Отзыв

научного руководителя д.ф.-м.н., профессора Верещагина Н.К.
о диссертации Раскина Михаила Александровича
«Сверхслова, меры на них и их полупрямые произведения»
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел (физико-математические науки)

Диссертация М.А. Раскина относится к теории сверхслов и мер на них

В диссертации даны ответы на вопросы, поставленные М.Н. Вялым, А.Л. Семёновым, А. Шенём, А.Л. Тоомом.

Первая глава посвящена следующему вопросу. Ю.Л. Притыкиным было доказано, что в результате применения конечного преобразователя к почти периодическому сверхслову получается обобщенно почти периодическое сверхслово. Более того, это верно и в том случае, когда исходное сверхслово лишь обобщенно почти периодично. Это означает, что для некоторой функции f, называемой регулятором почти периодичности, любое слово w либо имеет конечное число вхождений в сверхслово и все эти вхождения находятся левее позиции с номером $f(l)$ (где l длина слова w), либо имеет вхождение на любом интервале длины $f(l)$. Из доказательства Притыкина следует довольно высокая верхняя оценка на регулятор почти периодичности для образа сверхслова: он получается из регулятора почти периодичности исходного слова путем n-кратной композиции, где n --- количество состояний преобразователя.

М.Н. Вялый поставил вопрос, можно ли получить лучшую верхнюю оценку на регулятор образа. В диссертации М.А. Раскина получен отрицательные ответ на этот вопрос. А именно, было показано, что существуют сколь угодно быстро растущая функция f и почти периодическое слово с регулятором почти периодичности f такие, что для всех достаточно больших n существует конечный преобразователь с n состояниями, для которого образ сверхслова относительно него имеет регулятор больше $n/30$-кратной итерации функции f (для бесконечно многих значений l). Более того, этот преобразователь устроен очень просто: на исходной последовательности $a_1, a_2, \ldots$ он выдает последовательность $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (n, a_n), (1, a_{n+1}), (2, a_{n-2}), \ldots, (n, a_{2n}), \ldots$, которая получается декартовым произведением исходной последовательности и периодической последовательности $1, 2, \ldots, n, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ (с периодом n). Таким образом, даже для таких простых преобразователей, которые перемещаются из состояния в состояние по циклу, независимо от исходной последовательности, верхнюю оценку Притыкина невозможно существенно понизить. Вопрос про достаточность таких преобразователей был задан А.Л. Семёновым как усиление вопроса М.Н. Вялого.

Во второй главе также рассматриваются произведения, но на этот раз не обязательно прямые (то есть, декартовы). Полупрямым произведением двух мер на пространстве сверхслов называется произвольная мера на пространстве пар сверхслов, проекции которой являются данными мерами. В отличие от прямого произведения, две данных меры могут иметь много разных полупрямых произведений. В литературе полупрямые произведения вычислимых мер использовались, например, для изучения различных свойств случайных по Мартин-Лёфу последовательностей. При этом особый интерес представляют вычислимые полупрямые произведения, согласованные с порядком. Вычислимость меры означает, что мы можем со сколь угодно большой точностью вычислять меру простых множеств, а согласованность с порядком означает, что мера всех пар последовательностей, нарушающих порядок, равна нулю.

А. Шенём был поставлен вопрос о том, верно ли, что для любых двух вычислимых мер, имеющих полупрямое произведение, согласованное с покомпонентым порядком, существует и и их вычислимое полупрямые произведения, согласованные с отношением покомпонентного порядка. Основным результатом второй главы является отрицательный ответ на этот вопрос: построены две вычислимые меры на пространстве двоичных последовательностей, имеющих полупрямое произведение, согласованное с порядком, но при этом все такие произведения невычислимы.

В третьей главе доказывается транзитивность отношения, предложенного Тоомом в качестве отношения порядка, позволяющего сравнивать меры на двусторонних сверхсловах, отличающиеся вычёркиванием и добавлением символов. Грубо говоря, мы говорим, что одна последовательность из минусов и плюсов меньше другой, если в первую последовательность можно вставить плюсы, а во вторую минусы так, чтобы первая последовательность стала покомпонентно меньше второй. Транзитивность этого отношения нужна для сравнения некоторых клеточных автоматов. Гипотеза о том, что это отношение в самом деле транзитивно, была высказана Тоомом, но доказательство отсутствовало. Основным результатом третьей главы является доказательство этой гипотезы. Это наиболее сложный и интересный результат диссертации. Его сложность иллюстрируется тем, что доказательство неконструктивно --- как именно надо вычеркивать и добавление символов, определяется неконструктивно.

Таким образом, в диссертации получены несколько новых и интересных результатов о сверхсловах и мерах на них. Все результаты диссертации рассказывались на семинарах и конференциях и опубликованы в журнальных статьях автора.

Диссертация удовлетворяет требованиям ВАК Минобрнауки РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. По моему мнению, ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Научный руководитель
Д. ф.-м. н., профессор Н.К. Верещагин

«25» мая 2014 г.