 3.18 доказана.

Доказательство леммы 3.19.

Равенство $T'_n = \mathrm{RightShift} T'_n$ верно из определения применения T'_n к $(Y, \leqslant n)$-существенным словам. (Напомним, что применение к $(Y, \leqslant n)$-существенным словам определялось с помощью правого сдвига).

Так как левый и правый сдвиг коммутируют, в разности левого и правого сдвига большинство слагаемых сократится и останется разность значений распределений, умноженная на $\frac{1}{n}$.

Это же можно записать как

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{RightShift} T'_n - \mathrm{LeftShift} T'_n = \\
&= \mathrm{RightShift}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{RightShift}^k \mathrm{LeftShift}^{n-k} T_{2n} - \\
&- \mathrm{LeftShift}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{RightShift}^k \mathrm{LeftShift}^{n-k} T_{2n} = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{RightShift}^k \mathrm{LeftShift}^{n-k+1} T_{2n} - \\
&- \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{RightShift}^k \mathrm{LeftShift}^{n-k+1} T_{2n} = \\
&= \frac{1}{n}(\mathrm{RightShift}^{n+1} T_{2n} - \mathrm{LeftShift}^{n+1} T_{2n}).
\end{aligned}
$$

Но эта функция ограничена сверху по абсолютной величине числом $\frac{1}{n}$.

Лемма 3.19 доказана.

Доказательство леммы 3.20

Фиксируем $k \leqslant n-2$. Сначала нам надо оценить

$$\sum_{u \text{ является } (Y,2)\text{-существенным}} (|u|-1) \times \mathrm{LeftShift}^{k}\mathrm{RightShift}^{n-k-2}T_{2n}(u),$$

то есть сумму вероятностей $(Y,2n)$-существенных слов по распределению T_{2n}, умноженных на количество нулей после k-го ненулевого символа (плюс 1).

В каждом $(Y,2n)$-существенном слове из этой суммы слове сравним количество символов $\genfrac{}{}{0pt}{}{\odot}{\odot}$ в X,Y- и (Y,Z)-проекциях. Первые (где количество символов $\genfrac{}{}{0pt}{}{\odot}{\odot}$ больше в X,Y-проекции) сгруппируем по очистке от пары $\genfrac{}{}{0pt}{}{\odot}{\odot}$ их (Y,Z)-проекций, оценим количество нулей длиной этой очистки, а суммарную вероятность сгруппированных слов — вероятностью этой очистки по мере β. Для остальных слов используем X,Y-проекцию и меру α.

Заметим, что каждая из двух сумм является суммой мер непересекающихся тонких цилиндров (умножение на количество нулей плюс 1 соответствует выбору нулевой позиции).

Получим оценку сверху искомой суммы удвоенной суммой двух конечных слагаемых.

Значения параметров n и k на оценку не влияют.

При переходе к T'_n происходит конечное усреднение сдвигов, которое не позволяет превысить общую для всех усредняемых верхнюю оценку.

Если бы это условие нарушилось для T, то в какой-то допредельный момент мы бы превысили верхнюю оценку, справедливую для всех T'_n независимо от номера, что невозможно.

Лемма 3.20 доказана.

Доказательство леммы 3.21.

В левой части и правой частях равенства стоят функции, значение которых на данном существенном слове u равно одной и той же сумме. А именно, сумме альфа-мер всех существенных слов v, из которых после удаления всех пар нулей получается u. Значение обеих функций на несущественных словах равно нулю по определению.

Лемма 3.21 доказана.

Доказательство леммы 3.22.

Первое равенство, $\pi_{XY}\mathrm{Clean}^{\circ,Y-imp}_{\left\{\substack{\odot\\\odot\\\odot}\right\}}T_n = \mathrm{PRestr}^{Y,n-imp}\alpha$, следует из того, что мы порождаем случайное Y-существенное слово по мере α, добавляем в него нули по какому-то распределению, после чего приписываем Z-компоненту. Тогда стирание всего добавленного должно дать исходно порождённое слово.

Отсюда следует равенство

$$\mathrm{LeftShift}^k\mathrm{RightShift}^l\pi_{XY}\mathrm{Clean}^{\circ,Y-imp}_{\left\{\substack{\odot\\\odot\\ *}\right\}}T_{n+k+l} =$$
$$= \mathrm{LeftShift}^k\mathrm{RightShift}^l\mathrm{Restr}^{Y,n+k+l-imp}\alpha.$$

Поскольку существенное ограничение инвариантной меры не меняется при сдвигах, правая часть равна $\mathrm{Restr}^{Y,n-imp}\alpha$, что доказывает второе равенство леммы.

Третье равенство (для T'_n) получается из второго усреднением левой и правой части (при этом используется то, что левый и правый сдвиги коммутируют с проекцией и существенной очисткой).

Четвёртое равенство (для T) получается переходом к пределу в последовательности равномерно сходящихся рядов. В качестве ряда мы рассматриваем ряд из определения сдвига. Равномерная сходимость выполнена по следующей причине. При фиксированном значении n у нас имеется ряд из неотрицательных слагаемых, который мы можем переупорядочить произвольным удобным нам способом. Упорядочим по возрастанию максимального количества нулей подряд в Y-компоненте. По лемме 3.17 имеется равномерная оценка на сумму всего остатка ряда, не зависящая от номера члена в последовательности. Но сумма поточечного предела абсолютно и равномерно сходящихся рядов равна пределу сумм, что и требовалось доказать.

Лемма 3.22 доказана.

Таким образом, леммы 3.14–3.22 доказаны.

Замечание 3.7. *Данное доказательство нетрудно обобщить на случай, когда порядок $\trianglerighteq$ имеет чуть более общий вид. Например, можно брать в определении вместо Clean какой-то $Clean_A$, причём разрешать вставлять между символами исходного слова не любые конечные слова над A, а только слова из некоторого множества $G \subset A^*$ со следующим свойством: $u_1u_2, v \in G \implies u_1vu_2 \in G$. Кроме того, в качестве порядка на "неочищенных" словах можно брать не $\geqslant$, а любой транзитивный порядок.*

3.8. Возможные применения отношения $\trianglerighteq$

Итак, мы доказали, что отношение $\trianglerighteq$ транзитивно. Очевидно, что оно удовлетворяет также второму и третьему условию на стр. 20. Таким образом для доказательства гипотезы 1 остается установить, что хотя бы один из двух операторов Тоома монотонен относительно $\trianglerighteq$.

Поскольку эти операторы есть композиции операторов $\mathrm{Ann}_\varepsilon, \mathrm{Flip}_\delta, \mathrm{Flip}_\delta^+$, достаточно доказать монотонность оператора Ann_ε и хотя бы одного из операторов $\mathrm{Flip}_\delta, \mathrm{Flip}_\delta^+$. Первое мы умеем делать. Верно ли второе, остаётся неясным.

Теорема 3.4. *Оператор $Ann_\varepsilon = Duel_\varepsilon \circ Clean$ является монотонным относительно $\trianglerighteq$.*

Доказательство. Будем рассматривать операторы A на мерах на словах из символов $\{\oplus, \ominus\}$, задаваемые парами из отображения (которое мы тоже будем обозначать A) и меры θ (на последовательностях, возможно, другого алфавита). Аргументы отображения — последовательность символов и дополнительная случайная последовательность (которая будет предполагаться распределённой по θ), а значение — последовательность символов. Если мы хотим применить оператор к мере, то надо построить меру прямого произведения на произведении пространства входных последовательностей и пространства дополнительных случайных последовательностей, распределённых по θ, после чего перенести её в пространство последовательностей при помощи отображения A.

Заметим, что оператор $\mathrm{Duel}_\varepsilon$ действует на сверхслово, разбивая его на блоки (детерминированным образом), после чего заменяя каждый блок случайным образом независимо от других на блок той же длины. Поэтому он имеет указанный в предыдущем абзаце вид.

Мы хотим получить средство для доказательства монотонности $A \circ \mathrm{Clean}$ по отношению к $\trianglerighteq$. Для этого нам достаточно существования оператора BiA, который будет это конструктивно доказывать, то есть меру, существование которой требуется при проверке неравенства на аргументах, преобразовывать в меру, существование которой означает нужное неравенство на результаты применения оператора. Первым аргументом отображения BiA будут являться последовательности в алфавите из пар букв, в которых верхняя буква больше или равна нижней, а одиночные буквы теперь берутся из $\{\oplus, \odot, \ominus\}$. Вторым аргументом будет дополнительная последовательность (которая опять будет предполагаться распределённой по θ). Принимаемые BiA значения — последовательности в том же алфавите пар букв.

Лемма 3.23. *Пусть для A и BiA выполняются следующие условия:*
1) Для любых мер $\mu \geqslant \nu$ на словах над алфавитом $\{\oplus, \odot, \ominus\}$ и для любой инвариантной меры Ω на словах над алфавитом из пар символов $\{\oplus, \odot, \ominus\}$ с первой проекцией, равной μ и второй проекцией, равной ν, образы проекций $BiA\,\Omega$ при Clean равны $A\,\mathit{Clean}\,\mu$ и $A\,\mathit{Clean}\,\nu$, соответственно. Здесь A и BiA понимаются как операторы, и распределение дополнительного случайного аргумента θ (из определения A как оператора на мерах).
2) Для любого сверхслова над алфавитом пар символов, такого что первая компонента больше либо равна второй, это же неравенство выполнено для его образа при BiA.

Тогда A монотонен относительно $\trianglerighteq$.

Доказательство. Если мера Ω является мерой, существование которой подтверждает отношение $\trianglerighteq$ между двумя мерами, то $BiA\,\Omega$ подтверждает $\trianglerighteq$ между их образами. Лемма 3.23 доказана.

Нам достаточно построить оператор $BiDuel$, обладающий свойствами, описанными в предыдущей лемме.

Пусть задана последовательность S в алфавите пар символов и дополнительная случайная последовательность из нулей и единиц r (на каждом месте выбор делается независимо, и вероятность единицы равна ε). Теперь опишем, как вычисляются компоненты пары, стоящей на заданном месте в образе.

Каждый символ из верхней и нижней компоненты S будет либо оставаться неизменным, либо заменяться на $\odot$ по следующему правилу. Рассмотрим по отдельности верхнюю и нижнюю компоненту S. Назовём "связанными" те символы, которые входят в подслова вида $\oplus\odot^n\ominus$, $n \geqslant 0$. Остальные символы будем считать "свободными". Будем считать, что блок — это либо $\oplus\odot^n\ominus$, либо отдельный свободный символ. Заметим, что возможна ситуация, например, $\binom{\oplus\,\oplus\,\oplus\,\ominus}{\oplus\,\ominus\,\ominus\,\ominus}$, когда свободный символ стоит над связанным, и наоборот. Свободные символы всегда переносятся в образ без изменений. Теперь определим, что происходит с блоками. К некоторым из них будет применена операция обнуления, то есть замены каждого символа блока на $\odot$. Для того, чтобы образы блоков были независимы внутри верхней и нижней компоненты, будем требовать, чтобы образ блока зависел только то символов, стоящих в S и в r на позициях, занимаемых рассматриваемым блоком. Для того, чтобы одновременно сохранить неравенство между верхней и нижней компонентой и при этом получить правильные вероятности превращений, будем привязывать обнуление нижнего блока к обнулению верхнего блока, который мог бы обнулиться и испортить неравенство.

Если рассматривается блок в верхней компоненте, то просто заменим его на блок из одних нулей, если над его первым символом ($\oplus$) стоит единица. Ясно, что каждый блок сохраняется с вероятностью $1-\varepsilon$ и обнуляется с вероятностью ε, что не отличается от происходящего при $Duel$.

Теперь рассмотрим блок в нижней компоненте. Во-первых, возможно, что над последним символом блока ($\ominus$) стоит тоже $\ominus$. Тогда рассмотрим слово, стоящее над всем блоком. Оно начинается с $\oplus$, так только он разрешён над $\oplus$. Оно не содержит $\ominus$, кроме последнего символа, потому что $\ominus$ разрешён только над $\ominus$. Таким образом,мы получаем $\binom{\oplus\,*\,*\,*\,\ominus}{\oplus\,\odot\,\odot\,\odot\,\ominus}$. В любом случае, $\ominus$ в верхней компоненте является связанным, и соответствующий ему $\oplus$ лежит в пределах рассматриваемого блока. Кроме того, если левый $\oplus$ в верхней компоненте связан, то он связан с правым $\ominus$ в верхней компоненте. Поэтому в этом случае будем рассматривать $\ominus$ в крайней правой позиции фрагмента над блоком в верхней компоненте, находить парный ему $\oplus$ и обнулять блок тогда и только тогда, когда на позиции, соответствующей этому плюсу, в r стоит 1. Например, для случая $\binom{\oplus\odot\odot\odot\ominus}{\oplus\odot\odot\odot\ominus}$ нам надо рассмотреть символ в r на первой позиции, а для $\binom{\oplus\odot\oplus\odot\ominus}{\oplus\odot\odot\odot\ominus}$ — на третьей.

Пусть теперь у нас есть блок в нижней компоненте, над последним символом которого стоит не $\ominus$. В этом случае над первым символом (которым является $\oplus$) стоит $\oplus$, и мы обнулим блок, если на этой позиции в r стоит 1.

Заметим, что мы сначала, не обращаясь к r, определяем одну позицию внутри блока, проверяем символ в r на этой позиции, и потом в соответствии с ним обнуляем или нет блок. Распределение вероятностей образов в любом случае соответствует считыванию одного символа из r.

Теперь проверим неравенство между последовательностями. Если оба символа перенесены или оба обнулены, то проверять ничего не надо — по предположению, что вначале неравенство верно или потому, что $\odot \leqslant \odot$. Если при обнулении одного символа в паре верхний не уменьшился, а нижний не увеличился, то опять неравенство сохранится. Более того, если один из символов был уже $\odot$, или если была пара $\binom{\oplus}{\ominus}$, то неравенство будет выполнено. Итак, нам надо доказать, что если в $\binom{\oplus}{\oplus}$ обнулился верхний символ или в $\binom{\ominus}{\ominus}$ обнулился нижний, то и второй тоже обнулился.

Рассмотрим сначала случай $\binom{\ominus}{\ominus}$. Если нижний $\ominus$ обнулился, то он связанный, но верхний, как мы уже знаем, тоже связан. Более того, их обнуление зависит от одного и того же символа в r, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим случай $\binom{\oplus}{\oplus}$. Верхний $\oplus$ обнулился, значит, он связанный. Рассмотрим слово вида $\oplus \odot^n \ominus$, в которое он входит. Мы знаем, что под его первым символом стоит $\oplus$. Под его последним символом стоит, разумеется, $\ominus$. В середине — под $\odot$ — могут быть $\odot$ и $\ominus$. Поэтому $\oplus$, стоящий под первым $\oplus$, связанный. Докажем, что его обнуление зависит от того, что стоит в r на той самой позиции, где он сам находится. Действительно, чтобы это было не так, соответствующий ему $\ominus$ должен стоять под $\ominus$. Но соответствующий ему $\ominus$ стоит не правее конца рассматриваемого слова сверху (как и при анализе распределения вероятностей вычёркивания для каждого блока, у нас есть два случая: устроенные как $\begin{pmatrix} \oplus \odot \odot \odot \ominus \\ \oplus \odot \odot \odot \ominus \end{pmatrix}$, то есть с одинаковыми блоками сверху и снизу, и устроенные как $\begin{pmatrix} \oplus \odot \odot \odot \ominus \\ \oplus \odot \ominus \odot \ominus \end{pmatrix}$, то есть с более коротким блоком снизу). Более того, если соответствующий $\ominus$ стоит под $\ominus$, то тогда мы имеем два одинаковых блока друг над другом, так что из обнуления верхнего символа в любом случае следует обнуление нижнего, что и требовалось.

Теорема 3.4 доказана.

Список литературы

1. M.Lothaire. Algebraic Combinatorics on Words. Cambridge University Press, 2002.

2. Притыкин Ю. Л. Конечно-автоматные преобразования строго почти периодических последовательностей // Математические заметки. 2006. Т. 80, № 5. С. 751–756.

3. Muchnik A., Semenov A., Ushakov M. Almost periodic sequences // Theoretical Computer Science. 2003. Vol. 304. P. 1–33.

4. Притыкин Ю. Почти периодичность, конечно-автоматные преобразования и вопросы эффективности // Известия вузов. Математика. 2010. Т. 1. С. 74–87.

5. Притыкин Ю. Действие конечных автоматов на почти периодические последовательности. доклад на Колмогоровском семинаре. 2005.

6. Шень А. Редкие множества. доклад на Колмогоровском семинаре. 2009.

7. Н.К. Верещагин, В.А. Успенский, Шень А. Колмогоровская сложность и алгоритмтическая случайность. М.: МЦНМО, 2012.

8. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2001.

9. Bienvenu L., Romashchenko A., Shen A. Sparse sets // Proceedings of Symposium on Cellular Automata, Journées Automates Cellulaires (JAC 2008). 2008. P. 18–28.

10. Makarychev K., Makarychev Y., Romashchenko A., Vereshchagin N. A new class of non Shannon type inequalities for entropies // Communications in Information and Systems. 2002. Vol. 2, no. 2. P. 147–166.

11. Тоом А. Устойчивые и притягивающие траектории в многокомпонентных системах // Многокомпонентные системы / Ed. by Р. Л. Добрушин. Москва: Наука, 1978.

12. Gács P. Reliable Cellular Automata with Self-Organization // Journal of Statistical Physics. 2001. Vol. 103, no. 1/2. P. 45–267.

13. Toom A. Non-ergodicity in a 1-D particle process with variable length // Journal of Stat. Physics. 2004. Vol. 115. P. 895–924.

14. Тоом А. Клеточные автоматы. НМУ, спецкурс. 2004.

15. Н.К. Верещагин, Шень А. Вычислимые функции. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2008.

Список публикаций автора по теме диссертации

16. Раскин М. А. О нижней оценке регулятора прямого произведения почти периодической и периодической последовательностей // Вестник Московского Университета. Серия 1. Математика и механика. 2011. № 6. С. 7–11.

17. Раскин М. А. Согласованная с отношением порядка копроекция вычислимых мер не всегда вычислима // Вестник Московского Университета. Серия 1. Математика и механика. 2012. № 2. С. 17–19.

18. Раскин М. А. Частичный порядок Тоома транзитивен // Проблемы передачи информации. 2012. Т. 48, № 2. С. 79–99.