МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Сорокин Алексей Андреевич

Об отношении совместимости в исчислении Ламбека и в его варианте с операциями замещения

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра
и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Мати Рейнович Пентус

МОСКВА — 2014

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена исследованию отношения совместимости в различных вариантах исчисления Ламбека. В работе формулируются верхняя и нижняя оценка на длину совмещающего типа для исчисления Ламбека L и доказывается критерий совместимости типов для исчисления Ламбека с операциями замещения. Также в работе исследуется класс языков, порождаемых грамматиками, основанными на исчислении Ламбека с операциями замещения.

Исчисление Ламбека L было введено И. Ламбеком в работе [18] для формального описания синтаксиса естественных языков. Типы исчисления Ламбека строятся из счётного множества примитивных типов с помощью двуместных связок — умножения, а также левого и правого деления. Два типа A и B исчисления Ламбека называются совместимыми, если существует такой тип C, что обе секвенции $A \to C$ и $B \to C$ являются выводимыми. В этом случае тип C называется совмещающим для типов A и B. Отношение совместимости было впервые введено (под другим названием) в работе [18], где было доказано, что оно является отношением эквивалентности.

В работе [27] был доказан критерий совместимости типов в исчислении Ламбека и коммутативном исчислении Ламбека, сформулированный в терминах интерпретаций типов исчисления Ламбека в свободной группе, порождённой примитивными типами. В работах [11] и [20] были получены критерии совместимости, соответственно, для неассоциативного исчисления Ламбека NL и исчисления Ламбека-Гришина LG. С лингвистической точки зрения совместимость типов означает возможность соединить соответствующие им языковые выражения с помощью сочинительного союза[33]. В работах [10] и [11] рассматривалось применение отношения совместимости для унификации и автоматического построения категориальных грамматик, основанных на исчислении Ламбека (также называемых грамматиками Ламбека). Однако в задачах автоматического построения грамматик Ламбека основную роль играет не столько факт существования совмещающего типа, сколько алгоритм его построения и оценки на его возможную длину. Также построение совмещающего типа для заданных совместимых типов исчисления Ламбека является одним из этапов предложенного в [37] алгоритма приведения грамматики Ламбека к эквивалентной ей однозначной грамматике.

Мы докажем, что для любых совместимых типов исчисления Ламбека найдётся совмещающий тип, чья длина ограничена квадратичным многочленом от длин исходных типов, и предложим алгоритм построения соответствующего типа. Кроме того, мы покажем, что данная квадратичная оценка является неулучшаемой с точностью до постоянного множителя: будет предъявлено семейство пар совместимых типов, содержащее пары типов сколь угодно большой длины, такое что для каждой из пар длина совмещающего типа ограничена снизу некоторым другим квадратичным многочленом. Также мы исследуем отношение совместимости для исчисления HDL, являющегося несеквенциальным вариантом исчисления Ламбека с операциями замещения, введённого в [21]. Мы покажем, что два типа данного исчисления являются совместимыми в том и только том случае, когда совпадают их интерпретации в свободной абелевой группе, порождённой примитивными типами.

Основным приложением исчисления Ламбека служат категориальные грамматики, основанные на исчислении Ламбека. Они активно используются для формального описания и синтаксического разбора естественных языков. Также для данных целей применяются грамматики, основанные на вариантах исчисления Ламбека, таких как неассоциативное исчисление NL и исчисление Ламбека с операциями замещения DL.

Для синтаксического описания естественных языков также применяются введённые Н. Хомским в [6] порождающие грамматики. Наиболее важным классом порождающих грамматик являются контекстно-свободные грамматики, активно использующиеся для задания синтаксиса языков программирования ([2]). В то же время для описания естественных языков грамматики Ламбека и другие варианты категориальных грамматик являются более предпочтительными. В частности, грамматики Ламбека обладают свойством лексикализации, что позволяет хранить всю необходимую синтаксическую информацию в словаре, а также естественным образом совмещать синтаксический и семантический анализ (см., например, [22], [16]). В целом, процесс вывода в категориальных грамматиках более точно отражает синтаксические явления естественного языка, чем соответствующий процесс в порождающих грамматиках.

Если рассматривать грамматики Ламбека только с точки зрения порождаемых ими языков, то, как доказано М. Р. Пентусом в [35], всякий такой язык является контекстно-свободным. Из данного результата, а также обратной теоремы, полученной ранее Н. Гайфманом в [5], вытекает, что класс языков, порождаемых грамматиками, основанными на исчислении L, совпадает с классом контекстно-свободных языков без пустого слова.

Хорошо известно (см., например, [16]), что контекстно-свободных грамматик недостаточно для полноценного анализа естественных языков. Например, они не позволяют рассматривать так называемые непроективные зависимости, а также неприменимы в случае языков со свободным порядком слов, таких как русский или японский. Для решения данной проблемы были предложены различные формализмы, позволяющие моделировать разрывные синтаксические структуры, но при этом сохраняющие такие полезные свойства контекстно-свободных грамматик, как полиномиальная сложность разбора и независимость вывода в грамматике от контекста. Среди наиболее важных типов грамматик можно назвать вершинные грамматики К. Полларда ([29]), грамматики присоединяемых деревьев А. Йоси и И. Шабса (*tree-adjoining grammars*, [13]), множественные контекстно-свободные грамматики, введённые в работе Х. Секи и др. (*multiple context-free grammars*, [31]), а также вложенные множественные контекстно-свободные грамматики (*well-nested multiple context-free grammars*, [15]). Отметим, что для всех упомянутых формализмов увеличение множества порождаемых языков в сравнении с контекстно-свободными грамматиками достигается за счёт того, что выводимыми объектами являются не слова, как в контекстно-свободных грамматиках, а кортежи слов или деревья. Также следует отметить конъюнктивные и булевы грамматики А. Охотина, рассматриваемые в [25] и [26], где контекстно-свободные грамматики расширяются за счёт использования пересечения и других булевых операций в правилах грамматики.

Поскольку грамматики Ламбека порождают тот же класс языков, что и контекстно-свободные грамматики, рассматривались различные варианты их модификации. В частности, в работе М. Канадзавы предлагалось расширить исчисление Ламбека за счёт аддитивных связок для пересечения и объединения ([14]). В категориальных грамматиках зависимостей (*categorial dependency grammars*, [9]) А. Диковского и М. Дехтяря фрагмент исчисления Ламбека обогащается за счёт введения структуры зависимостей. Г. Моррилл и Х.-М. Меренсиано ([21]) добавили к стандартным связкам исчисления Ламбека операции замещения, опускания и поднятия. Как показано в работе [24], полученное исчисление DL позволяет моделировать большинство известных непроективных синтаксических конструкций.

Цель работы

Получение алгоритма построения совмещающего типа для пары совместимых типов в исчислении Ламбека; получение нижней и верхней оценки на минимальную длину совмещающего типа для заданных типов исчисления Ламбека в зависимости от их длины; алгебраическая характеризация совместимости в исчислении Ламбека с k операциями замещения; алгебраическая характеризация совместимости в исчислении Ламбека с операциями замещения; доказательство замкнутости класса языков, порождаемых разрывными грамматиками Ламбека, относительно пересечения с автоматными языками, не содержащими пустого слова; получение алгоритма построения разрывной грамматики Ламбека для задания пересечения языка, порождаемого некоторой разрывной грамматикой Ламбека и автоматного языка, не содержащего пустого слова.

Методы исследования

В работе применяются методы алгебры, теории доказательств, теории графов и теории алгоритмов. Для доказательства верхней оценки на длину совмещающего типа в исчислении Ламбека автором конструктивно строится совмещающий тип, при этом каждому типу ставится в соответствие несколько совместимых с ним типов специального вида. Для доказательства нижней оценки на длину совмещающего типа в исчислении Ламбека используется необходимое условие выводимости, выраженное в графической форме (так называемые *сети доказательства*). При доказательстве критерия совместимости в исчислении Ламбека с k операциями замещения вначале для каждого типа автором строится совместимый с ним тип специального вида, после чего с помощью алгебраических методов исследуются классы эквивалентности по отношению совместимости. Для доказательства замкнутости класса языков, порождаемых разрывными грамматиками Ламбека, относительно пересечения с автоматными языками, не содержащими пустого слова, автором используются свойства выводов в исчислении Ламбека с операциями замещения для секвенций специального вида.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Для любых двух совместимых типов исчисления Ламбека существует совмещающей тип, чья длина не превосходит некоторого фиксированного квадратичного многочлена от длин исходных типов.
2. Существует бесконечное семейство пар совместимых типов, содержащее пары типов сколь угодно большой длины, такое что для каждой из пар длина совмещающего типа ограничена снизу некоторым фиксированным квадратичным многочленом от длин исходных типов.
3. Типы исчисления Ламбека с k операциями замещения совместимы тогда и только тогда, когда совпадают их интерпретации в свободной абелевой группе, порождённой примитивными типами.
4. Типы исчисления Ламбека с операциями замещения совместимы тогда и только тогда, когда совпадают их интерпретации в свободной абелевой группе, порождённой примитивными типами.
5. Класс языков, порождаемых разрывными грамматиками Ламбека, замкнут относительно пересечения с автоматными языками, не содержащими пустого слова.

Теоретическая и практическая ценность

Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты представляют интерес для математической лингвистики. Они могут быть использованы при исследовании свойств грамматик, основанных на вариантах исчисления Ламбека. Полученные результаты могут быть полезны специалистам, работающим в МГУ им. М. В. Ломоносова (Москва), Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН (Москва), ИППИ им. А. А. Харкевича РАН (Москва), ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН (Санкт-Петербург), Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН (Новосибирск), Уральском федеральном университете (Екатеринбург), Тверском государственном университете (Тверь) и других научных центрах.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и международных конференциях:

- на семинаре «Алгоритмические вопросы алгебры и логики» под руководством академика РАН С. И. Адяна, Москва, Россия, 18 декабря 2012 года и 25 марта 2014 года;
- на Московских чтениях по конструктивной логике и представлению знаний, Москва, Россия, 30—31 мая 2012 года;
- на международной конференции «Мальцевские чтения», Новосибирск, Россия, 12—16 ноября 2012 года;
- на международной конференции «Теоретическая информатика в России» (Computer Science in Russia 2013), Екатеринбург, Россия, 24—29 июня 2013 года;
- на международной конференции «Формальные грамматики» (Formal Grammar 2013), Дюссельдорф, Германия, 10—11 августа 2013 года.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [38]—[41], из них первые три — в журналах из перечня ВАК.

Структура работы

Работа состоит из введения, 6 глав, содержащих 23 раздела, предметного указателя и списка литературы. Библиография содержит 41 наименований. Текст диссертации изложен на 120 страницах.

Краткое содержание диссертации

Глава 1 имеет вспомогательный характер. В ней вводятся основные понятия, необходимые для дальнейшего изложения, а также формулируются известные ранее результаты. В **разделе 1.1** формулируется аксиоматика исчисления Ламбека L и простейшие свойства выводимости в данном исчислении, а также вводятся понятия подтипа и вхождения подтипа в тип. В **разделе 1.2** определяется исчисление Ламбека L^*, допускающее пустые антецеденты. В **разделе 1.3** вводится понятие формального языка и определяются основные операции над формальными языками. В **разделе 1.4** определяются языковые модели для исчисления Ламбека.

Глава 2 посвящена доказательству верхней оценки на длину совмещающего типа в исчислении Ламбека L. В **разделе 2.1** вводится отношение совместимости в исчислении Ламбека, определяется понятие совмещающего типа и приводится критерий совместимости в исчислении Ламбека. В **разделе 2.2** описывается общая схема построения совмещающего типа. Раздел **раздел 2.3** содержит алгоритм построения совмещающего типа и доказательство того, что длина построенного типа не превосходит некоторого квадратичного полинома от длин исходных типов.

Глава 3 посвящена доказательству квадратичной нижней оценки на длину совмещающего типа в исчислении Ламбека. В **разделе 3.1** формулируется исчисление для мультипликативной циклической линейной логики MCLL, являющейся консервативным расширением исчисления Ламбека. В **разделе 3.2** вводится отношение совместимости для данного исчисления. Также в данном разделе доказывается, что нижняя оценка на длину совмещающей формулы в мультипликативной циклической линейной логике также является нижней оценкой на длину совмещающего типа в исчислении Ламбека. В **разделе 3.3** вводится понятие упрощённой сети доказательства для исчисления MCLL, на основе которого в **разделе 3.4** приводятся нижние оценки на число вхождений переменных в совмещающие формулы. С помощью данных оценок в **разделе 3.5** доказывается квадратичная оценка на длину совмещающего типа в исчислениях L^* и L.

В **главе 4** вводится исчисление Ламбека с операциями замещения. В **разделе 4.1** определяется исчисление Ламбека с единицей L_1, являющееся консервативным расширением исчисления L^*, при этом для исчисления L_1 приводится несеквенциальная аксиоматика. В **разделе 4.2** определяются разрывные операции над формальными языками. В **разделе 4.3** посвящён несеквенциальному исчислению Ламбека с операциями замещения, которое обозначается через HDL и является консервативным расширением исчисления L_1, а также его фрагментам HDL_k. **Раздел 4.4** посвящён языковым моделям исчисления Ламбека с операциями замещения.

Глава 5 посвящена доказательству критерия совместимости в исчислении HDL, а также в его фрагменте HDL_k, называемом исчислением Ламбека с k операциями замещения. В **разделе 5.1** вводится отношение совместимости для исчислений HDL и HDL_k, а также понятие интерпретации в свободной абелевой группе для типов данных исчислений. В **разделе 5.2** доказывается, что равенство интерпретаций в свободной абелевой группе является критерием совместимости типов в исчислении Ламбека с k операциями замещения, а также в полном исчислении Ламбека с операциями замещения.

В **главе 6** доказывается, что множество языков, распознаваемых грамматиками, основанными на секвенциальном исчислении Ламбека с операциями замещения DL, замкнуто относительно пересечения с автоматными языками, не содержащими пустого слова. В **разделе 6.1** вводится секвенциальный вариант DL исчисления Ламбека с операциями замещения, эквивалентный несеквенциальному исчислению HDL. В **разделе 6.2** приводится понятие грамматики Ламбека, а также грамматики, основанной на исчислении DL. В **разделе 6.3** определяется класс автоматных языков. **Раздел 6.4** содержит алгоритм построения грамматики для пересечения языка, заданного грамматикой, основанной на исчислении DL, и автоматного языка без пустого слова, а в **разделе 6.5** доказывается корректность данного алгоритма.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя профессора М. Р. Пентуса за всестороннюю поддержку и постоянное внимание к работе, к.ф.-м.н. С. Л. Кузнецова за плодотворные обсуждения, а также весь коллектив кафедры математической логики и теории алгоритмов за творческую атмосферу, способствующую работе.

Глава 1

Исчисление Ламбека и порождающие грамматики

1.1 Исчисление Ламбека L

Определим *исчисление Ламбека* L, впервые введённое в работе [18]. Пусть зафиксировано счётное множество Pr, называемое множеством *примитивных типов*. Тогда множество *типов* строится на основе множества примитивных типов с помощью связок $\backslash$ (левое деление), / (правое деление) и $\cdot$ (умножение). Формально, множество Tp типов исчисления Ламбека есть наименьшее множество, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\mathrm{Pr} \subset \mathrm{Tp}$;
2. если $A, B \in \mathrm{Tp}$, то $(A \setminus B), (B/A), (A \cdot B) \in \mathrm{Tp}$.

Мы будем обозначать примитивные типы малыми латинскими буквами p, q, r, возможно с нижними индексами. Для типов исчисления Ламбека мы будем применять большие латинские буквы $A, B, C, \ldots$. Конечные последовательности типов обозначаются большими греческими буквами. При записи последовательности её элементы не разделяются запятыми.

Выводимыми объектами исчисления L являются *секвенции*, имеющие вид $\Gamma \to A$, где Γ является непустой последовательностью типов, а A является типом. Последовательность Γ именуется *антецедентом*, а тип A — *сукцедентом* секвенции. Отметим, что в исчислении L запрещены пустые антецеденты.

Исчисление Ламбека задаётся единственной аксиомой $A \to A, A \in \mathrm{Tp}$, и правилами вывода, приведёнными ниже.

$$\frac{\Pi A \to B}{\Pi \to B/A}(\to /) \qquad \frac{\Gamma B \Delta \to C \quad \Pi \to A}{\Gamma (B/A) \Pi \Delta \to C}(/ \to)$$

$$\frac{A\Pi \to B}{\Pi \to A \setminus B}(\to \setminus) \qquad \frac{\Gamma B \Delta \to C \quad \Pi \to A}{\Gamma \Pi (A \setminus B) \Delta \to C}(\setminus \to)$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma\Delta \to A \cdot B}(\to \cdot) \qquad \frac{\Gamma A B \Delta \to C}{\Gamma (A \cdot B) \Delta \to C}(\cdot \to)$$

Пример 1.1. Секвенция $(p/q)r \to p/(r \setminus q)$ является выводимой в исчислении L. Её вывод приведён ниже.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{p \to p \qquad q \to q}{(p/q)q \to p}(/\to) \qquad r \to r}{(p/q)r(r \setminus q) \to p}(\setminus \to)}{(p/q)r \to p/(r \setminus q)}(\to /)$$

Выводимость секвенции $\Gamma \to A$ обозначается $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$. Отметим, что проблема выводимости секвенции является разрешимой, поскольку применение каждого из правил вывода «снизу вверх» приводит к уменьшению суммы числа вхождений примитивных типов и связок в секвенции.

Правило называется *допустимым*, если его добавление к правилам вывода исчисления Ламбека не увеличивает множество выводимых секвенций. Как доказано в [18], допустимым является *правило сечения* $\dfrac{\Pi \to B \quad \Gamma B \Delta \to C}{\Gamma \Pi \Delta \to C}$, то есть исчисление Ламбека обладает свойством устранимости сечения, которое характерно для большинства секвенциальных исчислений. В дальнейшем мы будем считать, что правило сечения явно включено в аксиоматику исчисления Ламбека.

Два типа $B, C \in \mathrm{Tp}$ называются *равносильными*, если обе секвенции $B \to C$ и $C \to B$ являются выводимыми в исчислении L. Легко показать, что отношение равносильности является конгруэнцией относительно связок $/, \setminus, \cdot$, то есть из равносильности типов A_1 и A_2, а также

B_1 и B_2 следует равносильность типов $A_1 \star B_1$ и $A_2 \star B_2$ для произвольной связки $\star \in \{\backslash, /, \cdot\}$. Для обозначения равносильности используется значок $\leftrightarrow$ с индексом L, соответствующим исчислению. Ниже приведены примеры равносильных типов, позволяющие нам не использовать скобки в выражениях вида $A \cdot B \cdot C$ и $B \setminus A / C$.

Лемма 1.1.

1. *Для любых типов* $A, B, C \in \mathrm{Tp}$ *верно, что* $(A \cdot B) \cdot C \leftrightarrow_L A \cdot (B \cdot C)$.
2. *Для любых типов* $A, B, C \in \mathrm{Tp}$ *верно, что* $(B \setminus A)/C \leftrightarrow_L B \setminus (A/C)$.

Приведённая ниже лемма принадлежит математическому фольклору и легко следует из устранимости сечения в исчислении Ламбека:

Лемма 1.2. *Правила* $(\cdot \to), (\to /)$ *и* $(\to \setminus)$ *обратимы, т.е.:*

1. *Если* $\mathrm{L} \vdash \Gamma(A \cdot B)\Delta \to C$, *то* $\mathrm{L} \vdash \Gamma A B \Delta \to C$.
2. *Если* $\mathrm{L} \vdash \Pi \to A/B$, *то* $\mathrm{L} \vdash \Pi B \to A$.
3. *Если* $\mathrm{L} \vdash \Pi \to B \setminus A$, *то* $\mathrm{L} \vdash B\Pi \to A$.

На основании данной леммы мы будем считать, что если в антецедент секвенции входит тип вида $A \cdot B$, то последним в выводе применялось правило $(\cdot \to)$, вводившее связку $\cdot$ в самом правом из типов подобного вида. Если же в антецеденте отсутствует тип вида $A \cdot B$, но сукцедент имеет вид A/B (или $B \setminus A$), то последним применялось правило $(\to /)$ ($(\to \setminus)$, соответственно). Также из приведённой леммы вытекает, что секвенции $A \cdot B \to C$, $A \to C/B$, $B \to A \setminus C$ либо одновременно выводимы, либо одновременно невыводимы.

Назовём *длиной* типа A суммарное число входящих в него примитивных типов; длину типа A будем обозначать через $l(A)$. Определим также величину $\|A\|$, равную суммарному числу вхождений примитивных типов и связок в тип A, легко видеть, что $\|A\| = 2l(A) - 1$. Введённые величины задаются следующим индуктивным определением:

1. $l(p) = \|p\| = 1$, если $p \in \mathrm{Pr}$,

2. $l(A * B) = l(A) + l(B)$, $\|A * B\| = \|A\| + \|B\| + 1$, если $* \in \{\cdot, \backslash, /\}$

Определим формально отношение «быть подтипом» и понятие *вхождения* подтипа B в тип A.

Определение 1.1. Множество $\mathrm{SubTp}(A)$ *подтипов* типа A задаётся следующим индуктивным определением:

1. $\mathrm{SubTp}(p) = \{p\}$, если $p \in \mathrm{Pr}$,
2. $\mathrm{SubTp}(A * B) = \mathrm{SubTp}(A) \cup \mathrm{SubTp}(B) \cup \{A * B\}$, если $* \in \{\cdot, \backslash, /\}$.

Для всякого подтипа $B \in \mathrm{SubTp}(A)$ *вхождение подтипа* B в тип A представляет собой пару $\langle B, i\rangle$, где i — некоторое натуральное число от 0 до $\|A\| - 1$. Вхождения подтипов делятся на *положительные* и *отрицательные*. Множество положительных вхождений обозначается через $\mathrm{Subocc}^{+}(A)$, а множество отрицательных — через $\mathrm{Subocc}^{-}(A)$.

Определение 1.2. Множества $\mathrm{Subocc}^{+}(A)$ и $\mathrm{Subocc}^{-}(A)$ определяются следующим образом.

1. $\mathrm{Subocc}^{+}(p) = \{\langle p, 0\rangle\}$, $\mathrm{Subocc}^{-}(p) = \varnothing$, если $p \in \mathrm{Pr}$,
2. $\mathrm{Subocc}^{+}(C \cdot B) = \mathrm{Subocc}^{+}(C) \cup \{\langle D, \|C\| + i\rangle \mid \langle D, i\rangle \in \mathrm{Subocc}^{+}(B)\} \cup \{\langle C \cdot B, \|C\|\rangle\}$,
   $\mathrm{Subocc}^{-}(C \cdot B) = \mathrm{Subocc}^{-}(C) \cup \{\langle D, \|C\| + i\rangle \mid \langle D, i\rangle \in \mathrm{Subocc}^{-}(B)\}$,
3. $\mathrm{Subocc}^{+}(C / B) = \mathrm{Subocc}^{+}(C) \cup \{\langle D, \|C\| + i\rangle \mid \langle D, i\rangle \in \mathrm{Subocc}^{-}(B)\} \cup \{\langle C / B, \|C\|\rangle\}$,
   $\mathrm{Subocc}^{-}(C / B) = \mathrm{Subocc}^{-}(C) \cup \{\langle D, \|C\| + i\rangle \mid \langle D, i\rangle \in \mathrm{Subocc}^{+}(B)\}$,
4. $\mathrm{Subocc}^{+}(C \backslash B) = \mathrm{Subocc}^{-}(C) \cup \{\langle D, \|C\| + i\rangle \mid \langle D, i\rangle \in \mathrm{Subocc}^{+}(B)\} \cup \{\langle C \backslash B, \|C\|\rangle\}$,
   $\mathrm{Subocc}^{-}(C \backslash B) = \mathrm{Subocc}^{+}(C) \cup \{\langle D, \|C\| + i\rangle \mid \langle D, i\rangle \in \mathrm{Subocc}^{-}(B)\}$.

Множество всех вхождений будем обозначать через $\mathrm{Subocc}(A)$, $\mathrm{Subocc}(A) = \mathrm{Subocc}^{+}(A) \cup \mathrm{Subocc}^{-}(A)$. По индукции легко доказывается, что $|\mathrm{Subocc}(A)| = \|A\|$. Множество $\mathrm{Occ}^{+}(A)$ *вхождений примитивных типов* в тип A определяется как $\mathrm{Occ}(A) = \{\langle p, i\rangle \in \mathrm{Subocc}(A) \mid p \in \mathrm{Pr}\}$. Через $\mathrm{Occ}^{+}(A)$ и $\mathrm{Occ}^{-}(A)$ обозначаются, соответственно, множества положительных и отрицательных вхождений примитивных типов.

Пример 1.2. Пусть $A = ((p/(r \setminus q)) \cdot q)/(r/p)$, тогда $\mathrm{Occ}^+(A) = \{\langle p, 0\rangle, \langle r, 2\rangle, \langle q, 6\rangle, \langle p, 10\rangle\}$, $\mathrm{Occ}^-(A) = \{\langle q, 4\rangle, \langle r, 8\rangle\}$, $\mathrm{Subocc}^+(A) = \mathrm{Occ}^+(A) \cup \{\langle ((p/(r \setminus q)) \cdot q)/(r/p), 7\rangle, \langle (p/(r \setminus q)) \cdot q, 5\rangle, \langle p/(r \setminus q), 1\rangle\}$, $\mathrm{Subocc}^-(A) = \mathrm{Occ}^-(A) \cup \{\langle (r \setminus q), 3\rangle, \langle r/p, 9\rangle\}$.

1.2 Исчисление L^*

В случае если в определении секвенции исчисления L убрать условие непустоты антецедента, не меняя при этом аксиоматики, мы получим исчисление L^*, называемое *исчислением Ламбека, допускающим пустые антецеденты*. В этом исчислении выводимы некоторые секвенции с непустыми антецедентами, невыводимые в исчислении L. Например, ниже приведён вывод секвенции $p/(q/q) \to p$ в исчислении L^*, в то время как в исчислении L данная секвенция невыводима.

$$\dfrac{p \to p \qquad \dfrac{q \to q}{\to q/q}\,(\to /)}{p/(q/q) \to p}\,(/ \to)$$

Так же, как и в исчислении L, в L^* допустимо правило сечения. Кроме того, для него верны лемма 1.2 и другие утверждения доказанные в разделе 1.1 для исчисления L.

1.3 Формальные языки и операции над ними

Алфавитом будем называть произвольное не более чем счётное множество Σ; чаще всего оно будет конечным. Элементы алфавита будем называть *буквами*, а конечные последовательности букв, в том числе и пустую последовательность, *словами*. Множество всех слов над алфавитом Σ обозначается Σ^*, множество всех непустых слов — Σ^+, пустое слово будем обозначать через ε. Подмножества множества Σ^* будем называть *формальными языками*. Если $w \in \Sigma^*$ — слово, то его длину будем обозначать через $|w|$, а количество букв a в слове w — через $|w|_a$.

Если w представимо в виде $w = uv$, то u будем называть *префиксом* слова w, а v — *суффиксом*, используя обозначения $u \sqsubseteq w$ и $v \sqsupseteq w$.

На множестве слов определим операцию *конкатенации* $w_1 \cdot w_2$, состоящую в приписывании w_2 к w_1 сзади (например, $ab \cdot acb = abacb$). Множества Σ^+ и Σ^* с определённой на них операцией конкатенации называются, соответственно, *свободной полугруппой* и *свободным моноидом*, порождёнными множеством Σ. . В дальнейшем мы будем часто опускать символ $\cdot$. Введённая операция легко продолжается со слов на множества слов (то есть на формальные языки): $L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$.

Введём на подмножествах множества Σ^+ операции *левого* и *правого деления*: $L_1 \setminus L_2 = \{w \in \Sigma^+ \mid \forall w_1 \in L_1\, (w_1 w \in L_2)\}$, $L_1 / L_2 = \{w \in \Sigma^+ \mid \forall w_2 \in L_2\, (w w_2 \in L_1)\}$.

Пример 1.3. Пусть $L_1 = \{ab, bb, aab, abb, aaab\}$, $L_2 = \{b, ab\}$, тогда $L_1 \cdot L_2 = \{abb, bbb, aabb, abbb, aaabb, abab, bbab, aabab, abbab, aaabab\}$, $L_1 / L_2 = \{a, aa\}$, $L_2 \setminus L_1 = \{b\}$.

Следующая лемма следует из определения операций $\cdot$, $/$ и $\setminus$:

Лемма 1.3. *Для любых подмножеств $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^+$ следующие утверждения равносильны:*

1. $L_1 \cdot L_2 \subseteq L$,
2. $L_1 \subseteq L / L_2$,
3. $L_2 \subseteq L_1 \setminus L$.

Операции левого и правого деления можно определить и на подмножествах множества Σ^*, положив $L_1 \setminus L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall w_1 \in L_1 (w_1 w \in L_2)\}$, $L_1 / L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall w_2 \in L_2\, (w w_2 \in L_1)\}$. Отметим, что результат применения этих операций может быть различным в зависимости от того, рассматриваются ли языки L_1 и L_2 как подмножества свободной полугруппы Σ^+ или же как подмножества свободного моноида Σ^*.

Пример 1.4. Пусть $L = \{a, ba\}$, тогда $L/L = \varnothing$, если рассматривать L как подмножество множества Σ^+, и $L/L = \{\varepsilon\}$, если рассматривать L как подмножество множества Σ^*.

Лемма 1.4. *Для любых подмножеств $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ следующие утверждения равносильны:*

1. $L_1 \cdot L_2 \subseteq L$,
2. $L_1 \subseteq L/L_2$,
3. $L_2 \subseteq L_1 \setminus L$.

1.4 Модели исчисления Ламбека

Естественной семантикой для типов исчисления L выступают подмножества свободной полугруппы Σ^+, а для типов исчисления L* — подмножества свободного моноида Σ^*. При этом связки $\setminus, /, \cdot$ интерпретируются как соответствующие операции над формальными языками. В следующем определении и в дальнейшем через $\mathcal{P}(A)$ обозначено множество всех подмножеств множества A..

Определение 1.3. *Моделью на подмножествах свободной полугруппы* или языковой моделью называется пара $M = \langle \Sigma, \mathrm{Int} \rangle$, где Σ — алфавит, а $\mathrm{Int}\colon \mathrm{Tp} \to \mathcal{P}(\Sigma^+)$ — отображение, удовлетворяющее условию $\mathrm{Int}(A \star B) = \mathrm{Int}(A) \star \mathrm{Int}(B)$ для произвольной связки $\star \in \{\setminus, /, \cdot\}$ и произвольных типов A и B исчисления L.

Заметим, что отображение Int достаточно определить на примитивных типах, дальше оно однозначно достраивается по индукции. В примере ниже и в дальнейшем через $\mathbb{N}$ обозначено множество натуральных чисел, мы считаем, что натуральные числа начинаются с 0.

Пример 1.5. Пусть $\mathrm{Int}(A) = \{b^k a \mid k \in \mathbb{N}\}$, $\mathrm{Int}(B) = \{ba, a\}$, тогда $\mathrm{Int}(A \cdot B) = \{b^k a b^l a \mid k \in \mathbb{N}, l \in \{0, 1\}\}$, $\mathrm{Int}(A/B) = \{b\}^+$, $\mathrm{Int}(B \setminus A) = \varnothing$.

Секвенцию $A_1 \ldots A_n \to B$ будем называть *истинной в модели* $M = \langle \Sigma, \mathrm{Int} \rangle$, если $\mathrm{Int}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Int}(A_n) \subseteq \mathrm{Int}(B)$. Индукцией по выводу легко доказывается, что всякая секвенция, выводимая в исчислении L, будет истинна во всех моделях на подмножествах свободной полугруппы, то есть исчисление Ламбека *корректно* относительно языковых моделей. Обратный результат (то есть *полнота* исчисления Ламбека относительно языковых моделей) был получен В. Бушковским для случая исчисления Ламбека без умножения ([4]) и М. Р. Пентусом для случая полного исчисления Ламбека L ([36]).

Аналогичным образом определяются модели исчисления L^* на подмножествах свободного моноида. Как и в случае исчисления L, имеет место теорема корректности. Теорема полноты для исчисления L^* относительно моделей на подмножествах свободного моноида была также доказана В. Бушковским для случая исчисления без умножения ([4]) и М. Р. Пентусом для случая полного исчисления L^* ([28]).

Глава 2

Верхняя оценка длины совмещающего типа в исчислении L

2.1 Критерий совместимости в исчислении Ламбека

В данной главе мы рассмотрим отношение совместимости для исчисления L, впервые определённое в [18]. В [27] доказан критерий совместимости в исчислении Ламбека в терминах интерпретации в свободной полугруппе.

Определение 2.1. Тип $C \in \mathrm{Tp}$ называется *совмещающим* для типов A и B, если $\mathrm{L} \vdash A \to C$ и $L \vdash B \to C$. В этом случае типы A и B называются *совместимыми*.

Определение 2.2. Тип $D \in \mathrm{Tp}$ называется *соединяющим* для типов A и B, если $\mathrm{L} \vdash D \to A$ и $L \vdash D \to B$. В этом случае типы A и B называются *соединимыми*.

Пример 2.1.

1. Тип $(p/(q \setminus p))/q$ является совмещающим для типов $(p/p) \cdot (q/q)$ и q/q.
2. Тип p является соединяющим для типов $(q/(p \setminus q))$ и $(r/p) \setminus r$.

Соответствующие выводы приведены ниже:

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p\to p \quad p\to p}{(p/p)p\to p}\,(/\to) \qquad \dfrac{q\to q \quad q\to q}{(q/q)q\to q}\,(/\to)}{(p/p)(q/q)q(q\backslash p)\to p}\,(\to\backslash)}{(p/p)(q/q)q\to p/(q\backslash p)}\,(\to/)}{(p/p)(q/q)\to (p/(q\backslash p))/q}\,(\to/)}{(p/p)\cdot(q/q)\to (p/(q\backslash p))/q}\,(\cdot\to)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p\to p \qquad \dfrac{q\to q \quad q\to q}{(q/q)q\to q}\,(/\to)}{(q/q)q(q\backslash p)\to p}\,(\backslash\to)}{(q/q)q\to p/(q\backslash p)}\,(\to/)}{q/q\to (p/(q\backslash p))/q}\,(\to/)$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{q\to q \quad p\to p}{p(p\backslash q)\to q}\,(\backslash\to)}{p\to q/(p\backslash q)}\,(\to/) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{r\to r \quad p\to p}{(r/p)p\to r}\,(/\to)}{p\to (r/p)\backslash r}\,(\to\backslash)$$

Лемма 2.1.

1. *Пусть* $\mathrm{L}\vdash A\to C$ *и* $L\vdash B\to C$. *Тогда* $\mathrm{L}\vdash (A/C)A(A\backslash B)\to A$, $\mathrm{L}\vdash (A/C)A(A\backslash B)\to B$.
2. *Пусть* $\mathrm{L}\vdash D\to A$ *и* $L\vdash D\to B$. *Тогда* $\mathrm{L}\vdash A\to (D/A)\backslash A/(B\backslash A)$, $\mathrm{L}\vdash B\to (D/A)\backslash A/(B\backslash A)$.

Доказательство.

1.

$$\dfrac{A\to A \qquad \dfrac{B\to C \quad A\to A}{A(A\backslash B)\to C}\,(\backslash\to)}{(A/C)A(A\backslash B)\to A}\,(/\to) \qquad \dfrac{B\to B \qquad \dfrac{A\to A \quad A\to C}{(A/C)A\to A}\,(\backslash\to)}{(A/C)A(A\backslash B)\to B}\,(\backslash\to)$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to A \qquad \dfrac{D\to B \quad A\to A}{(D/A)A\to B}\,(/\to)}{(D/A)A(B\backslash A)\to A}\,(\backslash\to)}{A(B\backslash A)\to (D/A)\backslash A}\,(\to\backslash)}{A\to (D/A)\backslash A/(B\backslash A)}\,(\to/) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{D\to A \qquad \dfrac{A\to A \quad B\to B}{B(B\backslash A)\to A}\,(/\to)}{(D/A)B(B\backslash A)\to A}\,(/\to)}{B(B\backslash A)\to (D/A)\backslash A}\,(\to\backslash)}{B\to (D/A)\backslash A/(B\backslash A)}\,(\to/)$$

□

Лемма 2.2. *Типы* $A, B \in \mathrm{Tp}$ *являются совместимыми тогда и только тогда, когда они являются соединимыми.*

Доказательство. Пусть A и B совместимы, и C — их совмещающий тип. В качестве соединяющего типа можно взять $D = (A/C) \cdot A \cdot (A \setminus B)$. Пусть теперь A и B соединимы, и D — их соединяющий тип. Тогда совмещающим будет тип $C = (D/A) \setminus A/(B \setminus A)$. Выводимость соответствующих секвенций доказана в лемме 2.1. □

Из данной леммы, впервые доказанной в [18], следует, что определения 2.1 и 2.2 задают одно и то же отношение, которое принято называть отношением совместимости. Нетрудно видеть, что отношение совместимости является эквивалентностью. Мы будем писать $A \sim B$ в случае если типы A и B являются совместимыми.

Лемма 2.3. $\sim$ *является конгруэнцией относительно* $\cdot, /, \setminus$.

Доказательство. Пусть $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$, а C_1, C_2 — совмещающие типы для данных пар типов, а D_1, D_2 — соединяющие типы для тех же пар. Докажем, что $A_1 \cdot A_2 \sim B_1 \cdot B_2$. Действительно, в качестве совмещающего типа можно взять $C_1 \cdot C_2$. Аналогичным образом тип C_1/D_2 будет совмещающим для типов A_1/A_2 и B_1/B_2, а тип $D_2 \setminus C_1$ — для типов $B_2 \setminus B_1$ и $A_2 \setminus A_1$. □

Пусть $\mathrm{Pr} = \{p_1, p_2, \ldots\}$ — множество примитивных типов, использованных при построении типов из Tp. Обозначим через $\mathcal{G}$ свободную группу, порождённую множеством Pr, групповую операцию будем обозначать через $\circ$ (в дальнейшем мы зачастую будем опускать символ операции), единицу группы $\mathcal{G}$ будем обозначать через ε, а элемент, обратный к элементу a, через a^{-1}.

Определение 2.3. *Интерпретацией* типа A в группе $\mathcal{G}$ называется элемент $[\![A]\!] \in \mathcal{G}$, определяемый следующими правилами:

1. $[\![p]\!] = p$, если $p \in \mathrm{Pr}$,
2. $[\![A \cdot B]\!] = [\![A]\!] \circ [\![B]\!]$,
3. $[\![A/B]\!] = [\![A]\!] \circ [\![B]\!]^{-1}$,
4. $[\![B \setminus A]\!] = [\![B]\!]^{-1} \circ [\![A]\!]$.

Понятие интерпретации может быть продолжено на последовательности типов: $[\![A_1 \dots A_n]\!] = [\![A_1]\!] \dots [\![A_n]\!]$. Следующее утверждение легко доказывается индукцией по выводу в исчислении L.

Лемма 2.4. *Если* $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$, *то* $[\![\Gamma]\!] = [\![A]\!]$.

Следующая теорема, доказанная в [27], характеризует отношение совместимости в исчислениях L и L^* в терминах интерпретации в свободной группе.

Теорема 1 (М. Р. Пентус, 1992). *Следующие утверждения равносильны:*

1. $A \sim_{\mathrm{L}} B$.
2. $A \sim_{\mathrm{L}^*} B$.
3. $[\![A]\!] = [\![B]\!]$.

2.2 Схема построения совмещающего типа

Хотя теорема 1 и задаёт условия существования совмещающего типа, она не позволяет явно оценить его длину. Пусть A и B — совместимые типы, обозначим через $m_j(A, B)$ длину их самого короткого совмещающего типа. Обозначим через $M_j(l_1, l_2)$ максимальное значение данной величины для совместимых типов A и B, таких что $l(A) = l_1$ и $l(B) = l_2$. Наша задача состоит в оценке сверху величины $M_j(l_1, l_2)$, в частности, мы докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Для любых совместимых в исчислении* L *типов* $A, B \in \mathrm{Tp}$ *найдётся совмещающий тип* C, *такой что* $l(C) \leqslant \frac{1}{2}(l^2(A) + l^2(B)) + \frac{35}{2}(l(A) + l(B))$.

Доказательство будет проведено конструктивно путём предъявления соответствующего типа C. В данном разделе мы опишем общую схему его построения, а в следующей докажем, что построенный тип и вправду удовлетворяет условиям теоремы.

Введём вспомогательный алфавит $\mathcal{P} = \mathrm{Pr} \cup \{\overline{p} \mid p \in \mathrm{Pr}\}$. Для каждого слова $w \in \mathcal{P}^+$ определим *обратное* слово w^{-1} : $p^{-1} = \overline{p}$, $\overline{p}^{-1} = p, (a_1 \dots a_n)^{-1} = (a_n)^{-1} \dots (a_1)^{-1}$, где $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{P}$. После этого для каждого типа $A \in \mathrm{Tp}$ определим его *представление* $\langle A \rangle$, положив $\langle p \rangle = p, p \in \mathrm{Pr}$, $\langle A \cdot B \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle$, $\langle A / B \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle^{-1}$, $\langle B \setminus A \rangle = \langle B \rangle^{-1} \langle A \rangle$. Заметим, что фактически отображение $\langle \cdot \rangle \colon \mathrm{Tp} \to \mathcal{P}^*$ представляет собой интерпретацию в свободном моноиде, порождённом примитивными типами и их обратными элементами. Пусть отображение $\chi \colon \mathcal{P} \to \mathcal{G}$ действует по правилу $\chi(p) = p$, $\chi(\overline{p}) = p^{-1}$, тогда χ естественным образом продолжается до гомоморфизма из свободного моноида $\mathcal{P}^*$ в свободную группу $\mathcal{G}$. Заметим, что при этом $[\![A]\!] = \chi(\langle A \rangle)$, то есть $[\![A]\!]$ фактически является нормальной формой слова $\langle A \rangle$ после естественного отождествления элементов $\overline{p}$ и p^{-1} и сокращения до пустого слова пар $p^{-1}p$ и pp^{-1}. Таким образом, если $\langle A \rangle = \langle B \rangle$, то тем более $[\![A]\!] = [\![B]\!]$ и, следовательно, типы A и B в этом случае являются совместимыми.

Без ограничения общности можно считать, что множество Pr содержит выделенный элемент q, не входящий в типы A и B. Определим отображение $\phi \colon \mathcal{P}^* \to \mathrm{Tp}$, положив $\phi(\varepsilon) = q/q$, $\phi(p) = p$, $\phi(\overline{p}) = (p \setminus p/p)$, $p \in \mathrm{Pr}$, $\phi(aw_1) = \phi(a) \cdot \phi(w_1)$, $a \in \mathcal{P}, w_1 \neq \varepsilon$. Отождествив элементы $\overline{p}$ и p^{-1}, можно считать, что ϕ также определено на несократимых словах над алфавитом $\mathrm{Pr} \cup \{p^{-1} \mid p \in \mathrm{Pr}\}$, то есть над свободной группой $\mathcal{G}$.

Пример 2.2. Пусть $A = ((p \cdot r)/p) \setminus ((p/(q/r)) \cdot r)$, тогда $\langle A \rangle = p\overline{r}\overline{p}pr\overline{q}r$, $\chi(\langle A \rangle) = pr^{-1}p^{-1}prq^{-1}r$, $[\![A]\!] = pq^{-1}r$, $\phi(\langle A \rangle) = p \cdot (r \setminus r/r) \cdot (p \setminus p/p) \cdot p \cdot r \cdot (q \setminus q/q) \cdot r, \phi([\![A]\!]) = p \cdot (q \setminus q/q) \cdot r$.

Лемма 2.5. *Для любого слова $w \in \mathcal{P}^*$ верно, что $[\![\phi(w)]\!] = \chi(w)$.*

Доказательство. Индукция по длине слова w. Для доказательства базы индукции рассмотрим случаи $|w| = 0$ и $|w| = 1$. Если $|w| = 0$, то $w = \varepsilon$ и $[\![\phi(w)]\!] = [\![q/q]\!] = \varepsilon = w$. Если $|w| = 1$ и $w = p \in \mathrm{Pr}$, то $[\![\phi(w)]\!] = p = w$, если же $|w| = 1$ и $w = \overline{p}$, то $[\![\phi(w)]\!] = [\![p \setminus p/p]\!] = p^{-1} = \chi(\overline{p})$, таким образом, база индукции полностью доказана.

Пусть теперь $w > 1$, тогда $w = aw_1, a \in \mathcal{P}$. В этом случае $[\![\phi(aw_1)]\!] = [\![\phi(a)\phi(w_1)]\!] = [\![\phi(a)]\!][\![\phi(w_1)]\!] = \chi(a)\chi(w_1) = \chi(aw_1)$, что и требовалось. $\square$

Лемма 2.6. *Типы* $A, \phi(\langle A \rangle)$ *и* $\phi([\![A]\!])$ *являются совместимыми в исчислении* L *для любого* $A \in \mathrm{Tp}$.

Доказательство. Для доказательства применим критерий совместимости (теорему 1). В силу леммы 2.5 верно, что $[\![\phi(\langle A \rangle)]\!] = \chi(\langle A \rangle) = [\![A]\!]$ и $[\![\phi([\![A]\!])]\!] = \chi([\![A]\!]) = [\![A]\!]$. Лемма доказана. $\square$

Заметим, что утверждения леммы 2.6 могут быть доказаны и непосредственно — путём предъявления соответствующих совмещающих типов. Мы осуществим это в следующем разделе. Докажем вспомогательную техническую лемму.

Определение 2.4.

1. Тип A называется типом *без положительных умножений*, если множество $\mathrm{Subocc}^+(A)$ не содержит элементов вида $\langle C \cdot D, i \rangle$ ни для каких $C, D \in \mathrm{Tp}$ и $i \in \mathbb{N}$.
2. Тип A называется типом *без отрицательных умножений*, если множество $\mathrm{Subocc}^-(A)$ не содержит элементов вида $\langle C \cdot D, i \rangle$ ни для каких $C, D \in \mathrm{Tp}$ и $i \in \mathbb{N}$.

Лемма 2.7.

1. *Для любого* $A \in \mathrm{Tp}$ *существует* $A_0 \in \mathrm{Tp}$ *без отрицательных умножений, такой что* $\mathrm{L} \vdash A \to A_0$, $l(A_0) = l(A)$ *и* $\langle A_0 \rangle = \langle A \rangle$.

2. Для любого $A \in \mathrm{Tp}$ существуют типы $A_0^1, \ldots, A_0^n \in \mathrm{Tp}$ без положительных умножений, такие что $\mathrm{L} \vdash A_0^1 \ldots A_0^n \to A$, $\sum\limits_{i=1}^{n} l(A_0^i) = l(A)$ и $\langle A_0^1 \rangle \ldots \langle A_0^n \rangle = \langle A \rangle$.

Доказательство. Будем параллельно доказывать оба пункта индукцией по построению типа A. В случае $A = p$ в обоих пунктах достаточно положить $A_0 = p$.

1. На шаге индукции разберём три случая. Первый случай: $A = B \cdot C$, в этом случае достаточно положить $A_0 = B_0 \cdot C_0$, где B_0 и C_0 берутся из применения первого пункта леммы к типам B и C. Действительно, по правилам $(\cdot \to)$ и $(\to \cdot)$ секвенция $B \cdot C \to B_0 \cdot C_0$ будет выводима. По определению имеем $l(A_0) = l(B_0) + l(C_0) = l(B) + l(C) = l(A)$, а также $\langle A_0 \rangle = \langle B_0 \rangle \langle C_0 \rangle = \langle B \rangle \langle C \rangle = \langle B \cdot C \rangle$, что и требовалось.

Разберём второй случай $A = B / C$. Возьмём тип B_0, получающийся при применении пункта 1 леммы к типу B, и типы $C_0^1, \ldots, C_0^n$, получающиеся при применении пункта 2 леммы к типу C, и рассмотрим тип $A_0 = (\ldots(B_0 / C_0^n) \ldots)/C_0^1$. Докажем, что A_0 удовлетворяет утверждению леммы. Действительно, отрицательные вхождения умножения в A_0 были либо отрицательными вхождениями умножения в B_0, либо положительными вхождениями в одном из C_0^j, но и те, и другие отсутствуют по предположению индукции. Выводимость секвенции $A \to A_0$ по лемме 1.2 равносильна выводимости секвенции $(B/C) C_0^1 \ldots C_0^n \to B_0$, которая следует по правилу $(/ \to)$ из выводимых секвенций $B \to B_0$ и $C_0^1 \ldots C_0^n \to C$. Заметим, что $l(A_0) = l(B_0) + \sum\limits_{i=1}^{n} l(C_0^i) = l(B) + l(C) = l(A)$, что и требовалось. Кроме того, $\langle A_0 \rangle = \langle (\ldots(B_0 / C_0^n) \ldots)/C_0^1 \rangle = \langle B_0 \rangle \langle C_0^n \rangle^{-1} \ldots \langle C_0^1 \rangle^{-1} = \langle B_0 \rangle (\langle C_0^1 \rangle \ldots \langle C_0^n \rangle)^{-1} = \langle B \rangle \langle C \rangle^{-1} = \langle B / C \rangle = \langle A \rangle$. Случай $A = C \setminus B$ разбирается аналогично.

2. Разберём три случая. Первый случай $A = B \cdot C$. Пусть множества типов $B_0^1, \ldots, B_0^{n_1}$ и $C_0^1, \ldots, C_0^{n_2}$ взяты из пункта 2 леммы, применённой к типам B и C соответственно. Тогда положим $n = n_1 + n_2$, $A_0^i = B_0^i$ при $i \leqslant n_1$ и $A_0^i = C_0^{i-n_1}$ при $i > n_1$. Выводимость секвен-

ции $A_0^1 \dots A_0^n \to A$ следует по правилу $(\to \cdot)$ из выводимости секвенций $A_0^1 \dots A_0^{n_1} \to B$ и $A_0^{n_1+1} \dots A_0^{n_1+n_2} \to C$. Остальные утверждения леммы также легко проверяются.

Разберём теперь случай $A = B/C$. Пусть типы $B_0^1, \dots, B_0^n$ взяты из пункта 2 леммы, применённого к типу B, а тип C_0 — из пункта 1 леммы, применённого к типу C. Положим $A_0^1 = B_0^1, \dots, A_0^{n-1} = B_0^{n-1}, A_0^n = B_0^n/C_0$. По предположению индукции ни один из типов $A_0^1, \dots, A_0^{n-1}$ не содержит положительных умножений, $A_0^n = B_0^n/C_0$ также не содержит положительных вхождений умножения, т. к. всякое такое вхождение должно либо положительно входить в B_0^n, либо отрицательно входить в C_0, чего не может быть по предположению индукции. Выводимость секвенции $A_0^1 \dots A_0^n \to A_0$ доказывается приведённым выводом:

$$\dfrac{\dfrac{B_0^1 \dots B_0^{n-1} B_0^n \to B \qquad C \to C_0}{B_0^1 \dots B_0^{n-1}(B_0^n/C_0)C \to B}\,(/\to)}{B_0^1 \dots B_0^{n-1}(B_0^n/C_0) \to B/C}\,(\to /)$$

Также верно, что $l(A_0^1) + \dots + l(A_0^n) = l(B_0^1) + \dots + l(B_0^n) + l(C_0) = l(B) + l(C) = l(A)$. Кроме того, $\langle A_0^1 \rangle \dots \langle A_0^n \rangle = \langle B_0^1 \rangle \dots \langle B_0^{n-1} \rangle \langle B_0^n \rangle \langle C_0 \rangle^{-1} = \langle B \rangle \langle C \rangle^{-1} = \langle A \rangle$, что и требовалось. Случай противоположного деления разбирается аналогично. $\square$

Рассмотрим произвольную пару совместимых типов A и B и построим для них типы A_0, B_0 без отрицательных умножений, такие что $\mathrm{L} \vdash A \to A_0$ и $\mathrm{L} \vdash B \to B_0$, а также $l(A_0) = l(A)$ и $l(B_0) = l(B)$. Заметим, что всякий тип C, являющийся совмещающим для типов A_0 и B_0, также будет совмещающим для типов A и B. Следовательно, чтобы ограничить сверху величину $M_j(l_1, l_2)$, достаточно оценить сверху длину совмещающего типа только для совместимых типов, не содержащих отрицательных умножений.

На рисунке 2.1 приведена общая схема построения совмещающего типа C для заданных совместимых типов A и B. Типы A_1, A_2, B_1, B_2 существуют на основании леммы 2.6 (мы пользуемся тем, что $\langle A \rangle = \langle A_0 \rangle$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
A \arrow[d] & & & & & & & & B \arrow[d] \\
A_0 \arrow[dr] & & \phi(\langle A \rangle) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \phi(\llbracket A \rrbracket) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \phi(\langle B \rangle) \arrow[dl] \arrow[dr] & & B_0 \arrow[dl] \\
& A_1 \arrow[dr] & & A_2 \arrow[dl] & & B_2 \arrow[dr] & & B_1 \arrow[dl] & \\
& & A_3 \arrow[drr] & & & & B_3 \arrow[dll] & & \\
& & & & C & & & &
\end{tikzcd}
$$

Рис. 2.1: Схема построения совмещающего типа C для заданных совместимых типов A и B.

и $\langle B \rangle = \langle B_0 \rangle$). После этого тип A_3 получается из типов A_1, A_2 и $\phi(\langle A \rangle)$ после применения леммы 2.2, тип B_3 строится аналогичным образом. Тогда искомый тип C получается из типов A_3, B_3 и типа $\phi(\llbracket A \rrbracket) = \phi(\llbracket B \rrbracket)$ опять же на основании леммы 2.2. В следующем разделе мы предъявим алгоритм построения типов A_1, B_1, A_2, B_2, позволяющий оценить их длины, а значит, и длину типа C.

Пример 2.3. Пусть $A = p/(q \setminus (r \cdot (r \setminus q)))$, $B = ((q \cdot (q \setminus r))/p) \setminus r$. В этом случае $\langle A \rangle = pq^{-1}rr^{-1}q$, $\langle B \rangle = prq^{-1}qr$, $\llbracket A \rrbracket = \llbracket B \rrbracket = p$, а значит $\phi(\langle A \rangle) = p \cdot (q \setminus q/q) \cdot r \cdot (r \setminus r/r) \cdot q$, $\phi(\langle B \rangle) = p \cdot (r \setminus r/r) \cdot q \cdot (q \setminus q/q) \cdot r, \phi(\llbracket A \rrbracket) = \phi(\llbracket B \rrbracket) = p$. Положим $A_0 = (p/(r \setminus q))/(q \setminus r)$, $B_0 = (q \setminus r/p) \setminus (q \setminus r)$, тогда можно взять $A_1 = A_2 = A_3 = (q/p) \setminus ((q/(r \setminus q))/(q \setminus r))$, $B_1 = B_3 = (q \setminus r/p) \setminus (q \setminus ((r/(q \setminus r))/(r \setminus q)))$, $B_2 = (r/p) \setminus ((r/(q \setminus r))/(r \setminus q)))$. Следовательно, совмещающий тип равен $C = (p/A_3) \setminus p/(B_3 \setminus p)$. Выводимость требуемых секвенций проверяется непосредственно.

2.3 Построение совмещающего типа

В данном разделе мы предъявим алгоритм построения типов $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C$, обозначенных на рисунке 2.1, а также оценим их длины. Вначале приведём соотношения на длины типов $\phi(\langle A \rangle)$ и $\phi(\llbracket A \rrbracket)$

(через $|w|$ мы обозначаем длину слова w).

Лемма 2.8.

1. *Если* $A \in \mathrm{Tp}$ *и* $[\![A]\!] \neq \varepsilon$, *то* $l(\phi(\langle A\rangle)) = l(\phi([\![A]\!])) + 2\,(l(A) - |[\![A]\!]|) \leqslant 2\,l(A) + |[\![A]\!]| \leqslant 3\,l(A)$.
2. *Если* $A \in \mathrm{Tp}$ *и* $[\![A]\!] = \varepsilon$, *то* $l(\langle A\rangle) = 2\,l(A)$.

Доказательство.

1. Пусть $w \in \mathcal{P}^*$, обозначим через $|w|^+$ число букв в слове w, принадлежащих множеству Pr, а через $|w|^-$ — число букв, принадлежащих множеству $\{\overline{p} \mid p \in \mathrm{Pr}\}$. Например, если $w = p\overline{q}pq\overline{p}$, то $|w|^+ = 3$, $|w|^- = 2$. Из определения отображения ϕ следует, что для всякого $w \in \mathcal{P}^*$ выполняется равенство $l(\phi(w)) = |w|^+ + 3|w|^-$. Кроме того, верны соотношения $|\langle A\rangle|^+ - |[\![A]\!]|^+ = |\langle A\rangle|^- - |[\![A]\!]|^-$ и $|\langle A\rangle| = l(A)$. Обозначим через δ разность $|\langle A\rangle|^+ - |[\![A]\!]|^+$, тогда $\delta = \frac{1}{2}(|\langle A\rangle| - |[\![A]\!]|) = \frac{l(A)-|[\![A]\!]|}{2}$. Отсюда следует равенство $l(\phi(\langle A\rangle)) = |\langle A\rangle|^+ + 3|\langle A\rangle|^- = |[\![A]\!]|^+ + 3|[\![A]\!]|^- + 4\delta = l(\phi([\![A]\!])) + 2(l(A) - |[\![A]\!]|)$. Очевидно, $l(\phi([\![A]\!])) \leqslant 3|[\![A]\!]|$ и $|[\![A]\!]| \leqslant l(A)$, откуда получаем $l(\phi(\langle A\rangle)) = l(\phi([\![A]\!])) + 2(l(A) - |[\![A]\!]|) \leqslant 2l(A) + |[\![A]\!]| \leqslant 3l(A)$.
2. Обозначим $l^+(A) = |\mathrm{Occ}^+(A)|$, $l^-(A) = |\mathrm{Occ}^-(A)|$, тогда легко показать, что $|\langle A\rangle|^+ = l^+(A)$ и $|\langle A\rangle|^- = l^-(A)$, откуда получаем равенство $l(\phi(\langle A\rangle)) = l^+(A) + 3l^-(A)$. Из условия $[\![A]\!] = 0$ следует, что $|\langle A\rangle|^+ = |\langle A\rangle|^-$, откуда легко получается требуемое равенство. Лемма доказана.

$\square$

Следующая лемма является вспомогательной в дальнейших построениях.

Лемма 2.9. *Для любого типа* $U \in \mathrm{Tp}$ *и любого слова* $w \in \mathcal{P}^+$, *такого что* $\chi(w) = \varepsilon$, *существуют такие типы* U', U'', *что*

1. $\mathrm{L} \vdash U\phi(w) \to U'$, $\mathrm{L} \vdash U \to U'$, *при этом* $l(U') < l(U) + 2\,|w|$.
2. $\mathrm{L} \vdash \phi(w)U \to U''$, $\mathrm{L} \vdash U \to U''$, *при этом* $l(U'') < l(U) + 2\,|w|$.

Доказательство. Достаточно доказать первое утверждение леммы, второе получается из него по симметричности левого и правого делений. Доказательство проведём индукцией по длине слова w. Базой служит случай $|w| = 2$, тогда либо $w = p\overline{p}$, либо $w = \overline{p}p$ для некоторого примитивного типа p. Соответственно, либо $\phi(w) = p \cdot (p \setminus p/p)$, либо $\phi(w) = (p \setminus p/p) \cdot p$. В первом случае положим $U' = (U \cdot p)/p$, во втором случае положим $U' = (p/U) \setminus p$. В обоих случаях нетрудно проверить, что оба требования, наложенные на тип U', выполняются.

При доказательстве шага индукции разберём два случая: в первом случае слово w представимо в виде $w = uv$ для некоторых непустых слов u, v, таких что $\chi(u) = \chi(v) = \varepsilon$; во втором случае такое представление невозможно. В первом случае применим утверждение леммы сначала к типам U и $\phi(u)$, получим, что найдётся тип U_u, такой что $\mathrm{L} \vdash U\phi(u) \to U_u$ и $U \to U_u$, причём $l(U_u) < l(U) + 2\,|u|$. После этого применим утверждение леммы к типам U_u и $\phi(v)$, получим некоторый тип U', такой что $\mathrm{L} \vdash U_u\phi(v) \to U'$, а также $\mathrm{L} \vdash U_u \to U'$.

Докажем, что тип U' является искомым. Применяя к выводимым секвенциям $U \to U_u$ и $U_u \to U'$ правило сечения, получаем, что $\mathrm{L} \vdash U \to U'$. Кроме того, $l(U') < l(U')+2\,|v| < l(U)+2\,|u|+2\,|v| = l(U)+2\,|w|$, что и было нужно. По определению отображения ϕ имеем $\phi(w) = \phi(u)\cdot\phi(v)$. Выводимость секвенции $U \cdot \phi(w) \to U'$ доказана ниже.

$$\dfrac{\dfrac{U\phi(u) \to U_u \qquad U_u\phi(v) \to U'}{U\phi(u)\phi(v) \to U'}\,(\mathrm{cut})}{U(\phi(u) \cdot \phi(v)) \to U'}\,(\cdot\to)$$

Теперь разберём второй случай. С точностью до переименования переменных возможны два подслучая: $w = pu\overline{p}$ и $w = \overline{p}up$, причём слово u непусто и $\chi(u) = \varepsilon$. Это означает, что либо $\phi(w) = p \cdot \phi(u) \cdot (p \setminus p/p)$, либо $\phi(w) = (p \setminus p/p) \cdot \phi(u) \cdot p$.

Применим лемму к типу p и слову u, получим, что существуют типы P' и P'', такие что секвенции $p\phi(u) \to P'$ и $p \to P'$, а также

$\phi(u)p \to P''$ и $p \to P''$ являются выводимыми, причём $l(P') < 2\,|u| + 1$ и $l(P'') < 2\,|u| + 1$. В случае если $\phi(w) = p \cdot \phi(u) \cdot (p \backslash p/p)$, положим $U' = (p/(U \cdot P')) \backslash p/p$, а во втором случае $U' = (p/U) \backslash p/(P'' \backslash p)$. В обоих случаях получаем, что $l(U') < l(U) + 3 + 2\,|u| + 1 = l(U) + 2\,|w|$, что и требовалось.

Докажем выводимость секвенций $U\phi(w) \to U'$ и $U \to U'$. Ниже приведены выводы необходимых секвенций для первого подслучая.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(p \backslash p/p))p \to p \qquad \dfrac{\dfrac{U \to U \qquad p\phi(u) \to P'}{Up\phi(u) \to U \cdot P'}\,(\to\cdot)}{U(p \cdot \phi(u)) \to U \cdot P'}\,(\cdot\to)}{(p/(U \cdot P'))U(p \cdot \phi(u))(p \backslash p/p)p \to p}\,(/\to)}{(p/(U \cdot P'))U(p \cdot \phi(u) \cdot (p \backslash p/p))p \to p}\,(\cdot\to)}{(p/(U \cdot P'))U(p \cdot \phi(u) \cdot (p \backslash p/p)) \to p/p}\,(\to/)}{U(p \cdot \phi(u) \cdot (p \backslash p/p)) \to (p/(U \cdot P')) \backslash p/p}\,(\to\backslash)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to p \qquad \dfrac{U \to U \quad p \to P'}{Up \to U \cdot P'}\,(\to\cdot)}{(p/(U \cdot P'))Up \to p}\,(/\to)}{(p/(U \cdot P'))U \to p/p}\,(\to/)}{U \to (p/(U \cdot P')) \backslash p/p}\,(\to\backslash)$$

Далее приведены выводы секвенций $U \cdot \phi(w) \to U'$ и $U \to U'$ для второго подслучая.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to p \qquad \dfrac{p \to p \quad \phi(u)p \to P''}{\phi(u)p(P'' \backslash p) \to p}\,(\backslash\to)}{(p/p)\phi(u)p(P'' \backslash p) \to p}\,(/\to) \qquad \dfrac{p \to p \quad U \to U}{(p/U)U \to p}\,(/\to)}{(p/U)U(p \backslash p/p)\phi(u)p(P'' \backslash p) \to p}\,(\backslash\to)}{(p/U)U((p \backslash p/p) \cdot \phi(u) \cdot p)(P'' \backslash p) \to p}\,(\cdot\to)}{(p/U)U((p \backslash p/p) \cdot \phi(u) \cdot p) \to p/(P'' \backslash p)}\,(\to/)}{U((p \backslash p/p) \cdot \phi(u) \cdot p) \to (p/U) \backslash p/(P'' \backslash p)}\,(\to\backslash)$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to p \qquad \dfrac{p \to P'' \quad U \to U}{(p/U)U \to P''}\,(/\to)}{(p/U)U(P'' \setminus p) \to p}\,(\setminus\to)}{(p/U)U \to p/(P'' \setminus p)}\,(\to/)}{U \to (p/U) \setminus p/(P'' \setminus p)}\,(\to\setminus)
$$

Лемма доказана. $\square$

Следствие 2.1. Для любых типов $U, E \in \mathrm{Tp}$, таких что $[\![E]\!] = \varepsilon$, существуют такие типы U', U'', что

1. $\mathrm{L} \vdash U\phi(\langle E\rangle) \to U'$, $\mathrm{L} \vdash U \to U'$, при этом $l(U') < l(U) + 2\,|E|$.
2. $\mathrm{L} \vdash \phi(\langle E\rangle)U \to U''$, $\mathrm{L} \vdash U \to U''$, при этом $l(U'') < l(U) + 2\,|E|$.

В следующей лемме мы доказываем верхнюю оценку на длину типов A_2 и B_2 с рисунка 2.1. Помимо этого, из доказательства леммы можно извлечь алгоритм построения данных типов.

Лемма 2.10. *Для всякого типа* $A \in \mathrm{Tp}$ *существует тип* A_2*, такой что* $\mathrm{L} \vdash \phi(\langle A\rangle) \to A_2, \mathrm{L} \vdash \phi([\![A]\!]) \to A_2$*, причём* $l(A_2) \leqslant l(\phi(\langle A\rangle))$*.*

Доказательство. Рассмотрим два случая: $[\![A]\!] = \varepsilon$ и $[\![A]\!] \neq \varepsilon$. В первом случае $\phi([\![A]\!]) = q/q$. Применим лемму 2.1 к типам q и A, получим, что существует тип Q, такой что $\mathrm{L} \vdash q \to Q$, $\phi(\langle A\rangle)q \to Q$ и $l(Q) < 2\,l(A)+1$. Положим $A_2 = Q/q$. Тогда нетрудно проверить, что секвенции $q/q \to A_2$ и $\phi(\langle A\rangle)(q/q) \to A_2$ будут выводимы в исчислении L. Кроме того, из выводимости секвенции $\phi(\langle A\rangle)q \to Q$ и леммы 2.8 вытекает, что величины $l(Q)$ и $l(\phi(\langle A\rangle)) + l(q) = 2\,l(A) + 1$ имеют одинаковую чётность. Поскольку $l(Q) < 2\,l(A) + 1$, то $l(Q) \leqslant 2\,l(A) - 1$. Таким образом, $l(A_2) = l(Q) + 1 \leqslant 2\,l(A) = l(\phi(\langle A\rangle))$, что и требовалось. Первый случай полностью разобран.

Теперь разберём случай $[\![A]\!] \neq \varepsilon$. В этом случае найдутся такие типы $B_1, \ldots, B_l, C_0, \ldots, C_l$, что с точностью до перегруппировки скобок $\phi([\![A]\!]) = B_1 \cdot \ldots \cdot B_l, \phi(\langle A\rangle) = \phi(\langle C_0\rangle) \cdot B_1 \cdot \phi(\langle C_1\rangle) \cdot B_2 \ldots \cdot B_l \cdot \phi(\langle C_l\rangle)$, причём для всех $j \leqslant l$ выполняется равенство $[\![C_j]\!] = \varepsilon$ (типы C_0 и C_l могут отсутствовать). Если тип C_0 существует, применим следствие 2.1 к типам B_1 и C_0, получим, что найдётся тип D_1, такой что выполняются следующие условия: $\mathrm{L} \vdash B_1 \to D_1$, $\mathrm{L} \vdash \phi(\langle C_0 \rangle) B_1 \to D_1$ и $l(D_1) \leqslant l(B_1) + 2\,l(C_0)$. Если тип C_0 отсутствует, положим $D_1 = B_1$, также определим типы $D_2 = B_2, \ldots, D_l = B_l$.

Теперь для каждого $j = 1, \ldots, l-1$ применим следствие 2.1 к типам D_j и C_j, получим, что существуют типы $D'_1, \ldots, D'_l$, такие что для каждого $j = 1, \ldots, l-1$ выполняются следующие утверждения: $\mathrm{L} \vdash D_j \to D'_j$, $\mathrm{L} \vdash D_j C_j \to D'_j$ и $l(D'_j) < l(D_j) + 2\,l(C_j)$. Если тип C_l существует, аналогичным образом поступим и с типами D_l и C_l, иначе положим $D'_l = C_l$.

Положим $A_2 = D'_1 \cdot \ldots \cdot D'_l$. Используя правила (cut) и $(\cdot \to)$ нетрудно вывести, что $\mathrm{L} \vdash \phi(\langle A \rangle) \to A_2$ и $\mathrm{L} \vdash \phi([\![A]\!]) \to A_2$. Осталось доказать оценку на длину типа A_2. В самом деле, $l(A_2) = \sum\limits_{i=1}^{l} l(D'_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{l} (l(D_i) + 2\,l(C_i)) \leqslant (l(B_1) + 2\,l(C_0)) + 2\,l(C_1) + \sum\limits_{i=2}^{l} (l(D_i) + 2\,l(C_i)) = \sum\limits_{i=1}^{l} l(B_i) + 2\sum\limits_{i=0}^{l} l(C_i) = \sum\limits_{i=1}^{l} l(B_i) + \sum\limits_{i=0}^{l} l(\phi(\langle C_i \rangle)) = l(\phi(\langle A \rangle))$. Лемма доказана. □

Таким образом, мы можем оценить длины типов A_2, B_2 на рисунке 2.1. Следующая лемма позволяет оценить также и длины типов A_1 и B_1.

Лемма 2.11. *Для всякого типа $A \in \mathrm{Tp}$ существует тип A_1, такой что $\mathrm{L} \vdash A \to A_1$, $\mathrm{L} \vdash \phi(\langle A \rangle) \to A_1$ и $l(A_1) \leqslant \frac{1}{2} l^2(A) + l(A)$.*

Доказательство. В силу леммы 2.7 можно считать, что A не содержит отрицательных умножений. Докажем лемму индукцией по построению типа A. База индукции: $A = p \in \mathrm{Pr}$, тогда $A_1 = p$ и утверждение леммы выполняется.

На шаге индукции возможны три случая: $A = B \cdot C$, $A = B / C$ и $A = C \setminus B$. В силу симметричности левого и правого делений достаточно разобрать первые два из них, разберём первый. Применим предположение индукции к типам B и C, получим, что существуют типы B_1, C_1, такие что секвенции $B \to B_1$, $\phi(\langle B\rangle) \to B_1$ и $C \to C_1$, $\phi(\langle C\rangle) \to C_1$ являются выводимыми и $l(B_1) \leqslant \frac{1}{2}l^2(B)+l(B), l(C_1) \leqslant \frac{1}{2}l^2(C)+l(C)$. Положим $A_1 = B_1 \cdot C_1$, тогда из правил $(\cdot\to)$ и $(\to\cdot)$ следует, что $\mathrm{L} \vdash A \to A_1$. Поскольку в этом случае $\phi(\langle A\rangle) = \phi(\langle B\rangle)\cdot\phi(\langle C\rangle)$, то аналогичным образом доказывается, что $\mathrm{L} \vdash \phi(\langle A\rangle) \to A_1$. Кроме того, $l(A_1) = l(B_1)+l(C_1) \leqslant \frac{1}{2}(l^2(B)+l^2(C))+l(B)+l(C) \leqslant \frac{1}{2}(l(B)+l(C))^2+l(B)+l(C) = \frac{1}{2}l^2(A)+l(A)$. Таким образом, тип A_1 полностью удовлетворяет заключению леммы.

Теперь разберём второй случай $A = B/C$. Поскольку тип A не содержит отрицательных умножений, то C представим в виде $D^{(k)}\backslash(\ldots(D^{(1)}\backslash(\ldots((p/E^{(l)})/\ldots)/E^{(1)})\ldots)$, где одно или оба из чисел k, l могут равняться 0. Обозначим $D = D^{(1)}\cdot\ldots\cdot D^{(k)}, E = E^{(1)}\cdot\ldots\cdot E^{(l)}$, тогда тип C равносилен типу $D\backslash p/E$ (если $k \neq 0$, $l \neq 0$ и оба типа D и E присутствуют). Будем считать, что и сам тип C представлен в таком виде. Возможны четыре подслучая в зависимости от того, какие из чисел k и l равны 0. Обозначим через B_1 тип, полученный в результате применения предположения индукции к типу B, аналогичный смысл имеют обозначения D_1 и E_1.

Первый подслучай: $k = l = 0$, тогда $A = B/p$ и $\phi(\langle A\rangle) = \phi(\langle B\rangle)\cdot(p\backslash p/p)$. Положим $A_1 = ((p/B_1)\backslash p/p)$. Выводимость секвенции $A \to A_1$ проверяется непосредственно. Секвенция $\phi(\langle A\rangle) \to A_1$ имеет следующий вывод:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p/p)p \to p \qquad \dfrac{p \to p \quad \phi(\langle B\rangle) \to B_1}{(p/B_1)\phi(\langle B\rangle) \to p}\,(/\to)}{(p/B_1)\phi(\langle B\rangle)(p\backslash p/p)p \to p}\,(\cdot\to)}{(p/B_1)(\phi(\langle B\rangle)\cdot(p\backslash p/p))p \to p}\,(\to/)}{(p/B_1)(\phi(\langle B\rangle)\cdot(p\backslash p/p)) \to p/p}\,(\to/)}{\phi(\langle B\rangle)\cdot(p\backslash p/p) \to (p/B_1)\backslash p/p}\,(\to\backslash)$$

Кроме того, $l(A_1) = l(B_1)+3 \leqslant \frac{1}{2}l^2(B)+l(B)+3$. Если $l(B) \geqslant 2$, то данная величина мажорируется величиной $\frac{1}{2}(l(B)+1)^2+(l(B)+1) = \frac{1}{2}l^2(A)+l(A)$. Если же $l(B)=1$, то без ограничения общности $A = p_0/p$ и $A_1 = (p/p_0)\setminus p/p$, тогда $l(A_1) = 4 = \frac{1}{2}(l(A)^2)+l(A)$, и неравенство снова выполняется. Первый подслучай разобран.

Разберём подслучай $k \neq 0, l \neq 0$. В этом случае $A = B/(D\setminus p/E)$, тогда $\phi(\langle A\rangle) = \phi(\langle B\rangle)\cdot\phi(\langle E\rangle)\cdot(p\setminus p/p)\cdot\phi(\langle D\rangle)$. Положим $A_1 = (p/(B_1\cdot E_1))\setminus p/((D_1\setminus p/E)\cdot E)$, тогда $l(A_1) = l(B_1)+l(D_1)+l(E_1)+2\,l(E)+3 \leqslant \frac{1}{2}(l^2(B)+l^2(D)+l^2(E))+(l(B)+l(D)+l(E))+2\,l(E)+3 \leqslant \frac{1}{2}(l^2(B)+l^2(D)+l^2(E)+2\,(l(B)+l(D)+l(E)+l(E)(l(B)+l(D))))+(l(B)+l(D)+l(E)) < \frac{1}{2}(l(B)+l(D)+l(E)+1)^2+(l(B)+l(D)+l(E)+1) = \frac{1}{2}l^2(A)+l(A)$. Ниже приведены выводы секвенций $A \to A_1$ и $\phi(\langle A\rangle)\to A_1$ выводимы.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$p \to p$}
\AxiomC{$E \to E_1$}
\AxiomC{$B \to B_1$}
\AxiomC{$p/E \to p/E$}
\AxiomC{$D \to D_1$}
\RightLabel{$(\setminus\to)$}
\BinaryInfC{$D(D_1\setminus p/E) \to p/E$}
\RightLabel{$(\to\setminus)$}
\UnaryInfC{$D_1\setminus p/E \to D\setminus p/E$}
\RightLabel{$(\to/)$}
\BinaryInfC{$(B/(D\setminus p/E))(D_1\setminus p/E) \to B_1$}
\RightLabel{$(\to\cdot)$}
\BinaryInfC{$(B/(D\setminus p/E))(D_1\setminus p/E)E \to B_1\cdot E_1$}
\RightLabel{$(\cdot\to)$}
\UnaryInfC{$(B/(D\setminus p/E))((D_1\setminus p/E)\cdot E) \to B_1\cdot E_1$}
\RightLabel{$(/\to)$}
\BinaryInfC{$(p/(B_1\cdot E_1))(B/(D\setminus p/E))((D_1\setminus p/E)\cdot E) \to p$}
\RightLabel{$(\to/)$}
\UnaryInfC{$(p/(B_1\cdot E_1))(B/(D\setminus p/E)) \to p/((D_1\setminus p/E)\cdot E)$}
\RightLabel{$(\to\setminus)$}
\UnaryInfC{$B/(D\setminus p/E) \to (p/(B_1\cdot E_1))\setminus p/((D_1\setminus p/E)\cdot E)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$p(p\setminus p)\to p$}
\AxiomC{$(p/E)E\to p$}
\AxiomC{$\phi(\langle D\rangle)\to D_1$}
\BinaryInfC{$\phi(\langle D\rangle)(D_1\setminus p/E)E\to p$}
\UnaryInfC{$\phi(\langle D\rangle)((D_1\setminus p/E)\cdot E)\to p$}
\BinaryInfC{$p(p\setminus p/p)\phi(\langle D\rangle)((D_1\setminus p/E)\cdot E)\to p$}
\UnaryInfC{$p((p\setminus p/p)\cdot\phi(\langle D\rangle))((D_1\setminus p/E)\cdot E)\to p$}
\AxiomC{$\phi(\langle B\rangle)\to B_1$}
\AxiomC{$\phi(\langle E\rangle)\to E_1$}
\BinaryInfC{$\phi(\langle B\rangle)\phi(\langle E\rangle)\to B_1\cdot E_1$}
\UnaryInfC{$\phi(\langle B\rangle)\cdot\phi(\langle E\rangle)\to B_1\cdot E_1$}
\BinaryInfC{$(p/(B_1\cdot E_1))(\phi(\langle B\rangle)\cdot\phi(\langle E\rangle))((p\setminus p/p)\cdot\phi(\langle D\rangle))((D_1\setminus p/E)\cdot E)\to p$}
\UnaryInfC{$(p/(B_1\cdot E_1))(\phi(\langle B\rangle)\cdot\phi(\langle E\rangle)\cdot(p\setminus p/p)\cdot\phi(\langle D\rangle))((D_1\setminus p/E)\cdot E)\to p$}
\UnaryInfC{$(p/(B_1\cdot E_1))(\phi(\langle B\rangle)\cdot\phi(\langle E\rangle)\cdot(p\setminus p/p)\cdot\phi(\langle D\rangle))\to p/((D_1\setminus p/E)\cdot E)$}
\UnaryInfC{$\phi(\langle B\rangle)\cdot\phi(\langle E\rangle)\cdot(p\setminus p/p)\cdot\phi(\langle D\rangle)\to(p/(B_1\cdot E_1))\setminus p/((D_1\setminus p/E)\cdot E)$}
\end{prooftree}
$$

Пусть теперь $k = 0$, $l \neq 0$, тогда $A = B/(p/E)$ и $\phi(\langle A\rangle) = \phi(\langle B\rangle)\cdot\phi(\langle E\rangle)\cdot(p \setminus p/p)$. Положим $A_1 = (p/(B_1\cdot E_1)) \setminus p/((p/E)\cdot E)$, тогда $l(A_1) = l(B_1)+l(E_1)+2\,l(E)+3 \leqslant \frac{1}{2}(l^2(B)+l^2(E))+(l(B)+3\,l(E))+3$. В случае $l(B) \geqslant 2$ эта величина не превосходит $\frac{1}{2}(l^2(B) + l^2(E) + 2\,(l(B) + l(E) + l(B)l(E)) + 1) + (l(B) + l(E) + 1) = \frac{1}{2}l^2(A) + l(A)$, что и требуется. Если же $l(B) = 1$, то без ограничения общности $B_1 = B = p$ и $l(A_1) = l(E_1)+2\,l(E)+4 \leqslant \frac{1}{2}l^2(E)+3\,l(E)+4 = \frac{1}{2}(l(E)+2)^2+(l(E)+2) = \frac{1}{2}l^2(A) + l(A)$, что и требовалось. Третий подслучай разобран. Выводимость секвенций $A \to A_1$ и $\phi(\langle A\rangle) \to A_1$ проверяется аналогично предыдущему подслучаю.

Пусть теперь $k \neq 0$, $l = 0$, тогда $A = B/(D \setminus p)$. В этом случае $\phi(\langle A\rangle) = \phi(\langle B\rangle) \cdot (p \setminus p/p) \cdot \phi(\langle D\rangle)$. Положим $A_1 = (p/B_1) \setminus p/(D_1 \setminus p)$, тогда $l(A_1) = l(B_1) + l(D_1) + 3 \leqslant \frac{1}{2}(l^2(B) + l^2(D)) + l(B) + l(D) + 3 \leqslant \frac{1}{2}(l^2(B) + l^2(D) + 2\,l(B)l(D) + 2\,(l(B) + l(D)) + 1) + (l(B) + l(D) + 1) = \frac{1}{2}l^2(A) + l(A)$. Выводимость секвенций $A \to A_1$ и $\phi(\langle A\rangle) \to A_1$ проверяется аналогично второму подслучаю. $\square$

Теперь исходя из доказанных оценок на длины типов A_1, A_2, а также B_1, B_2, мы можем оценить длины типов A_3, B_3, а значит, и типа C. В дальнейшем доказательстве основную роль играет лемма 2.1.

Лемма 2.12. *Для любого типа* $A \in \mathrm{Tp}$ *существует тип* A_3*, такой что* $\mathrm{L} \vdash A \to A_3$, $\mathrm{L} \vdash \phi([\![A]\!]) \to A_3$ *и* $l(A_3) \leqslant \frac{1}{2}l^2(A) + 13\,l(A)$.

Доказательство. В соответствии с леммой 2.1 и рисунком 2.1 в качестве A_3 можно взять тип $(\phi(\langle A\rangle)/A_1) \setminus \phi(\langle A\rangle)/(A_2 \setminus \phi(\langle A\rangle))$. Применяя леммы 2.11 и 2.10, получаем, что $l(A_3) = l(A_1) + l(A_2) + 3\,l(\phi(\langle A\rangle)) \leqslant \frac{1}{2}l^2(A) + l(A) + 4\,l(\phi(\langle A\rangle))$. По лемме 2.8 получаем искомую оценку. $\square$

Теорема 3. *Для любых совместимых в исчислении* L *типов* $A, B \in \mathrm{Tp}$ *найдётся совмещающий тип* C*, такой что* $l(C) \leqslant \frac{1}{2}(l^2(A) + l^2(B)) + \frac{35}{2}\,(l(A) + l(B))$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $l(A) \leqslant l(B)$. Тогда в соответствии с леммой 2.1 и рисунком 2.1 в качестве C можно взять тип $(\phi([\![A]\!])/A_3) \setminus \phi([\![A]\!])/(B_3 \setminus \phi([\![A]\!]))$. Тогда по лемме 2.12 и лемме 2.8 имеем $l(C) = l(A_3) + l(B_3) + 3\,l(\phi([\![A]\!])) \leqslant \frac{1}{2}(l^2(A) + l^2(B)) + 13\,(l(A) + l(B)) + 3\,l(\phi(\langle A\rangle)) \leqslant \frac{1}{2}(l^2(A) + l^2(B)) + 13\,(l(A) + l(B)) + 9\,l(A) \leqslant \frac{1}{2}(l^2(A) + l^2(B)) + 13\,(l(A) + l(B)) + \frac{9}{2}(l(A) + l(B)) \leqslant \frac{1}{2}(l^2(A) + l^2(B)) + \frac{35}{2}\,(l(A) + l(B))$. □

Следствие 2.2. Для любых совместимых в исчислении L^* типов $A, B \in \mathrm{Tp}$ найдётся совмещающий тип C, такой что $l(C) \leqslant \frac{1}{2}(l^2(A) + l^2(B)) + \frac{35}{2}\,(l(A) + l(B))$.

Заметим, что из доказательства леммы 2.1 следует, что минимальная длина совмещающего типа и минимальная длина соединяющего типа различаются не более чем на линейное слагаемое относительно длин исходных типов. Таким образом, из доказанной теоремы также следует верхняя оценка на длину соединяющего типа в исчислении L.

Глава 3

Нижняя оценка длины совмещающего типа в исчислении L

3.1 Мультипликативная циклическая линейная логика

В данной главе мы докажем нижнюю оценку на введённую в главе 2.2 величину $M_j(l_1, l_2)$. Доказываемая оценка также будет квадратичной. Доказательство нижней оценки проведём для исчисления Ламбека L^*, допускающего пустые антецеденты. Полученная величина будет являться нижней оценкой и для исчисления L, поскольку всякий совмещающий тип в исчислении L также будет совмещающим и в L^*.

При доказательстве мы используем графический способ представления синтаксических выводов — так называемые *сети доказательства*. При этом мы будем рассматривать сети доказательства не для самого исчисления Ламбека L^*, а для его консервативного расширения MCLL.

Исчисление MCLL, называемое мультипликативной циклической линейной логикой, было введено Д. Йеттером в [34]. Оно представляет собой фрагмент введённой в [12] линейной логики Ж.-И. Жирара. Его консервативность над исчислением Ламбека L^*, допускающим пустые антецеденты, была доказана в работе [27].

Рассмотрим счётное множество переменных $\mathrm{Var} = \{p_1, p_2, \ldots\}$, в дальнейшем мы будем считать, что оно совпадает с множеством Pr примитивных типов исчисления Ламбека. *Атомами* будем называть элементы множества $\mathrm{At} = \mathrm{Var} \cup \{\overline{p} \mid p \in \mathrm{Var}\}$. *Формулы* линейной логики строятся из атомов с помощью бинарных связок $\parr$ (*пар* или мультипликативная дизъюнкция) и $\otimes$ (*тензор* или мультипликативная конъюнкция). Формально, множество формул Fm есть наименьшее множество, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\mathrm{At} \subset \mathrm{Fm}$,
2. если $A, B \in \mathrm{Fm}$, то $(A \parr B), (A \otimes B) \in \mathrm{Fm}$.

Для каждой формулы $A \in \mathrm{Fm}$ определим внешним образом её *отрицание* $A^\perp$: $p^\perp = \overline{p}$, $(\overline{p})^\perp = p$, если $p \in \mathrm{Var}$, $(B \parr C)^\perp = C^\perp \otimes B^\perp$, $(B \otimes C)^\perp = C^\perp \parr B^\perp$. Секвенции исчисления MCLL имеют вид $\to \Gamma$, где Γ есть непустая последовательность формул. Исчисление задаётся аксиомами вида $\to p\overline{p}$, $p \in \mathrm{Var}$ и приведёнными ниже правилами вывода.

$$\frac{\to \Gamma A B \Delta}{\to \Gamma (A \parr B) \Delta}(\to \parr) \qquad \frac{\to \Gamma A \quad \to B \Delta}{\to \Gamma (A \otimes B) \Delta}(\to \otimes)$$

$$\frac{\to \Gamma \Delta}{\to \Delta \Gamma}(\mathrm{rotate}) \qquad \frac{\to \Gamma A \quad \to A^\perp \Delta}{\to \Gamma \Delta}(\mathrm{cut})$$

Пример 3.1. Секвенция $\to ((\overline{p}_2 \otimes p_3) \parr \overline{p}_3)((p_2 \otimes \overline{p}_1) \parr p_1)$ выводима в исчислении MCLL.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\to p_2\overline{p}_2 \quad \to p_3\overline{p}_3}{\to p_2(\overline{p}_2 \otimes p_3)\overline{p}_3}(\to \otimes)}{\to (\overline{p}_2 \otimes p_3)\overline{p}_3 p_2}(\mathrm{rotate}) \qquad \dfrac{\to p_1\overline{p}_1}{\to \overline{p}_1 p_1}(\mathrm{rotate})}{\to (\overline{p}_2 \otimes p_3)\overline{p}_3(p_2 \otimes \overline{p}_1)p_1}(\to \otimes)}{\to (\overline{p}_2 \otimes p_3)\overline{p}_3((p_2 \otimes \overline{p}_1) \parr p_1)}(\to \parr)}{\to ((\overline{p}_2 \otimes p_3) \parr \overline{p}_3)((p_2 \otimes \overline{p}_1) \parr p_1)}(\to \parr)$$

В исчислении MCLL устранимо сечение, то есть всякая выводимая секвенция может быть выведена без применения правила (cut). Выводимость секвенции $\to \Gamma$ обозначается $\mathrm{MCLL} \vdash \to \Gamma$.

Понятие внешнего отрицания позволяет рассматривать в MCLL и двусторонние секвенции, понимая запись $A_1 \ldots A_m \to B_1 \ldots B_n$ как другое обозначение секвенции $\to A_m^\perp \dots A_1^\perp B_1 \dots B_n$. Выводимость секвенции $\Gamma \to \Delta$ в исчислении MCLL обозначается $\mathrm{MCLL} \vdash \Gamma \to \Delta$.

Определение 3.1. *Стандартным переводом* (далее, *переводом*) типа $A \in \mathrm{Tp}$ будем называть формулу $\widehat{A}$, получаемую по следующим правилам:

1. $\widehat{p} = p$, если $p \in \mathrm{Pr}$,
2. $\widehat{A \cdot B} = \widehat{A} \otimes \widehat{B}$,
3. $\widehat{A/B} = \widehat{A} \parr \widehat{B}^\perp$,
4. $\widehat{B \setminus A} = \widehat{B}^\perp \parr \widehat{A}$,

Стандартным переводом последовательности типов $\Gamma = A_1 \dots A_n$ является последовательность формул $\widehat{A}_1 \dots \widehat{A}_n$. Стандартным переводом секвенции $A_1 \dots A_n \to B$ является секвенция $\widehat{A}_1 \dots \widehat{A}_n \to \widehat{B}$, то есть односторонняя секвенция $\to \widehat{A}_n^\perp \dots \widehat{A}_1^\perp B$.

Пример 3.2. Формула $p_1 \parr ((\overline{p}_3 \parr \overline{p}_2) \otimes p_4)$ является переводом типа $p_1/(p_4 \setminus (p_2 \cdot p_3))$.

Следующая теорема была доказана в [27].

Теорема 4 (М. Р. Пентус, 1992)**.** *Исчисление* MCLL *является консервативным расширением исчисления* L^* *в смысле стандартного перевода, то есть верна следующая равносильность:*

$$\mathrm{L}^* \vdash A_1 \dots A_n \to B \Leftrightarrow \mathrm{MCLL} \vdash \widehat{A}_1 \dots \widehat{A}_n \to \widehat{B}.$$

Пример 3.3. Выводимая в MCLL секвенция $\to (\overline{p}_2 \otimes p_3)\overline{p}_3(p_2 \otimes \overline{p}_1)p_1$ является образом выводимой в L^* секвенции $(p_1/p_2)p_3(p_3 \setminus p_2) \to p_1$.

3.2 Отношение совместимости в исчислении MCLL

Добавление двусторонних секвенций в исчисление MCLL позволяет сформулировать понятие совместимости и для этого исчисления.

Определение 3.2.

1. Формулы $A, B \in \mathrm{Fm}$ называются *совместимыми*, если существует такая формула $C \in \mathrm{Fm}$, что одновременно выполняются условия $\mathrm{MCLL} \vdash A \to C$ и $\mathrm{MCLL} \vdash B \to C$. В этом случае формула C называется совмещающей для A и B.
2. Формулы $A, B \in \mathrm{Fm}$ называются *соединимыми*, если существует такая формула $D \in \mathrm{Fm}$, что одновременно выполняются условия $\mathrm{MCLL} \vdash D \to A$ и $\mathrm{MCLL} \vdash D \to B$.

Следующая лемма является аналогом леммы 2.2 для исчисления MCLL и была доказана в [27].

Лемма 3.1. *Следующие условия равносильны:*

1. Формулы $A, B \in \mathrm{Fm}$ *являются совместимыми в исчислении* MCLL.
2. Формулы $A, B \in \mathrm{Fm}$ *являются соединимыми в исчислении* MCLL.

Из леммы 3.1 следует, что отношение совместимости в исчислении MCLL также является эквивалентностью. Обозначим через $\mathcal{G}$ свободную группу, порождённую множеством Var; групповую операцию, операцию взятия обратного элемента и единицу группы будем обозначать так же, как и в главе 2.1 при изучении интерпретации для типов исчисления Ламбека. Для каждого типа определим понятия интерпретации в свободной группе и баланса. Определение интерпретации приведено ниже, а *балансом* $d(A)$ формулы A называется разность между числом вхождений связок $\parr$ и $\otimes$ в данную формулу. Например, $d((p_1 \parr p_2) \otimes (\overline{p}_1 \otimes p_3)) = -1$.

Определение 3.3. *Интерпретация* $[\![A]\!]$ формулы A в свободной группе $\mathcal{G}$ есть отображение, задаваемое следующими правилами:

1. $[\![p]\!] = p$, если $p \in \mathrm{Var}$,
2. $[\![\overline{p}]\!] = p^{-1}$, если $p \in \mathrm{Var}$,
3. $[\![A \otimes B]\!] = [\![A \parr B]\!] = [\![A]\!][\![B]\!]$.

Следующая теорема была доказана М. Р. Пентусом в работе [27].

Теорема 5. *Формулы* $A, B \in \mathrm{Fm}$ *являются совместимыми в исчислении* MCLL *тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия* $[\![A]\!] = [\![B]\!]$ *и* $d(A) = d(B)$.

Рассмотрим взаимосвязь между совместимостью типов A и B в исчислении L^* и совместимостью их образов в исчислении MCLL.

Лемма 3.2. *Для любой формулы* $A \in \mathrm{Fm}$ *верно, что* $[\![A^\perp]\!] = [\![A]\!]^{-1}$.

Доказательство. Индукция по построению формулы A. □

Лемма 3.3. *Для любого типа* $A \in \mathrm{Tp}$ *верно равенство* $[\![\widehat{A}]\!] = [\![A]\!]$.

Доказательство. Индукция по построению A, для примитивных типов утверждение очевидно. Пусть $A = B \cdot C$, тогда $[\![A]\!] = [\![B]\!][\![C]\!] = [\![\widehat{B} \otimes \widehat{C}]\!] = [\![\widehat{A}]\!]$, что и было нужно. Пусть $A = B/C$, тогда $[\![A]\!] = [\![B]\!][\![C]\!]^{-1} = [\![\widehat{B}]\!][\![\widehat{C}]\!]^{-1} = [\![\widehat{B}]\!][\![\widehat{C}^\perp]\!] = [\![\widehat{B} \parr \widehat{C}^\perp]\!] = [\![\widehat{A}]\!]$. Случай $A = C \setminus B$ разбирается аналогично. Лемма доказана. □

Лемма 3.4. *Типы* $A, B \in \mathrm{Tp}$ *совместимы в исчислении* L^* *тогда и только тогда, когда их образы* $\widehat{A}$ *и* $\widehat{B}$ *совместимы в исчислении* MCLL.

Доказательство. Пусть типы A и B совместимы, тогда для них найдётся совмещающий тип C, то есть $\mathrm{L}^* \vdash A \to C$, $\mathrm{L}^* \vdash B \to C$. В силу консервативности исчисления MCLL над L^* верно, что $\mathrm{MCLL} \vdash \widehat{A} \to \widehat{C}$ и $\mathrm{MCLL} \vdash \widehat{B} \to \widehat{C}$, то есть формула $\widehat{C}$ будет совмещающей для $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$.

Пусть теперь формулы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ совместимы в MCLL. Тогда по теореме 5 $[\![\widehat{A}]\!] = [\![\widehat{B}]\!]$, откуда по лемме 3.3 следует, что $[\![A]\!] = [\![B]\!]$, что по теореме 1 влечёт совместимость типов A и B. Лемма доказана. □

Пусть $A \in \mathrm{Fm}$ — формула, тогда будем обозначать через $l(A)$ длину A, равную числу вхождений переменных в A. Заметим, что для всякого типа A исчисления Ламбека величины $l(A)$ и $l(\widehat{A})$ совпадают. Если $\Gamma \in \mathrm{Fm}^*$ — непустая последовательность формул и $\Gamma = A_1 \ldots A_n$, то положим $l(\Gamma) = \sum\limits_{i=1}^{n} l(A_i)$. Отметим, что суммарное число вхождений переменных и связок в формулу A всегда равно $2l(A) - 1$.

Пример 3.4. Пусть $A = (p_1 \parr \overline{p}_2) \otimes (p_3 \parr \overline{p}_1)$, тогда $l(A) = 4$.

Пусть $A, B \in \mathrm{Tp}$ — совместимые типы исчисления L^*, обозначим через $m_j^{\mathrm{MCLL}}(A, B)$ длину самой короткой совмещающей формулы для их переводов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$. Если обозначить через $M_j^{\mathrm{MCLL}}(l_1, l_2)$ максимум данной величины по всем возможным типам длины l_1 и l_2 соответственно, то следующая лемма прямо вытекает из доказательства леммы 3.4.

Лемма 3.5. *Функция $M_j^{\mathrm{MCLL}}(l_1, l_2)$ является нижней оценкой для функции $M_j(l_1, l_2)$.*

Таким образом, для доказательства нижней оценки для величины $M_j(l_1, l_2)$ достаточно ограничить снизу величину $M_j^{\mathrm{MCLL}}(l_1, l_2)$. Этому и будет посвящена оставшаяся часть данной главы.

3.3 Упрощённые сети доказательства

Для доказательства нижней оценки на длину совмещающей формулы для данных совместимых формул A и B нам понадобится сформулировать необходимое условие того, что формула C является совмещающей для A и B. Условие будет основано на сетях доказательства — графическом критерии выводимости в исчислении MCLL.

Понятие сети доказательства было впервые введено в [12] для линейной логики. Различные варианты сетей доказательства для родственных исчислений (в основном мультипликативной циклической линейной логики и исчисления Ламбека) предлагались в работах [1], [30] и [28]. Мы будем использовать критерий выводимости, доказанный в [28]. Поскольку нас интересует только необходимое условие выводимости, мы не будем вводить понятие сети доказательства в полном объёме, а используем только часть условий соответствующего критерия, что позволит упростить формулировку.

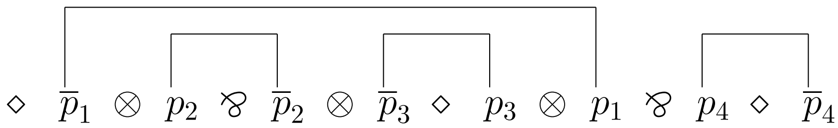
Каждой секвенции $\to \Gamma$ поставим в соответствие структуру $\mathbf{\Omega}_\Gamma = \langle \Omega_\Gamma, \leqslant_\Gamma \rangle$. Для каждой формулы $A \in \mathrm{Fm}$ введём её *представляющее* *слово* $\lceil A \rceil$, полученное удалением из записи A всех скобок. Если $\Gamma = A_1 \ldots A_n$, то $\lceil \Gamma \rceil = \diamond \lceil A_1 \rceil \diamond \ldots \diamond \lceil A_n \rceil$, где $\diamond$ — новый символ, называемый *ромбом*. Тогда элементами множества Ω_Γ будут пары $\langle s_k, k \rangle$, где через s_k обозначен k-й слева символ в записи $\lceil \Gamma \rceil$ (нумерация начинается с 0). Отношение порядка $\leqslant_\Gamma$ осуществляет сравнение таких пар по второму элементу, соответствующее отношение строгого порядка будем обозначать через $<_\Gamma$.

Пример 3.5. Для секвенции $\to \Gamma$, где $\Gamma = (p_1 \invamp (p_2 \otimes \overline{p}_3))(p_3 \invamp \overline{p}_1)$, представляющее слово равно $\lceil \Gamma \rceil = \diamond p_1 \invamp p_2 \otimes \overline{p}_3 \diamond p_3 \invamp \overline{p}_1$, а $\Omega_\Gamma = \{\langle \diamond, 0 \rangle, \langle p_1, 1 \rangle, \langle \invamp, 2 \rangle, \langle p_2, 3 \rangle, \langle \otimes, 4 \rangle, \langle \overline{p}_3, 5 \rangle, \langle \diamond, 6 \rangle, \langle p_3, 7 \rangle, \langle \invamp, 8 \rangle, \langle \overline{p}_1, 9 \rangle\}$.

Элементы множества Ω_Γ будем обозначать греческими буквами $\alpha, \beta, \ldots$. Определим множества $\Omega_\Gamma^{\invamp} = \{\langle \invamp, k \rangle \in \Omega_\Gamma\}$, $\Omega_\Gamma^{\otimes} = \{\langle \otimes, k \rangle \in \Omega_\Gamma\}$, $\Omega_\Gamma^{\diamond} = \{\langle \diamond, k \rangle \in \Omega_\Gamma\}$, $\Omega_\Gamma^{\mathrm{At}^+} = \{\langle p, k \rangle \in \Omega_\Gamma \mid p \in \mathrm{Var}\}, \Omega_\Gamma^{\mathrm{At}^-} = \{\langle \overline{p}, k \rangle \in \Omega_\Gamma \mid p \in \mathrm{Var}\}, \Omega_\Gamma^{\mathrm{At}} = \Omega_\Gamma^{\mathrm{At}^+} \cup \Omega_\Gamma^{\mathrm{At}^-}, \Omega_\Gamma^{\invamp\diamond} = \Omega_\Gamma^{\invamp} \cup \Omega_\Gamma^{\diamond}$. Положим $\mathrm{In}(\alpha, \beta) = \{\gamma \in \Omega_\Gamma \mid \alpha < \gamma < \beta\} \cup \{\gamma \in \Omega_\Gamma \mid \beta < \gamma < \alpha\}$, $\mathrm{Out}(\alpha, \beta) = \Omega_\Gamma - \mathrm{In}(\alpha, \beta) - \{\alpha, \beta\}$ и $\mathrm{Prec}(\alpha) = \{\gamma \in \Omega_\Gamma \mid \gamma < \alpha\}$. Для каждого вхождения $\alpha \in \Omega_\Gamma$ обозначим через $\delta_\Gamma(\alpha)$ разность $|\mathrm{Prec}(\alpha) \cap \Omega_\Gamma^{\invamp\diamond}| - |\mathrm{Prec}(\alpha) \cap \Omega_\Gamma^{\otimes}|$. Аналогично обозначим $\delta_\Gamma(\alpha, \beta) = |\mathrm{In}(\alpha, \beta) \cap \Omega_\Gamma^{\invamp\diamond}| - |\mathrm{In}(\alpha, \beta) \cap \Omega_\Gamma^{\otimes}|$. Фактически, величина $\delta_\Gamma(\alpha)$ равна разности между суммарным числом значков $\invamp$ и $\diamond$ и числом связок $\otimes$ слева от вхождения α, а $\delta_\Gamma(\alpha, \beta)$ — разности между соответствующими величинами для интервала между α и β.

Определение 3.4. Неориентированный граф $G = \langle \mathbf{\Omega}_\Gamma, \mathcal{E} \rangle$, где $\mathcal{E} \subset \mathbf{\Omega}_\Gamma \times \mathbf{\Omega}_\Gamma$ — симметричное бинарное отношение, называется $<_\Gamma$-*планарным*, если для любых рёбер $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathcal{E}$ либо $\mathrm{In}(\alpha_1, \alpha_2) \subseteq \mathrm{In}(\beta_1, \beta_2)$, либо $\mathrm{In}(\beta_1, \beta_2) \subseteq \mathrm{In}(\alpha_1, \alpha_2)$, либо $\mathrm{In}(\alpha_1, \alpha_2) \cap \mathrm{In}(\beta_1, \beta_2) = \varnothing$. Неформально это означает, что если элементы множества Ω_Γ расположены на оси абсцисс в порядке $<_\Gamma$, то рёбра графа G можно нарисовать в верхней полуплоскости без пересечений.

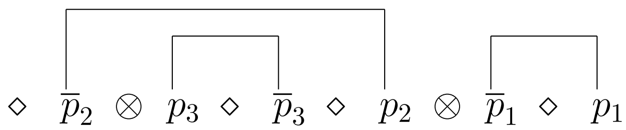
Пример 3.6. Пусть $\Gamma = ((\overline{p}_1 \otimes p_2) \invamp (p_3 \otimes \overline{p}_3))((\overline{p}_2 \otimes p_1) \invamp p_4)\overline{p}_4$, тогда изображённый на рисунке граф $G = \langle \mathbf{\Omega}, \mathcal{E} \rangle$ является $<_\Gamma$-планарным.



Определение 3.5. *Упрощённой сетью доказательства* называется пара $\mathcal{N} = \langle \mathbf{\Omega}_\Gamma, \mathcal{E} \rangle$, где $\mathcal{E}$ — симметричное бинарное отношение, называемое множеством *аксиомных связей*, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $|\Omega_\Gamma^{\parr\diamond}| - |\Omega_\Gamma^{\otimes}| = 2$,
2. $\mathcal{E}$ задаёт разбиение множества $\Omega_\Gamma^{\mathrm{At}}$ на пары, при этом в каждую пару входят элементы $\langle p, k \rangle$ и $\langle \overline{p}, l \rangle$ для некоторой переменной $p \in \mathrm{Var}$.
3. $\forall \langle \alpha, \beta \rangle \in \mathcal{E} \; (\delta_\Gamma(\alpha, \beta) = 1)$.
4. $\mathcal{N}$ является $<_\Gamma$-планарным графом.

Пример 3.7. Пусть $\Gamma = (\overline{p}_2 \otimes p_3)\overline{p}_3(p_2 \otimes \overline{p}_1)p_1$, тогда изображённый на рисунке граф $\mathcal{N} = \langle \mathbf{\Omega}_\Gamma, \mathcal{E} \rangle$ является упрощённой сетью доказательства для секвенции $\to \Gamma$. Заметим, что секвенция $\to \Gamma$ выводима в исчислении MCLL.



Следующая теорема следует из теоремы 7.12 работы [28].

Теорема 6. *Для всякой выводимой в* MCLL *секвенции* Γ *существует упрощённая сеть доказательства, то есть можно найти отношение* $\mathcal{E} \in \Omega_\Gamma^{\mathrm{At}} \times \Omega_\Gamma^{\mathrm{At}}$*, такое что граф* $\mathcal{N} = \langle \mathbf{\Omega}_\Gamma, \mathcal{E} \rangle$ *будет упрощённой сетью доказательства.*

3.4 Оценки на число вхождений атомов в совмещающий тип

В данном разделе на основе упрощённых сетей доказательства мы докажем, что при некоторых условиях на вхождения переменной p и её отрицания в совместимые типы A и B можно оценить снизу число вхождений этой переменной и её отрицания в совмещающий тип C. В дальнейшем будем обозначать число вхождений атомов p и $\overline{p}$ в формулу A через $|A|_p$ и $|A|_{\overline{p}}$. При этом при подсчёте $|A|_p$ вхождения $\overline{p}$ не учитываются. Напомним, что если α — некоторое вхождение атома в последовательность формул Γ, то через $\delta_\Gamma(\alpha)$ обозначается разность между суммарным числом вхождений паров и ромбов и числом тензоров в множестве Ω_Γ слева от α.

Пример 3.8. Пусть $A = (p_1 \otimes \overline{p}_2) \parr ((p_1 \parr p_2) \otimes \overline{p}_1)$, тогда $|A|_{p_1} = 2$, $|A|_{\overline{p}_1} = 1$, $|A|_{p_2} = |A|_{\overline{p}_2} = 1$. Если α — вхождение атома p_2 в тип A, то $\delta_A(\alpha) = 2$.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.6. *Для любой формулы $A \in \mathrm{Fm}$ верно, что $d(A^\perp) = -d(A)$.*

Доказательство. Индукция по построению формулы A. В случае $A \in \mathrm{At}$ утверждение выполняется. Пусть $A = B \otimes C$, тогда $A^\perp = C^\perp \parr B^\perp$ и $d(A^\perp) = d(C^\perp) + 1 + d(B^\perp) = -(d(B) + d(C) - 1) = -d(A)$. Случай $A = B \parr C$ разбирается аналогично. $\square$

Лемма 3.7. *Для любой формулы $A \in \mathrm{Fm}$ и любой переменной $p \in \mathrm{Var}$ выполняются равенства $|A|_p = |A^\perp|_{\overline{p}}$ и $|A|_{\overline{p}} = |A^\perp|_p$.*

Доказательство. Индукция по построению формулы A. $\square$

Лемма 3.8. *Пусть $A \in \mathrm{Fm}$ — произвольная формула исчисления* MCLL, *$p \in \mathrm{Var}$ — формула, такая что $|A|_p = 1$ и α — единственное вхождение p в формулу A. Пусть α' — единственное вхождение $\overline{p}$ в формулу $A^\perp$, тогда $\delta_{A^\perp}(\alpha') = \delta_A(\alpha) - d(A)$.*

Доказательство. Индукция по построению формулы A. Если $A = p$, то $\delta_{A^\perp}(\alpha') = 1$ и $\delta_A(\alpha) - d(A) = 1 - 0 = 1$, база индукции доказана. Пусть $A = B \otimes C$, соответственно $A^\perp = C^\perp \parr B^\perp$, тогда возможны два подслучая в зависимости от того, в какую из подформул входит переменная p (для сокращения записи мы отождествим вхождения p в A и в одну из подформул B и C). Пусть она входит в подформулу B, тогда $\delta_A(\alpha) = \delta_B(\alpha)$ и $\delta_{A^\perp}(\alpha') = 1 + d(C^\perp) + 1 + (\delta_{B^\perp}(\alpha') - 1) = 1 - d(C) + \delta_B(\alpha) - d(B) = -d(A) + \delta_A(\alpha)$, что и требовалось. Теперь пусть p входит в подформулу C, тогда $\delta_A(\alpha) = \delta_C(\alpha) - 1 + d(B)$, при этом $\delta_{A^\perp}(\alpha') = \delta_{C^\perp}(\alpha') = \delta_C(\alpha) - d(C) = \delta_A(\alpha) - (d(B) + d(C) - 1) = \delta_A(\alpha) - d(A)$, что и было нужно. Случай $A = B \parr C$ разбирается аналогично. $\square$

Лемма 3.9. *Пусть $A, B \in \mathrm{Fm}$ — совместимые формулы, C — их совмещающая формула. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1. *Если $p \in \mathrm{Var}$ — переменная, такая что $|A|_p = |B|_p = 1$ и $|A|_{\overline{p}} = |B|_{\overline{p}} = 0$, а α и β — вхождения p в A и B соответственно, то $|C|_p + |C|_{\overline{p}} \geqslant |\delta_A(\alpha) - \delta_B(\beta)| + 1$.*
2. *Если $p \in \mathrm{Var}$ — переменная, такая что $|A|_p = |B|_p = 0$ и $|A|_{\overline{p}} = |B|_{\overline{p}} = 1$, а α и β — вхождения $\overline{p}$ в A и B соответственно, то $|C|_p + |C|_{\overline{p}} \geqslant |\delta_A(\alpha) - \delta_B(\beta)| + 1$.*

Доказательство. Достаточно доказать первый пункт леммы, второй доказывается аналогично. По определению совместимости секвенции $\to A^\perp C$ и $\to B^\perp C$ являются выводимыми. Обозначим через α' и β' единственные вхождения атома $\overline{p}$ в $A^\perp$ и $B^\perp$ соответственно. Заметим, что в силу совместимости формул A и B и леммы 3.8 выполняются равенства $\delta_{A^\perp}(\alpha') = \delta_A(\alpha) - d(A) = \delta_A(\alpha) - d(B)$ и равенство $\delta_{B^\perp}(\beta') = \delta_B(\beta) - d(B)$, таким образом, $\delta_{A^\perp}(\alpha') - \delta_{B^\perp}(\beta') = \delta_A(\alpha) - \delta_B(\beta)$. Обозначим эту разность через δ_0, без ограничения общности можно считать $\delta_0 \geqslant 0$.

Пусть γ — некоторое вхождение атома в формулу C, отождествим его с соответствующими вхождениями этого же атома в последовательности формул $A^\perp C$ и $B^\perp C$. Заметим, что в силу совместимости формул A и B выполняется равенство $\delta_{A^\perp C}(\gamma) = d(A^\perp) + 1 + \delta_C(\gamma) = d(B^\perp) + 1 + \delta_C(\gamma) = \delta_{B^\perp C}(\gamma)$. Обозначим эту величину через $\delta(\gamma)$.

По теореме 6 для секвенций $\to A^{\perp}C$ и $\to B^{\perp}C$ найдутся упрощённые сети доказательства $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ с множествами аксиомных связей $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ соответственно. По определению упрощённой сети доказательства найдётся такая последовательность вхождений $\alpha_0 = \alpha', \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n} = \beta'$, в которой на нечётных местах находятся вхождения атома p в формулу C, а на чётных — атома $\overline{p}$ в формулу C или (в случае α_0 и α_{2n}) в формулы $A^{\perp}$ и $B^{\perp}$ и для которой для всех $i < n$ выполняются условия $(\alpha_{2i}, \alpha_{2i+1}) \in \mathcal{E}_1, (\alpha_{2i+1}, \alpha_{2i+2}) \in \mathcal{E}_2$. Заметим, что $\alpha_0 < \alpha_1$ и $\alpha_{2n} < \alpha_{2n-1}$ в смысле линейного порядка на секвенциях $\to A^{\perp}C$ и $\to B^{\perp}C$. Отсюда следует, что $\delta(\alpha_1) = \delta(\alpha_0) + 1$ и $\delta(\alpha_{2n-1}) = \delta(\alpha_{2n}) + 1$, что влечёт равенство $|\delta(\alpha_1) - \delta(\alpha_{2n-1})| = \delta_0$.

Заметим, что в силу пункта 3 определения упрощённой сети доказательства для всех $i < 2n$ будет выполнено условие $|\delta(\alpha_i) - \delta(\alpha_{i+1})| = 1$. Отсюда заключаем, что $|\delta(\alpha_1) - \delta(\alpha_{2n-1})| \leqslant 2n - 2$, то есть $2n \geqslant \delta_0 + 2$. Поскольку по построению последовательности $\{\alpha_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 2n\}$ все вхождения $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}$ являются вхождениями либо атома p, либо атома $\overline{p}$ в формулу C, то $|C|_p + |C|_{\overline{p}} \geqslant 2n - 1 \geqslant \delta_0 + 1 = |\delta_A(\alpha) - \delta_B(\beta)| + 1$. Лемма доказана. $\square$

Пример 3.9. Пусть $A = (q \otimes p) \parr r, B = (q \parr p) \otimes r$, тогда формулы A и B совместимы, и $C = (q \otimes p) \parr \overline{p} \parr (p \otimes r)$ — их совмещающая формула. Пусть α и β — вхождения атома p в формулы A и B соответственно, α' и β' — вхождения атома $\overline{p}$ в формулы $A^{\perp}$ и $B^{\perp}$. Заметим, что $\delta_A(\alpha) - \delta_B(\beta) = \delta_{A^{\perp}}(\alpha') - \delta_{B^{\perp}}(\beta') = 2$, тогда по лемме 3.9 $|C|_p + |C|_{\overline{p}} \geqslant 3$.

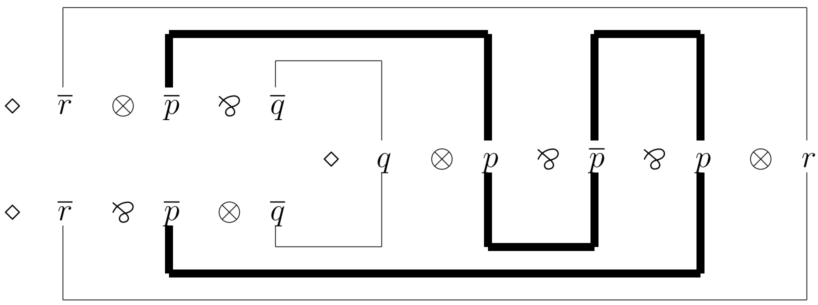


Рис. 3.1: Иллюстрация доказательства леммы 3.9.

Отношения $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ из доказательства леммы 3.9 показаны на рисунке 3.1. Путь по отношению $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ из α' в β' обозначен утолщёнными линиями.

Лемма 3.10. *Пусть* $A, B \in \mathrm{Fm}$ *— совместимые формулы, а* q *— переменная, такая что* $|A|_q = |A|_{\overline{q}} = 1$ *и* $|B|_q = |B|_{\overline{q}} = 0$*. Пусть вхождения* α *и* β *атомов* q *и* $\overline{q}$ *в формулу* A *удовлетворяют условию* $|\delta_A(\alpha) - \delta_A(\beta)| \neq 1$*. Тогда для всякой формулы* C*, которая является совмещающей для* A *и* B*, выполняется неравенство* $|C|_q + |C|_{\overline{q}} \geqslant |\delta_A(\alpha) - \delta_A(\beta)| + 1$*.*

Доказательство. Обозначим через α' и β' вхождения $\overline{q}$ и q в формулу $A^{\perp}$, соответствующие вхождениям α и β. Тогда по лемме 3.8 имеем $\delta_{A^{\perp}}(\alpha') - \delta_{A^{\perp}}(\beta') = (\delta_A(\alpha) - d(A)) - (\delta_A(\beta) - d(A)) = \delta_A(\alpha) - \delta_A(\beta)$. Обозначим эту величину через δ_0, тогда по условию леммы $\delta_0 \neq 1$.

Заметим, что в силу условия $\delta_0 \neq 1$ вхождения α' и β' не могут быть связаны аксиомной связью. Следуя обозначениям леммы 3.9 и рассуждая так же, как при её доказательстве, мы получим, что найдётся такая последовательность $\beta_1, \alpha_1, \ldots, \beta_k, \alpha_k \in \Omega_C^{\mathrm{At}}$, что все β_j являются вхождениями атома q, а все α_j — вхождениями атома $\overline{q}$, при этом для всех $i \leqslant k$ верно, что $(\beta_i, \alpha_i) \in \mathcal{E}_2$, для всех $i < k$ верно, что $(\alpha_i, \beta_{i+1}) \in \mathcal{E}_1$, а также $(\alpha', \beta_1) \in \mathcal{E}_1$ и $(\alpha_k, \beta') \in \mathcal{E}_1$. Заметим, что $\delta(\beta_1) - \delta(\alpha_k) = \delta(\alpha') - \delta(\beta') = \delta_0$. Аналогично предыдущей лемме получаем, что $|\delta_0| < 2k - 1$, откуда и получается утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$

Пример 3.10. Пусть $A = p \otimes q \otimes \overline{q} \otimes \overline{p}, B = s \otimes t \otimes \overline{t} \otimes \overline{s}$, тогда формулы A и B совместимы, а C — их совмещающая формула. Обозначим через α и β вхождения атомов p и $\overline{p}$ в формулу A, тогда $\delta_A(\alpha) - \delta_A(\beta) = -3$. По лемме 3.10 выполняется неравенство $|C|_p + |C|_{\overline{p}} \geqslant 4$. Аналогичным образом верно неравенство $|C|_s + |C|_{\overline{s}} \geqslant 4$.

Мы будем называть формулу $A \in \mathrm{Fm}$ *тонкой*, если для всякой переменной $p \in \mathrm{Var}$ выполняются условия $|A|_p \leqslant 1$ и $|A|_{\overline{p}} \leqslant 1$. Переменная p называется *нейтральной* для A, если $|A|_p = |A|_{\overline{p}} = 1$. Если переменная p не является нейтральной для тонкой формулы A, но A содержит один из атомов p и $\overline{p}$, то данный атом будем называть *одиночным.* Пара тонких совместимых формул A, B называется *тонкой*, если данные формулы не содержат общих нейтральных переменных. Если $|A|_\pi = 1$, обозначим через $\gamma_A(pi)$ вхождение атома π в формулу A. Обозначим через $D(A)$ сумму $\sum\limits_p(|\delta_A(\gamma_A(p), \gamma_A(\overline{p}))| + 1)$, где p пробегает все нейтральные для A переменные, такие что $\delta_A(\gamma_A(p), \gamma_A(\overline{p})) \neq 1$. Если A и B образуют тонкую пару, обозначим через $E(A, B)$ сумму $\sum\limits_\pi(|\delta_A(\gamma_A(\pi)) - \delta_B(\gamma_B(\pi))| + 1)$, где суммирование ведётся по всем одиночным атомам π (в силу совместимости множество одиночных атомов для A и B совпадает). Следующая лемма непосредственно вытекает из лемм 3.9 и 3.10.

Лемма 3.11. *Для любой тонкой пары совместимых формул A и B и любой формулы C, которая является совмещающей для A и B, выполняется неравенство $l(C) \geqslant D(A) + D(B) + E(A, B)$.*

3.5 Доказательство нижней оценки

Задачей данного раздела является доказательство основной теоремы данной главы:

Теорема 7. *Для любых k и l одинаковой чётности найдутся такие совместимые типы T и U исчисления L^* (исчисления L) длины k и l соответственно, что для всякого типа C, который является совмещающим для T и U, выполняется неравенство $l(C) \geqslant \frac{k^2+l^2}{8} + \frac{k+l}{4} - 9$.*

С этой целью для всех $k, l \geqslant 1$ мы построим формулы A_k, B_l исчисления MCLL, являющиеся переводами некоторых типов T_k и U_l исчисления Ламбека, такие что $l(A_k) = k$, $l(B_l) = l$ и $D(A_k) + D(B_l) + E(A_k, B_l) \geqslant \frac{k^2+l^2}{8} + \frac{k+l}{4} - 9$. Вследствие леммы 3.11 из существования данных типов будет следовать требуемая нижняя оценка на длину кратчайшей совмещающей формулы в исчислении MCLL, а значит, и на длину совмещающего типа в исчислении L^*. Оставшаяся часть данного раздела содержит алгоритм построения искомых типов и доказательство соответствующих оценок.

Пусть множество Pr примитивных типов совпадает с множеством переменных Var и содержит для всякого i элементы p_i, r_i, s_i, t_i, причём все такие примитивные типы различны. Для каждого $i > 0$ индуктивно определим вспомогательные типы V_i, W_i следующим образом: $V_i = (p_i \cdot \ldots \cdot p_1)/(q_1 \cdot \ldots \cdot q_i)$, $W_1 = p_1/q_1$, $W_{i+1} = p_{i+1}/(q_{i+1}/W_i)$. Также определим для каждого натурального k тип T_k. Если $k = 4i$, то $T_k = V_i \setminus W_i$. T_{4i+2} получается из T_{4i} заменой вхождений примитивного типа p_1 на тип $p_1 \cdot p_0$, T_2 полагаем равным p_1/q_1. Для нечётных k определим $T_k = p' \cdot T_{k-1}$, где p' — новый примитивный тип, $T_1 = p'$. Тип U_k получается из T_k заменой всех вхождений p_j на r_j и q_j на t_j.

Пример 3.11.

$T_1 = U_1 = p'$,

$T_2 = p_1/q_1, U_2 = r_1/t_1$,

$T_3 = p' \cdot (p_1/q_1)$,

$U_3 = p' \cdot (r_1/t_1)$,

$T_4 = (p_1/q_1) \setminus (p_1/q_1)$,

$U_4 = (r_1/t_1) \setminus (r_1/t_1)$

$T_5 = p' \cdot ((p_1/q_1) \setminus (p_1/q_1)$,

$U_5 = p' \cdot ((r_1/t_1) \setminus (r_1/t_1))$,

$T_6 = ((p_1 \cdot p_0)/q_1) \setminus ((p_1 \cdot p_0)/q_1)$,

$U_6 = ((r_1 \cdot r_0)/t_1) \setminus ((r_1 \cdot r_0)/t_1)$,

$T_7 = p' \cdot (((p_1 \cdot p_0)/q_1) \setminus ((p_1 \cdot p_0)/q_1))$,

$U_7 = p' \cdot (((r_1 \cdot r_0)/t_1) \setminus ((r_1 \cdot r_0)/t_1))$,

$T_8 = ((p_2 \cdot p_1)/(q_1 \cdot q_2)) \setminus (p_2/(q_2/(p_1/q_1)))$,

$U_8 = ((r_2 \cdot r_1)/(t_1 \cdot t_2)) \setminus (r_2/(t_2/(r_1/t_1)))$.

Обозначим через A_k и B_l переводы типов T_k и U_l в линейную логику. Докажем некоторые свойства построенных типов и формул. Пусть A — тонкая формула, а $p \in \mathrm{Var}$, тогда в доказываемой ниже лемме будем обозначать через $\alpha_A(p)$ и $\beta_A(p)$ вхождения атомов p и $\overline{p}$ в формулу A (в случае если таковые имеются).

Лемма 3.12.

1. *Для любого m выполняются равенства* $\lceil \widehat{V}_m \rceil = p_m \otimes \ldots \otimes p_1 \parr q_1 \parr \ldots \parr q_m$, $\lceil \widehat{W}_m \rceil = p_m \parr \ldots \parr p_1 \parr q_1 \otimes \ldots \otimes q_m$.
2. $[\![A_k]\!] = [\![T_k]\!] = \varepsilon$, *если k чётно*, $[\![A_k]\!] = [\![T_k]\!] = p'$, *если k нечётно.*
3. $d(A_k) = 1$, *если k чётно*, $d(A_k) = 0$, *если k нечётно.*
4. *Пусть числа i, k, m таковы, что $m = \lfloor \frac{k}{4} \rfloor$ и $0 < i \leqslant m$, тогда* $\delta_{A_k}(\alpha_{A_K}(p_i)) - \delta_{A_k}(\beta_{A_K}(p_i)) = \delta_{A_k}(\alpha_{A_K}(q_i)) - \delta_{A_k}(\beta_{A_K}(q_i)) = 1 + 2(m - i)$. *Если $k > 4$ и $k - 4m \in \{2, 3\}$, то* $\delta_{A_k}(\alpha_{A_K}(p_0)) - \delta_{A_k}(\beta_{A_K}(p_0)) = 2m - 1$.

Доказательство. Слова $\lceil \widehat{V}_m \rceil$ и $\lceil \widehat{W}_m \rceil$ вычисляются по определению перевода типов из исчисления Ламбека в мультипликативную циклическую линейную логику. Из пункта 1 сразу следует, что для любого m выполняется равенство $d(\widehat{V}_m) = d(\widehat{W}_m) = 1$, после этого из равенства $A_{4m} = \widehat{V}_m^{\perp} \parr \widehat{W}_m$ и леммы 3.6 получаем, что $d(A_{4m}) = -d(\widehat{V}_m) + 1 + d(\widehat{W}_m) = 1$. Также непосредственно проверяется, что $d(A_{4m+2}) = 1$. Для нечётных k утверждение вытекает из равенства $A_k = p' \otimes A_{k-1}$.

Нетрудно видеть, что для всякого m верно представление $[\![V_m]\!] = [\![W_m]\!] = p_m \ldots p_1 q_1^{-1} \ldots q_m^{-1}$. Отсюда следует, что $[\![T_{4m}]\!] = [\![V_m]\!]^{-1} [\![W_m]\!] = \varepsilon$. Схожим образом доказывается равенство $[\![T_{4m+2}]\!] = \varepsilon$. Для нечётных k из равенства $A_k = p' \otimes A_{k-1}$ вытекает требуемое равенство $[\![T_k]\!] = p'$. Равенство $[\![A_k]\!] = [\![T_k]\!]$ следует из леммы 3.3.

Таким образом, мы доказали первые 3 пункта леммы. Докажем четвёртый пункт. Пусть $k = 4m$, тогда $A_k = \widehat{V}_m^{\perp} \parr \widehat{W}_m$. Соответственно, $\delta_{A_k}(\alpha_{A_k}(p_i)) = \delta_{A_k}(\alpha_{\widehat{W}_m}(p_i)) = 2 + d(\widehat{V}_m^{\perp}) + \delta_{\widehat{W}_m}(\alpha_{\widehat{W}_m}(p_i)) = 1 + (m - i)$. Аналогично $\delta_{A_k}(\beta_{A_k}(p_i)) = \delta_{A_k}(\beta_{\widehat{V}_m^{\perp}}(p_i)) = \delta_{\widehat{V}_m^{\perp}}(\beta_{\widehat{V}_m^{\perp}}(p_i)) = \delta_{\widehat{V}_m}(\alpha_{\widehat{V}_m}(p_i)) - d(\widehat{V}_m) = 1 + (i - m) - 1 = i - m$. Также $\delta_{A_k}(\alpha_{A_k}(q_i)) = \delta_{\widehat{V}_m^{\perp}}(\alpha_{\widehat{V}_m^{\perp}}(q_i)) = \delta_{\widehat{V}_m}(\beta_{\widehat{V}_m}(q_i) - 1 = m - i + 1$ и $\delta_{A_k}(\beta_{A_k}(q_i)) = 1 + \delta_{\widehat{W}_m}(\beta_{\widehat{W}_m}(q_i)) = m + 2 - i$. Отсюда получаем утверждение пункта 4 для случаев $k = 4m$ и $k = 4m + 1$. В случае $k \in \{4m + 2, 4m + 3\}$ рассуждения аналогичны. Лемма доказана. □

Лемма 3.13.

1. *Для любого чётного k выполняется неравенство $D(A_k) \geqslant \frac{k^2}{8}+\frac{k}{2}-\frac{9}{2}$.*
2. *Для любого нечётного k выполняется неравенство $D(A_k) \geqslant \frac{k^2}{8} + \frac{k}{4} - 5$.*

Доказательство. Заметим, что если $m = \lfloor \frac{k}{4} \rfloor$ и $m - 4k < 2$, то множество нейтральных переменных для формулы A_k равно в точности $\{p_i, q_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$. В случае если $k - 4m \in \{2, 3\}$ в это множество добавляется переменная p_0. Используя лемму 3.12, получаем, что при $k = 4m$ выполняется равенство $D(T_k) = 2\sum\limits_{i=2}^{m}((2i-1)+1) = 2(m^2+m-2) = \frac{k^2}{8}+\frac{k}{2}-4$, что и было нужно. При $k = 4m+2$ имеем $D(T_k) = 2\sum\limits_{i=2}^{k}((2i-1)+1)+2m = 2(m^2 + 2m - 2) = \frac{(k-2)^2}{8} + (k-2) - 4 = \frac{k^2}{8} + \frac{k}{2} - \frac{9}{2}$, что и требовалось. Для чётных k лемма доказана.

Разберём случай нечётных k. При этом $D(T_k) = D(T_{k-1})$, поэтому при $k = 4m+1$ можно записать $D(T_k) = \frac{(k-1)^2}{8} + \frac{k-1}{2} - 4 = \frac{k^2}{8} + \frac{k}{4} - 4\frac{3}{8} > \frac{k^2}{8}+\frac{k}{4}-5$. При $k = 4m+3$ аналогично имеем $D(T_k) = \frac{(k-1)^2}{8}+\frac{(k-1)}{2}-\frac{9}{2} = \frac{k^2}{8} + \frac{k}{4} - 4\frac{7}{8} > \frac{k^2}{8} + \frac{k}{4} - 5$, что и требовалось. Лемма доказана. □

Очевидно, что доказанные утверждения равным образом применимы и к формулам B_l. Это позволяет нам доказать искомую нижнюю оценку на минимальную длину совмещающего типа.

Теорема 8. *Для любых k и l одинаковой чётности найдутся такие совместимые формулы A и B исчисления* MCLL *длины k и l соответственно, что для всякой формулы C, которая является совмещающей для A и B, выполняется неравенство $l(C) \geqslant \frac{k^2+l^2}{8} + \frac{k+l}{4} - 9$.*

Доказательство. Возьмём в качестве A и B определённые в данном разделе формулы A_k и B_l. Они совместимы в силу леммы 3.12 и критерия совместимости. Пусть C — их совмещающая формула, тогда по лемме 3.11 имеем $l(C) \geqslant D(A_k)+D(B_l)+E(A_k, B_l)$. В случае чётных k, l получим $D(A_k) \geqslant \frac{k^2}{8} + \frac{k}{2} - \frac{9}{2}$, $D(B_l) \geqslant \frac{l^2}{8} + \frac{l}{2} - \frac{9}{2}, E(A_k, B_l) = 0$, что при суммировании даёт $l(C) \geqslant \frac{k^2+l^2}{8} + \frac{k+l}{2} - 9 \geqslant \frac{k^2+l^2}{8} + \frac{k+l}{4} - 9$. При нечётных

k, l имеем $D(A_k) \geqslant \frac{k^2}{8} + \frac{k}{4} - 5$, $D(B_l) \geqslant \frac{l^2}{8} + \frac{l}{4} - 5$, $E(A_k, B_l) = 1$, что при суммировании даёт $l(C) \geqslant \frac{k^2+l^2}{8} + \frac{k+l}{4} - 9$, что и требовалось. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что использованные в доказательстве формулы A_k и B_l являются переводами типов исчисления Ламбека. Таким образом, для введённой в разделе 3.2 величины $M_j^{\mathrm{MCLL}}(l_1, l_2)$ верна оценка $M_j^{\mathrm{MCLL}}(l_1, l_2) \geqslant \frac{k^2+l^2}{8} + \frac{k+l}{4} - 9$. Из леммы 3.5 вытекает аналогичная оценка на минимальную длину совмещающего типа в исчислении Ламбека, то есть на величину $M_j(l_1, l_2)$.

Теорема 9. *Для любых k и l одинаковой чётности найдутся такие совместимые типы T и U исчисления L^* (исчисления L) длины k и l соответственно, что для всякого типа C, который является совмещающим для T и U, выполняется неравенство $l(C) \geqslant \frac{k^2+l^2}{8} + \frac{k+l}{4} - 9$.*

Из данной теоремы следует следующая однопараметрическая оценка:

Следствие 3.1. Для любого чётного m найдутся совместимые типы T и U исчисления L^* (исчисления L), такие что $l(T)+l(U) = m$ и для всякого типа C, который является совмещающим для T и U, верно неравенство $l(C) \geqslant \frac{m^2}{16} + \frac{m}{4} - 9$.

Глава 4

Исчисление Ламбека с операциями замещения

4.1 Исчисление Ламбека с единицей

Данная глава содержит известные теоретические факты, касающиеся так называемых «разрывных» операций над языками и исчисления Ламбека с операциями замещения. Вначале определим *исчисление Ламбека с единицей* L_1 ([19]). Пусть константа I не входит в множество примитивных типов Pr, тогда типы исчисления L_1 строятся из элементов множества $\mathrm{Pr} \cup \{I\}$ с помощью связок $\backslash, /$ и $\cdot$. Аксиоматика исчисления L_1 получается из аксиоматики исчисления L^* добавлением аксиомы $\to I$ и правила вывода

$$\frac{\Gamma\Delta \to A}{\Gamma I \Delta \to A}.$$

Как и в исчислении L^*, в исчислении Ламбека с единицей допустимо правило сечения. Кроме того, исчисление L_1 обладает свойством *подформульности*, то есть в выводе секвенции участвуют только подтипы входящих в неё типов. Из свойства подформульности следует, что всякая секвенция исчисления L^*, выводимая в исчислении L_1, является выводимой и в исходном исчислении L_1. Данное свойство называется *консервативностью* исчисления L_1 над L^*.

В главе 5 нам будет удобно рассматривать несеквенциальную версию исчисления L_1, которую мы будем обозначать через HL_1. Данное исчисление также было введено в [19]. Оно задаётся аксиомами вида $A \to A$, где A — произвольный тип исчисления L_1, и приведёнными ниже правилами вывода:

$$\frac{A \to C/B}{A \cdot B \to C} \qquad \frac{A \cdot B \to C}{A \to C/B}$$

$$\frac{B \to A \backslash C}{A \cdot B \to C} \qquad \frac{A \cdot B \to C}{B \to A \backslash C},$$

аксиомами для константы I:

$$A \cdot I \leftrightarrow A \leftrightarrow I \cdot A,$$

где запись $B \leftrightarrow C$ означает, что обе секвенции $B \to C$ и $C \to B$ являются аксиомами исчисления HL_1, а также правилом транзитивности:

$$\frac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C}$$

Исчисления L_1 и HL_1 являются эквивалентными (см. [19]), а именно, выводимость секвенции $A_1 \cdot \ldots \cdot A_r \to B$, где $r > 0$, в исчислении HL_1 равносильна выводимости секвенции $A_1 \ldots A_r \to B$ в исчислении L_1, а выводимость секвенции $\to B$ в исчислении L_1 равносильна выводимости секвенции $I \to B$ в исчислении HL_1.

4.2 Разрывные операции над языками

В лингвистических приложениях дополнительно к операции конкатенации удобно ввести так называемую операцию замещения, позволяющую оперировать разрывными синтаксическими составляющими. Пусть $\mathbf{1}$ — некоторый выделенный элемент, не содержащийся в множестве Σ, который мы будем называть *разделителем*. Обозначим $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\mathbf{1}\}$. Для каждого слова $w \in \Sigma_1^*$ определим его *сорт* $s(w)$, равный $|w|_{\mathbf{1}}$, то есть числу вхождений разделителя в w. На множестве Σ_1 для всякого целого положительного j определим частичную бинарную операцию *j-замещения* $\odot_j$, состоящую в замене j-го слева разделителя в первом аргументе данной операции на её второй аргумент. В случае если первый аргумент операции $\odot_j$ содержит менее j разделителей, результат её применения не определён. Операция j-замещения естественным образом продолжается на формальные языки по правилу $L_1 \odot_j L_2 = \{w_1 \odot_j w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$. Определим также бинарные операции $\downarrow_j, \uparrow_j$, положив $L_1 \downarrow_j L_2 = \{w \in \Sigma_1^* \mid \forall w_1 \in L_1\, (w_1 \odot_j w \in L_2)\}$, $L_1 \uparrow_j L_2 = \{w \in \Sigma_1^* \mid \forall w_2 \in L_2\, (w \odot_j w_2 \in L_1)\}$.

Пример 4.1. Пусть $L_1 = \{a1a, a1b\}$, $L_2 = \{a\}$. Тогда $L_1 \uparrow_1 L_2 = \{11a, 11b\}$, $L_1 \uparrow_2 L_2 = \{a11\}$, $L_1 \downarrow_1 L_2 = \varnothing$, $L_1 \odot_1 L_2 = \{aab, aaa\}$.

Следующее утверждение вытекает из определения соответствующих операций.

Лемма 4.1. *Для всякого j и произвольных языков $L_1, L_2, L \subset \Sigma_1^*$ равносильны условия:*

1. $L_1 \odot_j L_2 \subseteq L$,
2. $L_1 \subseteq L \uparrow_j L_2$,
3. $L_2 \subseteq L_1 \downarrow_j L$.

Таким образом, операции $\odot_j, \uparrow_j$ и $\downarrow_j$ для всякого j представляют собой разрывный аналог операций $\cdot, /, \backslash$.

4.3 Исчисление Ламбека с операциями замещения

Исчисление Ламбека с операциями замещения позволяет дополнительно к стандартным операциям $\cdot, \backslash, /$ рассматривать также и операции $\odot_j, \uparrow_j, \downarrow_j$ для всякого натурального j. В данном разделе мы рассмотрим несеквенциальное исчисление Ламбека с операциями замещения, введённое О. Валентином в [32]. Оно эквивалентно секвенциальному исчислению DL, впервые изучавшемуся в работе [21], которое будет рассматриваться в главе 6.

Пусть дано счётное множество *примитивных типов* Pr_D, на котором задана функция *сорта* $s\colon \mathrm{Pr}_D \to \mathbb{N}$. Кроме того, пусть выделены два элемента $I, J \notin \mathrm{Pr}_D$. Множество $\mathrm{Base} = \mathrm{Pr}_D \cup \{I, J\}$ будем называть множеством *базовых типов*, доопределим функцию $s\colon \mathrm{Base} \to \mathbb{N}$, положив $s(I) = 0$ и $s(J) = 1$. *Типы* исчисления Ламбека с операциями замещения строятся из базовых типов с помощью бинарных связок $\backslash, /, \cdot$, а также счётного семейства бинарных связок $\uparrow_k, \downarrow_k, \odot_k$, где $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 1$. Первые три связки имеют тот же смысл, что и в стандартном исчислении Ламбека, а каждая из троек $\{\odot_k, \uparrow_k, \downarrow_k\}$ представляет разрывный аналог тройки $\{\cdot, /, \backslash\}$. Мы будем обозначать типы большими латинскими буквами $A, B, \ldots$, возможно с нижними индексами. Формально множество типов Tp_D задаётся следующим рекурсивным определением:

1. Для всех типов $A, B \in \mathrm{Tp}_D$, таких что $s(A) \geqslant s(B)$, также $(A/B) \in \mathrm{Tp}_D$, $(B \setminus A) \in \mathrm{Tp}_D$, причём $s(A/B) = s(B \setminus A) = s(A) - s(B)$.
2. Для всех типов $A, B \in \mathrm{Tp}_D$ также $(A \cdot B) \in \mathrm{Tp}_D$, причём $s(A \cdot B) = s(A) + s(B)$.
3. Для всех типов $A, B \in \mathrm{Tp}_D$, таких что $s(B) \geqslant 1$ и $s(A) \geqslant s(B) - 1$, и всех $k \leqslant s(B)$ также $B \downarrow_k A \in \mathrm{Tp}_D$, причём $s(B \downarrow_k A) = s(A) - s(B) + 1$.
4. Для всех типов $A, B \in \mathrm{Tp}_D$, таких что $s(A) \geqslant s(B)$, и всех $k \leqslant s(A) - s(B) + 1$ также $(A \uparrow_k B) \in \mathrm{Tp}_D$, причём $s(A \uparrow_k B) = s(A) - s(B) + 1$.
5. Для всех типов $A, B \in \mathrm{Tp}_D$, таких что $s(A) \geqslant 1$, и всех $k \leqslant s(A)$ также $(A \odot_k B) \in \mathrm{Tp}_D$, причём $s(A \odot_k B) = s(A) + s(B) - 1$.

Секвенциями данного исчисления являются выражения вида $A \to B$, такие что $A, B \in Tp_D$ и $s(A) = s(B)$, выводимость секвенции $A \to B$ будем обозначать через $\mathrm{HDL} \vdash A \to B$. Аксиомы исчисления

HDL имеют вид $A \to A$, $A \in \mathrm{Tp}_D$, ниже приведены правила вывода для связок данного исчисления:

$$\frac{A \to C/B}{A \cdot B \to C} \qquad \frac{A \cdot B \to C}{A \to C/B}$$

$$\frac{B \to A \setminus C}{A \cdot B \to C} \qquad \frac{A \cdot B \to C}{B \to A \setminus C}$$

$$\frac{A \to C \uparrow_j B}{A \odot_j B \to C} \qquad \frac{A \odot_j B \to C}{A \to C \uparrow_j B}$$

$$\frac{B \to A \downarrow_j C}{A \odot_j B \to C} \qquad \frac{A \odot_j B \to C}{B \to A \downarrow_j C}$$

а также структурные постулаты, включающие в себя аксиомы для констант (запись $B \leftrightarrow C$ означает, что обе секвенции $B \to C$ и $C \to B$ являются аксиомами исчисления HDL):

$$\begin{aligned} A \cdot I \ &\leftrightarrow \ A \leftrightarrow I \cdot A, \\ J \odot_1 A \ &\leftrightarrow \ A \leftrightarrow A \odot_j J, \text{ если } j \leqslant s(A), \end{aligned}$$

аксиомы ассоциативности для мультипликативных связок:

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C \ &\leftrightarrow \ A \cdot (B \cdot C), \\ (A \odot_i B) \odot_j C \ &\leftrightarrow \ (A \odot_j C) \odot_{i+s(B)-1} B, \text{ если } j < i, \\ (A \odot_i B) \odot_j C \ &\leftrightarrow \ A \odot_j (B \odot_{j-i+1} C), \text{ если } i \leqslant j < i + s(B), \\ (A \odot_i B) \odot_j C \ &\leftrightarrow \ (A \odot_{j+1-s(B)} C) \odot_i B, \text{ если } i + s(B) \leqslant j, \end{aligned}$$

аксиомы взаимодействия между «непрерывными» и «разрывными» связками:

$$A \cdot B \ \leftrightarrow \ (A \cdot J) \odot_{s(A)+1} B \ \leftrightarrow \ (J \cdot B) \odot_1 A$$

и правило транзитивности:

$$\frac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C}$$

Далее мы будем опускать скобки в типах вида $(A \cdot B) \cdot C$, пользуясь ассоциативностью связки $\cdot$, по той же причине будем писать $A \setminus B/C$ вместо $(A \setminus B)/C$ и $A \setminus (B/C)$.

Пример 4.2. Пусть $s(A) = s(B) = 1$, тогда секвенция $(A \uparrow_1 B) \downarrow_1 A \to A/(B \setminus A)$ выводима в исчислении HDL. Соответствующий вывод приведен ниже.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \setminus A \to B \setminus A}{B \cdot (B \setminus A) \to A}}{(J \cdot (B \setminus A)) \odot_1 B \to A}}{J \cdot (B \setminus A) \to A \uparrow_1 B} \quad \dfrac{(A \uparrow_1 B) \downarrow_1 A \to (A \uparrow_1 B) \downarrow_1 A}{A \uparrow_1 B \to A \uparrow_1 ((A \uparrow_1 B) \downarrow_1 A)}}{\dfrac{\dfrac{J \cdot (B \setminus A) \to A \uparrow_1 ((A \uparrow_1 B) \downarrow_1 A)}{(J \cdot (B \setminus A)) \odot_1 ((A \uparrow_1 B) \downarrow_1 A) \to A}}{((A \uparrow_1 B) \downarrow_1 A) \cdot (B \setminus A) \to A}}}{(A \uparrow_1 B) \downarrow_1 A \to A/(B \setminus A)}
$$

Сформулируем несколько правил, которые являются допустимыми в исчислении HDL и характеризуют монотонность связок данного исчисления. Допустимость данных правил легко проверить непосредственно, основываясь на аксиоме транзитивности.

Лемма 4.2. *Пусть сорта типов A_1, B_1, A_2, B_2 таковы, что все типы, входящие в правила, корректно определены. Тогда следующие правила являются допустимыми в исчислении* HDL*:*

$$
\frac{A_1 \to A_2 \quad B_1 \to B_2}{A_1 \cdot B_1 \to A_2 \cdot B_2} \qquad \frac{A_1 \to A_2 \quad B_1 \to B_2}{A_1 \odot_j B_1 \to A_2 \odot_j B_2}
$$

$$
\frac{A_1 \to A_2 \quad B_1 \to B_2}{A_1/B_2 \to A_2/B_1} \qquad \frac{A_1 \to A_2 \quad B_1 \to B_2}{B_2 \setminus A_1 \to B_1 \setminus A_2}
$$

$$
\frac{A_1 \to A_2 \quad B_1 \to B_2}{A_1 \uparrow_j B_2 \to A_2 \uparrow_j B_1} \qquad \frac{A_1 \to A_2 \quad B_1 \to B_2}{B_2 \downarrow_j A_1 \to B_1 \downarrow_j A_2}.
$$

Следствие 4.1. Пусть типы A и B равносильны в исчислении HDL, тогда замена некоторых вхождений типа A на тип B не влияет на выводимость секвенции.

Заметим, что если рассматривать только секвенции с типами, содержащими связки $\setminus, /, \cdot$ и константу I, то мы получим несеквенциальную аксиоматику для исчисления L_1. Таким образом, всякая секвенция, выводимая в L_1, будет выводима и в HDL. Более того, если секвенция исчисления L_1 окажется выводимой в исчислении HDL, то она будет выводима и в самом исчислении L_1, то есть исчисление HDL консервативно над L_1. Данное свойство вытекает из свойства подформульности эквивалентного секвенциального исчисления DL, изучаемого в главе 6. По этой же причине можно считать, что в выводе секвенции встречаются только те примитивные типы, которые входят в саму секвенцию.

Обозначим через Tp_k множество типов, получающееся при ограничении максимального сорта типов числом k. Если запретить в выводах секвенций типы не из Tp_k, то получится исчисление HDL_k. Как и исчисление HDL, все исчисления HDL_k являются консервативными расширениями исчисления L_1.

Докажем важную структурную лемму, показывающую взаимосвязь между операциями $\cdot$ и $\odot_j$.

Лемма 4.3. *Пусть типы $A, B, C \in \mathrm{Tp}_k$ таковы, что $A \cdot B \in \mathrm{Tp}_k$ и $s(A) + s(B) + s(C) \leqslant k + 1$, тогда верны следующие утверждения:*

1. *Если $j \leqslant s(A)$, то $(A \cdot B) \odot_j C \leftrightarrow (A \odot_j C) \cdot B$.*
2. *Если $s(A) < j \leqslant s(A) + s(B)$, то $(A \cdot B) \odot_j C \leftrightarrow A \cdot (B \odot_{j-s(A)} C)$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Из условий леммы следует, что типы $(A \cdot B) \odot_j C$ и $(A \odot_j C) \cdot B$ корректны и принадлежат Tp_k. Тогда в силу аксиом ассоциативности, аксиомы для константы J, а также следствия 4.1 имеем $(A \cdot B) \odot_j C \leftrightarrow ((J \cdot B) \odot_1 A) \odot_j C \leftrightarrow (J \cdot B) \odot_1 (A \odot_j C) \leftrightarrow (A \odot_j C) \cdot B$, что и требовалось. Заметим, что из условия $j \leqslant s(A)$ вытекает, что $s(J \cdot B) \leqslant s(A \cdot B) \leqslant k$ и поэтому $J \cdot B \in \mathrm{Tp}_k$, а также что $(J \cdot B) \odot_1 A \in \mathrm{Tp}_k$. Таким образом, данный вывод на самом деле является выводом не только в исчислении HDL, но и в исчислении HDL_k, чем мы будем пользоваться в дальнейшем. $\square$

4.4 Модели исчисления Ламбека с операциями замещения

Если типы стандартного исчисления Ламбека интерпретируются как множества слов над некоторым алфавитом Σ, а связки $\cdot$, $\setminus$ и $/$ — как соответствующие операции над формальными языками, то типы исчисления Ламбека с операциями замещения можно интерпретировать как множества слов над расширенным алфавитом $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{1\}$, где 1 — выделенный разделитель (см. раздел 4.2). Понятие языковой модели для исчисления HDL вводится аналогично тому, как это было сделано в разделе 1.4 для исчислений L и L*. А именно, *языковой моделью* будем называть пару $M = \langle \Sigma, \mathrm{Int} \rangle$, где Σ — конечный алфавит, а $\mathrm{Int}\colon \mathrm{Tp}_D \to \mathcal{P}(\Sigma_1^*)$ — отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\mathrm{Int}(p) \subseteq \{w \in \Sigma_1^* \mid |w|_1 = s(p)\}$, если $p \in \mathrm{Pr}_D$.
2. $\mathrm{Int}(I) = \{\varepsilon\}$.
3. $\mathrm{Int}(J) = \{1\}$.
4. $\mathrm{Int}(A \star B) = (\mathrm{Int}(A) \star \mathrm{Int}(B)) \cap \{w \in \Sigma_1^* \mid |w|_1 = s(A \star B)\}$ для произвольной бинарной связки $\star$ исчисления HDL. При этом предполагается, что тип $A \star B$ определён.

Пример 4.3. Пусть $s(A) = 1, s(B) = 0, \mathrm{Int}(A) = \{a1a, a1b\}, \mathrm{Int}(B) = \{a\}$. В этом случае $\mathrm{Int}(A \cdot B) = \{a1aa, a1ba\}$, $\mathrm{Int}(A/B) = \{a1\}$, $\mathrm{Int}(B \setminus A) = \{1b, 1a\}$, $\mathrm{Int}(A{\uparrow_1}B) = \{11b, 11a\}, \mathrm{Int}(A{\uparrow_2}B) = \{a11\}$, $\mathrm{Int}(A \downarrow_1 B) = \varnothing$, $\mathrm{Int}(A \odot_1 B) = \{aab, aaa\}$.

Пример 4.4. Пусть $\Sigma = \{a, b\}$, $s(A) = s(B) = 0$, $\mathrm{Int}(A) = \{b\}, \mathrm{Int}(B) = \{a\}$. В этом случае $\mathrm{Int}(A/B) = \varnothing$, тогда $s(A \uparrow_1 (A/B)) = 1$ и по определению $\mathrm{Int}(A \uparrow_1 (A/B)) = \{w \in \Sigma_1^* \mid s(w) = 1\} = \{u1v \mid u, v \in \Sigma^*\}$.

Индукцией по построению типа легко доказать, что множество $\mathrm{Int}(A)$ содержит только слова сорта $s(A)$. Условие на сорта слов в последнем пункте определения языковой модели необходимо, чтобы результат деления на пустое множество содержал слова лишь требуемого сорта. Секвенцию $A \to B$ будем называть *истинной в модели* M, если верно включение $\mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(B)$.

Индукцией по длине вывода в исчислении HDL легко доказать, что всякая выводимая в нём секвенция будет истинна в любой модели. Отметим, что обратное утверждение неверно, то есть исчисление HDL неполно. Это следует из неполноты исчисления L_1, в котором невыводима секвенция $(I/A)BA \to B$, истинная во всех моделях, а также из невыводимости секвенции $I \uparrow_1 I \to J$ (см. [32]). В то же время в работе [32] доказано, что для секвенций, содержащих только связки $\backslash, /, \uparrow_j$ и $\downarrow_j$ и не содержащих констант, выводимость эквивалентна истинности во всех языковых моделях. В этой же работе доказана полнота для некоторого более широкого фрагмента без связок $\cdot$ и $\odot_j$ и с ограничениями на вхождения констант. Для исчисления со всеми связками и ограничениями на вхождения I и J полнота является открытым вопросом. Мы не будем останавливаться на этом подробнее, поскольку в данной работе не рассматриваются вопросы полноты исчисления Ламбека с операциями замещения.

Глава 5

Отношение совместимости в исчислении Ламбека с операциями замещения

5.1 Отношение совместимости и интерпретация в свободной абелевой группе

Данная глава посвящена доказательству критерия совместимости в исчислении HDL_k при произвольном натуральном k, а также исследованию отношения совместимости в полном исчислении HDL. Вначале введём понятие совместимости для данных исчислений. Будем считать, что зафиксировано некоторое натуральное $k \geqslant 1$, которое до конца главы будем полагать неизменным.

Определение 5.1. Тип $C \in \mathrm{Tp}_k$ называется *совмещающим* для типов A и B в исчислении HDL_k, если $\mathrm{HDL}_k \vdash A \to C$, и $\mathrm{HDL}_k \vdash B \to C$. В этом случае типы A и B называются совместимыми.

Пример 5.1. Пусть $s(A) = s(B) = 1$, тогда типы $(A \uparrow_1 B) \downarrow_1 A$ и B являются совместимыми в исчислении HDL_k при любом $k \geqslant 1$, причём $(A/(B \setminus A))$ является их совмещающим типом. Выводимость секвенции $(A \uparrow_1 B) \downarrow_1 B \to A/(B \setminus A)$ доказана в примере 4.2, вывод второй секвенции приведён ниже.

$$\frac{\dfrac{B \setminus A \to B \setminus A}{B \cdot (B \setminus A) \to A}}{B \to A/(B \setminus A)}$$

Мы будем обозначать отношение *совместимости* символом $\sim$. В случае если необходимо дополнительно уточнить, что рассматривается отношение совместимости именно в исчислении HDL_k, мы будем обозначать отношение совместимости через $\sim_k$.

Лемма 5.1. $\sim$ *является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Рефлексивность и симметричность очевидны, докажем транзитивность. Пусть $A_1 \sim B$, $B \sim A_2$, при этом C_1 является совмещающим типом для типов A_1 и B, а C_2 — для типов B и A_2. Проверим, что тип $(B/C_1) \setminus B/(C_2 \setminus B)$ будет совмещающим для типов A_1 и A_2. Действительно, вследствие леммы 4.2 и выводимости секвенции $(B/C_1) \cdot C_1 \to B$ из выводимости секвенции $A_1 \to C_1$ следует, что $\mathrm{HDL}_k \vdash (B/C_1) \cdot A_1 \to B$. Аналогично доказывается, что $\mathrm{HDL}_k \vdash B \cdot (C_2 \setminus B) \to B$, что по транзитивности влечёт выводимость секвенции $(B/C_1) \cdot A_1 \cdot (C_2 \setminus B) \to B$, откуда легко следует, что $\mathrm{HDL}_k \vdash A_1 \to (B/C_1) \setminus B/(C_2 \setminus B)$. Аналогичным образом доказывается выводимость секвенции $A_2 \to (B/C_1) \setminus B/(C_2 \setminus B)$. □

Нетрудно видеть, что только типы одинакового сорта могут быть совместимыми. Наша задача состоит в том, чтобы сформулировать критерий совместимости в исчислении HDL_k в терминах алгебраической интерпретации. Докажем вначале, что отношение $\sim$ является конгруэнцией относительно всех связок исчисления HDL_k.

Лемма 5.2. $\sim$ *является конгруэнцией относительно* $\cdot, /, \setminus, \odot_j, \downarrow_j, \uparrow_j$.

Доказательство. Пусть $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$, нам надо доказать совместимость типов $A_1 * A_2$ и $B_1 * B_2$ для произвольной связки $*$ (в случае если соответствующие типы корректно определены). Заметим, что

$s(A_1) = s(B_1)$ и $s(A_2) = s(B_2)$, поэтому типы $A_1 * A_2$ и $B_1 * B_2$ либо одновременно существуют, либо одновременно не существуют. Пусть C_1 — совмещающий тип для пары типов A_1, B_1, а C_2 — совмещающий тип для пары типов A_2, B_2. До конца доказательства будем считать, что сорта типов A_1, A_2, B_1, B_2 таковы, что типы $A_1 * A_2$ и $B_1 * B_2$ определены.

Обозначим $D_2 = (A_2/C_2) \cdot C_2 \cdot (C_2 \setminus B_2)$. Секвенции $D_2 \to A_2$ и $D_2 \to B_2$ будут выводимыми, вывод секвенции $D_2 \to A_2$ приведён ниже, вторая секвенция выводится аналогичным образом.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C_2 \setminus B_2 \to C_2 \setminus B_2}{C_2 \cdot (C_2 \setminus B_2) \to B_2} \quad B_2 \to C_2}{C_2 \cdot (C_2 \setminus B_2) \to C_2} \qquad \dfrac{A_2/C_2 \to A_2/C_2}{(A_2/C_2) \cdot C_2 \to A_2}}{(A_2/C_2) \cdot C_2 \cdot (C_2 \setminus B_2) \to A_2}$$

В качестве совмещающего типа для типов $A_1 * A_2$ и $B_1 * B_2$, $* \in \{\cdot\} \cup \{\odot_j \mid j \in \mathbb{N}\}$, можно взять тип $C_1 * C_2$. В качестве совмещающего типа для типов $A_1 * A_2$ и $B_1 * B_2$, $* \in \{/\} \cup \{\uparrow_j \mid j \in \mathbb{N}\}$, можно взять тип $C_1 * D_2$. В качестве совмещающего типа для типов $A_2 * A_1$ и $B_2 * B_1$, $* \in \{\setminus\} \cup \{\downarrow_j \mid j \in \mathbb{N}\}$, можно взять тип $D_2 * C_1$. Выводимость соответствующих секвенций следует из леммы 4.2. $\square$

Обозначим через Pr_k множество примитивных типов, использованных при построении типов из Tp_k и пусть $\alpha \notin \mathrm{Pr}_k$. Обозначим через $\mathbf{F}$ свободную абелеву группу, порождённую множеством $\mathrm{Pr}_k \cup \{\alpha\}$. Умножение в данной группе будем обозначать через $\circ$ (при этом мы часто будем опускать этот символ), элемент, обратный элементу a, через a^{-1}, а единицу группы обозначим через ε. Для каждого типа $A \in \mathrm{Tp}_k$ определим его интерпретацию $[\![A]\!]$. Далее мы будем использовать обозначение $[\![A]\!]$ именно для интерпретации в свободной абелевой группе, а не для интерпретации в некоммутативной свободной группе, как это делалось в главах 2 и 3.

Определение 5.2. *Интерпретацией* типа A в группе $\mathbf{F}$ называется элемент $[\![A]\!] \in \mathbf{F}$, определяемый следующими правилами:

1. $[\![p]\!] = p$, если $p \in \mathrm{Pr}_k$,
2. $[\![I]\!] = \varepsilon$,
3. $[\![J]\!] = \alpha$,
4. $[\![A \cdot B]\!] = [\![A]\!] \circ [\![B]\!]$,
5. $[\![A/B]\!] = [\![B \setminus A]\!] = [\![A]\!] \circ [\![B]\!]^{-1}$,
6. $[\![A \odot_j B]\!] = [\![A]\!] \circ \alpha^{-1} \circ [\![B]\!]$ для любого $j \leqslant k$,
7. $[\![B \downarrow_j A]\!] = [\![A \uparrow_j B]\!] = [\![A]\!] \circ \alpha \circ [\![B]\!]^{-1}$ для любого $j \leqslant k$.

Для каждого типа A исчисления HDL_k определим несколько счётчиков: $|A|$ есть длина типа A, равная числу вхождений базовых типов в тип A, $|A|_p$, где $p \in \mathrm{Base}$, есть число вхождений базового типа p в тип A. Через $|A|_p^+$ и $|A|_p^-$ обозначим, соответственно, число положительных и отрицательных вхождений базового типа p в тип A. Данные величины определяются следующим образом:

1. $|p|_p^+ = 1, |p|_p^- = 0$, если $p \in \mathrm{Base}$,
2. $|q|_p^+ = |q|_p^- = 0$, если $p, q \in \mathrm{Base}$, $p \neq q$,
3. $|A \cdot B|_p^+ = |A \odot_j B|_p^+ = |A|_p^+ + |B|_p^+$, $|A \cdot B|_p^- = |A \odot_j B|_p^- = |A|_p^- + |B|_p^-$ для любого $j \leqslant k$,
4. $|A/B|_p^+ = |B \setminus A|_p^+ = |A|_p^+ + |B|_p^-$, $|A/B|_p^- = |B \setminus A|_p^- = |A|_p^- + |B|_p^+$,
5. $|A \uparrow_j B|_p^+ = |B \downarrow_j A|_p^+ = |A|_p^+ + |B|_p^-$, $|A \uparrow_j B|_p^- = |B \downarrow_j A|_p^- = |A|_p^- + |B|_p^+$ для любого $j \leqslant k$.

Пример 5.2. Пусть $p, q, r \in \mathrm{Pr}_2$, $s(p) = 0$, $s(q) = 1$, $s(r) = 2$, $A = r \downarrow_2 (((p \cdot r)/q) \uparrow_1 (r/(q \cdot p)))$, $B = (r \downarrow_1 (J \cdot p)) \odot_2 (p/(J \setminus q))$. Тогда $|A|_p^+ = 2, |A|_q^+ = 1, |A|_r^+ = 1, |A|_p^- = 0, |A|_q^- = 1, |A|_r^- = 2, [\![A]\!] = p^2 r^{-1} \alpha^2$; $|B|_p^+ = 2$, $|B|_q^- = |B|_r^- = 1$, $|B|_J^+ = 2$, $|B|_J^- = 0$, $[\![B]\!] = p^2 q^{-1} r^{-1} \alpha^2$.

Аналогичным образом для всякой связки $* \in \{\cdot, /, \setminus, \odot, \uparrow, \downarrow\}$ и всякого типа $A \in \mathrm{Tp}_k$ можно определить счётчики $|A|_*, |A|_*^+, |A|_*^-$, обозначающие общее число вхождений связки $*$ в тип A, а также число её положительных и отрицательных вхождений. Формальное определение приведено ниже.

1. $|p|^+_* = |p|^-_* = 0$, если $p \in \mathrm{Base}$, $* \in \{\cdot, /, \backslash, \odot_j, \uparrow_j, \downarrow_j\}$,
2. $|A * B|^+_* = |A|^+_* + |B|^+_* + 1, |A * B|^+_\star = |A|^+_\star + |B|^+_\star$,
   если $* \in \{\cdot, \odot_i\}$, $\star \in \{\cdot, /, \backslash, \odot_j, \uparrow_j, \downarrow_j\}, \star \neq *$,
3. $|A * B|^-_\star = |A|^-_\star + |B|^-_\star$, если $* \in \{\cdot, \odot_i\}, \star \in \{\cdot, /, \backslash, \odot_j, \uparrow_j, \downarrow_j\}$,
4. $|A * B|^+_* = |A|^+_* + |B|^-_* + 1, |A * B|^+_\star = |A|^+_\star + |B|^-_\star$,
   если $* \in \{/, \uparrow_i\}$, $\star \in \{\cdot, /, \backslash, \odot_j, \uparrow_j, \downarrow_j\}$, $\star \neq *$,
5. $|A * B|^-_\star = |A|^-_\star + |B|^+_\star$, если $* \in \{/, \uparrow_i\}, \star \in \{\cdot, /, \backslash, \odot_j, \uparrow_j, \downarrow_j\}$,
6. $|B * A|^+_* = |A|^+_* + |B|^-_* + 1, |B * A|^+_\star = |A|^+_\star + |B|^-_\star$,
   если $* \in \{\backslash, \downarrow_i\}$, $\star \in \{\cdot, /, \backslash, \odot_j, \uparrow_j, \downarrow_j\}, \star \neq *$,
7. $|B * A|^-_\star = |A|^-_\star + |B|^+_\star$, если $* \in \{\backslash, \downarrow_i\}$, $\star \in \{\cdot, /, \backslash, \odot_j, \uparrow_j, \downarrow_j\}$.

Введённые счётчики позволяют получить простое выражение для интерпретации произвольного типа A в свободной абелевой группе. Для каждого базового типа p обозначим через $[\![A]\!]_p$ величину $|A|^+_p - |A|^-_p$. Аналогичным образом для всякого символа бинарной связки $*$ определим величину $[\![A]\!]_* = |A|^+_* - |A|^-_*$.

Лемма 5.3. *Для всякого типа* $A \in \mathrm{Tp}_k$ *верно представление* $[\![A]\!] = \alpha^{([\![A]\!]_J + [\![A]\!]_\uparrow + [\![A]\!]_\downarrow - [\![A]\!]_\odot)} \circ \prod\limits_{p \in \mathrm{Pr}_k} p^{[\![A]\!]_p}$.

Доказательство. Индукция по построению типа A. База $A \in \mathrm{Base}$ легко проверяется непосредственно, проведём доказательство шага индукции. Поскольку счётчики не учитывают нижнего индекса связок, условимся в доказательстве данной леммы опускать нижние индексы в обозначениях $\odot_j, \downarrow_j, \uparrow_j$.

Пусть $A = B \cdot C$, тогда $[\![A]\!] = [\![B]\!][\![C]\!] = \alpha^{([\![B]\!]_J + [\![B]\!]_\uparrow + [\![B]\!]_\downarrow - [\![B]\!]_\odot)} (\prod\limits_{p \in \mathrm{Pr}_k} p^{[\![B]\!]_p}) \alpha^{([\![C]\!]_J + [\![C]\!]_\uparrow + [\![C]\!]_\downarrow - [\![C]\!]_\odot)} \prod\limits_{p \in \mathrm{Pr}_k} p^{[\![C]\!]_p} = \alpha^{([\![B]\!]_J + [\![C]\!]_J + [\![B]\!]_\uparrow + [\![C]\!]_\uparrow + [\![B]\!]_\downarrow + [\![C]\!]_\downarrow)} \alpha^{-([\![B]\!]_\odot + [\![C]\!]_\odot))} \prod\limits_{p \in \mathrm{Pr}_k} p^{[\![B]\!]_p + [\![C]\!]_p} = \alpha^{([\![A]\!]_J + [\![A]\!]_\uparrow + [\![A]\!]_\downarrow - [\![A]\!]_\odot)} \prod\limits_{p \in \mathrm{Pr}_k} p^{[\![A]\!]_p}$, что и требовалось.

Пусть $A = B/C$, тогда $[\![A]\!] = [\![B]\!][\![C]\!]^{-1} = \alpha^{([\![B]\!]_J + [\![B]\!]_\uparrow + [\![B]\!]_\downarrow - [\![B]\!]_\odot)} (\prod\limits_{p \in \mathrm{Pr}_k} p^{[\![B]\!]_p}) \, \alpha^{-([\![C]\!]_J + [\![C]\!]_\uparrow + [\![C]\!]_\downarrow - [\![C]\!]_\odot)} \prod\limits_{p \in \mathrm{Pr}_k} p^{-[\![C]\!]_p} = \alpha^{([\![B]\!]_J - [\![C]\!]_J) + ([\![B]\!]_\uparrow - [\![C]\!]_\uparrow)} \alpha^{([\![B]\!]_\downarrow - [\![C]\!]_\downarrow) - ([\![B]\!]_\odot - [\![C]\!]_\odot)} \prod\limits_{p \in \mathrm{Pr}_k} p^{[\![B]\!]_p - [\![C]\!]_p} = \alpha^{[\![B/C]\!]_J + [\![B/C]\!]_\uparrow + [\![B/C]\!]_\downarrow - [\![B/C]\!]_\odot}$

$$\prod_{p\in\mathrm{Pr}_k}(p^{(|B|_p^+ + |C|_p^-)-(|B|_p^- + |C|_p^+)}) = \alpha^{[\![B/C]\!]_J+[\![B/C]\!]_\uparrow+[\![B/C]\!]_\downarrow-[\![B/C]\!]_\odot}\prod_{p\in\mathrm{Pr}_k}p^{|B/C|_p^+ - |B/C|_p^-},$$

что и требовалось. Случай $A = C\setminus B$ разбирается аналогично.

Пусть теперь $A = B\odot C$,тогда $[\![A]\!] = [\![B]\!][\![C]\!]\alpha^{-1} = \alpha^{[\![B]\!]_J+[\![B]\!]_\uparrow}$ $\alpha^{[\![B]\!]_\downarrow-[\![B]\!]_\odot}(\prod_{p\in\mathrm{Pr}_k}p^{[\![B]\!]_p})\alpha^{([\![C]\!]_J+[\![C]\!]_\uparrow+[\![C]\!]_\downarrow-[\![C]\!]_\odot)}(\prod_{p\in\mathrm{Pr}_k}p^{[\![C]\!]_p})\alpha^{-1} = \alpha^{([\![B]\!]_J+[\![C]\!]_J)}$ $\alpha^{([\![B]\!]_\uparrow+[\![C]\!]_\uparrow)+([\![B]\!]_\downarrow+[\![C]\!]_\downarrow)-([\![B]\!]_\odot+[\![C]\!]_\odot+1)}\prod_{p\in\mathrm{Pr}_k}p^{[\![B]\!]_p+[\![C]\!]_p} = \alpha^{([\![A]\!]_J+[\![A]\!]_\uparrow+[\![A]\!]_\downarrow-[\![A]\!]_\odot)}$ $\prod_{p\in\mathrm{Pr}_k}p^{[\![A]\!]_p}$, что и требовалось.

Пусть $A = B\uparrow C$, тогда $[\![A]\!] = [\![B]\!][\![C]\!]^{-1}\alpha = \alpha^{([\![B]\!]_J+[\![B]\!]_\uparrow+[\![B]\!]_\downarrow-[\![B]\!]_\odot)}$ $(\prod_{p\in\mathrm{Pr}_k}p^{[\![B]\!]_p})\alpha^{-([\![C]\!]_J+[\![C]\!]_\uparrow+[\![C]\!]_\downarrow-[\![C]\!]_\odot)}(\prod_{p\in\mathrm{Pr}_k}p^{-[\![C]\!]_p})\alpha = \alpha^{([\![B]\!]_J-[\![C]\!]_J)+([\![B]\!]_\uparrow-[\![C]\!]_\uparrow+1)}$ $\alpha^{([\![B]\!]_\downarrow-[\![C]\!]_\downarrow)-([\![B]\!]_\odot-[\![C]\!]_\odot)}\prod_{p\in\mathrm{Pr}_k}p^{[\![B]\!]_p-[\![C]\!]_p} = \alpha^{[\![B\uparrow C]\!]_J+[\![B\uparrow C]\!]_\uparrow+[\![B\uparrow C]\!]_\downarrow-[\![B\uparrow C]\!]_\odot}$ $\prod_{p\in\mathrm{Pr}_k}p^{(|B|_p^+ + |C|_p^-)+(|B|_p^- + |C|_p^+)} = \alpha^{[\![B\uparrow C]\!]_J+[\![B\uparrow C]\!]_\uparrow+[\![B\uparrow C]\!]_\downarrow-[\![B\uparrow C]\!]_\odot}\prod_{p\in\mathrm{Pr}_k}p^{|B\uparrow C|_p^+}$ $\prod_{p\in\mathrm{Pr}_k}p^{-|B\uparrow C|_p^-}$, что и требовалось. Случай $A = C\downarrow B$ разбирается аналогично. Лемма полностью доказана. $\square$

Лемма 5.4. *Для всякого типа* $A\in\mathrm{Tp}_k$ *верно равенство* $s(A) = ([\![A]\!]_J + [\![A]\!]_\uparrow + [\![A]\!]_\downarrow - [\![A]\!]_\odot) + \sum_{p\in\mathrm{Pr}_k}s(p)\cdot[\![A]\!]_p$.

Доказательство. Индукция по построению типа A. Доказательство аналогично проведённому в лемме 5.3. $\square$

Следствие 5.1. Если $[\![A]\!] = [\![B]\!]$, где $A, B\in\mathrm{Tp}_k$, то $s(A) = s(B)$.

Доказательство. Пусть $[\![A]\!] = [\![B]\!]$, тогда по лемме 5.3 получаем, что для всякого примитивного типа p верно равенство $[\![A]\!]_p = [\![B]\!]_p$, а также что $[\![A]\!]_J + [\![A]\!]_\uparrow + [\![A]\!]_\downarrow - [\![A]\!]_\odot = [\![B]\!]_J + [\![B]\!]_\uparrow + [\![B]\!]_\downarrow - [\![B]\!]_\odot$. Отсюда по лемме 5.4 получаем требуемое. $\square$

Лемма 5.5. *Если* $\mathrm{HDL}\vdash A\to B$, *то* $[\![A]\!] = [\![B]\!]$.

Доказательство. Индукция по выводу в исчислении HDL. $\square$

Следствие 5.2. Если $\mathrm{HDL}_k\vdash A\to B$, то $[\![A]\!] = [\![B]\!]$.

Из доказанной леммы немедленно вытекает, что равенство $[\![A]\!] = [\![B]\!]$ является необходимым условием совместимости типов A и B как в исчислении HDL, так и в любом из исчислений HDL_k. Оставшаяся часть главы будет посвящена доказательству его достаточности, то есть следующей теоремы:

Теорема 10. *Из условия* $A \sim_k B$ *следует, что* $[\![A]\!] = [\![B]\!]$.

5.2 Доказательство критерия совместимости

Данный раздел посвящён доказательству достаточного условия совместимости и, как следствие, критерия совместимости. Вначале приведём список секвенций, на выводимость которых мы будем опираться в дальнейшем. При этом в каждом из случаев мы считаем, что сорта типов A и B таковы, что все входящие в секвенцию типы определены.

Лемма 5.6. *Следующие секвенции являются выводимыми в исчислении* HDL_k*:*

1. $(A/B) \cdot B \to A$; $B \cdot (B \setminus A) \to A$,
2. $A \to (A \cdot B)/B$; $A \to B \setminus (B \cdot A)$,
3. $A \cdot (B/C) \to (A \cdot B)/C$; $(C \setminus B) \cdot A \to C \setminus (B \cdot A)$,
4. $B \odot_j (B \downarrow_j A) \to A$ *для любого* $j \leqslant s(B)$;
   $(A \uparrow_j B) \odot_j B \to A$ *для любого* $j \leqslant s(A) - s(B) + 1$,
5. $A \cdot J \to (A \cdot B) \uparrow_{s(A)+1} B$; $J \cdot A \to (B \cdot A) \uparrow_1 B$,
6. $A \cdot B \to (A \cdot J) \odot_{s(A)+1} B$; $A \cdot B \to (J \cdot B) \odot_1 A$,
7. $A \cdot I \to A$; $I \cdot A \to A$.

Доказательство. Во всех пунктах леммы приведём вывод только для первого утверждения, второе доказывается аналогично.

1. $$\frac{A/B \to A/B}{(A/B) \cdot B \to A}$$

2. $$\frac{A \cdot B \to A \cdot B}{A \to (A \cdot B)/B}$$

3.
$$\frac{A \cdot (B/C) \cdot C \to A}{A \cdot (B/C) \to (A \cdot B)/C}$$

4.
$$\frac{B \downarrow_j A \to B \downarrow_j A}{B \odot_j (B \downarrow_j A) \to A}$$

5.
$$\frac{(A \cdot J) \odot_{s(A)+1} B \to A \cdot B}{A \cdot J \to (A \cdot B) \uparrow_{s(A)+1} B}$$

6. Является одной из аксиом исчисления HDL.

7. Является одной из аксиом исчисления HDL.

□

В следующей лемме приводятся примеры «нейтральных по умножению» элементов с точки зрения отношения $\sim$.

Лемма 5.7. *Для произвольных типов* $A, B \in \mathrm{Tp}_k$ *верны утверждения* $A \cdot (B/B) \sim A \cdot (B \setminus B) \sim (B/B) \cdot A \sim (B \setminus B) \cdot A \sim A$.

Доказательство. Совместимость типов A и $A \cdot (B/B)$ вытекает из выводимости секвенций $A \to (A \cdot (B/B))/(B/B)$ и $A \cdot (B/B) \to (A \cdot (B/B))/(B/B)$. Первая из этих секвенций следует из пункта 2 леммы 5.6, вывод второй приведён ниже. Заметим, что поскольку $s(B/B) = 0$, то при любом k из условий $A \in \mathrm{Tp}_k$ и $B \in \mathrm{Tp}_k$ всегда следует, что $A \cdot (B/B) \in \mathrm{Tp}_k$. Аналогично доказывается совместимость типов A и $(B \setminus B) \cdot A$. Совместимость типов A и $A \cdot (B \setminus B)$ следует из выводимости секвенций $A \to (A \cdot (B \setminus B))/(B \setminus B)$ и $A \cdot (B \setminus B) \to (A \cdot (B \setminus B))/(B \setminus B)$. Первая из данных секвенций следует из пункта 2 леммы 5.6, вторая доказывается аналогично секвенции $A \cdot (B/B) \to (A \cdot (B/B))/(B/B)$.

$$
\dfrac{\dfrac{A \to A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(B/B)\cdot(B/B) \to (B/B)\cdot(B/B)}{(B/B)\cdot(B/B)\cdot B \to (B/B)\cdot B} \qquad \dfrac{B/B \to B/B}{(B/B)\cdot B \to B}}{(B/B)\cdot(B/B)\cdot B \to B}}{(B/B)\cdot(B/B) \to B/B}}{A\cdot(B/B)\cdot(B/B) \to A\cdot(B/B)}}{A\cdot(B/B) \to (A\cdot(B/B))/(B/B)}
$$

□

Пусть A — некоторый тип исчисления HDL, а i — целое положительное число, через A^i будем обозначать тип $\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{i \text{ раз}}$. Будем считать, что $A^0 = I$ для любого типа A.

Следующая лемма показывает, что перестановка сомножителей при конкатенации не влияет на совместимость, а также «неотличимость» левого и правого деления с точки зрения отношения совместимости.

Лемма 5.8.

1. *Для любого типа $A \in \mathrm{Tp}_k$, такого что $s(A) = 0$, выполняется условие $A \cdot J \sim J \cdot A$.*
2. *Для любого типа $A \in \mathrm{Tp}_k$, такого что $s(A) < k$, выполняется условие $A \cdot J \sim J \cdot A$.*
3. *Для любого типа $A \in \mathrm{Tp}_k$, такого что $s(A) = 0$, и произвольного типа $B \in \mathrm{Tp}_k$ выполняется условие $A \cdot B \sim B \cdot A$.*
4. *Для любых типов $A, B \in \mathrm{Tp}_k$, таких что к тому же $A \cdot B \in \mathrm{Tp}_k$, выполняется условие $A \cdot B \sim B \cdot A$.*
5. *Для любых типов $A, B \in \mathrm{Tp}_k$, таких что к тому же $A/B \in \mathrm{Tp}_k$, выполняется условие $A/B \sim B \setminus A$.*
6. *Для любых типов $A, B, C \in \mathrm{Tp}_k$, таких что к тому же $(A/B)/C \in \mathrm{Tp}_k$, выполняется условие $(A/B)/C \sim (A/C)/B$.*

Доказательство.

1. Поскольку $s(A) = 0$, то по пункту 5 леммы 5.6 имеем $A \cdot J \sim (A \cdot A) \uparrow_1 A \sim J \cdot A$, что и требовалось.
2. Из пункта 1 леммы 5.6, применённой $s(A)$ раз, следует, что $(A/J^{s(A)}) \cdot J^{s(A)} \sim A$, тогда получаем, что $A \cdot J \sim (A/J^{s(A)}) \cdot J^{s(A)} \cdot J \leftrightarrow (A/J^{s(A)}) \cdot J \cdot J^{s(A)}$. Поскольку $s(A/J^{s(A)}) = 0$, то по пункту 1 получаем, что $(A/J^{s(A)}) \cdot J \cdot J^{s(A)} \sim J \cdot (A/J^{s(A)}) \cdot J^{s(A)} \sim J \cdot A$. Соединяя доказанные цепочки, получаем требуемое.
3. Поскольку $s(A) = 0$, то по пункту 6 леммы 5.6 верны утверждения $A \cdot B \sim (A \cdot J) \odot_1 B$ и $(J \cdot A) \odot_1 B \sim B \cdot A$. Кроме того, по пункту 1 настоящей леммы верно, что $A \cdot J \sim J \cdot A$, объединяя данные соотношения и используя лемму 5.2, получаем требуемое.
4. Без ограничения общности можно считать, что $s(A) > 0$, тогда получаем, что $A \cdot B \sim (A/J^{s(A)}) \cdot J^{s(A)} \cdot B$. Используя пункты 2 и 3 текущей леммы и учитывая, что $s(A/J^{s(A)}) = 0$, имеем $(A/J^{s(A)}) \cdot J^{s(A)} \cdot B \sim (A/J^{s(A)}) \cdot J^{s(A)-1} \cdot B \cdot J \sim \ldots \sim (A/J^{s(A)}) \cdot B \cdot J^{s(A)} \sim B \cdot (A/J^{s(A)}) \cdot J^{s(A)} \sim B \cdot A$, что и требовалось.
5. Вытекает из цепочки соотношений $A/B \sim (B \cdot (B \setminus A))/B \sim ((B \setminus A) \cdot B)/B \sim (B \setminus A) \cdot (B/B) \sim B \setminus A$. Первое соотношение следует из пункта 1 леммы 5.6 и леммы 5.2, третье соотношение вытекает из пункта 3 леммы 5.6, второе из пункта 4 доказываемой леммы, а четвёртое — из леммы 5.7.
6. Из условия $(A/B)/C \in \mathrm{Tp}_k$ вытекает неравенство $s(C) \leqslant s(A/B)$, откуда следует, что $s(B) + s(C) \leqslant s(A) \leqslant k$, таким образом можно заключить, что $C \cdot B \in \mathrm{Tp}_k$. Из выводимости секвенции $(A/B)/C \to A/(C \cdot B)$ вытекает соотношение $(A/B)/C \sim A/(C \cdot B)$. Аналогично доказывается соотношение $(A/C)/B \sim A/(B \cdot C)$. Применяя пункт 2 данной леммы и лемму 5.2, получаем соотношение $A/(C \cdot B) \sim A/(B \cdot C)$. Объединяя три доказанных соотношения, по транзитивности отношения совместимости получаем требуемое.

$\square$

Следующая лемма показывает, что с точки зрения отношения совместимости нижний индекс при связках $\odot_j, \downarrow_j, \uparrow_j$ не имеет значения.

Лемма 5.9.

1. *Для любых типов $A, B \in \mathrm{Tp}_k$, таких что $s(A)+s(B) \leqslant k+1$, и любых индексов i, j, таких что соответствующие типы определены, имеет место соотношение $A \odot_i B \sim A \odot_j B$.*
2. *Для любых типов $A, B \in \mathrm{Tp}_k$, таких что $s(A) \geqslant s(B)$, и любых индексов i, j, таких что соответствующие типы определены, имеет место соотношение $A \uparrow_i B \sim A \uparrow_j B$.*
3. *Для любых типов $A, B \in \mathrm{Tp}_k$, таких что $s(B) \geqslant 1$ и $s(A) \geqslant s(B)-1$, и любых индексов i, j, таких что соответствующие типы определены, имеет место соотношение $B \downarrow_i A \sim B \downarrow_j A$.*

Доказательство.

1. Поскольку $s(A) + s(B) \leqslant k + 1$, то тип $A \odot_l B$ определён для всех $l \leqslant s(A)$. Пусть без ограничения общности $i < j \leqslant s(A)$. Тогда $A \odot_i B \sim (J^j \cdot (J^j \setminus A)) \odot_i B \sim (J^j \odot_i B) \cdot (J^j \setminus A) \sim J^{i-1} \cdot B \cdot J^{j-i} \cdot (J^j \setminus A) \sim J^{j-1} \cdot B \cdot (J^j \setminus A) \sim (J^{j-1} \cdot J \cdot (J^j \setminus A)) \odot_j B \sim A \odot_j B$, что и требовалось. Первое и шестое соотношения следуют из пункта 1, а третье — из пункта 6 леммы 5.6. Второе и пятое соотношения вытекают из леммы 4.3, четвёртое соотношение доказано в лемме 5.8.
2. Поскольку $s(A) \geqslant s(B)$, то тип $A \uparrow_l B$ определён для всех $l \leqslant s(A) - s(B) + 1$. Тогда имеем $A \uparrow_i B \sim ((A \uparrow_j B) \odot_j B) \uparrow_i B \sim ((A \uparrow_j B) \odot_i B) \uparrow_i B \sim A \uparrow_j B$, что и требовалось. Первое соотношение доказано в пункте 6 леммы 5.6, второе вытекает из первого пункта настоящей леммы, а третье доказано в пункте 5 леммы 5.6.
3. Поскольку $s(A) \geqslant s(B) - 1 \geqslant 0$, то тип $B \downarrow_l A$ определён для всех $l \leqslant s(B)$. Тогда имеем $B \downarrow_i A \sim B \downarrow_i (B \odot_j (B \downarrow_j A)) \sim B \downarrow_i (B \odot_i (B \downarrow_j A)) \sim B \downarrow_j A$, что и требовалось. Первое соотношение доказано

в пункте 6 леммы 5.6, второе вытекает из первого пункта настоящей леммы, а третье доказано в пункте 5 леммы 5.6.

□

Следующая лемма и следствие после неё позволяют изучать отношение совместимости только для типов, не содержащих «разрывных» связок $\odot_j, \downarrow_j, \uparrow_j$.

Определение 5.3. Тип $A \in \mathrm{Tp}_k$ называется *непрерывным*, если он не содержит связок $\uparrow_j, \downarrow_j, \odot_j$ для любого j.

Лемма 5.10.

1. *Для любых типов $A, B \in \mathrm{Tp}_k$, таких что к тому же $A \uparrow_j B \in \mathrm{Tp}_k$, выполняется соотношение $A \uparrow_j B \sim (A/B) \cdot J$.*
2. *Для любых типов $A, B \in \mathrm{Tp}_k$, таких что к тому же $B \downarrow_j A \in \mathrm{Tp}_k$, выполняется соотношение $B \downarrow_j A \sim A/(B/J)$.*
3. *Для любых типов $A, B \in \mathrm{Tp}_k$, таких что к тому же $A \odot_j B \in \mathrm{Tp}_k$, выполняется соотношение $A \odot_j B \sim (A/J) \cdot B$.*

Доказательство.

1. Условие $A \uparrow_j B \in \mathrm{Tp}_k$ влечёт выполнение неравенств $s(B) \leqslant s(A)$ и $s(A) - s(B) + 1 \leqslant k$, тогда $(A/B) \cdot J \in \mathrm{Tp}_k$. Поскольку все корректные типы вида $A \uparrow_j B$ совместимы друг с другом, достаточно доказать утверждение для какого-то одного значения j, возьмём $j = s(A) - s(B) + 1 = s(A/B) + 1$. Тогда утверждение следует из выводимости секвенции $(A/B) \cdot J \to A \uparrow_{(s(A/B)+1)} B$:
$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A/B \to A/B}{(A/B) \cdot B \to A}}{((A/B) \cdot J) \odot_{s(A/B)+1} B \to A}}{(A/B) \cdot J \to A \uparrow_{(s(A/B)+1)} B}$$

2. Условие $B \downarrow_j A \in \mathrm{Tp}_k$ влечёт выполнение неравенств $s(B) \geqslant 1$ и $s(A) \geqslant s(B) - 1$, откуда следует, что $A/(B/J) \in \mathrm{Tp}_k$. Поскольку

все корректные типы вида $A\downarrow_j B$ совместимы друг с другом, достаточно доказать утверждение для какого-то одного значения j, возьмём $j = 1$. Тогда по пункту 5 леммы 5.8 и лемме 5.2 имеем $A/(B/J) \sim A/(J \setminus B)$, а по пункту 1 леммы 5.6 имеем $B \sim J\cdot(J \setminus B)$. Докажем выводимость секвенции $A/(J \setminus B) \to (J \cdot (J \setminus B))\downarrow_1 A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A/(J \setminus B) \to A/(J \setminus B)}{(A/(J \setminus B)) \cdot (J \setminus B) \to A}}{(J \cdot (J \setminus B)) \odot_1 (A/(J \setminus B)) \to A}}{A/(J \setminus B) \to (J \cdot (J \setminus B))\downarrow_1 A}$$

Отсюда по транзитивности отношения совместимости получаем требуемое.

3. Из условия $A\odot_j B \in \mathrm{Tp}_k$ следует, что $s(A) \geqslant 1$ и $s(A)-1+s(B) \leqslant k$, поэтому $(A/J) \cdot B \in \mathrm{Tp}_k$. Поскольку все корректные типы вида $A\uparrow_j B$ совместимы друг с другом, достаточно доказать утверждение для какого-то одного значения j, возьмём $j = s(A) = s(A/J)+1$. По пунктам 1 и 6 леммы 5.6 выполняются соотношения $(A \odot_{(s(A/J)+1)} B) \sim ((A/J) \cdot J) \odot_{(s(A/J)+1)} B \sim (A/J) \cdot B$, что и требовалось.

□

Следствие 5.3. Для всякого типа $A \in \mathrm{Tp}_k$ существует непрерывный тип $A' \in \mathrm{Tp}_k$, такой что типы A и A' совместимы.

Доказательство. Индукция по числу «разрывных» связок в типе A. На шаге индукции применяем лемму 5.10, получая совместимый с данным тип, содержащий меньшее число разрывных связок. □

Пример 5.3. Пусть $s(p_1) = s(p_2) = 0$, $s(q_1) = s(q_2) = 1$. Возьмём тип $(((q_2\uparrow_2 p_2)/q_1)\downarrow_1 q_2)\odot p_1$, принадлежащий множеству Tp_2. Он совместим с непрерывным типом $((q_2/((((q_2/p_2) \cdot J)/q_1)/J))/J) \cdot p_1$.

Определение 5.4. Тип $A \in \mathrm{Tp}_k$ называется *приведённым*, если он не содержит вхождений базового типа I, а примитивные типы q_j ненулевого сорта и базовый тип J встречаются только в подтипах вида $q_j/J^{s(q_j)}$.

Из определения следует, что всякий непрерывный приведённый тип имеет сорт 0.

Лемма 5.11. *Пусть $A, B, C \in \mathrm{Tp}_k$, а i, j — ненулевые натуральные числа, такие что все рассматриваемые типы корректны, а типы в левых частях соотношений принадлежат Tp_k. Тогда верны следующие соотношения:*

1. $(A \cdot C^i) \cdot (B \cdot C^j) \sim (A \cdot B) \cdot C^{i+j}$,
2. $(A \cdot C^i)/(B \cdot C^j) \sim (A/B) \cdot C^{i-j}$, *если* $i > j$,
3. $(B \cdot C^j) \backslash (A \cdot C^i) \sim (B \setminus A) \cdot C^{i-j}$, *если* $i > j$.

Доказательство. Первый пункт сразу вытекает из пункта 2 леммы 5.8 и ассоциативности умножения. Второй пункт следует из цепочки соотношений $(A \cdot C^i)/(B \cdot C^j) \sim (C^i \cdot A)/(C^j \cdot B) \sim ((C^i \cdot A)/B)/C^j \sim (C^i \cdot (A/B))/C^j \sim ((A/B) \cdot C^i)/C^j \sim (A/B) \cdot (C^i/C^j) \sim (A/B) \cdot C^{i-j} \cdot (C^j/C^j) \sim (A/B) \cdot C^{i-j}$, следующих из лемм 5.8, 5.6 и 5.7. Третий пункт доказывается аналогично. Легко проверить, что из условия леммы следует, что все рассматриваемые типы будут принадлежать Tp_k. □

Лемма 5.12. *Для всякого типа $A \in \mathrm{Tp}_k$ найдётся непрерывный приведённый тип $\widehat{A}$, такой что типы A и $\widehat{A} \cdot J^{s(A)}$ являются совместимыми.*

Доказательство. Будем доказывать утверждение индукцией по построению типа A. Для примитивного типа p сорта 0 положим $\widehat{p} = p$, для примитивного типа q сорта $s > 0$ положим $\widehat{q} = q/J^s$, также положим $\widehat{I} = \widehat{J} = p_0/p_0$, где p_0 — некоторый новый примитивный тип сорта 0. Тогда база индукции следует из пункта 1 леммы 5.6 и леммы 5.7.

Достаточно доказать утверждение леммы для непрерывных типов. На шаге индукции нужно рассмотреть два случая $A = B \cdot C$ и $A = B/C$ (случай $A = C \setminus B$ можно не рассматривать в силу того, что $B/C \sim C \setminus B$). Пусть $A = B \cdot C$, тогда положим $\widehat{A} = \widehat{B} \cdot \widehat{C}$, после чего утверждение леммы вытекает из пункта 1 леммы 5.11. Если же $A = B/C$, то положим $\widehat{A} = \widehat{B}/\widehat{C}$, в этом случае утверждение леммы следует из пункта 2 леммы 5.11. Лемма доказана. □

Пример 5.4. Пусть $s(p_1) = s(p_2) = 0$, $s(q_1) = s(q_2) = 1$, $s(r) = 2$. Рассмотрим непрерывный тип $(q_2/((q_1/(p_1 \cdot J)) \cdot p_2)) \setminus r$ сорта 1, он совместим с типом $(((q_2/J)/(((q_1/J)/(p_1 \cdot (p_0/p_0))) \cdot p_2)) \setminus r) \cdot J$, представляющим собой конкатенацию непрерывного приведённого типа и типа J.

Переобозначим все примитивные типы сорта $i > 0$ через $q_{i,j}$, $j \in \mathbb{N}$. Для каждого такого типа введём новый примитивный тип $q'_{i,j}$ сорта 0. Для каждого приведённого типа $A \in \mathrm{Tp}_k$ назовём его 0-*образом* тип A', полученный заменой всех подтипов вида $q_{i,j}/J^i$ на примитивный тип $q'_{i,j}$ (для каждой пары индексов i и j берётся свой примитивный тип).

Пример 5.5. Пусть $A = (((p_1/(q_{2,1}/J^2))/(q_{1,1}/J))/(q_{1,2}/J)) \setminus p_2$, тогда его 0-образ A' равен $(((p_1/q'_{2,1})/q'_{1,1})/q'_{1,2}) \setminus p_2$.

Лемма 5.13. *Пусть A, B — непрерывные приведённые типы, а A', B' — их 0-образы. Тогда из равенства $[\![A]\!] = [\![B]\!]$ следует, что и $[\![A']\!] = [\![B']\!]$.*

Доказательство. Как следует из леммы 5.3, в случае непрерывных приведённых A и B для выполнения равенства $[\![A]\!] = [\![B]\!]$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого базового типа p было верно условие $[\![A]\!]_p = [\![B]\!]_p$. При построении 0-образов для примитивных типов сорта 0 значения счётчиков не изменятся, если же $q_{i,j}$ являлся примитивным типом сорта $i > 0$, то имеет место равенство $[\![A']\!]_{q'_{i,j}} = [\![A]\!]_{q_{i,j}} = [\![B]\!]_{q_{i,j}} = [\![B']\!]_{q'_{i,j}}$. Кроме того $[\![A']\!]_J = [\![B']\!]_J = 0$, откуда по лемме 5.3 можно заключить, что $[\![A']\!] = [\![B']\!]$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 5.14. *Пусть A, B — приведённые типы, а A', B' — их 0-образы. Тогда из условия $A' \sim B'$ следует, что и $A \sim B$.*

Доказательство. Пусть типы A' и B' совместимы, и C' — их совмещающий тип. Обозначим через C тип, получающийся заменой в C' всех примитивных типов вида $q'_{i,j}$ на типы $q_{i,j}/J^i$. Заметим, что проведя аналогичную замену в выводе секвенции $A' \to C'$, мы получим вывод секвенции $A \to C$ в исчислении HDL_k. Аналогичным образом получается вывод секвенции $B \to C$, таким образом, тип C будет совмещающим для типов A и B. $\square$

Теперь докажем основную теорему данной главы. Основная идея доказательства взята из доказательства теоремы 1 в работе [27]. Обозначим через $\mathrm{Tp}^0_\sim$ множество классов эквивалентности 0-образов непрерывных типов по отношению $\sim$. Введём на множестве $\mathrm{Tp}^0_\sim$ структуру группы, положив $[A]_\sim \circ [B]_\sim = [A \cdot B]_\sim$, $[A]^{-1}_\sim = [A \setminus A/A]_\sim$, $1 = [p/p]_\sim$. Здесь p — некоторый произвольно выбранный примитивный тип, а через $[A]_\sim$ обозначается класс эквивалентности типа A по отношению $\sim$, то есть множество типов, совместимых с A. Заметим, что данное определение корректно, т. к. все типы вида A/A совместимы друг с другом, а корректность первых двух пунктов вытекает из того, что отношение совместимости является конгруэнцией.

Лемма 5.15. *Структура* $\langle \mathrm{Tp}^0_\sim, \circ, {}^{-1}, 1 \rangle$ *является абелевой группой.*

Доказательство. Ассоциативность операции $\circ$ вытекает из ассоциативности связки $\cdot$. Соотношение $[A]_\sim \circ [B]_\sim = [B]_\sim \circ [A]_\sim$ следует из совместимости типов $A \cdot B$ и $B \cdot A$ в исчислении HDL_k. Кроме того, $[A]_\sim \circ [A]^{-1}_\sim = [A \cdot (A \setminus A/A)]_\sim = [A/A]_\sim = 1$, где последнее равенство следует из совместимости типов A/A и p/p. Также для любого типа A верно соотношение $A \sim A \cdot (p/p)$, то есть $[A]_\sim = [A]_\sim \circ 1$. Лемма полностью доказана. $\square$

Теорема 11. *Типы* $A, B \in \mathrm{Tp}_k$ *совместимы в исчислении* HDL_k *тогда и только тогда, когда* $[\![A]\!] = [\![B]\!]$.

Доказательство. Необходимость доказана в лемме 5.2, докажем достаточность. Пусть $[\![A]\!] = [\![B]\!]$. В силу транзитивности отношения совместимости и следствия 5.3 теорему достаточно доказать для непрерывных типов, поэтому будем считать, что A и B непрерывны. Тогда по лемме 5.12 найдутся непрерывные приведённые типы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$, такие что в случае $s(A) = s(B) = 0$ верны соотношения $A \sim \widehat{A}$ и $B \sim \widehat{B}$, а в случае

$s(A) = s(B) = l > 0$ верны соотношения $A \sim \widehat{A} \cdot J^l$ и $B \sim \widehat{B} \cdot J^l$. Тогда получаем, что $[\![\widehat{A}]\!] = [\![A/J^l]\!] = [\![A]\!]\alpha^{-l} = [\![B]\!]\alpha^{-l} = [\![\widehat{B}]\!]$. Кроме того, в силу того, что отношение совместимости является конгруэнцией, из совместимости типов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ сразу будет следовать совместимость исходных типов A и B. Таким образом, теорему достаточно доказать для случая непрерывных приведённых типов A и B.

Пусть A' и B' — 0-образы типов A и B, тогда в силу леммы 5.14 достаточно доказать совместимость типов A' и B' в исчислении HDL_k, при этом по лемме 5.13 верно равенство $[\![A']\!] = [\![B']\!]$. Заметим, что множество 0-образов непрерывных приведённых типов замкнуто относительно подтипов. Обозначим через $\mathbf{F}_0$ свободную абелеву группу, порождённую примитивными типами, входящими в данное множество. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 1 из работы [27].

Рассмотрим отображение $h\colon \mathbf{F}_0 \to \mathrm{Tp}^0_\sim$, задаваемое соотношениями $h(p) = [p]_\sim$ и $h(p^{-1}) = [p \setminus p/p]_\sim$, и продолжим его до гомоморфизма из $\mathbf{F}_0$ в $\mathrm{Tp}^0_\sim$. Докажем по индукции, что для каждого 0-образа E верны равенства $h([\![E]\!]) = [E]_\sim$ и $h([\![E]\!]^{-1}) = [E \setminus E/E]_\sim$. База индукции следует из определения отображения h.

Докажем шаг индукции. Выполняются соотношения $h([\![C \cdot D]\!]) = h([\![C]\!][\![D]\!]) = [C]_\sim \circ [D]_\sim = [C \cdot D]_\sim$, а также $h([\![C \cdot D]\!]^{-1}) = h([C]^{-1}[D]^{-1}) = [C \setminus C/C]_\sim \circ [D \setminus D/D]_\sim \sim [(C \setminus C/C) \cdot (D \setminus D/D)]_\sim$. Но по пункту 2 леммы 5.6 и лемме 5.7 имеем $(C \setminus C/C) \cdot (D \setminus D/D) \sim C \setminus ((C/C) \cdot (D \setminus D/D)) \sim C \setminus (D \setminus D/D) \sim C \setminus ((D \setminus D) \cdot (C/C))/D \sim C \setminus (D \setminus (D \cdot C)/C)/D \sim (D \cdot C) \setminus (D \cdot C)/(D \cdot C)$. Таким образом, $h([\![C \cdot D]\!]^{-1}) = [(D \cdot C) \setminus (D \cdot C)/(D \cdot C)]_\sim = [(C \cdot D) \setminus (C \cdot D)/(C \cdot D)]_\sim$, что и требовалось.

Разберём случай $E = C/D$, тогда $h([\![C/D]\!]) = h([\![C]\!][\![D]\!]^{-1}) = [C]_\sim \circ [D \setminus D/D]_\sim = [C \cdot (D \setminus D/D)]_\sim = [(C \cdot (D \setminus D))/D]_\sim = [C/D]_\sim$. Кроме того, $h([\![C/D]\!]^{-1}) = h([\![D]\!][\![C]\!]^{-1}) = [D/C]_\sim$. Но в силу пункта 1 леммы 5.6 и леммы 5.7 верна цепочка соотношений $D/C \sim D/((C/D) \cdot D) \sim$

$(D/D)/(C/D) \sim (C/D)\setminus(C/D)/(C/D)$, что и требовалось.

Таким образом, для любого 0-образа E выполняется соотношение $h([\![E]\!]) = [E]_\sim$. Но тогда из равенства $[\![A']\!] = [\![B']\!]$ следует равенство $[A']_\sim = [B']_\sim$, то есть совместимость типов A' и B'. Теорема доказана. $\square$

Таким образом, мы доказали, что условие $[\![A]\!] = [\![B]\!]$ является критерием совместимости в исчислении HDL_k. Докажем, что оно также является критерием совместимости в полном исчислении HDL. По лемме 5.5 равенство интерпретаций будет необходимым условием. С другой стороны, если типы A и B совместимы во фрагменте HDL_k, то они заведомо будут совместимыми и в исчислении HDL. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 12. *Типы $A, B \in \mathrm{Tp}_k$ совместимы в исчислении* HDL *тогда и только тогда, когда $[\![A]\!] = [\![B]\!]$.*

Следствие 5.4. Типы $A, B \in \mathrm{Tp}_k$ совместимы в исчислении HDL_k тогда и только тогда, когда они совместимы в полном исчислении HDL.

Глава 6

О пересечении языков, порождаемых разрывными грамматиками Ламбека, с автоматными языками

6.1 Секвенциальное исчисление DL

Существенным недостатком исчисления HDL, характерным для большинства несеквенциальных исчислений, является наличие правила транзитивности, которое может приводить к нарушению свойства подформульности. В связи с этим в данной главе мы рассмотрим мы рассмотрим секвенциальную форму исчисления Ламбека с операциями замещения, обозначаемую через DL.

В исчислении Ламбека с операциями замещения понятие секвенции усложняется по сравнению с исчислением L^*. Основным при этом является определяемое ниже понятие конфигурации. Обозначим через Tp_D^i множество типов из Tp_D имеющих сорт i, и пусть новый символ $[]$ играет роль разделителя.

Определение 6.1. Множество *атомарных конфигураций* есть наименьшее множество слов в алфавите $\mathrm{Tp}_D \cup \{[], \{, \}, ;\}$, удовлетворяющее следующему индуктивному определению:

1. $[]$ является атомарной конфигурацией.
2. Любой тип $A \in \mathrm{Tp}_D^0$ является атомарной конфигурацией.

3. Для любого $i > 0$, любого типа $A \in \mathrm{Tp}_D^i$ и любого конечного набора слов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_i$, каждое из которых является конкатенацией конечного числа атомарных конфигураций, выражение $A\{\Gamma_1; \ldots; \Gamma_i\}$ является атомарной конфигурацией.

Конфигурациями будем называть слова, полученные конкатенацией конечного числа атомарных конфигураций. Конфигурации будем обозначать большими греческими буквами $\Gamma, \Delta, \ldots$, возможно с нижними индексами, а всё множество конфигураций — через $\mathcal{O}$. Пустую конфигурацию будем обозначать через Λ. Заметим, что если Γ и Δ являются конфигурациями, то $\Gamma\Delta$ также будет конфигурацией.

На конфигурации естественным образом продолжается функция сорта s, определяемая следующим образом:

1. $s(\Lambda) = 0$,
2. $s([]) = 1$,
3. $s(A) = 0$, если $A \in \mathrm{Tp}_D^0$,
4. $s(A\{\Gamma_1; \ldots; \Gamma_i\}) = s(\Gamma_1) + \ldots + s(\Gamma_i)$,
5. $s(\Gamma_1 \ldots \Gamma_r) = s(\Gamma_1) + \ldots + s(\Gamma_r)$, где $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ — атомарные конфигурации.

Пример 6.1. Пусть $s(A) = s(B) = 0$, $s(C) = 1$, $s(D) = 2$, тогда $(C/A)\{[]\}(D\uparrow_1 B)\{A; B; []\}$ является конфигурацией, $s((C/A)\{[]\}(D\uparrow_1 B)$ $\{A; B; []\}) = s((C/A)\{[]\}) + s((D \uparrow_1 B)\{A; B; []\}) = 1 + 0 + 0 + 1 = 2$.

Для каждой конфигурации $\Gamma \in \mathcal{O}$ определим её *представляющий тип* $\tau(\Gamma)$:

1. $\tau([]) = J$,
2. $\tau(A) = A$, если $A \in \mathrm{Tp}_D^0$,
3. $\tau(A\{\Gamma_1; \ldots; \Gamma_i\}) = (\ldots(A \odot_i \tau(\Gamma_i)) \ldots \odot_2 \tau(\Gamma_2)) \odot_1 \tau(\Gamma_1)$.
4. $\tau(\Gamma_1 \ldots \Gamma_i) = \tau(\Gamma_1) \cdot \ldots \cdot \tau(\Gamma_i)$, если $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_i$ — атомарные конфигурации.

Пример 6.2. Пусть $s(A) = s(B) = 0$, $s(C) = 1$, $s(D) = 2$ и $\Gamma = (C/A)\{[]\}(D\uparrow_1 B)\{A; B; []\}$, тогда $\tau(\Gamma) = ((C/A) \odot_1 J) \cdot ((((D\uparrow_1 B) \odot_3 J) \odot_2 B) \odot_1 A)$.

Лемма 6.1. *Для всякой конфигурации* Γ *верно, что* $s(\Gamma) = s(\tau(\Gamma))$.

Доказательство. Индукция по построению конфигурации Γ. $\square$

Для каждого типа A определим его *вектор-конфигурацию* $\vec{A}$, равную A, если $s(A) = 0$, и $A\{\underbrace{[]; \ldots; []}_{s(A)\ \text{раз}}\}$ в противном случае. Следующее утверждение вытекает из аксиоматики исчисления HDL и следствия 4.1.

Лемма 6.2. *Для всякого типа* $A \in \mathrm{Tp}_D$ *типы* A *и* $\tau(\vec{A})$ *являются равносильными в исчислении* HDL.

Таким образом, при построении конфигураций конкатенация совпадает по смыслу со связкой $\cdot$, а обозначение $A\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$ означает одновременную замену разделителей в вектор-конфигурации $\vec{A}$ на конфигурации $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, то есть аналогична последовательному применению нескольких операций $\odot_j$.

Легко доказать по индукции, что сорт конфигурации равен числу входящих в неё металингвистических разделителей. Эти разделители можно упорядочить слева направо. Пусть Γ и Δ — конфигурации, тогда через $\Gamma|_j\Delta$ обозначается конфигурация, получаемая заменой j-го разделителя в Γ на Δ. Пусть $s(\Gamma) = s$, $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ — некоторые конфигурации, тогда через $\Gamma \otimes (\Delta_1; \ldots; \Delta_s)$ обозначается конфигурация, получаемая одновременной заменой всех разделителей в Γ слева направо на $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$. Заметим, что конфигурация $\Gamma \otimes (\Delta_1; \ldots; \Delta_s)$ совпадает с конфигурацией $(\ldots((\Gamma|_s\Delta_s)|_{s-1}\Delta_{s-1})\ldots)|_1\Delta_1$.

Пример 6.3. Пусть $s(A) = s(B) = 0$, $s(C) = 1$, $s(D) = 2$, тогда $C\{(C/B)\{[]\}\}D\{A; []\} \otimes \{A; BJ\{[]\}\} = C\{(C/B)\{A\}\}, D\{A; BJ\{[]\}\}$.

Для дальнейшего нам понадобится ввести понятие гиперконтекста. Вначале определим понятие контекста. Формальное определение приведено ниже, неформально же контекст представляет собой конфигурацию, в которой один из примитивных типов заменён на специальный маркер #, обозначающий место подстановки в контекст.

Определение 6.2. Множество *контекстов* есть наименьшее множество слов в алфавите $\mathrm{Tp}_D \cup \{[], \{, \}, ;, \#\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\#$ есть контекст.
2. Если $A \in \mathrm{Tp}_D$, $s = s(A) > 0$, $1 \leqslant j \leqslant s$, Ψ является контекстом, а $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{j-1}, \Gamma_{j+1}, \ldots, \Gamma_s$ являются конфигурациями, то $A\{\Gamma_1; \ldots; \Gamma_{j-1}; \Psi; \Gamma_{j+1}; \ldots; \Gamma_s\}$ является контекстом.
3. Если Ψ является контекстом, а $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{j-1}, \Gamma_{j+1}, \ldots, \Gamma_s$ являются атомарными конфигурациями, то $\Gamma_1 \ldots \Gamma_{j-1} \Psi \Gamma_{j+1} \ldots \Gamma_s$ является контекстом.

Для каждого контекста Ψ и конфигурации Γ через $\Psi[\Gamma]$ обозначим результат подстановки Γ в Ψ, равный конфигурации, получающейся при замене в Ψ вхождения маркера $\#$ на Γ.

Гиперконтекстом Φ сорта s называется совокупность, состоящая из контекста Ψ и конфигураций $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$. Результат подстановки конфигурации Γ сорта s в Φ равен $\Psi[\Gamma \otimes (\Delta_1; \ldots; \Delta_s)]$ и обозначается через $\Phi\langle\Gamma\rangle$. В этом случае Ψ называется *внешним контекстом*, а $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ — *внутренними конфигурациями* для Γ. Гиперконтексты будем обозначать большой греческой буквой Φ.

Пример 6.4. Пусть $s(A) = 0, s(B) = s(C) = 1$, тогда $\Psi = C\{[]\}(B \uparrow_1 A)\{[]; \#\}$ является контекстом. Если гиперконтекст Φ состоит из внешнего контекста Ψ и внутренних конфигураций A и $B\{A\}$, то $\Phi\langle B\{[]\}C\{[]\}\rangle = C\{[]\}(B \uparrow_1 A)\{[]; B\{A\}C\{B\{A\}\}\}$.

Секвенции исчисления Ламбека с операциями замещения имеют вид $\Gamma \to A$, где $\Gamma \in \mathcal{O}, A \in \mathrm{Tp}_D$, причём $s(\Gamma) = s(A)$. Тогда исчисление DL задаётся следующей аксиоматикой:

$$\frac{}{\vec{A} \to A}\,(ax) \qquad\qquad \frac{\Gamma \to A \qquad \Phi\langle\vec{A}\rangle \to B}{\Phi\langle\Gamma\rangle \to B}\,(\mathrm{cut})$$

$$\frac{\vec{A}\Gamma \to C}{\Gamma \to A \setminus C}\,(\to\setminus) \qquad\qquad \frac{\Phi\langle\vec{C}\rangle \to D \qquad \Gamma \to A}{\Phi\langle\Gamma\overrightarrow{(A \setminus C)}\rangle \to D}\,(\setminus\to)$$

$$\frac{\Gamma\vec{A} \to C}{\Gamma \to C/A}\,(\to/) \qquad\qquad \frac{\Phi\langle\vec{C}\rangle \to D \qquad \Gamma \to A}{\Phi\langle\overrightarrow{(C/A)}\Gamma\rangle \to D}\,(/\to)$$

$$\frac{\Gamma \to A \qquad \Delta \to B}{\Gamma\Delta \to A \cdot B}\,(\to\cdot) \qquad\qquad \frac{\Phi\langle\vec{A}\vec{B}\rangle \to D}{\Phi\langle\overrightarrow{A \cdot B}\rangle \to D}\,(\cdot\to)$$

$$\frac{}{\Lambda \to I}\,(\to I) \qquad\qquad \frac{\Phi\langle\Lambda\rangle \to A}{\Phi\langle I\rangle \to A}\,(I\to)$$

$$\frac{\vec{A}|_k\Gamma \to C}{\Gamma \to A \downarrow_k C}\,(\to\downarrow) \qquad\qquad \frac{\Phi\langle\vec{C}\rangle \to D \qquad \Gamma \to A}{\Phi\langle\Gamma|_k\overrightarrow{(A \downarrow_k C)}\rangle \to D}\,(\downarrow\to)$$

$$\frac{\Gamma|_k\vec{A} \to C}{\Gamma \to C \uparrow_k A}\,(\to\uparrow) \qquad\qquad \frac{\Phi\langle\vec{C}\rangle \to D \qquad \Gamma \to A}{\Phi\langle\overrightarrow{(C \uparrow_k A)}|_k\Gamma\rangle \to D}\,(\uparrow\to)$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma|_k\Delta \to A \odot_k B}\,(\to\odot) \qquad\qquad \frac{\Phi\langle\vec{A}|_k\vec{B}\rangle \to D}{\Phi\langle\overrightarrow{A \odot_k B}\rangle \to D}\,(\odot\to)$$

$$\frac{}{[] \to J}\,(\to J) \qquad\qquad \frac{\Phi\langle[]\rangle \to A}{\Phi\langle\vec{J}\rangle \to A}\,(J\to)$$

Пример 6.5. Пусть $s(A) = s(B) = 1$, тогда секвенции $\vec{A} \to (A \odot_1 B)\uparrow_1 B$, $A\{J \cdot (A \setminus B)\} \to A\downarrow_1(A \odot_1 B)$ и $\overrightarrow{(A\uparrow_1 B)\downarrow_1 A} \to A/(B \setminus A)$ являются выводимыми в исчислении DL. Соответствующие выводы приведены ниже.

$$\cfrac{\cfrac{A\{[]\} \to A \quad B\{[]\} \to B}{A\{B\} \to A \odot_1 B}\,(\to\odot)}{A\{[]\} \to (A \odot_1 B)\downarrow_1 B}\,(\to\downarrow)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\{[]\}\to A \quad B\{[]\}\to B}{A\{B\{[]\}\}\to A\odot_1 B}\,(\to\odot)\qquad A\{[]\}\to A}{A\{A\{[]\}(A\backslash B)\}\to A\odot_1 B}\,(\backslash\to)}{A\{[](A\backslash B)\}\to A\downarrow_1(A\odot_1 B)}\to\downarrow}{A\{J\{[]\}(A\backslash B)\}\to A\downarrow_1(A\odot_1 B)}\,(J\to)}{A\{J\{[]\}\cdot(A\backslash B)\}\to A\downarrow_1(A\odot_1 B)}\,(\cdot\to)$$

$$\dfrac{\dfrac{A\{[]\}\to A \qquad \dfrac{\dfrac{A\{[]\}\to A \quad B\{[]\}\to B}{B\{[]\}(B\backslash A)\to A}\,(\backslash\to)}{[](B\backslash A)\to(A\uparrow_1 B)}\,(\to\uparrow)}{((A\uparrow_1 B)\downarrow_1 A)\{[]\}(B\backslash A)\to A}\,(\downarrow\to)}{((A\uparrow_1 B)\downarrow_1 A)\{[]\}\to A/(B\backslash A)}\,(\to/)$$

Пример 6.6. Пусть $s(A) = s(B) = 1$, тогда секвенция $A\{(A\downarrow_1 B)\{[]\}(J\backslash A)\}\to A\odot_1 B$ является выводимой в исчислении DL. Действительно, выведем сначала секвенцию $A\{A\{(A\downarrow_1 B)\{[]\}\}\}\to A\odot_1 B$:

$$\dfrac{\dfrac{B\{[]\}\to B \quad A\{[]\}\to A}{A\{(A\downarrow_1 B)\{[]\}\}\to B}\,(\downarrow\to)\qquad A\{[]\}\to A}{A\{A\{(A\downarrow_1 B)\{[]\}\}\}\to A\odot_1 B}\,(\to\odot)$$

При применении правила $(\downarrow\to)$, имеющего вид

$$\dfrac{\Phi\langle\vec{C}\rangle\to D \quad \Gamma\to A}{\Phi\langle\Gamma|_k\overrightarrow{(A\downarrow_k C)}\rangle\to D},$$

гиперконтекст Φ состоит из внешнего контекста $\#$ и внутренней конфигурации $[]$, в качестве типов C и D выступает тип B, а конфигурация Γ равна $A\{[]\}$.

Теперь применим правило $(\backslash\to)$, имеющее вид

$$\dfrac{\Phi\langle\vec{C}\rangle\to D \quad \Gamma\to A}{\Phi\langle\Gamma(\overrightarrow{A\backslash C})\rangle\to D}\ ,$$

взяв в качестве второй посылки выводимую секвенцию $[] \to J$, а в качестве гиперконтекста Φ взяв совокупность из внешнего контекста $A\{\#\}$ и внутренней конфигурации $(A \downarrow_1 B)\{[]\}$. Тогда имеет место равенство $([](J \setminus A)) \otimes ((A \downarrow_1 B)\{[]\}) = (A \downarrow_1 B)\{[]\}\,(J \setminus A)$, что при подстановке в правило приводит к выводимости секвенции $A\{(A \downarrow_1 B)\{[]\}(J \setminus A)\} \to A \odot_1 B$.

В дальнейшем мы будем опускать значок вектора при записи вектор-конфигураций. Например, если $s(A) = 0$, $s(B) = 1$, $s(C) = 2$, $s(D) = 3$, то запись $BAC \to D$ означает $B\{[]\}AC\{[];[]\} \to D$.

Как доказано в работе [32], $\mathrm{DL} \vdash \Gamma \to A$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{HDL} \vdash \tau(\Gamma) \to A$. Отсюда по лемме 6.2 следует, что для секвенций вида $A \to B$ утверждения об их выводимости в исчислениях DL и HDL являются равносильными, таким образом исчисления DL и HDL в некотором смысле эквивалентны. Как доказано в [24], в исчислении DL устранимо сечение, то есть всякая секвенция, выводимая в этом исчислении, может быть выведена без применения правила (cut). В дальнейшем мы будем рассматривать только выводы без сечения, если явно не будет оговорено противное. Заметим, что из устранимости сечения следует свойство подформульности, из которого вытекает разрешимость исчисления DL.

Также из устранимости сечения следует, что если заменить некоторый подтип одного из типов секвенции на равносильный ему тип, то это не повлияет на выводимость секвенции. Кроме того, в исчислении DL допустимо правило подстановки, позволяющее заменять все вхождения некоторого примитивного типа p на один и тот же произвольный тип A того же сорта.

В дальнейшем под исчислением Ламбека с операциями замещения мы будем подразумевать именно исчисление DL.

Обозначим через $\mathcal{O}_k$ множество конфигураций, сорт которых не превышает k, и которые не содержат типов не из Tp_k. Исчисление, получающееся из DL запретом типов не из Tp_k и конфигураций не из $\mathcal{O}_k$, обозначается через DL_k. При любом натуральном k исчисление DL_k эквивалентно введённому в разделе 4.3 несеквенциальному исчислению HDL_k. Как и для полного исчисления DL, для фрагмента DL_k верны свойства подформульности и устранимости сечения. Из этого вытекает, в частности, что все исчисления DL_k являются консервативными расширениями исчислений L^* и L_1.

6.2 Категориальные грамматики, основанные на вариантах исчисления Ламбека

Понятие категориальной грамматики было введено К. Айдукевичем в работе [3]. В работе [18] было введено понятие грамматики Ламбека, то есть категориальной грамматики, основанной на исчислении Ламбека L (далее, L-грамматики). Из результатов работы [5] следует, что всякий контекстно-свободный язык без пустого слова может быть порождён некоторой L-грамматикой. Обратный результат, показывающий, что всякий язык, порождаемый L-грамматикой, является контекстно-свободным, был получен М. Р. Пентусом в [35], там же доказан аналогичный результат для исчисления L^*. Обратное включение для исчисления L^* получено С. Л. Кузнецовым в работе [17]. В [17] также исследовались классы языков, порождаемые грамматиками, основанными на вариантах исчисления Ламбека. Ниже мы приведём основные определения, связанные с понятием грамматики Ламбека.

Определение 6.3. *Грамматикой Ламбека* или L-*грамматикой* называется тройка $\mathcal{G} = \langle \Sigma, \rhd, H \rangle$, где Σ — конечный алфавит, $\rhd$ — конечное подмножество декартова произведения $\Sigma \times \mathrm{Tp}$, а $H \in Tp$ — *целевой тип*. Язык $L(\mathcal{G})$, задаваемый грамматикой $\mathcal{G}$, определяется равенством

$$L(\mathcal{G}) = \{a_1 \dots a_r \mid \exists A_1, \dots A_r (\forall j (a_j \rhd A_j) \wedge \mathrm{L} \vdash A_1 \dots A_r \to H)\},$$

где запись $a_j \rhd A_j$ означает $(a_j, A_j) \in \rhd$. Если заменить в данном определении исчисление L на L*, получим определение L*-грамматики.

Пример 6.7. L-грамматика $\mathcal{G} = \langle \Sigma, \rhd, p/p \rangle$, где $\rhd = \{\langle a, (p/p)/p \rangle, \langle b, p \rangle\}$ задаёт язык $\{w \in \{a,b\}^+ \mid |w|_a = |w|_b, \forall u \sqsubseteq w(|u|_a \geqslant |u|_b)\}$, то есть язык непустых правильных скобочных последовательностей с одним типом скобок. Например, слово $aabb$ принадлежит этому языку, поскольку $\mathrm{L} \vdash ((p/p)/p)((p/p)/p)pp \to p/p$.

Теорема 13 (Н. Гайфман, 1960; М. Р. Пентус, 1995; С. Л. Кузнецов, 2009)**.**

1. L *-грамматиками порождаются в точности все контекстно-свободные языки, не содержащие пустого слова.*
2. L**-грамматиками порождаются в точности все контекстно-свободные языки.*

Аналогичным образом можно ввести грамматики, основанные на исчислении Ламбека с операциями замещения HDL.

Определение 6.4. HDL-*грамматикой* называется тройка $\mathcal{G} = \langle \Sigma, \rhd, H \rangle$, где Σ — конечный алфавит, $\rhd$ — конечное подмножество декартова произведения $\Sigma \times \mathrm{Tp}^0_D$, называемое словарём, а $H \in \mathrm{Tp}^0_D$ — целевой тип. Язык $L(\mathcal{G})$, определяемый грамматикой $\mathcal{G}$, задаётся соотношением

$$L(\mathcal{G}) = \{a_1 \ldots a_r \mid \exists A_1, \ldots A_r((\forall j(a_j \rhd A_j)) \wedge \mathrm{HDL} \vdash A_1 \cdot \ldots \cdot A_r \to H)\}.$$

Вместо исчисления HDL удобно использовать его секвенциальную версию DL. Поэтому далее мы будем рассматривать грамматики, основанные на исчислении Ламбека с операциями замещения DL (разрывные грамматики Ламбека или DL-грамматики) и его фрагментах DL_k (DL_k-грамматики). Данные грамматики детально изучались в работах [23] и [24]. В частности, [24] содержит примеры анализа некоторых синтаксических явлений в естественных языках с помощью DL-грамматик.

Взаимосвязь разрывных грамматик Ламбека с другими вариантами категориальных грамматик рассматривается в монографии [22].

Определение 6.5. *Разрывной грамматикой Ламбека* или DL*-грамматикой* называется тройка $\mathcal{G} = \langle \Sigma, \triangleright, H \rangle$, где Σ — конечный алфавит, $\triangleright$ — конечное подмножество декартова произведения $\Sigma \times \mathrm{Tp}^0_D$, называемое словарём, а $H \in \mathrm{Tp}^0_D$ — целевой тип. Язык $L(\mathcal{G})$, задаваемый грамматикой $\mathcal{G}$, определяется аналогично случаю L-грамматики с заменой исчисления L на DL, то есть

$$L(\mathcal{G}) = \{a_1 \dots a_r \mid \exists A_1, \dots A_r (\forall j (a_j \triangleright A_j) \wedge \mathrm{DL} \vdash A_1 \dots A_r \to H)\}.$$

Данное определение эквивалентно определению HDL-грамматики. Если в определении 6.5 заменить исчисление DL на его фрагмент DL_k для некоторого натурального k, то мы получим определение DL_k-грамматики. Заметим, что в силу конечности словаря и свойства подформульности исчисления DL всякая DL-грамматика является DL_k-грамматикой для некоторого k.

Пример 6.8 (Г. Моррилл, О. Валентин, 2011)**.** Пусть $s(p_1) = s(p_2) = s(p_3) = 1$, тогда DL_1-грамматика $\mathcal{G} = \langle \Sigma, \triangleright, p_1 \odot_1 I \rangle$ со словарём $a \triangleright p_1 / p_3$, $b \triangleright J \setminus p_2, b \triangleright J \setminus (p_1 \downarrow_1 p_2)$, $c \triangleright p_2 \setminus p_3$ порождает язык $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$. Приведённый ниже вывод показывает, что слово abc принадлежит $L(\mathcal{G})$.

$$\dfrac{\dfrac{p_1 \to p_1 \qquad \dfrac{p_3 \to p_3 \qquad \dfrac{p_2 \to p_2 \quad [] \to J}{[](J \setminus p_2) \to p_2}(\setminus \to)}{[](J \setminus p_2)(p_2 \setminus p_3) \to p_3}(\setminus \to)}{(p_1/p_3)[](J \setminus p_2)(p_2 \setminus p_3) \to p_1}(/ \to) \qquad \Lambda \to I}{(p_1/p_3)(J \setminus p_2)(p_2 \setminus p_3) \to p_1 \odot_1 I}(\to \odot)$$

Поскольку все исчисления DL_k являются консервативными расширениями исчисления L^*, то при любом k всякий контекстно-свободный язык порождается некоторой DL_k-грамматикой. Приведённый выше пример показывает, что уже DL_1-грамматиками порождаются некоторые языки, не являющиеся контекстно-свободными. В работе [23] доказано, что с помощью DL$_1$-грамматик порождаются, в частности, все языки, представимые в виде замыкания автоматного языка относительно перестановки букв в словах.

6.3 Конечные автоматы и задаваемые ими языки

В этом разделе будут введены необходимые определения из теории формальных языков, касающиеся конечных автоматов и задаваемого ими класса формальных языков.

Определение 6.6. *Недетерминированным конечным автоматом* (далее, *конечным автоматом*) называется кортеж $M = \langle \Sigma, Q, \Delta, q_s, F \rangle$, где Σ — конечный *алфавит*, Q — конечное множество *состояний*, $\Delta \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$ — конечное множество *переходов* вида $(q_1, w) \to q_2$, где w называется *меткой перехода*, $q_s \in Q$ — *стартовое состояние*, а $F \subseteq Q$ — множество *завершающих состояний*.

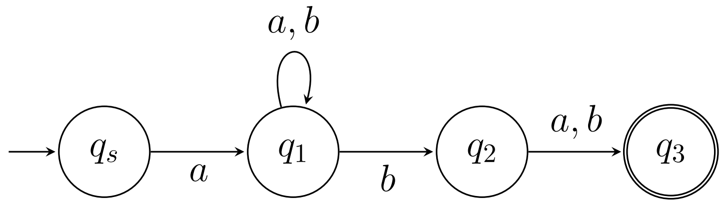
Определение 6.7. *Конфигурацией* конечного автомата называется пара $\langle q, w \rangle$, $q \in Q, w \in \Sigma^*$. Множество конфигураций автомата M будем обозначать через $\mathcal{C}_M$. Отношением *достижимости* в автомате M назовём наименьшее рефлексивное транзитивное отношение $\to_M \in \mathcal{C}_M \times \mathcal{C}_M$, такое что для каждого перехода $(\langle q_1, u \rangle \to q_2) \in \Delta$ и произвольного слова $v \in \Sigma$ выполняется соотношение $\langle q_1, uv \rangle \to_M \langle q_2, v \rangle$. Язык $L(M)$, задаваемый автоматом, состоит из всех слов w, таких что существует завершающее состояние $q \in F$, удовлетворяющее соотношению $\langle q_s, w \rangle \to_M \langle q, \varepsilon \rangle$.

Определение 6.8. Пусть $M = \langle \Sigma, Q, \Delta, q_s, F \rangle$ — конечный автомат, а $w \in L(M)$. Тогда последовательность состояний $q_{i_0} = q_s, q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}$, где $q_{i_r} \in F$, называется *распознающей* для слова w в автомате M, если существует представление $w = w_{i_1} \ldots w_{i_r}$, такое что для всякого $j \leqslant r$ выполняется соотношение $(\langle q_{i_{j-1}}, w_{i_j} \rangle \to q_{i_j}) \in \Delta$.

Хорошо известно (см., например, [2]), что если разрешить в определении автомата только однобуквенные метки переходов, то класс распознаваемых языков не изменится. Более того, каждый автоматный язык, не содержащий пустого слова, может распознаваться конечным автоматом с однобуквенными переходами, имеющим ровно одно завершающее состояние. Заметим, что если автомат M содержит только однобуквенные переходы, то всякая распознающая последовательность для слова w в автомате M имеет длину $|w| + 1$.

Конечные автоматы удобно изображать графически. Состояния автомата будем обозначать кружка́ми, при этом стартовое состояние будем помечать входящей в него стрелкой, а завершающее состояние — двойным кружком. Переходы будем изображать стрелками, соединяющими состояния, на стрелке при этом написана метка перехода. Таким образом, конечный автомат представляет собой помеченный ориентированный граф, в котором выделены отдельные вершины.

Пример 6.9. Приведённый на рисунке автомат распознаёт язык слов длины не меньше 3, начинающихся с буквы a, в которых предпоследняя буква равна b.



Последовательность состояний $q_s, q_1, q_1, q_1, q_2, q_3$ является распознающей для слова $ababa$ в данном автомате.

6.4 Пересечение с автоматными языками: описание конструкции

В этой главе мы докажем следующий основной результат:

Теорема 14. *Множество языков, распознаваемых* DL*-грамматиками, замкнуто относительно пересечения с автоматными языками, не содержащими пустого слова.*

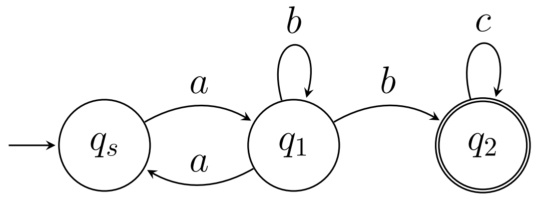
Доказательство замкнутости класса языков, порождаемых грамматиками Ламбека, относительно тех или иных операций, представляет значительно бо́льшие трудности в сравнении с аналогичной задачей для классов языков, порождаемых той или иной разновидностью порождающих грамматик. Так, для грамматик, основанных на исчислении L, в основном используется эквивалентность между данным классом грамматик и контекстно-свободными грамматиками. Однако этот метод не может быть применён в случае грамматик, основанных на исчислении DL и его фрагментах DL_k, так как на данный момент неизвестно точное описание класса языков, порождаемых DL-грамматиками, в терминах иерархии Хомского.

Мы докажем, что класс языков, порождаемых DL_k-грамматиками, замкнут относительно пересечения с автоматными языками, не содержащими пустого слова. Для случая $k = 0$ данный результат следует из эквивалентности L^*-грамматик и контекстно-свободных грамматик (см. [35], [17]) и замкнутости контекстно-свободных языков относительно пересечения с автоматными языками (см. [7]). Однако описанная конструкция имеет существенный недостаток, так как преобразование грамматики Ламбека в эквивалентную ей контекстно-свободную грамматику приводит к экспоненциальному увеличению размера грамматики. Как следствие, конечная грамматика для пересечения исходного языка, задаваемого грамматикой Ламбека, с автоматным языком также имеет экспоненциальный размер в сравнении с исходной грамматикой. В случае применения нашей конструкции имеет место лишь полиномиальное увеличение размера грамматики. Основная идея конструкции заимствована из доказательства замкнутости контекстно-свободных языков относительно пересечения с автоматными языками в [7].

Пусть язык L задаётся некоторой DL-грамматикой $\mathcal{G} = \langle \Sigma, \triangleright, H \rangle$, а L_R — некоторый автоматный язык, не содержащий пустого слова. Можно считать, что L_R задаётся конечным автоматом $M = \langle \Sigma, Q, \Delta, q_s, \{q_f\} \rangle$ с одним завершающим состоянием и однобуквенными переходами.

Построим новую грамматику $\mathcal{G}' = \langle \Sigma, \triangleright', H' \rangle$, задающую язык $L \cap L_R$. Будем считать, что все элементы множества Q принадлежат множеству Pr и имеют сорт 0, при этом они не используются при построении типов грамматики $\mathcal{G}$. Положим $H' = (q_s \setminus H) \cdot q_f$. Словарь $\triangleright'$ определяется как $\triangleright' = \{\langle a, (q_1 \setminus A) \cdot q_2 \rangle \mid a \triangleright A,\ (\langle q_1, a \rangle \to q_2) \in \Delta\}$. В следующем разделе мы докажем, что данная грамматика порождает в точности язык $L \cap L_R$.

Пример 6.10. Регулярный язык $L_R = \{a^{2k+1} b^{l+1} c^m \mid k, l, m \in \mathbb{N}\}$ распознаётся конечным автоматом, изображённым ниже.



Тогда язык $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap L_R = \{a^{2k+1} b^{2k+1} c^{2k+1} \mid k \in \mathbb{N}\}$ порождается грамматикой $\mathcal{G}' = \langle \{a, b, c\}, \triangleright', (q_s \setminus (A \odot I)) \cdot q_2 \rangle$, где словарь $\triangleright'$ приведён ниже. Здесь p_1, p_2, p_3 — примитивные типы с $s(p_1) = s(p_2) = s(p_3) = 1$:

$$
\begin{aligned}
a :&\ \ (q_s \setminus (p_1 / p_3)) \cdot q_1,\ (q_1 \setminus (p_1 / p_3)) \cdot q_s \\
b :&\ \ (q_1 \setminus (J \setminus p_2)) \cdot q_1,\ (q_1 \setminus (J \setminus p_2)) \cdot q_2 \\
b :&\ \ (q_1 \setminus (J \setminus (p_1 \downarrow_1 p_2))) \cdot q_1,\ (q_1 \setminus (J \setminus (p_1 \downarrow_1 p_2))) \cdot q_2 \\
c :&\ \ (q_2 \setminus (p_2 \setminus p_3)) \cdot q_2.
\end{aligned}
$$

6.5 Доказательство корректности конструкции

В данном разделе мы докажем, что предложенный нами алгоритм действительно строит грамматику для языка $L \cap L_R$. Можно считать, что $L_R = L(M)$, где $M = \langle \{q_1, \ldots, q_n\}, \Sigma, \Delta, q_1, \{q_n\} \rangle$. В дальнейшем мы будем обозначать $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$. Обозначим через $\mathcal{T}$ множество всех типов исчисления DL, не содержащих примитивных типов из множества Q. Для каждого типа $T \in \mathcal{T}$ обозначим через $T_{i,j}$ тип $(q_i \setminus T) \cdot q_j$. Также будем обозначать $T_{i,0} = q_i \setminus T$, $T_{0,0} = T$. По построению можно переобозначить $H' = H_{1,n}$, а также $\rhd' = \{\langle a, A_{i,j} \rangle \mid a \rhd A, (\langle q_i, a \rangle \to q_j) \in \Delta\}$.

Обозначим $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{T_{i,j} \mid T \in \mathcal{T},\, 1 \leqslant i \leqslant n,\, 0 \leqslant j \leqslant n\} \cup \{q_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Заметим, что множество $\mathcal{T}'$ замкнуто относительно подтипов. Обозначим через $\mathcal{O}(\mathcal{T}')$ множество конфигураций, в которых разрешены только типы из множества $\mathcal{T}'$. $\mathcal{T}'$-секвенциями будем называть секвенции исчисления DL, имеющие вид $\Gamma \to A$, где $\Gamma \in \mathcal{O}(\mathcal{T}')$, $A \in \mathcal{T}'$. Из свойства подформульности вытекает следующая лемма:

Лемма 6.3. *В выводе $\mathcal{T}'$-секвенции участвуют только $\mathcal{T}'$-секвенции.*

Положим $\overline{Q} = Q \cup \{\overline{q_i} \mid q_i \in Q\}$, где $\overline{q}_i$ — новые примитивные типы, и обозначим $\Theta_i = q_i$, $\overline{\Theta}_i = \overline{q}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\Theta_0 = \overline{\Theta}_0 = \Lambda$. Для каждой атомарной конфигурации Γ, принадлежащей множеству $\mathcal{O}(\mathcal{T}')$, определим её *$q$-образ* $(\Gamma)_q$:

1. $(\Lambda)_q = ([])_q = \varepsilon$,
2. $(q_i)_q = q_i$, если $q_i \in Q$,
3. $(T_{i,j})_q = \overline{\Theta}_i \Theta_j$, если $s(T_{i,j}) = 0$,
4. $(T_{i,j}\{\Gamma_1; \ldots; \Gamma_r\})_q = \overline{\Theta}_i (\Gamma_1)_q \ldots (\Gamma_r)_q \Theta_j$.

q-образ $(\Gamma)_q$ конфигурации Γ равен конкатенации q-образов входящих в неё атомарных конфигураций. Продолжим определение q-образа на $\mathcal{T}'$-секвенции, положив $(\Gamma \to T_{i,j})_q = \Theta_i (\Gamma)_q \overline{\Theta}_j$, $(\Gamma \to q_i)_q = (\Gamma)_q \overline{\Theta}_i$.

Пример 6.11. Пусть $Q = \{q_1, q_2\}$, $p_1, p_2 \notin Q$, $s(p_1) = 1, s(p_2) = 0$, тогда $(((q_2 \setminus (p_1 {\uparrow_1} p_2)) \cdot q_1)\{q_1(q_2 \setminus p_1)\}q_2)_q = \overline{q}_2 q_1 \overline{q}_2 q_1 q_2$, $(p_1\{[]\}\, p_1\{p_2 \cdot q_2\} \to q_1)_q =$

$q_2\overline{q}_1$.

Неформально, q-образ конфигурации содержит все вхождения элементов множества Q в данную конфигурацию в некотором естественном порядке с указанием их полярности.

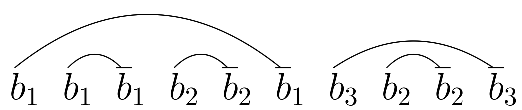
Определение 6.9. Конфигурация Π называется *максимальной подконфигурацией* конфигурации Γ, если Γ представима в виде $\Phi_0[A\{\Delta_1; \ldots; \Delta_{j-1}; \Pi; \Delta_{j+1}; \ldots; \Delta_{s(A)}\}]$ для некоторых контекста Φ_0, типа A и конфигураций $\Delta_1, \ldots, \Delta_{s(A)}$.

Пример 6.12. Пусть $s(p_0) = s(p_1) = 1$, $s(p_2) = s(p_3) = 0$, тогда в конфигурации $p_0\{p_1\{p_2\}(p_2/p_3)\}p_1\{[]\}$ максимальными являются подконфигурации $p_2, p_1\{p_2\}(p_2/p_3)$ и $[]$.

Понятие правильной скобочной последовательности принадлежит математическому фольклору. Пусть фиксированы некоторое натуральное число n, n букв $b_1, \ldots, b_n$, которые будем называть *открывающими скобками*, а также n соответствующих им *закрывающих скобок* $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n$. Обозначим $\mathcal{B} = \{b_1, \overline{b}_1, \ldots, b_n, \overline{b}_n\}$.

Определение 6.10. *Правильной скобочной последовательностью* (*ПСП*) ранга n называется всякое слово $w \in \mathcal{B}^*$, которое может быть сокращено до пустого последовательным вычёркиванием подслов вида $b_i\overline{b}_i$, где $i \leqslant n$.

Пример 6.13. $b_1b_1\overline{b}_1b_2\overline{b}_2\overline{b}_1b_3b_2\overline{b}_2\overline{b}_3$ является ПСП. Разбиение на пары соответствующих скобок изображено на рисунке.



Множество ПСП ранга n задаётся контекстно-свободной грамматикой со стартовым символом S и правилами $S \to \varepsilon$, $S \to b_iS\overline{b}_iS, 1 \leqslant i \leqslant n$. В одну пару при этом попадают открывающая и закрывающая скобки, введённые в одном и том же правиле. Следующая лемма следует из определения ПСП.

Лемма 6.4. *Во всяком префиксе ПСП число открывающих скобок не меньше числа закрывающих.*

Приведённые ниже утверждения о свойствах ПСП принадлежат математическому фольклору. Их доказательство вытекает из определения ПСП, леммы 6.4 и свойств грамматики, задающей множество ПСП ранга n.

Лемма 6.5.

1. *Если u и v являются ПСП, то uv также является ПСП.*
2. *Если u и uv являются ПСП, то v также является ПСП.*

Лемма 6.6.

1. *Если слово $u_0u_1 \ldots u_r$, а также слова $v_1, \ldots, v_r$ является ПСП, то слово $u_0v_1u_1v_2 \ldots v_ru_r$ также будет ПСП.*
2. *Если слова u_1vu_2 и v являются ПСП, то слово u_1u_2 также будет ПСП.*
3. *Если слова u_0vu_1, v и v' являются ПСП, то слово $u' = u_0v'u_1$ также будет ПСП.*

Определение 6.11. $\mathcal{T}'$-конфигурацию Γ будем называть *q-правильной*, если её q-образ является ПСП.

Лемма 6.7.

1. *Если Γ и Δ — q-правильные конфигурации, то $\Gamma\Delta$ также q-правильная конфигурация.*
2. *Если Γ и Δ — q-правильные конфигурации, то для любого $j \leqslant s(\Gamma)$ верно, что $\Gamma|_j\Delta$ также q-правильная конфигурация.*
3. *Если $\Gamma; \Phi_1, \ldots, \Phi_s$ — q-правильные конфигурации, причём $s(\Gamma) = s$, то $\Gamma \otimes \{\Phi_1; \ldots; \Phi_s\}$ также q-правильная конфигурация.*

4. Если $\Phi[\Pi], \Pi$ *и* Π' *— q-правильные конфигурации, то* $\Phi[\Pi']$ *также q-правильная конфигурация.*

5. Если Π, Π' *— q-правильные конфигурации,* $\Gamma = \Phi[\Pi]$, *а* $(\Gamma \to C)_q$ *является ПСП, то слово* $(\Gamma' \to C)_q$, *где* $\Gamma' = \Phi[\Pi']$, *также будет ПСП.*

6. Если $(\Pi)_q = \Lambda$, $\Pi', \Phi_1, \ldots, \Phi_s$ *— q-правильные конфигурации,* $\Gamma = \Phi\langle\Pi\rangle = \Phi_0[\Pi \otimes \{\Phi_1, \ldots, \Phi_s\}]$, *а* $(\Gamma \to C)_q$ *является ПСП, то слово* $(\Gamma' \to C)_q$, *где* $\Gamma' = \Phi\langle\Pi'\rangle = \Phi_0[\Pi' \otimes \{\Phi_1, \ldots, \Phi_s\}]$, *также будет ПСП.*

Доказательство. Первый пункт сразу вытекает из леммы 6.5 и определения q-образа, второй и третий доказываются индукцией по построению конфигурации Γ с использованием леммы 6.6. Четвёртый и пятый пункты следуют из пункта 3 леммы 6.6. Докажем шестой пункт. По пункту 3 настоящей леммы $\Pi \otimes \{\Phi_1, \ldots, \Phi_s\}$ и $\Pi' \otimes \{\Phi_1, \ldots, \Phi_s\}$ будут q-правильными конфигурациями, после чего нужно применять пункт 5 данной леммы. $\square$

Определение 6.12. Конфигурацию Γ будем называть *внутренне q-правильной*, если всякая её максимальная подконфигурация является q-правильной.

Лемма 6.8.

1. Если Γ *и* Δ *— внутренне q-правильные конфигурации, то* $\Gamma\Delta$ *также будет внутренне q-правильной конфигурацией.*

2. Если Γ *и* Δ *— q-правильные конфигурации, то для любого* $j \leqslant s(\Gamma)$ *верно, что* $\Gamma|_j\Delta$ *также будет внутренне q-правильной конфигурацией.*

3. Если Γ *— внутренне q-правильная конфигурация, а* $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ *— q-правильные конфигурации, причём* $s(\Gamma) = s$, *то* $\Gamma \otimes \{\Phi_1; \ldots; \Phi_s\}$ *также будет внутренне q-правильной конфигурацией.*

4. Если $\Phi[\Pi]$ *— внутренне q-правильная конфигурация, а* Π *и* Π' *—*

q-правильные конфигурации, то $\Phi[\Pi']$ также будет внутренне q-правильной конфигурацией.

5. *Если $\Phi\langle\Pi\rangle = \Phi_0[\Pi \otimes \{\Phi_1; \ldots ; \Phi_s\}]$, — внутренне q-правильная конфигурация, $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ — q-правильные конфигурации, $(\Pi)_q = \Lambda$, а Π' является q-правильной конфигурацией сорта s, то $\Phi\langle\Pi'\rangle = \Phi_0[\Pi' \otimes \{\Phi_1; \ldots ; \Phi_s\}]$ также будет внутренне q-правильной конфигурацией.*

Доказательство.

1. Всякая максимальная подконфигурация в $\Gamma\Delta$ является максимальной подконфигурацией в Γ либо Δ.
2. Всякая максимальная подконфигурация в $\Gamma|_j\Delta$ либо является максимальной подконфигурацией в Γ или Δ, либо получена из некоторой максимальной подконфигурации в Γ заменой разделителя на Δ. В последнем случае нужно применить пункт 2 леммы 6.7.
3. Доказательство аналогично предыдущему пункту.
4. Всякая максимальная подконфигурация в $\Phi[\Pi']$ либо была таковой в $\Phi[\Pi]$, либо получена из неё заменой Π на Π'. После этого утверждение леммы следует из пункта 4 леммы 6.7.
5. Нетрудно видеть, что обе конфигурации $\Pi \otimes \{\Phi_1; \ldots ; \Phi_s\}$ и $\Pi' \otimes \{\Phi_1; \ldots ; \Phi_s\}$ будут внутренне q-правильными. После этого утверждение вытекает из предыдущего пункта.

□

Лемма 6.9. *Всякая выводимая в исчислении* DL *$\mathcal{T}'$-секвенция $\Gamma \to A$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *$(\Gamma \to A)_q$ является ПСП.*
2. *Γ является внутренне q-правильной конфигурацией.*

Доказательство. Индукция по выводу в исчислении DL. Случай аксиомы, а также правил $(\to I)$ и $(\to J)$ очевиден. База индукции доказана, на шаге индукции проведём разбор случаев в зависимости от последнего применявшегося правила.

Пусть последним правилом было $(\to \backslash)$ в виде $\dfrac{B\Pi \to A}{\Pi \to B \backslash A}$, тогда возможны два случая: $B \in \mathcal{T}$ и $B = q_i$. По определению множества $\mathcal{T}'$ имеем $A \in \mathcal{T}$, поэтому в первом случае $(\Pi \to B \backslash A)_q = (\Pi)_q = (B\Pi \to A)_q$. Во втором случае имеем $(\Pi \to B \backslash A)_q = q_i(\Pi)_q = (B\Pi \to A)_q$, после чего можно применить предположение индукции для доказательства первого утверждения леммы. Второе утверждение леммы непосредственно следует из предположения индукции и того, что антецедент заключения является подконфигурацией антецедента посылки. Правило $(\to /)$ разбирается аналогично.

Пусть последним правилом было $(\to \cdot)$ в виде $\dfrac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma\Delta \to A \cdot B}$, тогда возможны два случая: $B \in \mathcal{T}$ и $B = q_j$. В первом случае по определению множества $\mathcal{T}'$ получаем, что также $A \in \mathcal{T}$, что приводит к равенствам $(\Gamma\Delta \to A \cdot B)_q = (\Gamma\Delta)_q = (\Gamma)_q(\Delta)_q$, во втором случае по определению множества $\mathcal{T}'$ имеем $A = q_i \backslash C$ для некоторого типа $C \in \mathcal{T}$. Отсюда следует $(\Gamma\Delta \to A \cdot B)_q = q_i(\Gamma\Delta)_q\overline{q}_j = q_i(\Gamma)_q(\Delta)_q\overline{q}_j = (\Gamma \to A)_q(\Delta \to q_j)_q$. В обоих случаях q-образ заключения является конкатенацией q-образов посылок, после чего первый пункт леммы следует из предположения индукции и пункта 1 леммы 6.7. Второй пункт следует из пункта 1 леммы 6.8.

Пусть последним правилом в выводе было $(\to \odot)$ в форме $\dfrac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma|_j\Delta \to A \odot_j B}$. Тогда $A \odot_j B \in \mathcal{T}$, поэтому $(\Gamma|_j\Delta \to A \odot_j B)_q = (\Gamma|_j\Delta)_q$, откуда по пункту 2 леммы 6.7 и предположению индукции следует, что первый пункт леммы выполняется. Второй пункт следует из пункта 2 леммы 6.8.

Пусть последним правилом в выводе было $(\to \downarrow)$ в форме $\dfrac{A|_j\Pi \to B}{\Pi \to A \downarrow_j B}$, тогда по определению множества $\mathcal{T}'$ имеем, что $A \downarrow_j B \in \mathcal{T}$, то есть $(\Pi \to A \downarrow_j B)_q = (\Pi)_q = (A|_j\Pi \to B)_q$ и первое утверждение леммы следует из предположения индукции. Второе утверждение также выполняется, так как всякая максимальная подконфигурация в Π была максимальной подконфигурацией в $A|_j\Pi$.

Очевидно, что применение правил $(I \to)$ и $(J \to)$ не влияет на q-образ секвенции и максимальных подконфигураций антецедента. Нетрудно проверить, что аналогичное утверждение верно и для правил $(\cdot \to)$, $(\odot \to)$. Разберём остальные правила, вводящие некоторую связку в антецеденте.

Пусть последним правилом в выводе было $(\backslash \to)$ в форме $\dfrac{\Phi\langle B\rangle \to C \quad \Pi \to A}{\Phi\langle \Pi(A \backslash B)\rangle \to C}$. Более подробно антецедент посылки записывается как $\Phi_0[B\{\Phi_1; \ldots; \Phi_{s(B)}\}]$, а антецедент заключения как $\Phi_0[(\Pi(A \backslash B)) \otimes \{\Phi_1; \ldots; \Phi_{s(B)}\}]$. Возможны два случая: $A \in \mathcal{T}$ и $A = q_i$ для некоторого i, в обоих случаях по построению $B \in \mathcal{T}$, то есть $(B)_q = \Lambda$, вследствие чего верно равенство $(\Pi(A \backslash B))_q = (\Pi \to A)_q$, и поэтому $(\Pi(A \backslash B))_q$ является ПСП. По предположению индукции $\Phi_1, \ldots, \Phi_{s(B)}$ — q-правильные конфигурации, после чего для доказательства первого утверждения леммы нужно применить пункт 6 леммы 6.7. Второе утверждение леммы аналогичным образом следует из пункта 5 леммы 6.8. Случай правила $(/ \to)$ разбирается аналогично.

Пусть последним правилом в выводе было $(\uparrow \to)$ в форме $\dfrac{\Phi\langle B\rangle \to C \quad \Pi \to A}{\Phi\langle (B \uparrow_j A)|_j \Pi\rangle \to C}$. Более подробно антецедент первой посылки записывается как $\Phi_0[B\{\Phi_1; \ldots; \Phi_{s(B)}\}]$, а антецедент заключения как $\Phi_0[(B \uparrow_j A) \otimes \{\Phi_1; \ldots; \Phi_{j-1}; \Pi \otimes \{\Phi_j; \ldots; \Phi_{j+s(A)-1}\}; \Phi_{j+s(A)}; \ldots; \Phi_{s(B)}\}]$. По определению множества $\mathcal{T}'$ имеем $(B \uparrow_j A)_q = \Lambda$, тогда $(\Pi \to A)_q = (\Pi)_q$ и по предположению индукции Π будет q-правильной конфигурацией. Следовательно, по пункту 3 леммы 6.7 $(B \uparrow_j A)|_j \Pi$ также будет q-правильной конфигурацией. Также q-правильными конфигурациями являются $\Phi_1, \ldots, \Phi_{s(B)}$ и $B\{\Phi_1; \ldots; \Phi_{s(B)}\}$, откуда по пункту 5 леммы 6.7 получаем первое утверждение леммы. Применяя предположение индукции и пункт 5 леммы 6.8, доказываем и второе утверждение леммы.

Аналогичные рассуждения можно использовать в случае правила $(\downarrow \to)$. Действительно, пусть его применение имело вид $\dfrac{\Phi\langle B\rangle \to C \quad \Pi \to A}{\Phi\langle \Pi|_j (A \downarrow_j B)\rangle \to C}$. Тогда антецедент первой посылки в подробной записи имеет вид $\Phi_0[B\{\Phi_1; \ldots; \Phi_{s(B)}\}]$, а антецедент заключения записывается как $\Phi_0[\Pi \otimes \{\Phi_1; \ldots; \Phi_{j-1}; (A \downarrow_j B) \otimes \{\Phi_j; \ldots; \Phi_{j+s(B)-s(A)}\}; \Phi_{j+s(B)-s(A)+1}; \ldots; \Phi_{s(B)}\}]$. По определению множества $\mathcal{T}'$ имеем $(A)_q = (B)_q = (A \downarrow_j B)_q = \Lambda$. После этого рассуждения повторяют доказательство предыдущего случая.

Все случаи разобраны и лемма доказана. $\square$

Пример 6.14.

1. Пусть множество $\mathcal{T}$ содержит тип $B \downarrow_1 (B \odot_1 C)$, причём $s(B) = 1$, $s(C) = 0$, тогда секвенция $(q_1 \setminus C) \cdot q_2 \to (q_1 \setminus (B \downarrow_1 (B \odot_1 C)) \cdot q_2$ является выводимой и её q-образ равен $q_1 \overline{q}_1 q_2 \overline{q}_2$.
2. Пусть множество $\mathcal{T}$ содержит тип $(B \uparrow_1 I) \odot_1 C$, причём $s(B) = s(C) = 0$, тогда секвенция $q_1 q_2 (q_2 \setminus C)(q_1 \setminus B) \to (B \uparrow_1 I) \odot_1 C$ является выводимой и её q-образ равен $q_1 q_2 \overline{q}_2 \overline{q}_1$.

Соответствующие выводы приведены ниже. Заметим, что в первом примере вхождения примитивного типа q_1 в течение вывода находились внутри одной из максимальной подконфигураций, хотя в последней секвенции не входят ни в одну такую подконфигурацию. Это объясняет рассмотрение максимальных подконфигураций в лемме 6.9.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to B \quad C \to C}{B\{C\} \to B \odot_1 C}\,(\to \odot) \qquad q_1 \to q_1}{B\{q_1(q_1 \setminus C)\} \to B \odot_1 C}\,(\setminus \to)}{q_1(q_1 \setminus C) \to B \downarrow_1 (B \odot_1 C)}\,(\to \downarrow)}{(q_1 \setminus C) \to q_1 \setminus (B \downarrow_1 (B \odot_1 C))}\,(\to \setminus) \qquad q_2 \to q_2}{(q_1 \setminus C) q_2 \to (q_1 \setminus (B \downarrow_1 (B \odot_1 C))) \cdot q_2}\,(\to \cdot)}{(q_1 \setminus C) \cdot q_2 \to (q_1 \setminus (B \downarrow_1 (B \odot_1 C))) \cdot q_2}\,(\cdot \to)$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to B \quad q_1 \to q_1}{q_1(q_1 \setminus B) \to B}\,(\setminus \to)}{q_1 I(q_1 \setminus B) \to B}\,(I \to)}{q_1[](q_1 \setminus B) \to B \uparrow_1 I}\,(\to\uparrow) \qquad \dfrac{C \to C \quad q_2 \to q_2}{q_2(q_2 \setminus C) \to C}\,(\setminus \to)}{q_1 q_2(q_2 \setminus C)(q_1 \setminus B) \to (B \uparrow_1 I) \odot_1 C}\,(\to \odot)
$$

Докажем простую техническую лемму:

Лемма 6.10. *Типы B и $(I \setminus B) \cdot I$ являются равносильными в исчислении* DL.

Доказательство.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to B}{IB \to B}\,(I \to)}{B \to I \setminus B}\,(\to \setminus) \qquad \to I}{B \to (I \setminus B) \cdot I}\,(\to \cdot)
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to B \quad \to I}{(I \setminus B) \to B}\,(\to \setminus)}{(I \setminus B) I \to B}\,(I \to)}{(I \setminus B) \cdot I \to B}\,(\cdot \to)
$$

□

Напомним, что в исчислении DL допустимы правила подстановки и замены типа на эквивалентный.

Лемма 6.11. *Грамматика $\mathcal{G}'$ порождает в точности язык $L \cap L_R$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что выводимость секвенции $A^1_{i_1,j_1} \dots A^r_{i_r,j_r} \to H_{j_0,i_0}$ для неотрицательных $i_0, j_0, \dots, i_r, j_r$ равносильна одновременному выполнению условий $\mathrm{DL} \vdash A^1 \dots A^r \to H$ и $j_0 = i_1$, $\dots, j_{r-1} = i_r$, $j_r = i_0$. Пусть вначале секвенция $A^1 \dots A^r \to H$ выводима в исчислении DL, тогда применяя $r-1$ раз правило $(\setminus \to)$, получаем, что $\mathrm{DL} \vdash q_{j_0}(q_{j_0} \setminus A^1) q_{j_1} \dots A^{r-1} q_{j_{r-1}}(q_{j_{r-1}} \setminus A^r) \to H$, откуда по правилу

$(\to \backslash)$ получаем $\mathrm{DL} \vdash (q_{j_0} \backslash A^1)q_{j_1} \ldots A^{r-1}q_{j_{r-1}}(q_{j_{r-1}} \backslash A^r) \to q_{j_0} \backslash H$, что по правилу $(\to \cdot)$ влечёт $\mathrm{DL} \vdash (q_{j_0} \backslash A^1)q_{j_1} \ldots A^{r-1}q_{j_{r-1}}(q_{j_{r-1}} \backslash A^r)q_{i_0} \to (q_{j_0} \backslash H) \cdot q_{i_0}$, откуда после $r-1$ применений правила $(\cdot \to)$ получаем требуемое.

Пусть теперь секвенция $A^1_{i_1,j_1} \ldots A^r_{i_r,j_r} \to H_{j_0,i_0}$ является выводимой. Её q-образ равен $q_{j_0}\overline{q}_{i_1}q_{j_1} \ldots \overline{q}_{i_r}q_{j_r}\overline{q}_{i_0}$. Поскольку все индексы отличны от 0, из леммы 6.9 получаем $j_0 = i_1$, $j_1 = i_2, \ldots$, $j_{r-1} = i_r$, $j_r = i_0$. Подставим в рассматриваемую секвенцию тип I вместо всех примитивных типов из множества Q, получим секвенцию $(I \backslash A^1) \cdot I \ldots (I \backslash A^r) \cdot I \to (I \backslash H) \cdot I$. В силу допустимости правила подстановки данная секвенция будет выводимой. Воспользуемся допустимостью замены типа на эквивалентный, тогда по лемме 6.10 имеем, что секвенция $A^1 \ldots A^r \to H$ также будет выводимой, что и требовалось. Лемма доказана. $\square$

Из доказанной леммы следует следующая теорема.

Теорема 15. *Множество языков, распознаваемых* DL*-грамматиками, замкнуто относительно пересечения с автоматными языками, не содержащими пустого слова.*

К сожалению, конструкцию, использованную в данной работе, пока не удаётся обобщить на случай, когда конечный автомат содержит более одного завершающего состояния. Отметим, что точная характеризация класса языков, порождаемых DL-грамматиками, также является открытым вопросом.

Предметный указатель

Литература

[1] V. M. Abrusci. Phase semantics and sequent calculus for pure non-commutative classical linear logic // *Journal of Symbolic Logic.* — 1991. — Vol. 56, No. 1. — P. 1403-–1451.

[2] A. V. Aho, R. Sethi, J. D. Ullman. *Compilers: principles, techniques and tools.* — Reading, Mass. Addison-Wesley. 1985.

Русский перевод: А. В. Ахо, Р. Сети, Дж. Д. Ульман. Компиляторы: принципы, технологии и инструменты. — М.: «Вильямс», 2001. — 768 с.

[3] K. Ajdukiewicz. Die syntaktische Konnexität // *Studia philosophica.* — 1935. — Vol. 3, No. 1. —- P. 1–27.

[4] W. Buszkowski. Compatibility of a categorial grammar with an associated category system. // *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik.* — 1982. — Vol 28. — P. 229–238.

[5] Y. Bar-Hillel, C. Gaifman, E. Shamir. On the categorial and phrase-structure grammars // *Bulletin of the Research Council of Israel, Section F.* — 1960. — Vol. 9F. — P. 1–16.

[6] N. Chomsky. Three models for the description of language // *IRE Transactions on Information Theory.* — 1956. — Vol. I T-2, No. 3. — P. 113–124.

Русский перевод: Н. Хомский. Три модели описания языка // *Кибернетический сборник*, вып. 2. — М.: ИЛ, 1961. — С. 237–266.

[7] N. Chomsky. A note on phrase structure grammars // *Information and control.* — 1959. — Vol. 2, No. 4. — P. 393–395.

Русский перевод: Н. Хомский. Заметка о грамматиках непосредственно составляющих // *Кибернетический сборник*, вып. 5. — М.: ИЛ, 1962. — С. 312–316.

[8] N. Chomsky, M. P. Schützenberger. The algebraic theory of context-free languages // *Computer programming and formal systems* / Editors P. Braffort and D. Hirschberg. — Amsterdam: North-Holland, 1963. — P. 118.

Русский перевод: Н. Хомский. Алгебраическая теория контекстно-свободных языков. *Кибернетический сборник*, вып. 3. — М.: ИЛ, 1966. — С. 195–242.

[9] M. Dekhtyar, A. Dikovsky. Generalized categorial dependency grammars // *Trakhtenbrot/Festschrift,* Proceedings / Editors A. Avron et al. — Berlin etc.: Springer, 2008. — P. 230–255. — (Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4800).

[10] A. Foret. Conjoinability and unification in Lambek categorial grammars // *New Perspectives in Logic and Formal Lingusitics,* Vth Roma Workshop, 2001, Proceedings / Editors V.M. Abrusci and C. Casadio. — Roma: Bulzoni, 2002.

[11] A. Foret. On the computation of joins for non-associative Lambek categorial grammars // *17th international workshop on unification,* UNIF 2003, Proceedings / Editors J. Levy, M. Kohlhase, J. Niehren and M. Villaret. — Valencia: Universidad Politéchnica de Valencia, 2003. —- Vol. 3. — P. 25–38.

[12] J.-Y. Girard. Linear Logic // *Theoretical Computer Science.* — 1987. — Vol. 50, No. 1. — P. 1–102.

[13] A. Joshi, Y. Schabes. Tree-adjoining grammars // *Handbook of formal languages.* / Editors G. Rozenberg and A. Salomaa — Berlin: Springer, 1997. — Vol. 3: Beyond Words. — P. 69–123.

[14] M. Kanazawa. The Lambek calculus enriched with additional connectives // *Journal of Logic, Language and Information.* — 1992. — Vol. 1. — P. 141–171.

[15] M. Kanazawa. The pumping lemma for well-nested multiple context-free languages // *Proceedings of 13th International Conference Developments in Language Theory*, DLT 2009 / Editors V. Diekert and D. Nowotka. — Berlin: Springer, 2009. — P. 312–325. — (Lecture Notes in Computer Science, Vol. 5583).

[16] M. Kracht. *The mathematics of language.* — Berlin: Mouton de Gruyter, 2003.

[17] S. Kuznetsov. Lambek grammars with one division and one primitive type // *Logic Journal of the IGPL.* — 2012 — Vol. 20, No. 1 — P. 207–221.

[18] J. Lambek. The mathematics of sentence structure // *American Mathematical Monthly.* — 1958 — Vol. 65, No. 3. — P. 154–170.
Русский перевод: И. Ламбек. Математическое исследование структуры предложений // *Математическая лингвистика:* сборник переводов / Под ред. Ю. А. Шрейдера и др. — М.: Мир, 1964. — С. 47–68.

[19] J. Lambek. Deductive systems and categories II: Standard constructions and closed categories // *Category Theory, Homology Theory and Their Applications I* / Editor P. Hilton. — Berlin: Springer, 1969. — P. 76–122. — (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 86).

[20] M. Moortgat, M. Pentus. Type similarity for the Lambek-Grishin calculus // *Proceedings of 12th Conference on Formal Grammar,* Dublin, 2007. — P. 75–85.

[21] G. Morrill, J. M. Merenciano. Generalizing discontinuity // *Traitement automatique des langues.* — 1996. — Vol. 37, No. 2. — P. 119–143.

[22] G. Morrill. *Categorial grammar: logical syntax, semantics and processing.* — Oxford: Oxford University Press, 2011.

[23] G. Morrill, O. Valentín. On calculus of displacement // *Proceedings of the 10th International Workshop on Tree Adjoining Grammars and Related Formalisms*, New Haven, 2010. — P. 45–52.

[24] G. Morrill, O. Valentín, M. Fadda. The displacement calculus // *Journal of Logic, Language and Information.* — 2011. — Vol. 20, No. 1. — P. 1–48.

[25] A. Okhotin. Conjunctive grammars // *Journal of Automata, Languages and Combinatorics.* — 2011. — Vol. 6, No. 4. — P. 519–535.

[26] A. Okhotin. Boolean grammars // *Information and Computation.* — 2004. — Vol. 194, No. 1. — P. 19–48.

[27] M. Pentus. Equivalent types in Lambek calculus and linear logic // *Серия математическая логика и теоретическая информатика,* № 2 (препринт). — Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, отдел математической логики. М., 1992. — 21 с.

[28] M. Pentus. Free monoid completeness of the Lambek calculus allowing empty premises // *Proceedings of Logic Colloquium '96,* / Editors J. M. Larrazabal, D. Lascar and G. Mints. — Berlin etc.: Springer, 1998. — P. 171–209. — (Lecture Notes in Logic, Vol. 12).

[29] C. Pollard. *Generalized Phrase Structure Grammars, Head Grammars, and Natural Languages*: Ph.D. thesis. — Stanford University, Stanford, 1984.

[30] D. Roorda. *Resource logic: proof theoretical investigations*: Ph.D. thesis — Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, 1991.

[31] H. Seki, T. Matsumura, M. Fujii, and T. Kasami. On multiple context-free grammars // *Theoretical Computer Science.* — 1991. — Vol. 88, № 2. — P. 191–229.

[32] O. Valentín. *Theory of discontinuous Lambek calculus*: PhD Thesis. — Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 2012.

[33] J. van Benthem. *Language in Action: Categories, Lambdas and Dynamic Logic.* — Amsterdam: North-Holland, 1991. — 350 p. — (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics; vol. 130).

[34] D. N. Yetter. Quantales and noncommutative linear logic // *Journal of Symbolic Logic.* — 1990. — Vol. 55, No. 1. — P. 41–64.

[35] М. Р. Пентус. Исчисление Ламбека и формальные грамматики // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 1995. — Том 1, № 3. — С. 729–751.

[36] М. Р. Пентус. Полнота синтаксического исчисления Ламбека. // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 1995. — Том 5, № 1. — С. 193—219.

[37] А. Н. Сафиуллин. Выводимость допустимых правил с простыми посылками в исчислении Ламбека // *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика.* — 2007. — № 4. — С. 73–77.

Работы автора по теме диссертации

[38] А. А. Сорокин. О длине совмещающего типа в исчислении Ламбека // *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика.* — 2011. — № 3. — С. 10–14.

[39] A. Sorokin. Lower and upper bounds for the length of joins in the Lambek calculus // *Proceedings of 8th Computer Science Symposium in Russia*, CSR 2013 / Editors A. Bulatov and A. Shur. — Berlin: Springer, 2013. — P. 150–161. — (Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7913).

[40] A. Sorokin. On the generative power of discontinuous Lambek calculus // *Proceedings of 17th and 18th International Conferences*, FG 2012, FG 2013 / Editors G. Morrill and M.-J. Nederhof. — Berlin: Springer, 2013. — P. 250–262. — (Lecture Notes in Computer Science, Vol. 8036).

[41] A. Sorokin. Conjoinability relation in 1-discontinuous Lambek calculus // *Categories and Types in Logic, Language, and Physics* / Editors C. Casadio, B. Coecke, M. Moortgat and P. Scott. — Berlin: Springer, 2013. — P. 392–401. — (Lecture Notes in Computer Science, Vol. 8222).