ФГБОУ ВПО МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Ройзнер Михаил Александрович

Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов абелевых p-групп

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2014

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры
механико-математического факультета ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова“.

Научные руководители: **Михалёв Александр Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор,
Бунина Елена Игоревна, доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты: **Туганбаев Аскар Аканович**, доктор физико-математических наук, профессор (ФГБОУ ВПО “Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова“).
Степанова Алена Андреевна, доктор физико-математических наук, профессор (ФГБОУ ВПО “Дальневосточный федеральный университет“).

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО “Московский педагогический государственный университет“.

Защита диссертации состоится 17 октября 2014 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова“ по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова“, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова“ по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8 этаж.

Автореферат разослан 17 сентября 2014 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84, созданного на базе
ФГБОУ ВПО МГУ им. М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Работа посвящена элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов абелевых p-групп и ее связи со свойствами второго порядка самих групп.

Две модели $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ одного языка первого порядка $\mathcal{L}$ (например, две группы или два кольца) называются *элементарно эквивалентными*, если любое предложение φ языка $\mathcal{L}$ истинно в модели $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда оно истинно в модели $\mathcal{U}'$. Любые две конечные модели одного языка элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны. Любые две изоморфные модели элементарно эквивалентны, однако для бесконечных моделей обратное неверно. Например, поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел и поле $\overline{\mathbb{Q}}$ алгебраических чисел элементарно эквивалентны, но не изоморфны, так как имеют различную мощность[1].

Классической книгой по теории моделей (в том числе, и по элементарной эквивалентности) является книга «Теория моделей»[1]. Подробным обзором 1984 года результатов по элементарной эквивалентности и смежным вопросам является обзор В. Н. Ремесленникова и В. А. Романькова «Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп»[2]. Более новые результаты включены в обзоры Е.И. Буниной и А.В. Михалева[3 4], а также — в обзор В. Гоулда, А.В. Михалева, Е.А. Палютина, А.А. Степановой[5]. Справочный материал по теории моделей можно найти в книгах[6 7 8 9]. Испытательным полигоном для большинства результатов теории моделей служат алгебра, теория чисел и анализ. Среди многочисленных книг и обзоров по приложениям теории моделей можно выделить те, в которых затрагиваются приложения к теории групп. Основные методы доказательств разрешимости и неразрешимости элементарных теорий изложены в книгах Тарского, Мостовского, Робинсона[10] и Ю. Л. Ершова[7].

[1]Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. Москва, Мир, 1977.

[2]Ремесленников В. Н., Романьков В. А. Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп. Алгебра. Геометрия. Топология. Итоги науки. ВИНИТИ, 1983, 3–79.

[3]Bunina E.I., Mikhalev A.V. Elementary properties of linear and algebraic groups. Journal of Mathematical Sciences, 2002, 110(3), 2595-2659.

[4]Bunina E.I., Mikhalev A.V. Elementary properties of linear groups and related questions. Journal of Mathematical Sciences, 2004, 123(2), 3921-3985.

[5]Гоулд В., Михалев А.В., Палютин Е.А., Степанова А.А. Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S-полигонов. Фундаментальная и прикладная математика, 2008, 14(7), 63–110.

[6]Теория моделей. Справочная книга по математической логике. Часть I. Перев. с англ. М.: Наука, 1982.

[7]Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М. Наука, 1980.

[8]Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука. — 1970.

[9]Сакс Дж. Теория насыщенных моделей. — Пер. с англ. М.: Мир, 1976.

[10]Tarski A., Mostowski A., Robinson R. M. Undecidable theories. Amsterdam. North-Holland Publishing Comp., 1953.

Кроме того, в книге Ю. Л. Ершова приведена классификация полных теорий абелевых групп и показано на примерах из алгебры, как работает метод модельной полноты и родственное понятие относительной алгебраической замкнутости. Результаты по проблеме разрешимости элементарных теорий до 1964 года с подробным изложением методов доказательств освещены в обзоре Ю. Л. Ершова, И. А. Лаврова, А. Д. Тайманова, М. А. Тайцлина[11]. Вопросы разрешимости расширенных теорий, особенно расширенных теорий абелевых групп, разобраны в обзоре А. И. Кокорина и А. Г. Пинуса[12].

Известная теорема Бэра–Капланского[13] утверждает, что периодическая абелева группа определяется своим кольцом эндоморфизмов: если две группы имеют изоморфные кольца эндоморфизмов, то сами группы также изоморфны. В 1960 году Лептин[14] доказал аналогичную теорему для групп автоморфизмов абелевых p-групп для $p \geqslant 5$: если две группы имеют изоморфные группы автоморфизмов, то сами группы также изоморфны. В 1989 году Либерт[15] доказал такую же теорему для случая $p \geqslant 3$. Также Либерт классифицировал все изоморфизмы между группами автоморфизмов двух абелевых p-групп ($p \geqslant 3$). Наконец, в 1998 году Шульц[16] доказал аналогичную теорему для случая $p = 2$. Однако затем в этой статье была найдена ошибка, не устранимая внутренними методами. Таким образом, случай $p = 2$ все еще остается открытым.

Е.И. Бунина и А.В. Михалев[17] установили связь между свойствами второго порядка абелевой p-группы и свойствами первого порядка ее кольца эндоморфизмов. В этой работе были раздельно доказаны необходимые и достаточные условия элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов для различных случаев, однако критерий получен не был — оставались некоторые случаи, в которых эти условия не совпадали между собой.

Цель работы

Цель работы состоит в развитии старых и создании новых методов для выражения свойств второго порядка абелевых p-групп с помощью свойств

[11] Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А. Элементарные теории. Успехи мат. наук, 1965, 20(4), 37–108.

[12] Кокорин А. И., Пинус А. Г. Вопросы разрешимости расширенных теорий. Успехи мат. наук, 1978, 33(2), 49–84.

[13] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. т. 1,2. Мир, Москва, 1974.

[14] Leptin H. Abelsche p-Gruppen und ihre Automorphismengruppen, Math. Z., 73 (1960), 235–253.

[15] Liebert W. Isomorphic automorphism groups of primary abelian groups. II. Contemp. Math., 87 (1989), 51–59.

[16] Schultz P. Automorphisms which determine an Abelian p-group. Abelian groups, module theory, and topology, Marcel Dekker Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 201, Eds. D. Dikranjan and L. Salce, 1998, 373–379.

[17] Бунина Е.И., Михалев А.В. Элементарная эквивалентность колец эндоморизмов абелевых p-групп. Фундаментальная и прикладная математика, том 10 (2004), вып. 2, 135–224.

первого порядка таких производных структур, как группы автоморфизмов и кольца эндоморфизмов, в установлении связи между элементарной эквивалентностью производных структур и эквивалентностью второго порядка самих групп. Основным задачами диссертации являются: продолжение теоремы Бэра–Капланского об изоморфизмах колец эндоморфизмов абелевых p-групп на случай элементарной эквивалентности, продолжение теорем Лептина и Либерта об изоморфизмах групп автоморфизмов абелевых p-групп на случай элементарной эквивалентности, усиление результата Е.И. Буниной и А.В. Михалева об элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов абелевых p-групп, получение критерия элементарной эквивалентности групп автоморфизмов и колец эндоморфизмов абелевых p-групп в терминах эквивалентности второго порядка самих групп.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

- усиление результата Е.И. Буниной и А.В. Михалева об элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов абелевых p-групп в виде полного критерия элементарной эквивалентности;
- интерпретация логики второго порядка абелевой p-группы ($p \geqslant 3$) в группе ее автоморфизмов, разработка методов кодирования элементов абелевой группы в группе ее автоморфизмов;
- критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов редуцированных абелевых p-групп ($p \geqslant 3$);
- критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов абелевых p-групп ($p \geqslant 3$) с ненулевой делимой частью.

Методы исследования

В работе используются классические методы теории абелевых групп, теории автоморфизмов и эндоморфизмов периодических абелевых групп, теории моделей и математической логики. Также автором разработаны некоторые новые методы выражения свойств второго порядка абелевых p-групп через свойства первого порядка их групп автоморфизмов (для $p \geqslant 3$) и колец эндоморфизмов.

Теоретическая и практическая ценность

Работа имеет теоретический характер; полученные в ней результаты могут быть использованые в различных задачах теории групп, математической логики, теории моделей.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и международных конференциях:

- школа-семинар "Синтаксис и семантика логических систем", посвящённая памяти профессора Ю.Е. Шишмарёва (Владивосток, 25–29 августа, 2008 г.);
- международная алгебраическая конференция на Украине (Харьков, Украина, 18–23 августа 2009 г.);
- XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов" (Москва, 12–15 апреля 2010 г.);
- международная конференция "Logic Colloquium 2010" (Париж, Франция, 25–31 июля 2010 г.);
- международный алгебраический симпозиум, посвящённый 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А. В. Михалёва (Москва, 15–18 ноября 2010 г.);
- 9-ая международная летняя школа "Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры" (Эрлагол, 22–27 июня 2011 г.);
- семинары "Алгебра и теория моделей", "Теория групп" и "Кольца и модули" кафедры высшей алгебры МГУ (неоднократно) в 2007–2013 гг.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 5-ти работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1-5].

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав, содержащих 23 раздела, и списка литературы. Библиография содержит 38 наименований. Текст диссертации изложен на 98 страницах.

Содержание работы

Доказанные в диссертации теоремы могут быть обобщены в одну следующим образом.

Теорема 1 (теорема 41)**.** *Кольца эндоморфизмов абелевых p-групп (либо группы автоморфизмов абелевых p-групп, $p \geqslant 3$) A_1 и A_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда*

1) *если одна из групп A_1 или A_2 является редуцированной, то*

$$\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(A_1) = \mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(A_2),$$

где $\varkappa_1, \varkappa_2$ — это мощности базисных подгрупп групп A_1 и A_2, соответственно;

2) *если одна из групп A_1, A_2 не является редуцированной, то*

$$\mathrm{Th}_2(A_1) = \mathrm{Th}_2(A_2).$$

Замечание 1. Заметим, что в любом случае две абелевы группы, у которых кольца эндоморфизмов или группы автоморфизмов элементарно эквивалентны, либо обе являются редуцированными, либо обе таковыми не являются.

Следствие 1. *При $p \geqslant 3$ элементарные теории группы автоморфизмов абелевой p-группы и ее кольца эндоморфизмов взаимно интерпретируемы.*

В главе 1 вводятся определения и известные теоремы, необходимые в данной работе. **Первый параграф** посвящен сведениям из теории абелевых групп. В нем вводятся основные понятия об абелевых p-группах, рангах абелевых групп, делимых группах, сервантных и базисных подгруппах, кольцах эндоморфизмов и группах автоморфизмов абелевых p-групп.

Абелева группа A называется *n-ограниченной*, если $nA = 0$. Группа называется *ограниченной*, если она n-ограничена для некоторого натурального n. Если такого n не существует, то такая группа называется *неограниченной.*

Будем говорить, что элемент a группы A *делится* на натуральное число n (обозначение: $n|a$), если уравнение $nx = a$ ($a \in A$) имеет решение в группе A. Группа D называется *делимой*, если $n|a$ для всех $a \in D$ и всех натуральных чисел n. Группы $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ служат примерами делимых групп. Группа A называется *редуцированной*, если она не имеет ненулевых делимых подгрупп.

Всякая группа A является прямой суммой делимой группы D и редуцированной группы G,

$$A = D \oplus G.$$

Подгруппа D здесь определена однозначно и называется делимой частью группы A, подгруппа G определена однозначно с точностью до изоморфизма.

Подгруппа G группы A называется *сервантной*, если уравнение $nx = g \in G$, имеющее решение во всей группе A, имеет решение и в G. Подгруппа G сервантна в группе A тогда и только тогда, когда

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad nG = G \cap nA.$$

Подгруппа B группы A называется *p-базисной*, если выполнены следующие три условия:

1) подгруппа B является прямой суммой циклических p-групп и бесконечных циклических групп;

2) B есть сервантная подгруппа группы A;

3) факторгруппа A/B является p-делимой группой.

Всякая группа для любого простого числа p содержит p-базисные подгруппы.

Нам в дальнейшем будут важны p-группы и их p-базисные подгруппы. Если A есть p-группа и q — простое число, отличное от p, то группа A имеет лишь одну q-базисную подгруппу, равную 0. Поэтому в случае p-групп мы будем называть p-базисные подгруппы просто *базисными*.

Так как базисная подгруппа B имеет базис, а факторгруппа A/B — прямая сумма групп, изоморфных группе $\mathbb{Z}(p^\infty)$ (т. е. A/B также имеет систему образующих, которую легко описать), то естественно объединить эти системы образующих и таким путем получить систему образующих группы A.

Запишем

$$B = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle \text{ и } A/B = \bigoplus_{j \in J} C_j^*, \text{ где } C_j^* = \mathbb{Z}(p^\infty).$$

Если прямое слагаемое C_j^* порождается смежными классами $c_{j1}^*, \ldots, c_{jn}^*, \ldots$ по подгруппе B, для которых $pc_{j1}^* = 0$, $pc_{j,n+1}^* = c_{jn}^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то в группе A можно выбрать элементы $c_{jn} \in c_{jn}^*$ того же порядка, что и c_{jn}^*. Тогда получится следующая система соотношений:

$$pc_{j1} = 0, \ pc_{j,n+1} = c_{jn} + b_{jn} \quad (n \geq 1, b_{jn} \in B),$$

где элемент b_{jn} должен иметь порядок, не превышающий p^n, так как $o(c_{jn}) = p^n$.

Систему элементов $\{a_i, c_{jn}\}_{i \in I, j \in J, n \in \omega}$ мы будем называть *квазибазисом* группы A.

Второй параграф посвящен необходимым сведениям из теории моделей. В нем определяются язык и модели второго порядка, эквивалентность второго порядка, язык второго порядка абелевых групп, ограниченные теории второго порядка.

Язык второго порядка определяется так же, как и язык первого порядка, с тем лишь отличием, что в нем добавлены предикатные переменные. Именно, если P^l — предикатная переменная, а $t_1, \dots, t_l$ — термы, то знакосочетание $P^l(t_1, \dots, t_l)$ является формулой, а если φ — формула, то знакосочетание $(\forall P^l(v_1, \dots, v_l)\ \varphi)$ также является формулой, и вхождение переменной P^l в нее является связанным. Выполнимость произвольной формулы φ в модели U с универсумом A определяется естественным образом так, что предикатным переменным вида P^l сопоставляются произвольные подмножества множества A^l. *Теорией второго порядка* модели U называется множество выполнимых в ней предложений второго порядка (обозначение: $\mathrm{Th}_2(U)$). Две модели *эквивалентны в логике второго порядка*, если их теории второго порядка совпадают.

Важным примером для нас будет групповой язык. Мы будем считать, что в нем нет функциональных и константных символов и есть единственный трехместный предикатный символ Q^3, отвечающий за умножение. Вместо $Q^3(x_1, x_2, x_3)$ мы будем писать $x_1 = x_2 \cdot x_3$ или, если речь идет об абелевых группах, то $x_1 = x_2 + x_3$. В качестве примера предложения второго порядка можно привести предложение, выражающее простоту группы:

$$\forall P^1 \big(P(1) \wedge \forall x \forall y \left(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow P(x \cdot y^{-1})\right)\big) \wedge \\ \wedge \forall x \forall y \big(P(x) \Rightarrow P(y \cdot x \cdot y^{-1})\big) \Rightarrow \big(\forall x\ P(x) \vee \forall x \left(P(x) \Rightarrow x = 1\right)\big).$$

Пусть $\varkappa$ — некоторое кардинальное число. Выполнимость формулы φ в модели U с универсумом A с ограничением $\varkappa$ определяется так же, как и обычная выполнимость в логике второго порядка с тем лишь отличием, что предикатным переменным вида P^l сопоставляются произвольные подмножества множества A^l мощности не больше $\varkappa$. *$\varkappa$-Ограниченной теорией второго порядка* модели U называется множество выполнимых в ней предложений второго порядка с ограничением $\varkappa$ (обозначение: $\mathrm{Th}_2^{\varkappa}(U)$). Две модели *эквивалентны в логике второго порядка, ограниченной $\varkappa$*, если совпадают их $\varkappa$-ограниченные теории второго порядка. Заметим, что если $\varkappa \geqslant |A|$, то теории $\mathrm{Th}_2(U)$ и $\mathrm{Th}_2^{\varkappa}(U)$ совпадают. Если же $\varkappa < \infty$, то эквивалентность в ограниченной логике второго порядка равносильна элементарной эквивалентности.

Глава 2 посвящена доказательству импликаций теоремы 1 в обратную ("легкую") сторону, а также подготовке к доказательству импликаций в прямую сторону.

В первом параграфе выражается элементарная теория кольца эндоморфизмов (а значит, и группы автоморфизмов) в теории второго порядка абелевой группы. Доказывается следующая теорема.

Теорема 32. *Для любых абелевых групп* A_1 *и* A_2 *если группы* A_1 *и* A_2 *эквивалентны в языке второго порядка* $\mathcal{L}_2$*, то кольца* $\mathrm{End}(A_1)$ *и* $\mathrm{End}(A_2)$ *(и, значит, группы автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\, A_1$ *и* $\mathrm{Aut}\, A_2$*) элементарно эквивалентны.*

Далее для того, чтобы полностью доказать простую импликацию в основном результате, в языке второго порядка абелевой группы записывается формула, которая выполняется для редуцированных p-групп, базисные подгруппы которых меньше их по мощности (и поэтому счетны), и только для них. Тем самым, доказательство простой импликации завершается следующей теоремой.

Теорема 33. *Если абелевы группы* A_1 *и* A_2 *редуцированны и их базисные подгруппы счетны, то из* $Th_2^{\omega}(A_1) = Th_2^{\omega}(A_2)$ *следует элементарная эквивалентность колец* $\mathrm{End}\, A_1$ *и* $\mathrm{End}\, A_2$ *(и, значит, элементарная эквивалентность групп* $\mathrm{Aut}\, A_1$ *и* $\mathrm{Aut}\, A_2$*).*

Вся дальнейшая часть работы посвящена прямой импликации основного результата.

Во втором параграфе вводятся дополнительные понятия, помогающие работать с группой автоморфизмов: инволюции и экстремальные инволюции. Инволюции используются для того, чтобы выразить разделение абелевой группы в прямую сумму двух подгрупп. Экстремальные инволюции используются для выделения неразложимых прямых слагаемых. Так как с помощью одной инволюции нельзя выразить произвольное прямое слагаемое, а можно выразить только разделение на прямую сумму двух слагаемых, вводится понятие пары инволюции — набора из двух коммутирующих инволюций, одна из которых экстремальная. С помощью таких пар можно выразить произвольные прямые слагаемые группы. Приводятся формулы, выражающие отношения между прямыми слагаемыми (такие как прямая сумма, пересечение, подмножество).

В третьем параграфе вводятся понятия, помогающие работать с кольцом эндоморфизмов: проекторы и неразложимые проекторы. Они используются для выделения прямых слагаемых и неразложимых прямых слагаемых. Все отношения между прямыми слагаемыми также выражаются формулами для проекторов. Эти понятия нужны только для случая $p = 2$, так как из элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов следует элементарная эквивалентность групп автоморфизмов. Таким образом, в случае $p \geqslant 3$ можно просто воспользоваться результатом для групп автоморфизмов. В этом случае проекторы однозначно соответствуют инволюциям.

В четвертом параграфе все абелевы p-группы разделяются на следующие три подкласса:

1) ограниченные p-группы;

2) группы вида $D \oplus G$, где D — ненулевая делимая группа, G — ограниченная группа;

3) группы с неограниченной базисной подгруппой.

Для каждого из подклассов приводится формула первого порядка группы автоморфизмов, выделяющая этот подкласс. В следующих главах для каждого случая в теории первого порядка группы автоморфизмов или кольца эндоморфизмов выражается теория второго порядка (возможно, ограниченная) самой группы.

Глава 3 посвящена подклассу ограниченных p-групп. **В первом параграфе** выделяются прямые слагаемые, отвечающие разложению группы на “слои”. Каждый “слой” состоит из неразложимых прямых слагаемых определенного порядка.

Во втором параграфе теорема Шелаха адаптируется для случая группы автоморфизмов в следующем виде. Пусть Ω — множество экстремальных инволюций, соответствующих прямым слагаемым из базисной подгруппы.

Теорема 36. *Существует формула $\widetilde{\varphi}(\dots)$, удовлетворяющая следующему условию. Пусть $\{f_i\}_{i\in\mu}$ — множество элементов из $\mathrm{End}(A')$. Тогда можно найти вектор $\overline{g}$ такой, что формула $\widetilde{\varphi}(f, \overline{g})$ истинна в $\mathrm{End}(A')$ тогда и только тогда, когда $f = f_i$ для некоторого $i \in \mu$.*

В следующих частях эта теорема используется для выделения необходимых множеств инволюций (или проекторов). В частности, **в третьем параграфе** выделяется множество прямых слагаемых, которые нужны для интерпретации элементов группы. Именно, выделяется $\mu = |A|$ прямых слагаемых, каждое из которых счетно-порожденное. **В следующем параграфе** показывается, как на каждом из этих слагаемых интерпретировать произвольный элемент группы. Это делается с помощью разложения элемента по базису и отображения элементов прямого слагаемого в соответствующие элементы разложения. Наконец, **в последнем параграфе** показывается, как, интерпретируя на каждом слагаемом один элемент группы, выразить на всех слагаемых последовательности элементов мощности μ и тем самым выразить теорию второго порядка всей группы.

Глава 4 посвящена второму подклассу групп. Этот случай отличается от предыдущего наличием неограниченного “слоя” — делимой части. Доказательство теоремы для этого подкласса во многом повторяет предыдущее. Отличие заключается в том случае, когда неограниченный слой является самым мощным, и служебные счетно-порожденные прямые слагаемые надо выделять в нем. Тогда отображать элементы этих слагаемых в элементы базиса группы с помощью автоморфизмов или эндоморфизмов невозможно, так как все гомоморфизмы из делимой группы в редуцированную тривиальны. Чтобы обойти эту трудность, выделяется дополнительное прямое слагаемое в делимой части, в которую отображаются все элементы редуцированной части, и с помощью которой они интерпретируются.

Глава 5 посвящена третьему подклассу — группам с неограниченной базисной подгруппой. В этом случае базисная подгруппа не всегда совпадает со всей редуцированной подгруппой. Именно в этом случае проявляется разница в критериях элементарной эквивалентности в зависимости от наличия ненулевой делимой части.

В первых двух параграфах базисная группа выделяется формулой. Она задается одним автоморфизмом, выражающем соответствие между циклическими слагаемыми всей группы и циклическими слагаемыми базисной подгруппы.

В третьем параграфе вновь доказывается применимость теоремы Шелаха, теперь — для случая прямых слагаемых базисной группы.

Теорема 37. *Существует формула $\widetilde{\varphi}(\dots)$, удовлетворяющая следующему условию. Пусть $\{f_i\}_{i\in\mu}$ — множество элементов из Ω — множества экстремальных инволюций, соответствующих прямым слагаемым базисной подгруппы. Тогда можно найти вектор $\overline{g}$ такой, что формула $\widetilde{\varphi}(f,\overline{g})$ истинна в Ω тогда и только тогда, когда $f = f_i$ для некоторого $i \in \mu$.*

Четвертый параграф посвящен заданию структуры на базисной подгруппе. В нем выделяется множество автоморфизмов для каждой пары циклических слагаемых в базисной подгруппе, которые переводят фиксированные порождающие элементы этих слагаемых друг в друга.

В пятом параграфе мы выражаем теорию второго порядка делимой части и базисной подгруппы в языке первого порядка группы автоморфизмов. Это делается по уже известной схеме из предыдущих двух случаев. Отличие возникает в случае, когда группа счетна, и может не существовать слоя, равномощного всей группе. Тогда служебные слагаемые выделяется не в одном слое, а одновременно во всех слоях редуцированной подгруппы. Тем самым, доказывается следующая теорема.

Теорема 38. *Если кольца эндоморфизмов абелевых p-групп (либо группы автоморфизмов абелевых p-групп, $p \geqslant 3$) A_1 и A_2 элементарно эквивалентны, то группы сами группы A_1 и A_2 обладают эквивалентными в логике второго порядка делимыми частями и базисными подгруппами.*

В шестом параграфе мы выражаем логику первого порядка всей группы. Это делается с помощью автоморфизмов, которые сопоставляют произвольному элементу группы некоторый элемент базисной подгруппы. В следующем параграфе интерпретируется ограниченная логика второго порядка редуцированой группы. Сначала интерпретируется логика, ограниченная финальным рангом базисной подгруппы. Это делается так же, как и прежде, с помощью выделения соответствующего количества счетно-порожденных прямых слагаемых базисной подгруппы, на каждом из которых выражается элемент группы. Затем интерпретируется логика, ограниченная мощностью всей базисной подгруппы. Тем самым, доказывается

Теорема 39. *Пусть G и G' — редуцированные абелевы p-группы с базисными подгруппами B и B' соответственно, $p \geqslant 3$. Тогда если $\operatorname{Aut} G \equiv \operatorname{Aut} G'$, то $Th_2^{|B|}(G) = Th_2^{|B'|}(G')$.*

Оставшаяся часть главы относятся к группам с ненулевой делимой частью D. **В восьмом параграфе** мы интерпретируем фактор-группу редуцированной группы G по базисной подгруппе B в языке первого порядка группы автоморфизмов. Эта фактор-группа делимая, поэтому для того, чтобы ее интерпретировать, достаточно выразить квазибазисы ее квазициклических слагаемых, каждый из которых может быть задан одним автоморфизмом. Наличие делимой части делает возможным интерпретацию теории первого порядка группы $\operatorname{Hom}(G/B, D)$ и выражение независимости системы квазициклических слагаемых. С помощью этого в параграфе 9 показывается применимость теоремы Шелаха для случая квазициклических слагаемых из фактор-группы.

Наконец, **в последнем параграфе** мы интерпретируем полную теорию второго порядка всей группы. Это делается так же, как и раньше, но теперь в интерпретации участвуют не только делимая часть и базисная подгруппа, но и фактор-группа G/B. Так как эта фактор-группа делимая, то она участвует так же, как и делимая часть, и служебные прямые слагаемые для интерпретации выделяются из делимой части или из фактор-группы в зависимости от того, кто из них больше по мощности.

Последняя глава подводит итог всей работе и объединяет все результаты для всех случаев. В ней формулируется критерий элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов (или групп автоморфизмов) — теорема 41.

Благодарности

Автор выражает благодарность своим научным руководитлям д. ф.-м. н., профессору Михалеву Александру Васильевичу и д. ф.-м. н., профессору Буниной Елене Игоревне за постановку задач и постоянный интерес к работе. Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры высшей алгебры за внимание к работе и доброжедательное отношение.

Работы автора по теме диссертации

[1] Бунина Е.И., Ройзнер М.А. Элементарная эквивалентность групп автоморфизмов абелевых p-групп. Фундаментальная и прикладная математика, 2009, 15, вып. 7, 81–112.

М.А. Ройзнеру принадлежат основные результаты работы. Е.И. Буниной принадлежит введение и общая редакция работы.

[2] Ройзнер М.А. Элементарная эквивалентность групп автоморфизмов редуцированных абелевых p-групп. Вестник МГУ. Серия математика, механика. 2013, 3, 29–34.

[3] Ройзнер М.А. Критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов редуцированных абелевых p-групп. Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, 17, вып. 5, 157–163.

[4] Ройзнер М.А. Критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов абелевых нередуцированных p-групп. Фундаментальная и прикладная математика, 2013, 18, вып. 1, 159–170.

[5] Бунина Е.И., Михалёв А.В., Ройзнер М.А. Критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов и колец эндоморфизмов абелевых p-групп. Доклады академии наук, 2014, 457, вып. 1, 11–12.

М.А. Ройзнеру принадлежат основные результаты работы. Е.И. Буниной принадлежит введение. А.В. Михалёву принадлежит общая редакция работы.