Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 512.541.6 + 510.67

Ройзнер Михаил Александрович

Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов абелевых p-групп

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
д. ф.-м. н.
Бунина Елена Игоревна
д. ф.-м. н., профессор
Михалев Александр Васильевич

Москва
2014

Оглавление

Введение

Работа посвящена элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов абелевых p-групп и ее связи со свойствами второго порядка самих групп.

Две модели $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ одного языка первого порядка $\mathcal{L}$ (например, две группы или два кольца) называются *элементарно эквивалентными*, если любое предложение φ языка $\mathcal{L}$ истинно в модели $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда оно истинно в модели $\mathcal{U}'$. Любые две конечные модели одного языка элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны. Любые две изоморфные модели элементарно эквивалентны, однако для бесконечных моделей обратное неверно. Например, поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел и поле $\overline{\mathbb{Q}}$ алгебраических чисел элементарно эквивалентны, но не изоморфны, так как имеют различную мощность (для более подробных примеров см. [5]).

Классической книгой по теории моделей (в том числе, и по элементарной эквивалентности) является книга [5]. Подробным обзором 1984 года результатов по элементарной эквивалентности и смежным вопросам является обзор [11] В. Н. Ремесленникова и В. А. Романькова "Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп". Более новые результаты включены в обзоры Е.И. Буниной и А.В. Михалева [17] и [18], а также — в обзор В. Гоулда, А.В. Михалева, Е.А. Палютина, А.А. Степановой [2]. Справочным материалом по теории моделей могут служить книги [13], [3], [10], [12]. Испытательным полигоном для большинства результатов теории моделей служат алгебра, теория чисел и анализ. Среди многочисленных книг и обзоров по приложениям теории моделей можно выделить те, в которых затрагиваются приложения к теории групп. Основные методы доказательств разрешимости и неразрешимости элементарных теорий изложены в книгах Тарского, Мостовского, Робинсона [33] и Ю. Л. Ершова [3]. Кроме того, в книге Ю. Л. Ершова приведена классификация полных теорий абелевых групп и показано на примерах из алгебры, как работает метод модельной полноты и родственное понятие относительной алгебраической замкнутости. Результаты по проблеме разрешимости элементарных теорий до 1964 года с подробным изложением методов доказательств освещены в обзоре Ю. Л. Ершова, И. А. Лаврова, А. Д. Тайманова, М. А. Тайцлина [4]. Вопросы разрешимости расширенных теорий, особенно расширенных теорий абелевых групп, разобраны в обзоре А. И. Кокорина и А. Г. Пинуса [6].

Известная теорема Бэра–Капланского 4 утверждает, что периодическая абелева группа определяется своим кольцом эндоморфизмов: если две группы имеют изоморфные кольца эндоморфизмов, то сами группы также изоморфны. В 1960 году Лептин доказал аналогичную теорему 8 для групп автоморфизмов абелевых p-групп для $p \geqslant 5$: если две группы имеют изоморфные группы автоморфизмов, то сами группы также изоморфны. В 1989 году Либерт доказал такую же теорему 9 для случая $p \geqslant 3$. Также Либерт в работе [27] классифицировал все изоморфизмы между группами автоморфизмов двух абелевых p-групп ($p \geqslant 3$). Наконец, в 1998 году Шульц в статье [30] доказал аналогичную теорему 10 для случая $p = 2$. Однако затем в этой статье была найдена ошибка, не устранимая внутренними методами. Таким образом, случай $p = 2$ все еще остается открытым.

В работе [1] Е.И. Бунина и А.В. Михалев установили связь между свойствами второго порядка абелевой p-группы и свойствами первого порядка ее кольца эндоморфизмов. В этой работе были раздельно доказаны необходимые и достаточные условия элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов для различных случаев (теоремы 5, 6, 7), однако критерий получен не был — оставались некоторые случаи, в которых эти условия не совпадали между собой.

Цель работы состоит в развитии старых и создании новых методов для выражения свойств второго порядка абелевых p-групп с помощью свойств первого порядка таких производных структур, как группы автоморфизмов и кольца эндоморфизмов, в установлении связи между элементарной эквивалентностью производных структур и эквивалентностью второго порядка самих групп. Основным задачами диссертации являются: продолжение теоремы Бэра–Капланского об изоморфизмах колец эндоморфизмов абелевых p-групп на случай элементарной эквивалентности, продолжение теорем Лептина и Либерта об изоморфизмах групп автоморфизмов абелевых p-групп на случай элементарной эквивалентности, усиление результата Е.И. Буниной и А.В. Михалева об элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов абелевых p-групп, получение критерия элементарной эквивалентности групп автоморфизмов и колец эндоморфизмов абелевых p-групп в терминах эквивалентности второго порядка самих групп.

В работе используются классические методы теории абелевых групп, теории автоморфизмов и эндоморфизмов периодических абелевых групп, теории моделей и математической логики. Также разработаны некоторые новые методы выражения свойств второго порядка абелевых p-групп через свойства первого порядка их групп автоморфизмов (для $p \geqslant 3$) и колец эндоморфизмов.

Основные результаты работы являются новыми. Среди них:

- усиление результата Е.И. Буниной и А.В. Михалева об элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов абелевых p-групп в виде полного критерия элементарной эквивалентности.

- интерпретация логики второго порядка абелевой p-группы ($p \geqslant 3$) в группе ее автоморфизмов, разработка методов кодирования элементов абелевой группы в группе ее автоморфизмов.

- критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов редуцированных абелевых p-групп ($p \geqslant 3$).
- критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов абелевых p-групп ($p \geqslant 3$) с ненулевой делимой частью.

Доказанные в диссертации теоремы могут быть обобщены в одну следующим образом.

Теорема 1 (теорема 41)**.** *Кольца эндоморфизмов абелевых p-групп (либо группы автоморфизмов абелевых p-групп, $p \geqslant 3$) A_1 и A_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда*

1) *если одна из групп A_1 или A_2 является редуцированной, то*

$$\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(A_1) = \mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(A_2),$$

где $\varkappa_1, \varkappa_2$ — это мощности базисных подгрупп групп A_1 и A_2, соответственно;

2) *если одна из групп A_1, A_2 не является редуцированной, то*

$$\mathrm{Th}_2(A_1) = \mathrm{Th}_2(A_2).$$

Замечание 1. Заметим, что в любом случае две абелевы группы, у которых кольца эндоморфизмов или группы автоморфизмов элементарно эквивалентны, либо обе являются редуцированными, либо обе таковыми не являются.

Следствие 1. *При $p \geqslant 3$ элементарные теории группы автоморфизмов абелевой p-группы и ее кольца эндоморфизмов взаимно интерпретируемы.*

Для простоты изложения мы будем принимать континуум-гипотезу. Введем основные определения.

Абелева группа A называется *n-ограниченной*, если $nA = 0$. Группа называется *ограниченной*, если она n-ограничена для некоторого натурального n. Если такого n не существует, то такая группа называется *неограниченной*.

Будем говорить, что элемент a группы A *делится* на натуральное число n (обозначение: $n|a$), если уравнение $nx = a$ ($a \in A$) имеет решение в группе A. Группа D называется *делимой*, если $n|a$ для всех $a \in D$ и всех натуральных чисел n. Группы $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ служат примерами делимых групп. Группа A называется *редуцированной*, если она не имеет ненулевых делимых подгрупп.

Теорема 2 (теорема 22)**.** *Всякая группа A является прямой суммой делимой группы D и редуцированной группы G,*

$$A = D \oplus G.$$

Подгруппа D здесь определена однозначно и называется делимой частью группы A, подгруппа G определена однозначно с точностью до изоморфизма.

Подгруппа G группы A называется *сервантной*, если уравнение $nx = g \in G$, имеющее решение во всей группе A, имеет решение и в G. Подгруппа G сервантна в группе A тогда и только тогда, когда

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad nG = G \cap nA.$$

Подгруппа B группы A называется *p-базисной*, если выполнены следующие три условия:

1) подгруппа B является прямой суммой циклических p-групп и бесконечных циклических групп;

2) B есть сервантная подгруппа группы A;

3) факторгруппа A/B является p-делимой группой.

Всякая группа для любого простого числа p содержит p-базисные подгруппы ([14]).

Нам в дальнейшем будут важны p-группы и их p-базисные подгруппы. Если A есть p-группа и q — простое число, отличное от p, то группа A имеет лишь одну q-базисную подгруппу, равную 0. Поэтому в случае p-групп мы будем называть p-базисные подгруппы просто *базисными.*

Так как базисная подгруппа B имеет базис, а факторгруппа A/B — прямая сумма групп, изоморфных группе $\mathbb{Z}(p^\infty)$ (т. е. A/B также имеет систему образующих, которую легко описать), то естественно объединить эти системы образующих и таким путем получить систему образующих группы A.

Запишем

$$B = \bigoplus_{i\in I}\langle a_i\rangle \text{ и } A/B = \bigoplus_{j\in J} C_j^*, \text{ где } C_j^* = \mathbb{Z}(p^\infty).$$

Если прямое слагаемое C_j^* порождается смежными классами $c_{j1}^*, \dots, c_{jn}^*, \dots$ по подгруппе B, для которых $pc_{j1}^* = 0$, $pc_{j,n+1}^* = c_{jn}^*$ $(n = 1, 2, \dots)$, то в группе A можно выбрать элементы $c_{jn} \in c_{jn}^*$ того же порядка, что и c_{jn}^*. Тогда получится следующая система соотношений:

$$pc_{j1} = 0,\ pc_{j,n+1} = c_{jn} + b_{jn} \quad (n \geq 1, b_{jn} \in B),$$

где элемент b_{jn} должен иметь порядок, не превышающий p^n, так как $o(c_{jn}) = p^n$.

Систему элементов $\{a_i, c_{jn}\}_{i\in I, j\in J, n\in\omega}$ мы будем называть *квазибазисом* группы A.

Теорема 3 ([14]). *Если $\{a_i, c_{jn}\}$ — квазибазис p-группы A, то любой элемент $a \in A$ можно записать в виде*

$$a = s_1 a_{i_1} + \dots + s_m a_{i_m} + t_1 a_{j_1 n_1} + \dots + t_r a_{j_r n_r}, \tag{1}$$

где s_i и t_j — целые числа, ни одно t_j не делится на p и индексы $i_1, \dots, i_m$, так же как и индексы $j_1, \dots, j_r$ все различны. Запись (1.1) единственна в том смысле, что в ней однозначно определены члены sa_i и tc_{jn}.

Теперь введем некоторые понятия, связанные с логикой второго порядка.

Язык второго порядка определяется так же, как и язык первого порядка, с тем лишь отличием, что в нем добавлены предикатные переменные. Именно, если P^l — предикатная переменная, а $t_1, \ldots, t_l$ — термы, то знакосочетание $P^l(t_1, \ldots, t_l)$ является формулой, а если φ — формула, то знакосочетание $(\forall P^l(v_1, \ldots, v_l)\ \varphi)$ также является формулой, и вхождение переменной P^l в нее является связанным. Выполнимость произвольной формулы φ в модели U с универсумом A определяется естественным образом так, что предикатным переменным вида P^l сопоставляются произвольные подмножества множества A^l. *Теорией второго порядка* модели U называется множество выполнимых в ней предложений второго порядка (обозначение: $\mathrm{Th}_2(U)$). Две модели *эквивалентны в логике второго порядка*, если их теории второго порядка совпадают.

Важным примером для нас будет групповой язык. Мы будем считать, что в нем нет функциональных и константных символов и есть единственный трехместный предикатный символ Q^3, отвечающий за умножение. Вместо $Q^3(x_1, x_2, x_3)$ мы будем писать $x_1 = x_2 \cdot x_3$ или, если речь идет об абелевых группах, то $x_1 = x_2 + x_3$. В качестве примера предложения второго порядка можно привести предложение, выражающее простоту группы:

$$\forall P^1 \big(P(1) \wedge \forall x \forall y \left(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow P(x \cdot y^{-1}) \right) \big) \wedge \\ \wedge \forall x \forall y \big(P(x) \Rightarrow P(y \cdot x \cdot y^{-1}) \big) \Rightarrow \big(\forall x\ P(x) \vee \forall x \left(P(x) \Rightarrow x = 1 \right) \big).$$

Пусть $\varkappa$ — некоторое кардинальное число. Выполнимость формулы φ в модели U с универсумом A с ограничением $\varkappa$ определяется так же, как и обычная выполнимость в логике второго порядка с тем лишь отличием, что предикатным переменным вида P^l сопоставляются произвольные подмножества множества A^l мощности не больше $\varkappa$. *$\varkappa$-Ограниченной теорией второго порядка* модели U называется множество выполнимых в ней предложений второго порядка с ограничением $\varkappa$

(обозначение: $\mathrm{Th}_2^{\varkappa}(U)$). Две модели *эквивалентны в логике второго порядка, ограниченной* $\varkappa$, если совпадают их $\varkappa$-ограниченные теории второго порядка. Заметим, что если $\varkappa \geqslant |A|$, то теории $\mathrm{Th}_2(U)$ и $\mathrm{Th}_2^{\varkappa}(U)$ совпадают. Если же $\varkappa < \infty$, то эквивалентность в ограниченной логике второго порядка равносильна элементарной эквивалентности.

Эндоморфизмы абелевой группы A образуют кольцо относительно операций сложения и композиции гомоморфизмов. Это кольцо мы будем обозначать через $\mathrm{End}\,(A)$.

Теорема 4 (Бэр [15], Капланский [25]). *Если A и C — периодические группы, кольца изоморфизмов которых изоморфны, то группы A и C изоморфны.*

Если группа $A = D \oplus G$, где группа D делима, группа G редуцированна, то *выразимым рангом группы A* мы будем называть кардинальное число

$$r_{exp} = \max(\mu_D, \mu_G),$$

где μ_D — это ранг группы D, а μ_G — это ранг базисной подгруппы группы G.

Теорема 5 ([1]). *Для любых бесконечных p-групп A_1 и A_2 из элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов $\mathrm{End}\,(A_1)$ и $\mathrm{End}\,(A_2)$ следует совпадение теорий второго порядка $\mathrm{Th}_2^{r_{exp}(A_1)}(A_1)$ и $\mathrm{Th}_2^{r_{exp}(A_2)}(A_2)$ групп A_1 и A_2, ограниченных кардинальными числами $r_{exp}(A_1)$ и $r_{exp}(A_2)$ соответственно.*

Теорема 6 ([1]). *Для любых абелевых групп A_1 и A_2 если группы A_1 и A_2 эквивалентны в языке второго порядка $\mathcal{L}_2$, то кольца $\mathrm{End}\,(A_1)$ и $\mathrm{End}\,(A_2)$ элементарно эквивалентны.*

Теорема 7 ([1]). *Если абелевы группы A_1 и A_2 редуцированны и их базисные подгруппы счетны, то из $\mathrm{Th}_2^{\omega}(A_1) = \mathrm{Th}_2^{\omega}(A_2)$ следует элементарная эквивалентность колец $\mathrm{End}\,(A_1)$ и $\mathrm{End}\,(A_2)$.*

Автоморфизмы абелевой группы A образуют группу относительно операции композиции. Эту группу мы будем обозначать через $\mathrm{Aut}\,(A)$.

Теорема 8 (Лептин [26]). *Если $p \geqslant 5$ и A, C — некоторые p-группы с изоморфными группами автоморфизмов, то группы A и C изоморфны.*

Теорема 9 (Либерт [27]). *Если $p \geqslant 3$ и A, C — некоторые p-группы с изоморфными группами автоморфизмов, то группы A и C изоморфны.*

Теорема 10 (Шульц [30]). *Если $p \geqslant 2$ и A, C — некоторые p-группы с изоморфными группами автоморфизмов, то группы A и C изоморфны.*

Аналогичные теоремы об элементарной эквивалентности групп автоморфизмов доказываются в данной диссертации.

В главе 1 вводятся определения и известные теоремы, необходимые в данной работе. Первый параграф посвящен сведениям из теории абелевых групп. В нем вводятся основные понятия об абелевых p-группах, рангах абелевых групп, делимых группах, сервантных и базисных подгруппах, кольцах эндоморфизмов и группах автоморфизмов абелевых p-групп. Второй параграф посвящен необходимым сведениям из теории моделей. В нем определяются язык и модели второго порядка, эквивалентность второго порядка, язык второго порядка абелевых групп, ограниченные теории второго порядка.

Глава 2 посвящена доказательству импликаций теоремы 41 в обратную ("легкую") сторону, а также подготовке к доказательству импликаций в прямую сторону.

В первом параграфе выражается элементарная теория кольца эндоморфизмов (а значит, и группы автоморфизмов) в теории второго порядка абелевой группы. Доказывается следующая теорема.

Теорема 11 (теорема 32). *Для любых абелевых групп A_1 и A_2 если группы A_1 и A_2 эквивалентны в языке второго порядка $\mathcal{L}_2$, то коль-*

ца $\mathrm{End}\,(A_1)$ *и* $\mathrm{End}\,(A_2)$ *(и, значит, группы автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\,A_1$ *и* $\mathrm{Aut}\,A_2$*) элементарно эквивалентны.*

Далее для того, чтобы полностью доказать простую импликацию в теореме 41, в языке второго порядка абелевой группы записывается формула, которая выполняется для редуцированных p-групп, базисные подгруппы которых меньше их по мощности (и поэтому счетны), и только для них. Тем самым, доказательство простой импликации завершается следующей теоремой.

Теорема 12 (теорема 33)**.** *Если абелевы группы* A_1 *и* A_2 *редуцированны и их базисные подгруппы счетны, то из* $Th_2^{\omega}(A_1) = Th_2^{\omega}(A_2)$ *следует элементарная эквивалентность колец* $\mathrm{End}\,A_1$ *и* $\mathrm{End}\,A_2$ *(и, значит, элементарная эквивалентность групп* $\mathrm{Aut}\,A_1$ *и* $\mathrm{Aut}\,A_2$*).*

Вся дальнейшая часть работы посвящена прямой импликации теоремы 41.

Во втором параграфе вводятся дополнительные понятия для работы с группой автоморфизмов: инволюции и экстремальные инволюции. Основные факты об инволюциях взяты из книги [14], том 2. Инволюции используются для того, чтобы выразить разделение абелевой группы в прямую сумму двух подгрупп. Экстремальные инволюции используются для выделения неразложимых прямых слагаемых. Так как с помощью одной инволюции нельзя выразить произвольное прямое слагаемое, а можно выразить только разделение на прямую сумму двух слагаемых, вводится понятие пары инволюции — набора из двух коммутирующих инволюций, одна из которых экстремальная. С помощью таких пар можно выразить произвольные прямые слагаемые группы. Приводятся формулы, выражающие отношения между прямыми слагаемыми (такие как прямая сумма, пересечение, подмножество).

В третьем параграфе вводятся понятия для работы с кольцом эндоморфизмов. Эти понятия нужны только для случая $p = 2$, так как из элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов следует элементарная эквивалентность групп автоморфизмов, и в случае $p \geqslant 3$ можно просто воспользоваться результатом для групп автоморфизмов. Для выделения прямых слагаемых и неразложимых прямых слагаемых вводятся понятия проекторов и неразложимых проекторов. В случае $p \geqslant 3$ проекторы однозначно соответствуют инволюциям. Все отношения между прямыми слагаемыми также выражаются формулами для проекторов.

В четвертом параграфе все абелевы p-группы разделяются на следующие три подкласса:

1) ограниченные p-группы;

2) группы вида $D \oplus G$, где D — ненулевая делимая группа, G — ограниченная группа;

3) группы с неограниченной базисной подгруппой.

Для каждого из подклассов приводится формула первого порядка группы автоморфизмов, выделяющая этот подкласс. В следующих главах для каждого случая в теории первого порядка группы автоморфизмов или кольца эндоморфизмов выражается теория второго порядка (возможно, ограниченная) самой группы.

Глава 3 посвящена подклассу ограниченных p-групп. В первом параграфе выделяются прямые слагаемые, отвечающие разложению группы на "слои". Каждый "слой" состоит из неразложимых прямых слагаемых определенного порядка.

В работе [1] Е.И. Бунина и А.В. Михалев доказали вариант теоремы Шелаха для выделения множеств эндоморфизмов формулами.

Теорема 13. *Существует формула $\widetilde{\varphi}(\dots)$, удовлетворяющая следующему условию. Пусть $\{f_i\}_{i\in\mu}$ — множество элементов из* $\mathrm{End}\,(A')$. *Тогда можно найти вектор $\overline{g}$ такой, что формула $\widetilde{\varphi}(f,\overline{g})$ истинна в* $\mathrm{End}\,(A')$ *тогда и только тогда, когда $f = f_i$ для некоторого $i \in \mu$.*

Во втором параграфе эта теорема адаптируется для случая группы автоморфизмов. В следующих частях эта теорема используется для выделения необходимых множеств инволюций (или проекторов). В частности, в третьем параграфе выделяется множество прямых слагаемых, которые нужны для интерпретации элементов группы. Именно, выделяется $\mu = |A|$ прямых слагаемых, каждое из которых счетно-порожденное. В следующем параграфе показывается, как на каждом из этих слагаемых интерпретировать произвольный элемент группы. Это делается с помощью разложения элемента по базису и отображения элементов прямого слагаемого в соответствующие элементы разложения. Наконец, в последнем параграфе показывается, как, интерпретируя на каждом слагаемом один элемент группы, выразить на всех слагаемых последовательности элементов мощности μ и тем самым выразить теорию второго порядка всей группы.

Глава 4 посвящена второму подклассу групп. Этот случай отличается от предыдущего наличием неограниченного "слоя" — делимой части. Доказательство теоремы для этого подкласса во многом повторяет предыдущее. Отличие заключается в том случае, когда неограниченный слой является самым мощным, и служебные счетно-порожденные прямые слагаемые надо выделять в нем. Тогда отображать элементы этих слагаемых в элементы базиса группы с помощью автоморфизмов или эндоморфизмов невозможно, так как все гомоморфизмы из делимой группы в редуцированную тривиальны. Чтобы обойти эту трудность, выделяется дополнительное прямое слагаемое в делимой части, в которую отображаются все элементы редуцированной части, и с помощью которой они интерпретируются.

Глава 5 посвящена третьему подклассу — группам с неограниченной базисной подгруппой. В этом случае базисная подгруппа не всегда совпадает со всей редуцированной подгруппой. Именно в этом случае проявляется разница в критериях элементарной эквивалентности в зависимости от наличия ненулевой делимой части.

В первых двух параграфах базисная группа выделяется формулой. Она задается одним автоморфизмом, выражающем соответствие между циклическими слагаемыми всей группы и циклическими слагаемыми базисной подгруппы. Такое соответствие существует благодаря теореме 29.

В третьем параграфе вновь доказывается применимость теоремы Шелаха, теперь — для случая прямых слагаемых базисной группы.

Теорема 14 (теорема 37). *Существует формула $\widetilde{\varphi}(\dots)$, удовлетворяющая следующему условию. Пусть $\{f_i\}_{i\in\mu}$ — множество элементов из Ω — множества экстремальных инволюций, соответствующих прямым слагаемым базисной подгруппы. Тогда можно найти вектор $\overline{g}$ такой, что формула $\widetilde{\varphi}(f,\overline{g})$ истинна в Ω тогда и только тогда, когда $f = f_i$ для некоторого $i \in \mu$.*

Четвертый параграф посвящен заданию структуры на базисной подгруппе. В нем выделяется множество автоморфизмов для каждой пары циклических слагаемых в базисной подгруппе, которые переводят фиксированные порождающие элементы этих слагаемых друг в друга.

В пятом параграфе мы выражаем теорию второго порядка делимой части и базисной подгруппы в языке первого порядка группы автоморфизмов. Это делается по уже известной схеме из предыдущих двух случаев. Отличие возникает в случае, когда группа счетна, и может не существовать слоя, равномощного всей группе. Тогда служебные слагаемые выделяется не в одном слое, а одновременно во всех слоях редуцированной подгруппы. Тем самым, доказывается следующая теорема.

Теорема 15 (теорема 38). *Если кольца эндоморфизмов абелевых p-групп (либо группы автоморфизмов абелевых p-групп, $p \geqslant 3$) A_1 и A_2 элементарно эквивалентны, то группы сами группы A_1 и A_2 обладают эквивалентными в логике второго порядка делимыми частями и базисными подгруппами.*

В шестом параграфе мы выражаем логику первого порядка всей группы. Это делается с помощью автоморфизмов, которые сопоставляют произвольному элементу группы некоторый элемент базисной подгруппы. В следующем параграфе интерпретируется ограниченная логика второго порядка редуцированой группы. Сначала интерпретируется логика, ограниченная финальным рангом базисной подгруппы. Это делается так же, как и прежде, с помощью выделения соответствующего количества счетно-порожденных прямых слагаемых базисной подгруппы, на каждом из которых выражается элемент группы. Затем интерпретируется логика, ограниченная мощностью всей базисной подгруппы. Для этого используется выражение логики второго порядка базисной подгруппы и теорема 28 о плотности базисной подгруппы в p-адической топологии. Тем самым, доказывается

Теорема 16 (теорема 39)**.** *Пусть G и G' — редуцированные абелевы p-группы с базисными подгруппами B и B' соответственно, $p \geqslant 3$. Тогда если $\mathrm{Aut}\, G \equiv \mathrm{Aut}\, G'$, то $Th_2^{|B|}(G) = Th_2^{|B'|}(G')$.*

Оставшаяся часть главы относятся к группам с ненулевой делимой частью D. В восьмом параграфе мы интерпретируем фактор-группу редуцированной группы G по базисной подгруппе B в языке первого порядка группы автоморфизмов. Эта фактор-группа делимая, поэтому для того, чтобы ее интерпретировать, достаточно выразить квазибазисы ее квазициклических слагаемых, каждый из которых может быть задан одним автоморфизмом. Наличие делимой части делает возможным интерпретацию теории первого порядка группы $\mathrm{Hom}\,(G/B, D)$ и выражение независимости системы квазициклических слагаемых. С помощью этого в параграфе 9 показывается применимость теоремы Шелаха для случая квазициклических слагаемых из фактор-группы.

Наконец, в последнем параграфе мы интерпретируем полную теорию второго порядка всей группы. Это делается так же, как и раньше, но теперь в интерпретации участвуют не только делимая часть и базисная подгруппа, но и фактор-группа G/B. Так как эта фактор-группа делимая, то она участвует так же, как и делимая часть, и служебные прямые слагаемые для интерпретации выделяются из делимой части или из фактор-группы в зависимости от того, кто из них больше по мощности.

Последняя глава подводит итог всей работе и объединяет все результаты для всех случаев. В ней формулируется критерий элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов (или групп автоморфизмов) — теорема 1 (теорема 41).

Таким образом, более детально результаты диссертации, выносимые на защиту, можно сформулировать следующим образом:

1. Доказано, что для любых абелевых групп A_1 и A_2 из их эквивалентности второго порядка следует элементарная эквивалентность колец $\mathrm{End}\,(A_1)$ и $\mathrm{End}\,(A_2)$ и групп $\mathrm{Aut}\,(A_1)$ и $\mathrm{Aut}\,(A_2)$ (Теорема 32).

2. Доказано, что для любых редуцированных абелевых групп A_1 и A_2 с счетным базисными подгруппами из условия $Th_2^{\omega}(A_1) = Th_2^{\omega}(A_2)$ следует элементарная эквивалентность колец $\mathrm{End}\,(A_1)$ и $\mathrm{End}\,(A_2)$ и групп $\mathrm{Aut}\,A_1$ и $\mathrm{Aut}\,A_2$ (Теорема 33).

3. Доказано, что для любых абелевых групп A_1 и A_2 если кольца эндоморфизмов абелевых p-групп (либо группы автоморфизмов абелевых p-групп, $p \geqslant 3$) A_1 и A_2 элементарно эквивалентны, то сами группы A_1 и A_2 обладают эквивалентными в логике второго порядка делимыми частями и базисными подгруппами (теорема 38).

4. Доказано, что для любых редуцированных абелевых групп A_1 и A_2 с базисными подгруппами B_1 и B_2 соответственно если кольца эндоморфизмов абелевых p-групп (либо группы автоморфизмов абелевых p-групп, $p \geqslant 3$) A_1 и A_2 элементарно эквивалентны, то $Th_2^{|B_1|}(A_1) = Th_2^{|B_2|}(A_2)$ (Теорема 39).

5. Доказано, что для любых абелевых групп A_1 и A_2 с базис-

ными подгруппами B_1 и B_2 кольца эндоморфизмов абелевых p-групп (либо группы автоморфизмов абелевых p-групп, $p \geqslant 3$) A_1 и A_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда либо $Th_2^{|B_1|}(A_1) = Th_2^{|B_2|}(A_2)$ и одна из групп A_1 или A_2 является редуцированной, либо когда $Th_2(A_1) = Th_2(A_2)$ (Теорема 41).

Благодарности

Автор выражает благодарность своим научным руководитлям д. ф.-м. н., профессору Михалеву Александру Васильевичу и д. ф.-м. н., профессору Буниной Елене Игоревне за постановку задач и постоянный интерес к работе. Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры высшей алгебры за внимание к работе и доброжелательное отношение.

Глава 1

Основные понятия

1.1 Предварительные сведения об абелевых группах

Здесь мы приведем самые основные сведения об абелевых группах, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Абелева группа A называется *n-ограниченной*, если $nA = 0$. Группа называется *ограниченной*, если она n-ограничена для некоторого натурального n. Если такого n не существует, то такая группа называется *неограниченной*.

Примарной группой или *p-группой* называется группа, порядки элементов которой являются степенями фиксированного простого числа p.

Если $a \in A$, то наибольшее неотрицательное целое число r, для которого уравнение $p^r x = a$ имеет решение $x \in A$, назовем *p-высотой* $h_p(a)$ элемента a. Если уравнение $p^r x = a$ имеет решение при любом r, то a называется элементом *бесконечной p-высоты*, $h_p(a) = \infty$.

Пусть p — простое число. Корни степени p из единицы, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, образуют бесконечную мультипликативную группу; мы перейдем к аддитивной записи. Получится группа, называемая *квазициклической* или *группой типа* p^∞ ($\mathbb{Z}(p^\infty)$), которую можно определить следующим образом: она порождается элементами $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, где $pc_1 = 0$, $pc_2 = c_1$, $\ldots$, $pc_{n+1} = c_n$, $\ldots$. Здесь $o(c_n) = p^n$ и всякий элемент из $\mathbb{Z}(p^\infty)$ кратен некоторому c_n. Очевидно, что все квазициклические группы, соответствующие одному и тому же простому числу p, изоморфны между собой.

Система $\{a_1, \ldots, a_k\}$ ненулевых элементов группы A называется *независимой*, если из равенства

$$n_1a_1 + \cdots + n_ka_k = 0 \quad (n_i \in \mathbb{Z})$$

всегда вытекает, что

$$n_1a_1 = \cdots = n_ka_k = 0.$$

Система элементов называется *зависимой*, если она не независима.

Бесконечная система $L = \{a_i\}_{i \in I}$ элементов группы A называется *независимой*, если в L всякая конечная подсистема независима. Независимая система M элементов группы A называется *максимальной*, если в A не существует независимой системы, строго содержащей M. *Рангом* $r(A)$ группы A называется мощность ее максимальной независимой системы, содержащей только элементы бесконечного порядка или порядка, равного степени простого числа.

Предложение 1.1. *Ранг $r(A)$ группы A является инвариантом этой группы.*

Теорема 17. ([28], [16]) *Ограниченная группа является прямой суммой циклических групп.*

Теорема 18. ([14]) *Любые два разложения группы в прямую сумму циклических групп бесконечного порядка и порядков, равных степеням простых чисел, изоморфны.*

Теорема 19. ([8]) *Подгруппы прямых сумм циклических групп сами являются прямыми суммами циклических групп.*

Будем говорить, что элемент a группы A *делится* на натуральное число n ($n|a$), если уравнение $nx = a$ ($a \in A$) имеет решение в группе A. Группа D называется *делимой*, если $n|a$ для всех $a \in D$ и всех натуральных чисел n. Группы $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}(p^\infty)$ служат примерами делимых групп.

Теорема 20. *Всякая делимая группа D является прямой суммой квазициклических групп и групп, изоморфных $\mathbb{Q}$. Мощности множеств компонент $\mathbb{Z}(p^\infty)$ (для каждого p) и $\mathbb{Q}$ составляют полную и независимую систему инвариантов группы D.*

Таким образом, всякая делимая p-группа D является прямой суммой групп $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Мощность множества компонент $\mathbb{Z}(p^\infty)$ является единственным инвариантом группы D.

Теорема 21 ([14])**.** *Для группы D эквивалентны следующие условия*:

1) *D — делимая группа*;

2) *D служит прямым слагаемым для всякой содержащей ее группы.*

Теорема 22 ([14])**.** *Всякая группа A является прямой суммой делимой группы D и редуцированной группы G,*

$$A = D \oplus G.$$

Подгруппа D здесь определена однозначно и называется делимой частью группы A, подгруппа G определена однозначно с точностью до изоморфизма.

Подгруппа G группы A называется *сервантной*, если уравнение $nx = g \in G$, имеющее решение во всей группе A, имеет решение и в G. Подгруппа G сервантна в группе A тогда и только тогда, когда

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad nG = G \cap nA.$$

Предложение 1.2. ([31]) *Предположим, что подгруппа B группы A является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка p^k. Тогда эквивалентны следующие утверждения*:

1) *B — сервантная подгруппа группы A*;

2) *B — прямое слагаемое в A.*

Таким образом, всякий элемент порядка p и конечной высоты можно вложить в конечное циклическое прямое слагаемое группы.

Теорема 23. ([7]) *Всякая ограниченная сервантная подгруппа выделяется прямым слагаемым.*

Следствие 2. ([20]) *p-группу B группы A можно вложить в ограниченное прямое слагаемое группы A тогда и только тогда, когда высоты отличных от нуля элементов группы B (взятые в совокупности) ограничены.*

Следствие 3. *Элемент a, порядок которого — степень простого числа, принадлежит конечному прямому слагаемому группы тогда и только тогда, когда подгруппа $\langle a \rangle$ не содержит отличных от нуля элементов бесконечной высоты.*

Подгруппа B группы A называется *p-базисной*, если выполнены следующие три условия:

1) подгруппа B является прямой суммой циклических p-групп и бесконечных циклических групп;

2) B есть сервантная подгруппа группы A;

3) факторгруппа A/B является p-делимой группой.

Подгруппа B обладает базисом, который называется *p-базисом* группы A.

Всякая группа для любого простого числа p содержит p-базисные подгруппы ([21]).

Нам в дальнейшем будут важны p-группы и их p-базисные подгруппы. Если A есть p-группа и q — простое число, отличное от p, то группа A имеет лишь одну q-базисную подгруппу, равную 0. Поэтому в случае p-групп мы будем называть p-базисные подгруппы просто *базисными*.

Теорема 24. ([32]) *Подгруппа $B = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, где B_n — прямая сумма групп $\mathbb{Z}(p^n)$, служит базисной подгруппой для p-группы A тогда и только тогда, когда при любом целом $n > 0$ подгруппа $B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ является максимальным p^n-ограниченным прямым слагаемым группы A.*

Теорема 25. (Бэр; Бойер [19]) *Предположим, что B — подгруппа p-группы A,*

$$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n \oplus \dots,$$

где

$$B_n \cong \bigoplus_{\mu_n} \mathbb{Z}(p^n).$$

Подгруппа B является базисной подгруппой группы A тогда и только тогда, когда

$$A = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n \oplus (B_n^* + p^n A),$$

где $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n^* = B_{n+1} \oplus B_{n+2} \oplus \dots$$

Так как подгруппа B имеет базис, а факторгруппа A/B — прямая сумма групп, изоморфных группе $\mathbb{Z}(p^\infty)$ (т. е. A/B также имеет систему образующих, которую легко описать), то естественно объединить эти системы образующих и таким путем получить систему образующих группы A.

Запишем

$$B = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle \text{ и } A/B = \bigoplus_{j \in J} C_j^*, \text{ где } C_j^* = \mathbb{Z}(p^\infty).$$

Если прямое слагаемое C_j^* порождается смежными классами $c_{j1}^*, \dots, c_{jn}^*, \dots$ по подгруппе B, для которых $pc_{j1}^* = 0$, $pc_{j,n+1}^* = c_{jn}^*$ $(n = 1, 2, \dots)$, то в группе A можно выбрать элементы $c_{jn} \in c_{jn}^*$ того же порядка, что и c_{jn}^*. Тогда получится следующая система соотношений:

$$pc_{j1} = 0, \; pc_{j,n+1} = c_{jn} = b_{jn} \quad (n \geqslant 1, b_{jn} \in B),$$

где элемент b_{jn} должен иметь порядок $\leqslant p^n$, так как $o(c_{jn}) = p^n$.

Системy элементов $\{a_i, c_{jn}\}_{i \in I, j \in J, n \in \omega}$ мы будем называть *квазибазисом* группы A.

Предложение 1.3. ([22]) *Если $\{a_i, c_{jn}\}$ — квазибазис p-группы A, то любой элемент $a \in A$ можно записать в виде*

$$a = s_1 a_{i_1} + \cdots + s_m a_{i_m} + t_1 a_{j_1 n_1} + \cdots + t_r a_{j_r n_r}, \qquad (1.1)$$

где s_i и t_j — целые числа, ни одно t_j не делится на p и индексы $i_1, \ldots, i_m$, так же как и индексы $j_1, \ldots, j_r$ все различны. Запись (1.1) единственна в том смысле, что в ней однозначно определены члены sa_i и tc_{jn}.

Теорема 26 (Куликов [9])**.** *Если B — базисная подгруппа редуцированной p-группы A, то*

$$|A| \leqslant |B|^{\omega}.$$

Финальным рангом базисной подгруппы B p-группы A назовем минимум кардинальных чисел $r(p^n B)$. Заметим, что если ранг группы B равен μ_1, а финальный ранг B равен μ_2, то $A = A_1 \oplus A_2$, где группа A_1 ограниченна и имеет ранг μ_1, а базисная подгруппа группы A_2 имеет ранг μ_2, совпадающий с ее финальным рангом.

Теорема 27. *Если два эндоморфизма редуцированной абелевой группы совпадают на некоторой ее базисной подгруппе, то они равны.*

Теорема 28 ([24])**.** *Если на абелевой группе A определена p-адическая топология, то p-базисная подгруппа B плотна в A в этой топологии.*

Теорема 29 ([14], т. 1, стр. 179)**.** *Базисная подгруппа p-группы A является эндоморфным образом группы A.*

Эндоморфизмы абелевой группы A образуют кольцо относительно операций сложения и композиции гомоморфизмов. Это кольцо мы будем обозначать через $\mathrm{End}\,(A)$.

Нам понадобится несколько утверждений о кольце $\mathrm{End}\,(A)$:

1) *Существует взаимно-однозначное соответствие между конечными прямыми разложениями*

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$$

группы A и разложениями кольца $\mathrm{End}\,(A)$ *в конечные прямые суммы левых идеалов*

$$\mathrm{End}\,(A) = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n;$$

именно, если $A_i = e_iA$, где $e_1, \ldots, e_n$ — попарно ортогональные идемпотенты, то $L_i =$ $\mathrm{End}\,(A)e_i$*.*

2) *Идемпотент $e \neq 0$ называется примитивным, если его нельзя представить в виде суммы двух ненулевых ортогональных идемпотентов. Если $e \neq 0$ — идемпотент кольца* $\mathrm{End}\,(A)$, *то eA является неразложимым прямым слагаемым группы A тогда и только тогда, когда e — примитивный идемпотент.*

3) *Пусть $A = B \oplus C = B' \oplus C'$ — прямые разложения группы A и $e : A \to B$, $e' : A \to B'$ — соответствующие проекции. Тогда $B \cong B'$ в том и только том случае, когда существуют такие элементы $\alpha, \beta \in$* $\mathrm{End}\,(A)$, *что*

$$\alpha\beta = e \text{ и } \beta\alpha = e'.$$

Теорема 30 (Шарль [23], Капланский [25])**.** *Центр кольца эндоморфизмов* $\mathrm{End}\,(A)$ *любой p-группы A состоит из умножения на целые p-адические числа или на вычеты по модулю p^k в зависимости от того, является ли группа A неограниченной или p^k служит наименьшей верхней гранью порядков ее элементов.*

Автоморфизмы абелевой группы A образуют группу относительно операции композиции. Эту группу мы будем обозначать через $\mathrm{Aut}\,(A)$.

Теорема 31 ([14], теорема 115.1)**.** *Центр группы автоморфизмов p-группы A состоит из умножений на p-адические единицы, если A — неограниченная группа, и из умножений на целые числа k, где $(k, p) = 1$, $1 \leqslant k < p^r$, если p^r — наименьшая верхняя грань порядков элементов из A.*

1.2 Языки и модели второго порядка

Помимо языков первого порядка мы будем вынуждены рассматривать языки второго порядка, в которых можно также навешивать кванторы на предикатные символы, то есть использовать предикатные символы как переменные. Такие языки будут описаны ниже. Мы будем говорить, что две модели одного языка (например, второго порядка) $\mathcal{L}$ эквивалентны в этом языке, если для любого предложения языка $\mathcal{L}$ его истинность в первой модели равносильна его истинности во второй модели.

Мы считаем известными основные понятия теории моделей — понятия языка первого порядка, формул первого порядка, теории, модели теории, выполнимости формулы в модели.

Так как описание понятий, связанных с языками и теориями второго порядка, встречается редко, то мы приведем его здесь.

Язык $\mathcal{L}_2$ второго порядка — это совокупность символов, состоящая из 1) скобок (,); 2) связок $\wedge$ ("и") и $\neg$ ("не"); 3) квантора $\forall$ (для всех); 4) символа равенства $=$; 5) счетного множества предметных переменных x_i; 6) счетного множества предикатных переменных P_i^l; 7) не более чем счетного множества предикатных символов Q_i^n $(n \geqslant 1)$; 8) не более чем счетного множества функциональных символов F_i^n $(n \geqslant 1)$; 9) не более чем счетного множества константных символов c_i.

Термы языка $\mathcal{L}_2$ определяются следующим образом:

1) предметная переменная есть *терм*;

2) константный символ есть *терм*;

3) если F^n — некоторый функциональный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $F^n(t_1, \ldots, t_n)$ — *терм*;

4) Знакосочетание является *термом* в том и только том случае, если это можно показать с помощью конечного числа применений правил 1)–3).

Таким образом, термы языка $\mathcal{L}_2$ совпадают с термами языка $\mathcal{L}$.

Элементарные формулы языка $\mathcal{L}_2$ определяются так:

1) если t_1 и t_2 — термы языка $\mathcal{L}_2$, то $t_1 = t_2$ — элементарная формула;

2) если P^l — предикатная переменная, $t_1, \ldots, t_l$ — термы, то знакосочетание $P^l(t_1, \ldots, t_l)$ является элементарной формулой;

2) Если Q^n — некоторый предикатный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то знакосочетание $Q^n(t_1, \ldots, t_n)$ — это элементарная формула.

Например элементарные формулы группового языка второго порядка имеют вид $x_i = x_j$, $x_i = x_j \cdot x_k$ и $P^l(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l})$, $l \geqslant 1$.

Формулы языка $\mathcal{L}_2$ определяются следующим образом:

1) всякая элементарная формула есть *формула*;

2) если φ и ψ — формулы, x — предметная переменная, то каждое из знакосочетаний $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\forall x\, \varphi)$ есть *формула*;

3) если P^l — предикатная переменная, φ — формула, то знакосочетание

$$(\forall P^l(v_1, \ldots, v_l)\varphi)$$

является формулой.

4) знакосочетание является *формулой* только в том случае, если это можно показать с помощью конечного числа применений правил 1)–3).

Договоримся о сокращениях (дополнительных к обычным сокращениям для языка первого порядка):

$\exists P^l(v_1, \ldots, v_l)\varphi$ есть сокращение для $\neg(\forall P^l(v_1, \ldots, v_l)(\neg\varphi))$;

$\forall P_1^{l_1}(v_1, \ldots, v_{l_1}) \ldots \forall P_n^{l_n}(v_1, \ldots, v_{l_n})\varphi$ есть сокращение для $(\forall P_1^{l_1}(v_1, \ldots, v_{l_1})) \ldots (\forall P_n^{l_n}(v_1, \ldots, v_{l_n}))\varphi$;

$\exists P_1^{l_1}(v_1, \ldots, v_{l_1}) \ldots \exists P_n^{l_n}(v_1, \ldots, v_{l_n})\varphi$ есть сокращение для $(\exists P_1^{l_1}(v_1, \ldots, v_{l_1})) \ldots (\exists P_n^{l_n}(v_1, \ldots, v_{l_n}))\varphi$.

Введем понятие *свободного* и *связанного* вхождения предикатной переменной в формулу языка $\mathcal{L}_2$.

1) Все вхождения всех предикатных переменных элементарной формулы являются свободными вхождениями.

2) Всякое свободное (связанное) вхождение переменной P^l в формулу φ является свободным (связанным) вхождением переменной P^l в формулы $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$ и $(\psi \wedge \varphi)$.

3) Каково бы ни было вхождение переменной P^l в формулу φ, вхождение переменной P^l в формулу $\forall P^l(v_1, \ldots, v_l)\varphi$ является связанным. Если вхождение переменной P_1^l в формулу φ свободно (связанно), то таковым же является вхождение переменной P_1^l в формулы $\forall x\varphi$ и $\forall P_2^m(v_1, \ldots, v_m)\varphi$.

Всякую формулу, *свободные* предметные и предикатные переменные которой образуют подмножество множества

$$\{x_1, \ldots, x_n, P_1^{l_1}, \ldots, P_k^{l_k}\},$$

будем обозначать через $\varphi(x_1, \ldots, x_n, P_1^{l_1}, \ldots, P_k^{l_k})$.

К обычным логическим аксиомам языка первого порядка добавляется еще одна чисто логическая аксиома:

$$(\forall P^n(v_1, \ldots, v_n)(\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\forall P^n(v_1, \ldots, v_n)\varphi)),$$

если ψ не содержит свободных вхождений переменной P^n.

К аксиомам равенства тоже добавляется новая аксиома:

$$\forall P^n(v_1, \ldots, v_n)(y = z \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (P^n(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) \Leftrightarrow P^n(x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n)).$$

Кроме того, правило вывода по обобщению можно заменить на “из формулы φ выводится $\forall x\varphi$ и $\forall P^n(v_1, \ldots, v_n)\varphi$”.

Моделью языка второго порядка $\mathcal{L}_2$ называется пара $\mathcal{U} = \langle A, I\rangle$, состоящая из объекта A (т. е. класса или множества) и какого-либо соответствия I, относящего каждому предикатному символу Q^n некоторое n-местное отношение в A, каждому функциональному символу F^n — некоторую n-местную операцию в A, а каждой константе c — некоторый элемент из A.

Теперь дадим определение выполнимости. Пусть φ — произвольная формула языка $\mathcal{L}_2$, все переменные которой, свободные и связанные, содержатся среди $x_1, \ldots, x_q, P_1^{l_1}, \ldots, P_s^{l_s}$, и пусть $a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}$ — произвольная последовательность, где $a_1, \ldots, a_q$ — элементы множества A, $b_i^{l_i} \subset A^{l_i}$. Мы определяем предикат φ *выполняется на последовательности* $a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}$ *в модели* $\mathcal{U}$.

1. Значение терма $t(x_1, \ldots, x_q, P_1^{l_1}, \ldots, P_s^{l_s})$ на последовательности $a_1, \ldots, a_q$, $b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}$ определяется следующим образом (мы обозначаем это значение через $t[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}]$):

1) если t — это переменная x_i, то $t[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}] = a_i$;

2) если t — это символ константы c, то $t[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}] = I(c)$.

3) если t — это $F^m(t_1, \ldots, t_m)$, где $t_1(x_1, \ldots, x_q, P_1^{l_1}, \ldots, P_s^{l_s})$, $\ldots$, $t_m(x_1, \ldots, x_q, P_1^{l_1}, \ldots, P_s^{l_s})$ — термы, то

$$t[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}] =$$
$$= I(F^m)(\langle t_1[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}], \ldots, t_m[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}]\rangle).$$

2. 1) Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_q, P_1^{l_1}, \ldots, P_s^{l_s})$ — элементарная формула вида $t_1 = t_2$, где $t_1(x_1, \ldots, x_q, P_1^{l_1}, \ldots, P_s^{l_s})$ и $t_2(x_1, \ldots, x_q, P_1^{l_1}, \ldots, P_s^{l_s})$ — термы. Формула φ *выполняется* на элементах $a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}$, если

$$t_1[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}] = t_2[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}].$$

2) Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_q, P_1^{l_1}, \ldots, P_s^{l_s})$ — элементарная формула вида $Q^n(t_1, \ldots, t_n)$, где $t_1(x_1, \ldots, x_q, P_1^{l_1}, \ldots P_s^{l_s}), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_q, P_1^{l_1}, \ldots, P_s^{l_s})$ — термы, а Q^n — n-местный предикатный символ. Формула φ *выполняется* на элементах $a_1, \ldots, a_q$, $b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}$, если

$$\langle t_1[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}], \ldots, t_n[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}]\rangle \in I(Q^n).$$

3) Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_q, P_1^{l_1}, \ldots, P_s^{l_s})$ — элементарная формула вида $P_i^{l_i}(t_1, \ldots, t_{l_i})$, где $t_1(x_1, \ldots, x_q, P_1^{l_1}, \ldots P_s^{l_s}), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_q, P_1^{l_1}, \ldots, P_s^{l_s})$

— термы. Формула φ *выполняется* на элементах $a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}$, если

$$\langle t_1[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}], \ldots, t_n[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}]\rangle \in b_i^{l_i}.$$

3. Пусть φ — формула языка $\mathcal{L}_2$, все свободные и связанные переменные которой содержатся среди $x_1, \ldots, x_q, P_1^{l_1}, \ldots, P_s^{l_s}$.

1) Если φ имеют вид $\theta_1 \wedge \theta_2$, то

$$\mathcal{U} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}] \text{ тогда и только тогда, когда}$$
$$\mathcal{U} \vDash \Theta_1[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}] \text{ и } \mathcal{U} \vDash \Theta_2[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}].$$

2) Если φ имеет вид $\neg\Theta$, то

$$\mathcal{U} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}] \text{ тогда и только тогда, когда}$$
$$\text{неверно, что } \mathcal{U} \vDash \Theta[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}].$$

3) Если φ имеет вид $\forall x_i\psi$, где $i \leqslant q$, то

$$\mathcal{U} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}] \text{ тогда и только тогда, когда}$$
$$\mathcal{U} \vDash \psi[a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}] \text{ для любого } a \in A.$$

4) Если φ имеет вид $\forall P_i^{l_i}(v_1, \ldots v_{l_i})\psi$, где $i \leqslant s$, то

$$\mathcal{U} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}] \text{ тогда и только тогда, когда}$$
$$\mathcal{U} \vDash \psi[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_{i-1}^{l_{i-1}}, b, b_{i+1}^{l_{i+1}}, \ldots, b_s^{l_s}] \text{ для любого } b \subset A^{l_i}.$$

Утверждение о том, что

$$\mathcal{U} \models \varphi(x_1, \ldots, x_p, P_1^{l_1}, \ldots, P_t^{l_t})[a_1, \ldots, a_q, b_1^{l_1}, \ldots, b_s^{l_s}]$$

зависит только от значений $a_1, \ldots, a_p, b_1^{l_1}, \ldots, b_t^{l_t}$, где $p < q$, $s < t$, звучит совершенно так же, как и это утверждение для языков и теорий первого порядка.

Мы будем говорить, что две модели языка второго порядка эквивалентны в языке второго порядка, если для любого предложения этого языка его истинность в первой модели равносильна его истинности во второй модели.

Мы будем рассматривать модели второго порядка абелевых групп, т. е. рассматривать групповой язык второго порядка, в котором трехместный предикатный символ будет обозначать не умножение, а сложение (т. е. мы будем писать $x_1 = x_2 + x_3$ вместо $P^3(x_1, x_2, x_3)$).

Как мы видим, формулы $\varphi(\dots)$ языка $\mathcal{L}_2$ должны состоять из следующих подформул:

1) $\forall x$ $(\exists x)$;

2) $x_1 = x_2$ и $x_1 = x_2 + x_3$, где каждая из переменных x_1, x_2, x_3 либо является свободной переменной формулы φ, либо определена в формуле φ ранее (с помощью подформул $\forall x_i$ или $\exists x_i$, $i = 1, 2, 3$);

3) $\forall P(v_1, \dots, v_n)$ $(\exists P(v_1, \dots, v_n))$, $n > 0$;

4) $P(x_1, \dots, x_n)$, где каждая из переменных $x_1, \dots, x_n$, а также "предикатная" переменная $P(v_1, \dots, v_n)$ либо являются свободными переменными формулы φ, либо определены в этой формуле с помощью подформул $\forall x_i$, $\exists x_i$, $\forall P(v_1, \dots, v_n)$, $\exists P(v_1, \dots, v_n)$.

Эквивалентность двух абелевых групп A_1 и A_2 в языке $\mathcal{L}_2$ мы будем обозначать через

$$A_1 \equiv_{\mathcal{L}_2} A_2 \text{ или } A_1 \equiv_2 A_2.$$

Как мы помним, *теорией* данного языка $\mathcal{L}$ на модели $\mathcal{U}$ называется множество всех предложений языка $\mathcal{L}$, выполненных в этой модели. В некоторых случаях мы, наравне с теориями вида $Th_2(A) = Th_{\mathcal{L}_2}(A)$, будем рассматривать теории вида $Th_2^{\varkappa}(A)$, в которые входят только те предложения φ языка $\mathcal{L}_2$, которые выполнены на любой последовательности

$$\langle a_1, \dots, a_q, b_1^{l_1}, \dots, b_s^{l_s} \rangle,$$

где $a_1, \dots, a_q \in A$, $b_i^{l_i} \subset A^{l_i}$ и $|b_i^{l_i}| \leqslant \varkappa$. При $\varkappa \geqslant |A|$ $Th_2(A)$ и $Th_2^{\varkappa}(A)$ совпадают.

Глава 2

Прямые теоремы и разделение задачи на случаи

2.1 Доказательство “более легких” импликаций в теореме.

Докажем две теоремы, дающих нам более легкую импликацию основной теоремы.

Теорема 32. *Для любых абелевых групп* A_1 *и* A_2 *если группы* A_1 *и* A_2 *эквивалентны в языке второго порядка* $\mathcal{L}_2$*, то кольца* $\mathrm{End}\,(A_1)$ *и* $\mathrm{End}\,(A_2)$ *(и, значит, группы автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\, A_1$ *и* $\mathrm{Aut}\, A_2$*) элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Любую двуместную предикатную переменную $P(v_1, v_2)$ мы будем называть *соответствием на группе* A. Соответствие $P(v_1, v_2)$ на группе A будем называть *функцией на группе* A (и писать в этом случае $Func(P(v_1, v_2))$ или просто $Func(P)$), если оно удовлетворяет условию

$$(\forall x \exists y P(x, y)) \wedge (\forall x \forall y_1 \forall y_2 P(x, y_1) \wedge P(x, y_2) \Rightarrow y_1 = y_2).$$

Функцию $P(v_1, v_2)$ будем называть *эндоморфизмом на группе* A (и писать в этом случае $Endom(P(v_1, v_2))$ или просто $Endom(P)$), если она удовлетворяет дополнительному условию

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 P(x_1, y_1) \wedge P(x_2, y_2) \Rightarrow P(x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Теперь рассмотрим некоторое произвольное предложение φ языка первого порядка теории колец. В это предложение могут входить подформулы

1) $\forall x$;

2) $\exists x$;

3) $x_1 = x_2$;

4) $x_1 = x_2 + x_3$;

5) $x_1 = x_2 \cdot x_3$.

Переведем это предложение в предложение $\widetilde{\varphi}$ языка второго порядка теории групп по следующему алгоритму.

1) подформула $\forall x(\dots)$ переводится в подформулу

$$\forall P^x(v_1, v_2)(Endom(P^x) \Rightarrow \dots);$$

2) подформула $\exists x(\dots)$ переводится в подформулу

$$\exists P^x(v_1, v_2)(Endom(P^x) \wedge \dots);$$

3) подформула $x_1 = x_2$ переводится в подформулу

$$\forall y_1 \forall y_2 (P^{x_1}(y_1, y_2) \Leftrightarrow P^{x_2}(y_1, y_2));$$

4) подформула $x_1 = x_2 + x_3$ переводится в подформулу

$$\forall y \forall z_1 \forall z_2 \forall z_3 (P^{x_2}(y, z_2) \wedge P^{x_3}(y, z_3) \Rightarrow (P^{x_1}(y, z_1) \Leftrightarrow z_1 = z_2 + z_3));$$

5) подформула $x_1 = x_2 \cdot x_3$ переводится в подформулу

$$\forall y \forall z (P^{x_1}(y, z) \Rightarrow \exists t (P^{x_2}(y, t) \wedge P^{x_3}(t, z)).$$

Нам нужно показать, что предложение φ истинно в модели $\mathrm{End}\,(A)$ тогда и только тогда, когда предложение $\widetilde{\varphi}$ истинно в модели A.

Если A — это модель абелевой группы, то модель $\mathrm{End}\,(A)$ состоит из множеств пар элементов модели A $x = \{\langle u_1, u_2 \rangle \mid u_1, u_2 \in A\}$ с условиями

1) $\forall u_1 \exists u_2 \langle u_1, u_2 \rangle \in x$;

2) $\forall u_1 \forall u_2 \forall u_3 (\langle u_1, u_2\rangle \in x \wedge \langle u_1, u_3\rangle \in x \Rightarrow u_2 = u_3)$;

3) $\forall u_1 \forall u_2 \forall u_3 \forall u_4 (\langle u_1, u_3\rangle \in x \wedge \langle u_2, u_4\rangle \in x \Rightarrow \langle u_1 + u_2, u_3 + u_4\rangle \in x)$.

Таким образом, последовательность $a_1, \ldots, a_q$, на которой должна выполняться формула φ в модели $\operatorname{End}(A)$, — это последовательность множеств пар элементов модели A, удовлетворяющих условиям 1)–3).

Установим тождественную биекцию между элементами модели $\operatorname{End}(A)$ и соответствующими множествами пар модели A. Пусть при этой биекции элементу a_i модели $\operatorname{End}(A)$ соответствует множество $A_i \subset A \times A$.

1. Если формула φ имеет вид $x_i = x_j$, то выполнимость формулы φ на последовательности $a_1, \ldots, a_q$ означает, что $a_i = a_j$, т. е. a_i и a_j — совпадающие эндоморфизмы модели $\operatorname{End}(A)$, а множества A_i и A_j состоят из одних и тех же элементов, т. е. в модели A на последовательности $A_1, \ldots, A_q$ выполнена формула

$$\forall y_1 \forall y_2 (P^{x_i}(y_1, y_2) \Leftrightarrow P^{x_j}(y_1, y_2)).$$

2. Если формула φ имеет вид $x_i = x_j + x_k$, то выполнимость формулы φ на последовательности $a_1, \ldots, a_q$ означает, что $a_i = a_j + a_k$, т. е. эндоморфизм a_i есть сумма эндоморфизмов a_j и a_k, а это означает, что в модели A для каждого элемента $b \in A$ и для каждых $b_1, b_2, b_3 \in A$ таких, что $\langle b, b_1\rangle \in A_i$, $\langle b, b_2\rangle \in A_j$, $\langle b, b_3\rangle \in A_k$, мы имеем $b_1 = b_2 + b_3$ (т. е., формально говоря, $\langle b_1, b_2, b_3\rangle \in I(Q_1^3)$). Это и равносильно выполнимости в модели A формулы $\widetilde{\varphi}$.

3. Если формула φ имеет вид $x_i = x_j \cdot x_k$, то выполнимость формулы φ на последовательности $a_1, \ldots, a_q$ означает, что $a_i = a_j \cdot a_k$, т. е. эндоморфизм a_i есть композиция эндоморфизмов a_j и a_k, а это означает, что в модели A для каждого элемента $b_1 \in A$ и для каждого $b_2 \in A$ такого, что $\langle b_1, b_2\rangle \in A_i$, существует $b_3 \in A$ такое, что $\langle b_1, b_3\rangle \in A_j$ и $\langle b_3, b_2\rangle \in A_k$. Это и равносильно выполнимости в модели A формулы $\widetilde{\varphi}$.

4. Если φ имеет вид $\theta_1 \wedge \theta_2$, θ_1 и θ_2 выполняются в модели $\operatorname{End}(A)$ на последовательности $a_1, \ldots, a_q$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{\theta}_1$ и $\widetilde{\theta}_2$ вы-

полняются в модели A на последовательности $A_1, \ldots, A_q$, то очевидно, что формула φ выполняется в модели $\mathrm{End}\,(A)$ на последовательности $a_1, \ldots, a_q$ тогда и только тогда, когда формула $\widetilde{\varphi}$ выполняется в модели A на последовательности $A_1, \ldots, A_q$, так как

$$\widetilde{\theta_1 \wedge \theta_2} = \widetilde{\theta}_1 \wedge \widetilde{\theta}_2.$$

5. Аналогично обстоит дело с формулой φ, имеющей вид $\neg\theta$, так как

$$\widetilde{\neg\theta} = \neg\widetilde{\theta}.$$

6. Наконец, предположим, что формула φ имеет вид $\forall x_i \psi$. Формула φ выполняется в модели $\mathrm{End}\,(A)$ на последовательности $a_1, \ldots, a_q$ тогда и только тогда, когда формула ψ выполняется в модели $\mathrm{End}\,(A)$ на последовательности $a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_q$ для любого $a \in \mathrm{End}\,(A)$, т. е. формула $\widetilde{\psi}$ выполняется в модели A на последовательности $A_1, \ldots, A_{i-1}, \overline{A}, A_{i+1}, \ldots, A_q$ для любого множества $\overline{A} \subset A \times A$, являющегося эндоморфизмом кольца A, т. е. удовлетворяющего формуле $Endom$. Таким образом, формула φ выполняется в модели $\mathrm{End}\,(A)$ на последовательности $a_1, \ldots, a_q$ тогда и только тогда, когда формула

$$\widetilde{\forall x_i \psi} := \forall P^{x_i}(v_1, v_2)(Endom(P^{x_i}) \Rightarrow \widetilde{\psi})$$

выполняется на последовательности $A_1, \ldots, A_q$ в модели A.

Предположим теперь, что абелевы группы A_1 и A_2 эквивалентны в языке $\mathcal{L}_2$. Рассмотрим произвольное предложение φ языка первого порядка теории колец, истинное в кольце $\mathrm{End}\,(A_1)$. Тогда предложение $\widetilde{\varphi}$ истинно в группе A_1, а значит, и в группе A_2. Следовательно, предложение φ истинно в кольце $\mathrm{End}\,(A_2)$. Таким образом, кольца $\mathrm{End}\,(A_1)$ и $\mathrm{End}\,(A_2)$ элементарно эквивалентны. $\square$

Для следующей теоремы нам понадобится написать несколько формул.

1. Формула

$$Gr(P(v)) := \forall a \forall b (P(a) \wedge P(b) \Rightarrow \exists c (c = a + b \wedge P(c)) \wedge P(0) \wedge$$
$$\wedge \forall a (P(a) \Rightarrow \exists b (b = -a \wedge P(b)))$$

истинна для множеств $\{a \in A \mid P(a)\}$, являющихся подгруппами в A, и только для них.

2. Формула

$$Cycl(P(v)) := Gr(P(v)) \wedge \exists a (P(a) \wedge \forall P_a(v) (Gr(P_a(v)) \wedge P_a(a) \Rightarrow \forall b (P(b) \Rightarrow P_a(b)))$$

характеризует циклические подгруппы в A.

3. Формула

$$DCycl(P(v)) := Gr(P(v)) \wedge \forall a (P(a) \Rightarrow \exists P_1(v) \exists P_2(v) (P_1(a) \wedge Cycl(P_1(v)) \wedge$$
$$\wedge \forall b \neg (P_1(b) \wedge P_2(b)) \wedge \forall b (P(b) \Rightarrow \exists b_1 \exists b_2 (P_1(b_1) \wedge P_2(b_2) \wedge b = b_1 + b_2)))$$

характеризует подгруппы в A, являющиеся прямыми суммами циклических групп.

4. Для любых $a, a_1, a_2 \in A$ формула

$$Gr_a(P_a(v)) := P_a(a) \wedge Gr(P_a(v)) \wedge \forall P(v) (P(a) \wedge Gr(P(v)) \Rightarrow \forall b (P_a(b) \Rightarrow P(b)))$$

выделяет в A подгруппу $\{b \in A \mid P_a(b)\}$ всех степеней элемента a; формула

$$(o(a_1) \leqslant o(a_2)) := \exists P_1(v) \exists P_2(v) \exists P(v_1, v_2) (Gr_{a_1}(P_1) \wedge Gr_{a_2}(P_2) \wedge$$
$$\wedge \forall b_1 (P_1(b_1) \Rightarrow \exists b_2 (P_2(b_2) \wedge P(b_1, b_2))) \wedge \forall b_1 \forall b_2 \forall c_1 \forall c_2 (P_1(b_1) \wedge$$
$$\wedge P_1(c_1) \wedge b_1 \neq c_1 \wedge P_2(b_2) \wedge P_2(c_2) \wedge P(b_1, b_2) \wedge P(c_1, c_2) \Rightarrow b_2 \neq c_2))$$

истинна тогда и только тогда, когда порядок элемента a_1 не больше порядка элемента a_2; формула

$$(o(a_1) = o(a_2)) := (o(a_1) \leqslant o(a_2)) \wedge (o(a_2) \leqslant o(a_1))$$

показывает, что порядки элементов a_1 и a_2 совпадают; формула

$$(o(a_1) < o(a_2)) := (o(a_1) \leqslant o(a_2)) \wedge \neg (o(a_2) \leqslant o(a_1))$$

показывает, что порядок элемента a_1 строго меньше порядка элемента a_2.

5. Для любого элемента $a \in A$ формула

$$GOrd_a(P(v)) := Gr(P) \wedge \forall b(P(b) \Rightarrow o(b) \leqslant o(a))$$

выполняется для подгрупп, ограниченных порядком элемента a, и только для них.

6. Формула

$$\begin{gathered}
Mult_a(x,b) := \exists P(v)\exists P_{x,b}(v_1,v_2)(Cycl(P) \wedge P(x) \wedge P(b) \wedge \\
\wedge \forall b_1(P(b_1) \Rightarrow \exists b_2(P(b_2) \wedge P_{x,b}(b_1,b_2)) \wedge \\
\wedge (\forall b_1\forall b_2\forall b_3 P(b_1) \wedge P_{x,b}(b_1,b_2) \wedge P_{x,b}(b_1,b_3) \Rightarrow b_2 = b_3) \wedge \\
\wedge (\forall b_1\forall b_2\forall b_3\forall c_1\forall c_2\forall c_3 P(b_1) \wedge P(b_2) \wedge P(b_3) \wedge \\
\wedge b_3 = b_1 + b_2 \wedge c_3 = c_1 + c_2 \wedge P_{x,b}(b_1,c_1) \wedge P_{x,b}(b_2,c_2) \Rightarrow \\
\Rightarrow P_{x,b}(b_3,c_3)) \wedge P_{x,b}(x,0) \wedge \forall y(P(y) \wedge py = x \Rightarrow \\
\Rightarrow \neg P_{x,b}(y,0)) \wedge \exists c(P(b,c) \wedge o(c) = o(a)))
\end{gathered}$$

выполняется для тех и только тех элементов x и b, для которых $x = o(a) \cdot b$.

7. Формула

$$Serv(P(v)) := Gr(P) \wedge \forall a \forall x(P(x) \Rightarrow \exists b(Mult_a(x,b) \Rightarrow \exists c(P(c) \wedge Mult_a(x,c)))$$

выполняется для сервантных подгрупп группы A, и только для них.

8. Формула

$$FD(P(v)) := Gr(P) \wedge \forall a \exists b \exists x_1 \exists x_2(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge a + x_1 = p(b + x_2))$$

выполняется для подгрупп $G = \{x \mid P(x)\}$, таких, что A/G — делимая группа, и только для них.

9. Из всего этого следует, что формула

$$Base(P(v)) := Gr(P) \wedge DCycl(P) \wedge Serv(P) \wedge FD(P)$$

определяет базисные подгруппы группы A.

Очевидно, что если у нас есть некоторая подгруппа G' группы G, то мы аналогичным образом можем написать формулу $Base_{G'}(P)$, истинную для базисных подгрупп группы G', и только для них.

10. Формула

$$D(P(v)) := Gr(P) \wedge \forall a(P(a) \Rightarrow \exists b(P(b) \wedge a = pb))$$

определяет в A делимые группы.

11. Предложение

$$\begin{gathered} Exept := \forall P(Gr(P) \Rightarrow \neg(D(P))) \wedge \forall P(v)(Base(P) \Rightarrow \\ \Rightarrow \neg(\exists F(v_1, v_2)(\forall a(P(a) \Rightarrow \exists b(F(a,b)) \wedge \\ \wedge \forall b \exists a(P(a) \wedge F(a,b)) \wedge \forall a \forall b(F(a,b) \Rightarrow P(a)) \wedge \\ \wedge \forall a_1 \forall a_2 \forall b_1 \forall b_2(a_1 \neq a_2 \wedge F(a_1,b_1) \wedge F(a_2,b_2) \Rightarrow b_1 \neq b_2) \wedge \\ \wedge \forall b_1 \forall b_2 \forall a_1 \forall a_2(b_1 \neq b_2 \wedge F(a_1,b_1) \wedge F(a_2,b_2) \Rightarrow a_1 \neq a_2)) \end{gathered}$$

выполняется для редуцированных p-групп, базисные подгруппы которых меньше их по мощности (и поэтому счетны), и только для них.

Таким образом, если B_1 — базисная подгруппа группы A_1, B_2 — базисная подгруппа группы A_2, $\varkappa_1 = |B_1|$, $\varkappa_2 = |B_2|$, то из

$$Th_2^{\varkappa_1}(A_1) = Th_2^{\varkappa_2}(A_2)$$

следует, что либо обе группы A_1 и A_2 редуцированны, их базисные подгруппы счетны, а сами они несчетны, либо это не так для обеих групп A_1 и A_2.

В первом случае $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \omega$.

Теорема 33. *Если абелевы группы A_1 и A_2 редуцированны и их базисные подгруппы счетны, то из $Th_2^{\omega}(A_1) = Th_2^{\omega}(A_2)$ следует элементарная эквивалентность колец* $\operatorname{End} A_1$ *и* $\operatorname{End} A_2$ *(и, значит, элементарная эквивалентность групп* $\operatorname{Aut} A_1$ *и* $\operatorname{Aut} A_2$*).*

Доказательство. Мы знаем (см. теорему 27), что для редуцированной p-группы A действие любого эндоморфизма $\varphi \in \mathrm{End}\,(A)$ полностью определяется его действием на базисной подгруппе B. Более того, пусть $A' \subset A$, B также является и базисной подгруппой в A'. Тогда любой гомоморфизм $\varphi : A' \to A$ также полностью определяется своим действием на B. Действительно, если $\varphi_1, \varphi_2 : A' \to A$, $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$ для всех $b \in B$, то для $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2 : A' \to A$ мы имеем $\varphi(b) = 0$ для всех $b \in B$. Значит, φ индуцирует гомоморфизм $\widetilde{\varphi} : A'/B \to A$. Но группа A'/B делима, а группа A редуцированная, т. е. $\widetilde{\varphi} = 0$. Следовательно, $\varphi = 0$.

Заметим, что для любого элемента $a \in A$ существует счетная подгруппа $A' \subset A$, содержащая a и группу B в качестве базисной подгруппы.

Действительно, рассмотрим квазибазис группы A, имеющий вид

$$\{a_i, c_{j,n}\}_{i\in\omega, j\in\varkappa, n\in\omega},$$

где $\{a_i\}$ — базис группы B, $pc_{j,1} = 0$, $pc_{j,n+1} = c_{j,n} - b_{j,n}$, $b_{j,n} \in B$, $o(b_{j,n}) \leqslant p^n$, $o(c_{j,n}) = p^n$.

Как мы помним, любой элемент $a \in A$ можно записать в виде

$$a = s_1 a_{i_1} + \dots + s_m a_{i_m} + t_1 c_{j_1,n_1} + \dots + t_r c_{j_r,n_r},$$

где s_i и t_j — целые числа, ни одно t_j не делится на p и индексы $i_1, \dots, i_m$, $j_1, \dots, j_r$ все различны. Кроме того, эта запись единственна в том смысле, что в ней однозначно определены члены sa_i и $tc_{j,n}$.

Рассмотрим разложение нашего элемента a и подгруппу в A, порожденную группой B и всеми $c_{k,n}$, где $n \in \omega$, $k \in \{j_1, \dots, j_r\}$. Эта группа A' счетна, содержит a и $B \subset A'$ является ее базисной подгруппой.

Пусть теперь предикат $B(v)$ удовлетворяет в A формуле $Base(B)$, т. е. определяет в A базисную подгруппу $B = \{x \mid B(x)\}$.

Соответствие $P(v_1, v_2)$ называется *гомоморфизмом группы B в* *группу* A (обозначение: $Hom_B(P)$), если

$$\forall x(B(x) \Leftrightarrow \exists y(P(x,y))) \wedge \forall x \forall y_1 \forall y_2 (P(x,y_1) \wedge P(x,y_2) \Rightarrow y_1 = y_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 (P(x_1,y_1) \wedge P(x_2,y_2) \Rightarrow P(x_1+x_2, y_2+y_2))).$$

Очевидно, что такой предикат $P(v_1,v_2)$ может употребляться в предложениях из $Th_2^{\omega}(A)$, так как группа B счетна.

Рассмотрим некоторую $B(v)$ такую, что выполняется формула $Base(B)$, предикат $\Phi(v_1,v_2)$ такой, что $Hom_B(\Phi)$, и $a \in A$.

Будем писать $b = \Phi(a)$, если

1) $B(a) \wedge \Phi(a,b)$ или

2)

$$\neg B(a) \wedge \forall G(v) \ \Big(Gr(G) \wedge G(a) \wedge \forall x\big(B(x) \Rightarrow G(x)\big) \wedge Base_G(B) \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \varphi(v_1,v_2)\big(Hom_G(\varphi) \wedge \forall x \forall y (\Phi(x,y) \Rightarrow \varphi(x,y)) \wedge \varphi(a,b)\big)\Big).$$

Для каждого $a \in A$ существует не более одного $b \in A$ такого, что $b = \Phi(a)$, и что если гомоморфизм $\Phi : B \to A$ продолжается до эндоморфизма $A \to A$, то он всегда существует.

Теперь будем рассматривать такие $\Phi(v_1,v_2)$, что

$$Endom_B(\Phi) := Hom_B(\Phi) \wedge \forall a \exists b (b = \Phi(a)) \wedge \\ \wedge \forall a_1 \forall a_2 \forall b_1 \forall b_2 (b_1 = \Phi(a_1) \wedge b_2 = \Phi(a_2) \Rightarrow b_1 + b_2 = \Phi(a_1+a_2)).$$

Эти $\Phi(v_1,v_2)$ и будут в нашем случае кодировать эндоморфизмы из $\mathrm{End}\,(A)$.

Покажем алгоритм перевода формул в этом случае.

Предложение φ переводится в предложение

$$\widetilde{\varphi} = \exists B(v)(Base(B) \wedge \varphi'(B)),$$

где формула φ' получается из предложения φ следующим образом:

1) подформула $\forall x(\dots)$ переводится в подформулу

$$\forall \Phi^x(v_1,v_2)(Endom_B(\Phi^x) \Rightarrow \dots);$$

2) подформула $\exists x(\dots)$ переводится в подформулу

$$\exists \Phi^x(v_1, v_2)(Endom_B(\Phi^x) \wedge \dots);$$

3) подформула $x_1 = x_2$ переводится в подформулу

$$\forall y_1 \forall y_2 (\Phi^{x_1}(y_1, y_2) \Leftrightarrow \Phi^{x_2}(y_1, y_2));$$

4) подформула $x_1 = x_2 + x_3$ переводится в подформулу

$$\forall y \forall z_1 \forall z_2 \forall z_3 (\Phi^{x_2}(y, z_2) \wedge \Phi^{x_3}(y, z_3) \Rightarrow (\Phi^{x_1}(y, z_1) \Leftrightarrow z_1 = z_2 + z_3));$$

5) подформула $x_1 = x_2 \cdot x_3$ переводится в подформулу

$$\forall y \forall z (\Phi^{x_1}(y, z) \Rightarrow \exists t (\Phi^{x_2}(y, t) \wedge z = \Phi^{x_3}(t)).$$

Далее доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. □

Далее в диссертации мы будем доказывать другую, более сложную импликацию.

2.2 Подготовительная работа в группе автоморфизмов.

В этом параграфе нас будут интересовать группы автоморфизмов абелевых p-групп. Мы полагаем, что $p \geqslant 3$.

Автоморфизм ε группы A называется *инволюцией*, если $\varepsilon^2 = 1$.

Следующие факты мы взяли из книги [14], том 2, стр. 296–297:

1) Прямое разложение

$$A = C_1 \oplus \dots \oplus C_k, \text{ где } C_i \neq 0, \tag{2.1}$$

дает k коммутирующих инволюций: ε_i определяется как автоморфизм группы A, для которого $\varepsilon_i \mid_{C_i} = -1$ и $\varepsilon_i \mid_{C_j} = 1$ при $i \neq j$. Будем говорить, что система $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ *принадлежит* разложению (2.5).

2) Для инволюции ε группы A положим

$$A_\varepsilon^+ = \{a \in A \mid \varepsilon a = a\} \text{ и } A_\varepsilon^- = \{a \in A \mid \varepsilon a = -a\}.$$

Тогда $A = A_\varepsilon^+ \oplus A_\varepsilon^-$; следовательно, инволюции $\varepsilon \neq \pm 1$ дают нетривиальные прямые разложения группы A. Ассоциированные с таким разложением проекции — это отображения $\frac{1}{2}(1+\varepsilon)$ и $\frac{1}{2}(1-\varepsilon)$.

3) Две инволюции ε, ζ группы A коммутируют в том и только том случае, когда выполняется равенство

$$A = (A_\varepsilon^+ \cap A_\zeta^+) \oplus (A_\varepsilon^+ \cap A_\zeta^-) \oplus (A_\varepsilon^- \cap A_\zeta^+) \oplus (A_\varepsilon^- \cap A_\zeta^-). \tag{2.2}$$

4) Коммутирующие инволюции $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ группы A единственным образом определяют такое разложение (2.5) группы A, что $\zeta_l \mid_{C_i} = \pm 1$ при всех i, l и для данных $i \neq j$ найдется такое ζ_l, что одно из ограничений $\zeta_l \mid_{C_i}$ и $\zeta_i \mid_{C_j}$ есть $+1$, а другое -1.

5) Пусть система инволюций $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ принадлежит прямому разложению (2.5). *Централизатором* системы $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ назовем множество автоморфизмов

$$C\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} = \{\alpha \in \operatorname{Aut} A | \alpha\varepsilon_i = \varepsilon_i\alpha \text{ при } i = 1, \dots, k\}.$$

Имеем место разложение

$$C\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} = \operatorname{Aut} C_1 \times \dots \times \operatorname{Aut} C_k. \tag{2.3}$$

Воспользуемся некоторыми дополнительными сведениями из книги [14] (том 2, стр. 310):

а) Группа A является ограниченной и p^n является наибольшим из порядков ее элементов тогда и только тогда, когда $Z(\operatorname{Aut} A) \simeq \mathbb{Z}_{p^{n-1}(p-1)}$.

б) Пусть ε — инволюция группы A, $\varepsilon \neq \pm 1$. Тогда для разложения $A = A_\varepsilon^+ \oplus A_\varepsilon^-$ следующим образом можно выяснить, имеет ли место ограниченность одного из слагаемых или обоих: группы $Z(C(\varepsilon))$ не содержит подгрупп, изоморфных J_p, или содержит такую подгруппу или прямое произведение двух групп, изоморфных J_p, в соответствии с тем, являются ли обе группы A_ε^+ и A_ε^- неограниченными или ограниченной будет одна из них или обе. А с помощью помощью пункта а) легко определяется граница порядков элементов для ограниченных компонент.

в) Если $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$, где $A_i \neq 0$, и $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ — система инволюций, принадлежащая этому разложению, то группа $Z(C\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\})$ содержит ровно 2^k инволюций.

Инволюция ε называется *экстремальной*, если одна из групп A_ε^+ и A_ε^- отлична от нуля и неразложима. Эту неразложимую группу мы будем обозначать через A_ε, а вторую из них — $A_\varepsilon^\perp$. Порядком экстремальной инволюции ε мы будем называть порядок ее неразложимой группы A_ε.

г) Инволюция ε экстремальна тогда и только тогда, когда в группе $Z(C\{\varepsilon, \zeta\})$ содержится не более 8 инволюций при любом $\zeta \in C\{\varepsilon\}$.

Последнее утверждение позволяет нам записать экстремальность инволюции в виде формулы в языке первого порядка. Назовем эту формулу $Extreme(\varepsilon)$.

Лемма 2.1. *Экстремальные инволюции ε_1 и ε_2 коммутируют в том и только том случае, когда либо они совпадают, либо $A_{\varepsilon_1} \subset A_{\varepsilon_2}^\perp$ и $A_{\varepsilon_2} \subset A_{\varepsilon_1}^\perp$.*

Доказательство. Пусть $A_{\varepsilon_1} \subset A_{\varepsilon_2}^\perp$ и $A_{\varepsilon_2} \subset A_{\varepsilon_1}^\perp$. Докажем, что инволюции ε_1 и ε_2 коммутируют. Согласно равенству (2.6), нам надо показать, что

$$A = (A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2}) \oplus (A_{\varepsilon_1}^\perp \cap A_{\varepsilon_2}) \oplus (A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2}^\perp) \oplus (A_{\varepsilon_1}^\perp \cap A_{\varepsilon_2}^\perp) \tag{2.4}$$

Это очевидно следует из условия, что $A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2} = 0$, $A_{\varepsilon_1}^\perp \cap A_{\varepsilon_2} = A_{\varepsilon_2}$, $A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2}^\perp = A_{\varepsilon_1}$.

Пусть ε_1 и ε_2 коммутируют и не совпадают. Тогда верно (2.4). Если $A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2} \neq 0$ и это пересечение выделяется прямым слагаемым, то $A_{\varepsilon_1} = A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2} = A_{\varepsilon_2}$ и $A_{\varepsilon_1}^\perp \neq A_{\varepsilon_2}^\perp$. Но тогда $(A_{\varepsilon_1}^\perp \cap A_{\varepsilon_2}^\perp) \subsetneq A_{\varepsilon_1}^\perp$, что противоречит (2.4). Следовательно $A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2} = 0$. Тогда ни одно из слагаемых $A_{\varepsilon_1}^{\perp} \cap A_{\varepsilon_2}$ и $A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2}^{\perp}$ не может быть нулевым, что и означает, что $A_{\varepsilon_1} \subset A_{\varepsilon_2}^{\perp}$ и $A_{\varepsilon_2} \subset A_{\varepsilon_1}^{\perp}$ (в силу неразложимости A_{ε_1} и A_{ε_2}). □

По инволюции ξ мы не сможем отличить в языке первого порядка группы A_{ξ}^{+} и A_{ξ}^{-}. Поэтому мы будем иметь дело с парами (ξ, ε), для которых $Extreme(\varepsilon) \wedge \xi\varepsilon = \varepsilon\xi$. Для таких пар $A_{\varepsilon} \subset A_{\xi}^{+}$ или $A_{\varepsilon} \subset A_{\xi}^{-}$. A_{ε} и будет нам указывать на нужную из групп A_{ξ}^{+} и A_{ξ}^{-} (обозначим ее $A_{(\xi,\varepsilon)}$). Свойство быть парой мы будем обозначать формулой

$$Pair(\xi, \varepsilon) := \xi^2 = 1 \wedge Extreme(\varepsilon) \wedge \xi\varepsilon = \varepsilon\xi.$$

Вместо $\forall\xi\forall\varepsilon(Pair(\xi,\varepsilon) \Rightarrow (\dots))$ и $\exists\xi\exists\varepsilon(Pair(\xi,\varepsilon) \wedge (\dots))$ мы будем писать соответственно $\forall(\xi,\varepsilon)$ и $\exists(\xi,\varepsilon)$. Выразим некоторые операции с инволюциями формулами.

Лемма 2.2. *Формула*

$$\begin{aligned}\varepsilon \in \langle\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle \overset{def}{\iff} \forall\varepsilon'(Extreme(\varepsilon') \wedge \varepsilon'\varepsilon_1 = \varepsilon_1\varepsilon' \wedge \varepsilon'\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon' \wedge \\ \wedge \varepsilon' \neq \varepsilon_1 \wedge \varepsilon' \neq \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon\varepsilon' = \varepsilon'\varepsilon)\end{aligned}$$

для экстремальных ε, ε_1, ε_2, таких что $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1$, означает, что $A_{\varepsilon} \subset A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2}$, а $A_{\varepsilon}^{\perp} \supset A_{\varepsilon_1}^{\perp} \cap A_{\varepsilon_2}^{\perp}$.

Доказательство. Пусть $A_{\varepsilon} \subset A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2}$ и $A_{\varepsilon}^{\perp} \supset A_{\varepsilon_1}^{\perp} \cap A_{\varepsilon_2}^{\perp}$. Докажем для любой экстремальной инволюции ε', отличной от ε_1 и ε_2 и коммутирующей с ними, что она коммутирует и с ε. По лемме 2.1, $A_{\varepsilon'} \subset A_{\varepsilon_1}^{\perp}$, $A_{\varepsilon'} \subset A_{\varepsilon_2}^{\perp}$, $A_{\varepsilon_1} \subset A_{\varepsilon'}^{\perp}$, $A_{\varepsilon_2} \subset A_{\varepsilon'}^{\perp}$. Тогда $A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2} \subset A_{\varepsilon'}^{\perp}$ и $A_{\varepsilon} \subset A_{\varepsilon'}^{\perp}$, так как по условию $A_{\varepsilon} \subset A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2}$. Аналогично, $A_{\varepsilon'} \subset A_{\varepsilon_1}^{\perp} \cap A_{\varepsilon_2}^{\perp} \subset A_{\varepsilon}^{\perp}$.

Пусть, напротив, выполнена формула $\varepsilon \in \langle\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle$. Если $A_{\varepsilon} \not\subset A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2}$, то мы можем выбрать такие $A_{\varepsilon'} \subset A_{\varepsilon_1}^{\perp} \cap A_{\varepsilon_2}^{\perp}$ и $A_{\varepsilon'}^{\perp} \supset A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2}$, $A_{\varepsilon'}^{\perp} \not\supset A_{\varepsilon}$, которые будут соответствовать инволюции ε', коммутирующей с ε_1 и ε_2, но не коммутирующей с ε. Если же $A_{\varepsilon}^{\perp} \not\supset A_{\varepsilon_1}^{\perp} \cap A_{\varepsilon_2}^{\perp}$, то можем выбрать такие $A_{\varepsilon'}^{\perp} \supset A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2}$ и $A_{\varepsilon'} \subset A_{\varepsilon_1}^{\perp} \cap A_{\varepsilon_2}^{\perp}$, $A_{\varepsilon'} \not\subset A_{\varepsilon}^{\perp}$, которые также будут соответствовать такой инволюции ε'. □

Утверждения следующей леммы проверяются непосредственно.

Лемма 2.3. 1) *Формула*

$$\varepsilon_2 \in (\xi_1, \varepsilon_1) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon (Extreme(\varepsilon) \wedge \varepsilon \in \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle \Rightarrow \varepsilon \xi_1 = \xi_1 \varepsilon)$$

для экстремальной ε_2 *и пары* (ξ_1, ε_1) *означает, что* $A_{\varepsilon_2} \subset A_{(\xi_2, \varepsilon_2)}$.

2) *Формула*

$$(\xi_1, \varepsilon_1) \subset (\xi_2, \varepsilon_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon (Extreme(\varepsilon) \wedge \varepsilon \in (\xi_1, \varepsilon_1) \Rightarrow \varepsilon \in (\xi_2, \varepsilon_2))$$

означает $A_{(\xi_1, \varepsilon_1)} \subset A_{(\xi_2, \varepsilon_2)}$.

3) *Формула*

$$(\xi_1, \varepsilon_1) = (\xi_2, \varepsilon_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\xi_1, \varepsilon_1) \subset (\xi_2, \varepsilon_2) \wedge (\xi_2, \varepsilon_2) \subset (\xi_1, \varepsilon_1)$$

означает $A_{(\xi_1, \varepsilon_1)} = A_{(\xi_2, \varepsilon_2)}$.

4) *Формула*

$$\begin{aligned}(\xi_1, \varepsilon_1) \cap (\xi_2, \varepsilon_2) = (\xi_3, \varepsilon_3) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \varepsilon_3 \in (\xi_1, \varepsilon_1) \wedge \varepsilon_3 \in (\xi_2, \varepsilon_2) \wedge \\ \wedge \forall \varepsilon (Extreme(\varepsilon) \wedge \varepsilon \in (\xi_1, \varepsilon_1) \wedge \varepsilon \in (\xi_2, \varepsilon_2) \Rightarrow \varepsilon \in (\xi_3, \varepsilon_3)) \wedge \\ \wedge \forall (\xi_4, \varepsilon_4)(\varepsilon_4 \in (\xi_1, \varepsilon_1) \wedge \varepsilon_4 \in (\xi_2, \varepsilon_2) \wedge \forall \varepsilon (Extreme(\varepsilon) \wedge \\ \wedge \varepsilon \in (\xi_1, \varepsilon_1) \wedge \varepsilon \in (\xi_2, \varepsilon_2) \Rightarrow \varepsilon \in (\xi_4, \varepsilon_4))) \Rightarrow (\xi_3, \varepsilon_3) \subset (\xi_4, \varepsilon_4))\end{aligned}$$

означает $A_{(\xi_3, \varepsilon_3)} = A_{(\xi_1, \varepsilon_1)} \cap A_{(\xi_2, \varepsilon_2)}$.

5) *Формула*

$$\begin{aligned}(\xi_1, \varepsilon_1) \oplus (\xi_2, \varepsilon_2) = (\xi_3, \varepsilon_3) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon (Extreme(\varepsilon) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\varepsilon \in (\xi_3, \varepsilon_3) \Leftrightarrow \exists \varepsilon_1' \exists \varepsilon_2' (Extreme(\varepsilon_1') \wedge Extreme(\varepsilon_2') \wedge \\ \wedge \varepsilon_1' \in (\xi_1, \varepsilon_1) \wedge \varepsilon_2' \in (\xi_2, \varepsilon_2) \wedge \varepsilon \in \langle \varepsilon_1', \varepsilon_2' \rangle))) \wedge \\ \wedge \forall \varepsilon (Extreme(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon \notin (\xi_1, \varepsilon_1) \vee \varepsilon \notin (\xi_2, \varepsilon_2))\end{aligned}$$

означает $A_{(\xi_3, \varepsilon_3)} = A_{(\xi_1, \varepsilon_1)} \oplus A_{(\xi_2, \varepsilon_2)}$.

6) *Формула*

$$\overline{(\xi_1, \varepsilon_1)} = (\xi_2, \varepsilon_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\xi_2 = \xi_1 \vee \xi_2 = -1 \cdot \xi_1) \wedge \varepsilon_2 \notin (\xi_1, \varepsilon_1)$$

означает $A_{(\xi_1, \varepsilon_1)} \oplus A_{(\xi_2, \varepsilon_2)} = A$.

2.3 Подготовительная работа в кольце эндоморфизмов.

Если бы для кольца эндоморфизмов абелевой p-группы мы не рассматривали случай $p = 2$ (который пока не получается для группы автоморфизмов), то этот параграф можно было не писать, так как из элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов следует элементарная эквивалентность групп автоморфизмов абелевых групп, поэтому можно было бы просто воспользоваться результатом для групп автоморфизмов.

Однако для колец эндоморфизмов случай $p = 2$ ничем не отличается от случая $p \geqslant 3$, поэтому нам требуется отдельно показать, что для кольца эндоморфизмов проходят те же методы.

Если в случае групп автоморфизмов мы действуем (будем действовать) с помощью инволюций и экстремальных инволюций, дающих нам, соответственно, прямые и неразложимые прямые слагаемые абелевой группы, то для колец эндоморфизмов мы сможем действовать еще более "напрямую" — за прямые слагаемые отвечают проекторы на эти прямые слагаемые (то есть произвольные эндоморфизмы–идемпотенты), а за неразложимые прямые слагаемые — самые "маленькие" проекторы, где проекторы частично упорядочены следующим отношением:

$$e < f \Leftrightarrow ef = e$$

(это в точности означает, что $eA \subseteq fA$).

Каждому проектору e однозначно соответствует инволюция $\varepsilon(e) = 2e - 1$. Действительно, если $ea = a$, то $\varepsilon a = 2a - a = a$, если $ea = 0$, то $\varepsilon a = -a$.

Если $p \neq 2$, то данное преобразование можно обратить:

$$e = \frac{1 + \varepsilon}{2}.$$

Установим те же факты (выпишем формулы) про проекторы, аналогичные фактам и формулам про инволюции из предыдущего параграфа.

1) Прямое разложение

$$A = C_1 \oplus \cdots \oplus C_k, \text{ где } C_i \neq 0, \tag{2.5}$$

дает k коммутирующих взаимно ортогональных проекторов, в сумме дающих единичных автоморфизм.

2) Для проектора e группы A положим

$$e^+ = \{a \in A \mid \varepsilon a = a\} \text{ и } e^- = \{a \in A \mid \varepsilon a = 0\}.$$

3) Два проектора e, f группы A коммутируют в том и только том случае, когда выполняется равенство

$$A = (A_e^+ \cap A_f^+) \oplus (A_e^+ \cap A_f^-) \oplus (A_e^- \cap A_f^+) \oplus (A_e^- \cap A_f^-). \tag{2.6}$$

4) Напомним, что по теореме 30 центр кольца эндоморфизмов $\mathrm{End}\,(A)$ любой p-группы A состоит из умножения на целые p-адические числа или на вычеты по модулю p^k в зависимости от того, является ли группа A неограниченной или p^k служит наименьшей верхней гранью порядков ее элементов.

Пусть e — проектор группы A, $e \neq 0, 1$. Тогда для разложения $A = A_e^+ \oplus A_e^-$ следующим образом можно выяснить, имеет ли место ограниченность одного из слагаемых или обоих: группа $Z(C(e))$ не содержит целых p-адических чисел, или содержит их, или содержит прямое произведение двух экземпляров p-адических чисел, в соответствии с тем, являются ли обе группы A_ε^+ и A_ε^- неограниченными или ограниченной будет одна из них или обе. А с помощью помощью того, что p^k служит наименьшей верхней гранью порядков элементов центра, легко определяется граница порядков элементов для ограниченных компонент.

Таким образом, мы можем научиться определять порядки ограниченных прямых слагаемых.

5) Как мы уже сказали выше, мы легко можем определять формульно проекторы на неразложимые слагаемые (будем называть их либо

неразложимыми проекторами, либо *экстремальными проекторами*, по аналогии с инволюциями).

По аналогии с прошлым параграфом будем обозначать соответствующую формулу через $Extreme(e)$.

6) Ясно, что мы можем (точно так же, как и для инволюций) выразить некоторые операции с прямыми слагаемыми формулами с участием проекторов:

— $A_e \subset A_{e_1} \oplus A_{e_2}$, а $A_e^\perp \supset A_{e_1}^\perp \cap A_{e_2}^\perp$;

— $A_e \subset A_f$;

— $A_e = A_f$;

— $A_e \subset A_{e_1} \cap A_{e_2}$;

— $A_e \subset A_{e_1} \oplus A_{e_2}$.

7) Кроме того, формула

$$\varphi e = f\varphi e$$

для экстремальных проекций e, f и произвольного эндоморфизма φ означает, что

$$\varphi(A_e) \subseteq A_f.$$

8) Формула $ord(e) < ord(f)$ означает, что порядок слагаемого A_e меньше порядка слагаемого A_f. Также вводятся и остальные операции сравнения порядков.

Заметим, что в результате мы научились выражать с помощью инволюций и экстремальных инволюций и проекций и экстремальных проекций одни и те же операции над прямыми слагаемыми.

Значит, в дальнейшем, если нужные нам формулы будут использовать только эти операции, мы сможем не различать случаи языка кольца эндоморфизмов и языка группы автоморфизмов.

2.4 Разделение задачи на случаи.

В этом параграфе все доказательства будем проводить для группы автоморфизмов, так как для кольца эндоморфизмов они строго проще и не сильно отличаются.

Разделим класс всех абелевых p-групп на следующие три подкласса:

1) ограниченные p-группы;

2) группы вида $D \oplus G$, где D — ненулевая делимая группа, G — ограниченная группа;

3) группы с неограниченной базисной подгруппой.

Покажем, как найти предложения, разделяющие группы из разных типов.

Если группа A ограничена, то по теореме 31 центр ее группы автоморфизмов конечен, а для любой неограниченной группы он бесконечен. Следовательно, мы можем отличить ограниченные группы от неограниченных с помощью формулы.

Следующая формула позволит нам "подсчитать количество" различных разложений группы $A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2}$ для экстремальных ε_1, ε_2 в прямые слагаемые. Лемма проверяется непосредственно.

Лемма 2.4. *Формула*

$$\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = \langle \varepsilon_1', \varepsilon_2' \rangle \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon (Extreme(\varepsilon) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\varepsilon \in \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle \Leftrightarrow \varepsilon \in \langle \varepsilon_1', \varepsilon_2' \rangle \wedge \varepsilon \in \overline{\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle} \Leftrightarrow \varepsilon \in \overline{\langle \varepsilon_1', \varepsilon_2' \rangle}))$$

для экстремальных ε_1, ε_2, ε_1', ε_2' *означает* $A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2} = A_{\varepsilon_1'} \oplus A_{\varepsilon_2'}$ *и* $A_{\varepsilon_1}^{\perp} \cap A_{\varepsilon_2}^{\perp} = A_{\varepsilon_1'}^{\perp} \cap A_{\varepsilon_2'}^{\perp}$.

Заметим, что если две пары коммутирующих экстремальных инволюций $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $(\varepsilon_1', \varepsilon_2')$, удовлетворяющие этой формуле, задают одинаковое разложение группы $A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2}$, т. е. $A_{\varepsilon_1} = A_{\varepsilon_1'}$ и $A_{\varepsilon_2} = A_{\varepsilon_2'}$, то, по лемме 2.1, прямые дополнения соответствующих им слагаемых также совпадают, т. е. $A_{\varepsilon_1}^{\perp} = A_{\varepsilon_1'}^{\perp}$ и $A_{\varepsilon_2}^{\perp} = A_{\varepsilon_2'}^{\perp}$, а значит, эти пары равны. Это означает, что количество различных разложений группы $A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2}$

равно количеству пар коммутирующих экстремальных инволюций ε_1' и ε_2', удовлетворяющих этой формуле.

В нашем случае группы A_{ε_1} и A_{ε_2} имеют вид $\mathbb{Z}_{p^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, или $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.5. 1) *Группа* $\mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^m}(k \leqslant m)$ *допускает* p^{2k} *при* $k < m$ *и* $p^{2k-1} + (p^k - p^{k-1})^2$ *при* $k = m$ *различных разложений на прямые слагаемые.*

2) *Группа* $\mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ *допускает* p^k *различных разложений на прямые слагаемые, причем всегда одним из слагаемых будет исходное* $\mathbb{Z}_{p^\infty}$*.*

3) *Группа* $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ *допускает бесконечное число различных разложений на прямые слагаемые.*

Доказательство. 1) Пусть исходные слагаемые порождены элементами a и b соответственно: $\langle a \rangle = \mathbb{Z}_{p^k}, \langle b \rangle = \mathbb{Z}_{p^m}$. У любого разложения можно выбрать порождающие элементы прямых слагаемых в виде $a + \alpha p^{m-k} b$ и $b + \beta a$, где $0 \leqslant \alpha, \beta < p^k$ (множитель p^{m-k} у первого порождающего нужен, чтобы его порядок был равен p^k). Слагаемые, порожденные такими элементами, не являются прямыми (т. е. имеют нетривиальное пересечение) тогда и только тогда, когда существуют такие γ и δ, $0 < \gamma < p^k, 0 < \delta < p^m$, что

$$\gamma(a + \alpha p^{m-k} b) = \delta(b + \beta a) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \gamma - \delta\beta \vdots p^k, \delta - \gamma\alpha p^{m-k} \vdots p^m \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z}, \delta = \gamma\alpha p^{m-k} + cp^m, \gamma - \beta(\gamma\alpha p^{m-k} + cp^m) \vdots p^k$$

Это равносильно существованию такого $\gamma, 0 < \gamma < p^k$, что

$$\gamma(1 - p^{m-k}\alpha\beta) \vdots p^k$$

Последнее утверждение имеет место тогда и только тогда, когда

$$1 - p^{m-k}\alpha\beta \vdots p$$

Если $k < m$, то это условие не выполнено никогда, а значит, α и β можно выбирать произвольным образом, т. е. всего p^{2k} различных разложений. Рассмотрим случай $m = k$. Последние условие равносильно $\alpha\beta \equiv 1 \ mod\ p$. Если $\alpha \ \vdots\ p$, то этому условию не удовлетворяет никакое β. Если $\alpha \not\vdots\ p$, то таких β, удовлетворяющих этому условию, всего p^{k-1}. Значит, различных разложений всего

$$p^{k-1}p^k + (p^k - p^{k-1})(p^k - p^{k-1}) = p^{2k-1} + (p^k - p^{k-1})^2$$

2) Пусть исходное слагаемое $\mathbb{Z}_{p^k}$ порождено элементом a, а слагаемое $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — элементами $c_1, c_2, \ldots$. Так как в любой группе делимая часть выделяется единственным образом, то в любом разложении одним из слагаемых будет исходное $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. У второго слагаемого (порядка p^k) всегда можно выбрать образующий в виде $a + \alpha c_k$, где $0 \leqslant \alpha < p^k$. Следовательно, всего существует p^k различных разложений.

3) Пусть исходные слагаемые порождены элементами $c_1, c_2, \ldots$ и $d_1, d_2, \ldots$ соответственно. Тогда в качестве разложений можно брать такие, в которых первое слагаемое остается на месте, а второе — порождается элементами $d_1 + \alpha c_l, d_2 + \alpha c_{l+1}, d_3 + \alpha c_{l+2}, \ldots$, где $l = 1, 2, \ldots$ и $0 < \alpha < p^l$. Ясно, что таких разложений бесконечно много. □

Теперь мы можем записать формулу для пары (ξ, ε), отвечающей разложению группы A на делимую и редуцированную части.

Лемма 2.6. *Формула*

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 (Extreme(\varepsilon_1) \wedge Extreme(\varepsilon_2) \wedge \varepsilon_1 \in (\xi_D, \varepsilon_D) \wedge \varepsilon_2 \in \overline{(\xi_D, \varepsilon_D)} \wedge$$
$$\wedge\, \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 \Rightarrow \forall \varepsilon_1', \varepsilon_2' (Extreme(\varepsilon_1') \wedge Extreme(\varepsilon_2') \wedge \varepsilon_1'\varepsilon_2' = \varepsilon_2'\varepsilon_1' \wedge$$
$$\wedge\, \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = \langle \varepsilon_1', \varepsilon_2' \rangle \Rightarrow \varepsilon_1' = \varepsilon_1 \vee \varepsilon_2' = \varepsilon_1))$$

для пары (ξ_D, ε_D) означает, что $A_{(\xi_D, \varepsilon_D)}$ — делимая, а $A_{\overline{(\xi_D, \varepsilon_D)}}$ — редуцированная части группы A.

Доказательство. Следует из леммы 2.5 (так как только в разложениях группы вида $\mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ одно из прямых слагаемых всегда совпадает с исходным). □

Благодаря лемме 2.5 и тому, что мы можем выделить разложение группы A на делимую и редуцированную части, мы теперь можем узнать, ограниченна ли редуцированная часть группы A. Построим предложения

$$\begin{aligned}\varphi_l := \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 (Extreme(\varepsilon_1) \wedge Extreme(\varepsilon_2) \wedge \\ \wedge\, \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_1 \in \overline{(\xi_D, \varepsilon_D)} \wedge \varepsilon_2 \in \overline{(\xi_D, \varepsilon_D)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \#\{(\varepsilon_1', \varepsilon_2') | Extreme(\varepsilon_1') \wedge Extreme(\varepsilon_2') \wedge \\ \wedge\, \varepsilon_1'\varepsilon_2' = \varepsilon_2'\varepsilon_1' \wedge \langle \varepsilon_1', \varepsilon_2' \rangle = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle\} \leqslant l),\end{aligned}$$

где вместо $\#\{\dots\} \leqslant l$ подставим формулу, выполняющуюся для множеств из не более чем l элементов. Предложение φ_l означает, что в редуцированной части все подгруппы вида $\mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^m}$ имеют не более l разложений. Согласно лемме 2.5, это ограничение равносильно ограничению на порядки циклических подгрупп редуцированной части. Поэтому если хоть одно из предложений φ_l истинно, то редуцированная часть ограничена, иначе — неограничена.

Следовательно, для любых двух групп A_1 и A_2 из разных классов существует предложение, на котором различаются группы $\mathrm{Aut}\,(A_1)$ и $\mathrm{Aut}\,(A_2)$.

Таким образом, в дальнейшем мы можем считать, что если группы $\mathrm{Aut}\,(A_1)$ и $\mathrm{Aut}\,(A_2)$ элементарно эквивалентны, то группы A_1 и A_2 лежат в одном классе, и, если они обе лежат в первом или втором классе, то соответственно они сами или их редуктивные прямые слагаемые ограничены одним и тем же числом $n = p^k$, которое можно считать известным.

Глава 3

Ограниченные p-группы.

3.1 Разделение пар инволюций.

Мы рассматриваем группу $A = \sum\limits_{i=1}^{k} A_i$, где $A_i \cong \bigoplus\limits_{\mu_i} \mathbb{Z}_{p^i}$, причем A ограничена числом n. Так как группа A бесконечна, то $\mu_l = \max\limits_{i=1,\ldots,k} \mu_i$ бесконечно и совпадает с мощностью группы A. Для каждого i мы хотим найти формулу, которая выполняется для экстремальных инволюций, соответствующих прямым слагаемым группы A, изоморфным $\mathbb{Z}_{p^i}$, и только для них.

Рассмотрим для каждого l формулу

$$\begin{aligned}\varphi_l(\varepsilon_1) := Extreme(\varepsilon_1) \wedge \forall \varepsilon_2 (Extreme(\varepsilon_2)) \wedge (\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \#\{(\varepsilon_1', \varepsilon_2') \mid Extreme(\varepsilon_1') \wedge Extreme(\varepsilon_2') \wedge \\ \wedge\, \varepsilon_1'\varepsilon_2' = \varepsilon_2'\varepsilon_1' \wedge \langle \varepsilon_1', \varepsilon_2' \rangle = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle\} \leqslant l).\end{aligned}$$

С помощью этих формул (и леммы 2.5) мы можем различать экстремальные инволюции разных порядков, за исключением одного случая. Если группа A имеет ровно одно прямое слагаемое максимального порядка и ровно одно слагаемое второго по максимальности порядка, то экстремальные инволюции, отвечающие этим двум слагаемым, мы отличить друг от друга не можем. В этом случае мы знаем порядок этих двух слагаемых. Покажем, как различить этот случай. Возьмем максимальное l, для которого формула φ_l выполнима. Эта формула должна выполняться ровно для двух независимых экстремальных инволюций, и эти инволюции должны соответствовать прямым слагаемым разных порядков. Последнее свойство выражается формулой $\forall f(f\varepsilon_1 f^{-1} \neq \varepsilon_2)$ для экстремальных инволюций ε_1 и ε_2.

Обозначим через $ord_i(\varepsilon)$ формулу, выполняющуюся для экстремальных инволюций, соответствующим прямым слагаемым порядка p^i, а в случае, когда мы не можем отличить две экстремальные инволюции, соответствующие прямым слагаемым порядков p^{k-1} и p^k, через $ord_{k-1}(\varepsilon)$ обозначим формулу, выполняющуюся только для одной из них, а $ord_k(\varepsilon)$ — только для другой.

Теперь рассмотрим следующую формулу:

$$Comp((\xi_1,\varepsilon_1),\dots,(\xi_k,\varepsilon_k)) := ((\xi_1,\varepsilon_1)\oplus\dots\oplus(\xi_k,\varepsilon_k) = (1,\varepsilon_1))\wedge$$
$$\wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{k} \forall\varepsilon(Extreme(\varepsilon)\wedge\varepsilon\in(\xi_i,\varepsilon_i)\Rightarrow ord_i(\varepsilon))\Big).$$

Эта формула выражает, что $A_{(\xi_1,\varepsilon_1)}\oplus\dots\oplus A_{(\xi_k,\varepsilon_k)} = A$ — это разложение группы A, изоморфное разложению $\sum\limits_{i=1}^{k} A_i$.

Будем считать, что пары $(\xi_1,\varepsilon_1),\dots,(\xi_k,\varepsilon_k)$ из формулы $Comp(\dots)$ фиксированы. Для того, чтобы отличать их от других пар, будем обозначать их через $\widetilde{(\xi_1,\varepsilon_1)},\dots,\widetilde{(\xi_k,\varepsilon_k)}$.

Число l из множества $\{1,\dots,k\}$, для которого выполнено предложение

$$Card_l = \exists a \bigwedge_{i=1, i\neq l}^{k} \Big(\forall\varepsilon_1\in\widetilde{(\xi_i,\varepsilon_i)}\exists\varepsilon_2\in\widetilde{(\xi_l,\varepsilon_l)}$$
$$a(\varepsilon_2)\in\langle\varepsilon_1,\varepsilon_2\rangle\wedge a(\varepsilon_2)\neq\varepsilon_2\wedge$$
$$\wedge\,\forall\varepsilon\in\widetilde{(\xi_i,\varepsilon_i)}a(\varepsilon)=\varepsilon\Big),$$

является номером группы A_l с $|A_l| = |A| = \mu$.

Формула $Card_l$ показывает, что можно написать формулы, определяющие для любых двух пар (ξ_1,ε_1) и (ξ_2,ε_2), выполнено ли $|A_{(\xi_1,\varepsilon_1)}| <$

$|A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}|$, $|A_{(\xi_1,\varepsilon_1)}| > |A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}|$ или $|A_{(\xi_1,\varepsilon_1)}| = |A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}|$. Будем обозначать эти формулы через $|(\xi_1,\varepsilon_1)| < |(\xi_2,\varepsilon_2)|$, $|(\xi_1,\varepsilon_1)| > |(\xi_2,\varepsilon_2)|$ и $|(\xi_1,\varepsilon_1)| = |(\xi_2,\varepsilon_2)|$ соответственно.

Формула

$$Fin(\xi,\varepsilon) := \forall(\xi_1,\varepsilon_1)\forall(\xi_2,\varepsilon_2)((\xi_1,\varepsilon_1) = (\xi,\varepsilon)\oplus(\xi_2,\varepsilon_2) \Rightarrow |(\xi,\varepsilon)| < |(\xi_1,\varepsilon_1)|)$$

означает, что группа $A_{(\xi,\varepsilon)}$ конечно порождена.

Формула

$$Count(\xi,\varepsilon) := \neg Fin(\xi,\varepsilon) \wedge \forall(\xi_1,\varepsilon_1)(\neg Fin(\xi_1,\varepsilon_1) \Rightarrow |(\xi,\varepsilon)| \leqslant |(\xi_1,\varepsilon_1)|)$$

выполняется для проекций на счетно порожденные группы, и только для них.

3.2 Выделение специальных множеств (по Шелаху).

В этом параграфе мы будем полностью следовать статье С. Шелаха [29].

Для начала пусть у нас фиксирована абелева p-группа $A \cong \bigoplus_{\mu} \mathbb{Z}(p^l)$, где μ — бесконечное кардинальное число, и кольцо $\operatorname{End}(A)$ ее эндоморфизмов.

Пусть множество $\{a_i \mid i \in I\} \subset A$ независимо, все его элементы имеют один и тот же порядок p^l, и пусть $A' = \langle\{a_i \mid i \in I\}\rangle$.

В работе [1] была доказана теорема Шелаха для эндоморфизмов.

Теорема 34. *Существует формула $\widetilde{\varphi}(\dots)$, удовлетворяющая следующему условию. Пусть $\{f_i\}_{i\in\mu}$ — множество элементов из $\operatorname{End}(A')$. Тогда можно найти вектор $\overline{g}$ такой, что формула $\widetilde{\varphi}(f,\overline{g})$ истинна в $\operatorname{End}(A')$ тогда и только тогда, когда $f = f_i$ для некоторого $i \in \mu$.*

Если мы рассматриваем не кольцо эндоморфизмов, а группу автоморфизмов, то рассуждений выше не достаточно. Нам требуется “за-кодировать" каждый эндоморфизм указанного вида некоторым специальным набором автоморфизмов.

Так как при работе с эндоморфизмами мы будем их только перемножать и проверять на равенство, то достаточно будет построить формулы для таких наборов, соответствующие умножению и сравнению на равенство эндоморфизмов.

Пусть пара $\hat{h} = (\xi, \varepsilon)$ отвечает за группу A_1 (т. е. $A_{(\xi,\varepsilon)} = A_1$). Мы будем "кодировать" эндоморфизм f указанного вида тройкой (f_1, f_2, f_3) (где f_1 — автоморфизм, а f_2 и f_3 — пары) следующим образом. f_2 будет отвечать за образ эндоморфизма f, f_3 — за ядро. Для каждого набора прямых слагаемых $\mathbb{Z}_{p^l} \subset A_1$, имеющих одинаковый образ при эндоморфизме f, ровно одно из них при автоморфизме f_1 будет переходить в этот образ, а остальные — в "свободные" (т. е. в которые ничего больше не переходит) слагаемые группы A_2. Прямые слагаемые $\mathbb{Z}_{p^l} \subset A_2$ при f_1 переходят в "свободные" прямые слагаемые групп A_1 и A_2 (ясно, что "свободных" прямых слагаемых хватит).

Лемма 3.1. 1) *Для экстремальных инволюций* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *и произвольного автоморфизма* f_1 *формула*

$$f_1(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1 = f_1 \vee \varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1 = -1 \cdot f_1$$

означает $f_1(A_{\varepsilon_1}) = A_{\varepsilon_2}$.

2) *Для экстремальных инволюций* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \hat{h}$ *и построенной тройки* (f_1, f_2, f_3), *"кодирующей" эндоморфизм* f *формула*

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \varepsilon_0 \exists \varepsilon' (\varepsilon' \in \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1 \rangle \wedge \varepsilon' \in f_3 \wedge f_1(\varepsilon_0) = \varepsilon_2)$$

означает $f(A_{\varepsilon_1}) = A_{\varepsilon_2}$.

Доказательство. 1) Пусть $f_1(A_{\varepsilon_1}) = A_{\varepsilon_2}$. Тогда возьмем $x \in A_{\varepsilon_1}$, тогда $\varepsilon_1(x) = \pm x$, $f_1\varepsilon_1(x) = \pm f_1(x)$, $\varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(\pm f_1(x)) = \pm f_1(x)$. Теперь возьмем $x \in A_{\varepsilon_1}^{\perp}$, тогда аналогично $\varepsilon_1(x) = \mp x$, $f_1\varepsilon_1(x) = \mp f_1(x)$, $\varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(\mp f_1(x)) = \pm f_1(x)$.

Обратно, пусть $f_1 = \varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1$ или $f_1 = -\varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1$, предположим, что $f_1(A_{\varepsilon_1}) \neq A_{\varepsilon_2}$. Тогда существует такой элемент $a \in A_{\varepsilon_1}$, что $f_1(a) \notin A_{\varepsilon_2}$. Пусть для определенности $\varepsilon_1|_{A_{\varepsilon_1}} = -1$, $\varepsilon_2|_{A_{\varepsilon_2}} = -1$ (в других случаях рассуждения аналогичны). Рассмотрим $\varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1(a) = \varepsilon_2 f_1(-a) = -\varepsilon_2 f_1(a) = \pm f_1(a)$. Так как $f_1(a) \notin A_{\varepsilon_2}$, то такое возможно только при $f_1(a) \in A_{\varepsilon_2}^{\perp}$. В этом случае знак будет "$-$". Рассмотрим произвольный элемент $b \in A_{\varepsilon_1}^{\perp}$. Для него $f_1(b) = -\varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1(b) = -\varepsilon_2 f_1(b)$. Значит, $f_1(b) \in A_{\varepsilon_2}$, но это не может выполняться для всех $b \in A_{\varepsilon_1}^{\perp}$, так как f_1 — автоморфизм.

2) Очевидно. □

С помощью этой леммы мы теперь можем выразить формулами умножение и сравнение на равенство троек, а также корректность тройки (т. е. что она действительно "кодирует" эндоморфизм). Утверждения следующей леммы проверяются непосредственно.

Лемма 3.2. 1) *Тройка* (f_1, f_2, f_3) *отвечает за какой-либо эндоморфизм указанного вида тогда и только тогда, когда*

$$f_2 \subset \hat{h} \wedge f_3 \subset \hat{h} \wedge \forall \varepsilon (Extreme(\varepsilon) \wedge \varepsilon \in f_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists \varepsilon' (Extreme(\varepsilon') \wedge \varepsilon' \in \hat{h} \wedge f_1(\varepsilon') = \varepsilon)) \wedge$$
$$\wedge \forall \varepsilon (Extreme(\varepsilon) \wedge \varepsilon \in \hat{h} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists! \varepsilon_1 \exists \varepsilon_2 \exists \varepsilon_0 (Extreme(\varepsilon_1) \wedge Extreme(\varepsilon_2) \wedge Extreme(\varepsilon_0) \wedge$$
$$\wedge \varepsilon_1 \varepsilon = \varepsilon \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_0 \in f_3 \wedge \varepsilon_0 \in \langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle \wedge \varepsilon_2 \in \hat{h} \wedge f_1(\varepsilon_1) = \varepsilon_2))).$$

2) *Формула*

$$(f_1, f_2, f_3) = (g_1, g_2, g_3) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} f_2 = g_2 \wedge f_3 = g_3 \wedge$$
$$\wedge \forall \varepsilon (Extreme(\varepsilon) \wedge \varepsilon \in \hat{h} \Rightarrow \exists \varepsilon_0 (Extreme(\varepsilon_0) \wedge \varepsilon_0 \in f_2 \wedge$$
$$\wedge f(\varepsilon) = \varepsilon_0 \wedge g(\varepsilon) = \varepsilon_0))$$

означает, что эндоморфизмы f *и* g, *"кодируемые" соответственно тройками* (f_1, f_2, f_3) *и* (g_1, g_2, g_3), *равны.*

3) *Формула*

$$(f_1,f_2,f_3)\cdot(g_1,g_2,g_3)=(h_1,h_2,h_3)\overset{def}{\Longleftrightarrow}\forall\varepsilon(Extreme(\varepsilon)\wedge\varepsilon\in\hat{h}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\varepsilon\in h_2\Leftrightarrow\exists\varepsilon'(Extreme(\varepsilon')\wedge\varepsilon'\in g_2\wedge f(\varepsilon')=\varepsilon))))\wedge$$
$$\wedge\forall\varepsilon_1\forall\varepsilon_2(Extreme(\varepsilon_1)\wedge Extreme(\varepsilon_2)\wedge\varepsilon_1\in\hat{h}\wedge\varepsilon_2\in h_2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\varepsilon_2=h(\varepsilon_1)\exists\varepsilon_3(Extreme(\varepsilon_3)\wedge\varepsilon_3\in g_2\wedge g(\varepsilon_1)=\varepsilon_3\wedge f(\varepsilon_3)=\varepsilon_2)))\wedge$$
$$\wedge\forall\varepsilon(Extreme(\varepsilon)\Rightarrow(\varepsilon\in h_3\exists\varepsilon_1\exists\varepsilon_2\exists\varepsilon_3(\varepsilon_1\in\hat{h}\wedge\varepsilon_2\in\hat{h}\wedge\varepsilon_3\in\hat{h}\wedge$$
$$\wedge h(\varepsilon_1)=\varepsilon_3\wedge h(\varepsilon_2)=\varepsilon_3\wedge\varepsilon\in\langle\varepsilon_1,\varepsilon_2\rangle))))$$

означает $fg=h$*, где* f*,* g *и* h *— эндоморфизмы, "кодируемые" соответственно тройками* (f_1,f_2,f_3)*,* (g_1,g_2,g_3) *и* (h_1,h_2,h_3)*.*

Обозначим множество всех таких троек через Ω. Теперь благодаря тому, что мы можем "кодировать" эндоморфизмы, получаем

Теорема 35. *Существует формула* $\widetilde{\varphi}(\dots)$*, удовлетворяющая следующему условию. Пусть* $\{f_i\}_{i\in\mu}$ *— множество элементов из* Ω*. Тогда можно найти вектор* $\overline{g}$ *такой, что формула* $\widetilde{\varphi}(f,\overline{g})$ *истинна в* Ω *тогда и только тогда, когда* $f=f_i$ *для некоторого* $i\in\mu$*.*

Еще нам понадобится пользоваться теоремой Шелаха для случая неразложимых прямых слагаемых базисной подгруппы B. Для этого нужно интерпретировать отображения множества экстремальных инволюций из B в себя. Для этого по отображению f построим согласно предыдущему параграфу два автоморфизма f_1 и f_2, соответствующие базисной подгруппе B, и положим

$$f(A_{\varepsilon_1})=A_{\varepsilon_2}\overset{def}{\Longleftrightarrow}\exists\varepsilon\bigl(Extreme(\varepsilon)\wedge\varepsilon\overset{f_1}{\mapsto}\varepsilon_1\wedge\varepsilon\overset{f_2}{\mapsto}\varepsilon_2\bigr).$$

Композиция отображений очевидным образом выражается через последнюю формулу.

Таким образом, мы получаем теорему Шелаха в следующем виде. Пусть Ω — множество экстремальных инволюций, соответствующих прямым слагаемым из B.

Теорема 36. *Существует формула* $\widetilde{\varphi}(\dots)$*, удовлетворяющая следующему условию. Пусть* $\{f_i\}_{i\in\mu}$ *— множество элементов из* Ω*. Тогда можно найти вектор* $\overline{g}$ *такой, что формула* $\widetilde{\varphi}(f,\overline{g})$ *истинна в* Ω *тогда и только тогда, когда* $f = f_i$ *для некоторого* $i \in \mu$*.*

3.3 Специальные множества для случая ограниченных групп.

Сначала сформулируем, какие специальные множества мы хотим получить. Нам требуется получить два множества. Первое из них должно содержать μ_i независимых экстремальных инволюций подгруппы A_i, для каждого $i = 1,\dots,k$, второе — $\mu = \mu_l$ независимых экстремальных инволюций подгруппы A_l (также независимых с инволюциями первого множества), а третье — μ пар инволюций, соответствующим независимым прямым слагаемым группы A_l, каждое из которых является суммой счетного числа слагаемых, соответствующих инволюциям второго множества.

По теореме 2.35 мы видим, что существует формула $\varphi(\overline{g}; f)$, удовлетворяющая следующему условию. Если $\{f_i\}_{i\in\mu}$ — множество элементов из Ω, то существует вектор $\overline{g}$ такой, что формула $\varphi(\widetilde{g}; f)$ истинна в Ω тогда и только тогда, когда $f = f_i$ для некоторого $i \in \mu$. Зафиксируем эту формулу φ.

Пусть мы имеем некоторое фиксированное $i \in \{1,\dots,k\}$. Рассмотрим следующую формулу:

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_i(\overline{g}) := \forall f'(\varphi(\overline{g}, f') \Rightarrow Extreme(f') \wedge f' \in \widetilde{(\xi_i,\varepsilon_i)})\wedge\\ \forall(\xi',\varepsilon')((\xi',\varepsilon') \subset \widetilde{(\xi_i,\varepsilon_i)} \wedge \forall f_1(\varphi(\overline{g}, f_1) \Rightarrow\\ \Rightarrow f_1 \in (\xi',\varepsilon'))) \Rightarrow |(\xi',\varepsilon')| = |\widetilde{(\xi_i,\varepsilon_i)}|)\wedge\\ \wedge \forall f'(\varphi(\overline{g}, f') \Rightarrow (\exists(\xi,\varepsilon)((\xi,\varepsilon) \subset \widetilde{(\xi_i,\varepsilon_i)} \wedge \forall f_1(\varphi(\overline{g}, f_1)\wedge\\ \wedge f_1 \neq f' \Rightarrow f_1 \in (\xi,\varepsilon)) \wedge f' \in \overline{(\xi,\varepsilon)})).\end{aligned}$$

Часть $\forall f'(\varphi(\overline{g}, f') \Rightarrow Extreme(f') \wedge f' \in \widetilde{(\xi_i, \varepsilon_i)})$ выполняется только для экстремальных инволюций f, соответствующих прямым слагаемым группы A_i.

Часть $\forall(\xi', \varepsilon')((\xi', \varepsilon') \subset \widetilde{(\xi_i, \varepsilon_i)} \wedge \forall f_1(\varphi(\overline{g}, f_1) \Rightarrow f_1 \in (\xi', \varepsilon'))) \Rightarrow |(\xi', \varepsilon')| = |\widetilde{(\xi_i, \varepsilon_i)}|)$ означает, что любая подгруппа группы A_i, содержащая все такие слагаемые A_f, что $\varphi(\overline{g}, f)$, имеет ту же мощность, что и A_i, т. е. что мощность множества этих f равна μ_i.

Последняя часть формулы означает, что для любого f' такого, что $\varphi(\overline{g}, f')$, группа, порожденная всеми остальными f такими, что $\varphi(\overline{g}, f)$, не пересекается с f', т. е. множество всех f таких, что $\varphi(\overline{g}, f)$, независимо.

Это множество мы будем обозначать через $\mathbf{F}_i$. Оно состоит из μ_i независимых экстремальных инволюций, соответствующих прямым слагаемым группы A_i. Естественно, такое множество получается для любого вектора $\overline{g}_i$, удовлетворяющего формуле $\widetilde{\varphi}_i(\overline{g}_i)$, поэтому следовало бы писать не $\mathbf{F}_i$, а $\mathbf{F}_i(\overline{g}_i)$, что мы и будем делать далее. Однако в случаях, когда параметр несущественен, мы будем его опускать.

Объединение всех $\mathbf{F}_i$ для $i = 1, \ldots, k$ мы будем обозначать через $\mathbf{F}$. Множество $\mathbf{F}$ зависит от параметра $\overline{g} = (\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_k)$.

Теперь нам нужно получить множество $\mathbf{F}'$, состоящее из $\mu = \mu_l$ независимых экстремальных инволюций подгруппы A_l. Это делается совершенно аналогично предыдущему случаю, следует лишь добавить условие независимости этих инволюций и инволюций из $\mathbf{F}_l$. Обозначим соответствующую формулу через $\widetilde{\varphi}'(\overline{g}_l, \overline{g}')$.

Теперь получим множество $\mathbf{F}''$, состоящее из μ пар инволюций, соответствующим независимым прямым слагаемым группы A_l. Это также можно сделать аналогично предыдущим двум случаям, но теперь вместо одного вектора $\overline{g}$ надо рассматривать два вектора $\overline{g}''$ и $\overline{g}'''$ такие, что $\overline{g}''$ отвечает за обычные инволюции в парах, а $\overline{g}'''$ — за экстремальные инволюции. Инволюция ξ, такая что $\varphi(\overline{g}'', \xi)$, и экстремальная инволюция ε, такая что $\varphi(\overline{g}''', \varepsilon)$, будут соответствовать друг другу, если

$$\overline{Pair}(\xi, \varepsilon) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists(\xi', \varepsilon')\Big((\xi, \varepsilon) \subset (\xi', \varepsilon')\wedge$$
$$\wedge\, \forall\xi''\forall\varepsilon''(\varphi(\overline{g}'', \xi'') \wedge \varphi(\overline{g}''', \varepsilon'') \wedge \xi'' \neq \xi \wedge \varepsilon'' \neq \varepsilon \Rightarrow (\xi'', \varepsilon'') \subset \overline{(\xi', \varepsilon')})\Big)$$

(это определение однозначно).

Кроме того, нужно добавить условие

$$\forall\xi\forall\varepsilon\Big(\varphi(\overline{g}'', \xi) \wedge \varphi(\overline{g}''', \varepsilon) \wedge \overline{Pair}(\xi, \varepsilon) \Rightarrow (\xi, \varepsilon) \subset \widetilde{(\xi_l, \varepsilon_l)} \wedge Count(\xi, \varepsilon)\wedge$$
$$\wedge\, \forall\varepsilon'\Big(Extreme(\varepsilon') \wedge \varepsilon' \in (\xi, \varepsilon) \Rightarrow \exists f(\varphi(\overline{g}', f)\wedge$$
$$\wedge\, (f = \varepsilon' \vee f = -\varepsilon' \vee f\varepsilon' \neq \varepsilon' f))\Big)\Big)$$

Обозначим полученную формулу через $\widetilde{\varphi''}(\overline{g}', \overline{g}'', \overline{g}''')$.

3.4 Интерпретация группы A для каждого элемента $\mathbf{F}''$.

Под интерпретацией группы A для каждого элемента из $\mathbf{F}''$ мы будем понимать следующее. Мы имеем μ независимых прямых слагаемых F_i ($i \in \mu$), каждое из которых есть прямая сумма счетного числа циклических групп порядка p^l. Если мы сможем каждому элементу группы A сопоставлять автоморфизм, тождественный на прямом дополнении к F_i, то мы научимся каждому множеству элементов группы A мощности μ сопоставлять некоторый автоморфизм, что нам и будет далее требоваться для получения теории второго порядка группы A. По этой причине в этом параграфе мы сосредоточимся на биективном соответствии между некоторыми автоморфизмами тождественными на дополнении к F_i и элементами группы A, причем введем на множестве таких автоморфизмов операцию $\oplus$, которая при этой биекции будет соответствовать сложению на группе A.

Фиксируем некоторую пару $(\xi, \varepsilon) \in \mathbf{F}'$. Рассмотрим множество $Aut_{(\xi,\varepsilon)}$ всех автоморфизмов $h \in \operatorname{Aut} A$, удовлетворяющих следующим условиям:

1)

$$\forall f \in \mathbf{F}'(f \in (\xi, \varepsilon) \Rightarrow (h(f) = f \vee \exists f' \in \mathbf{F}(f \neq h(f) \in \langle f, f' \rangle))),$$

что означает, что для любой экстремальной инволюции f из нашего специального множества $\mathbf{F}'$, такой что $A_f \subset A_{(\xi,\varepsilon)}$, либо $h(A_f) = A_f$, либо $h(A_f) \subset A_f \oplus A_{f'}$ (причем $h(A_f) \neq A_f$) для некоторой экстремальной инволюции $f' \in \mathbf{F}$;

2)

$$\exists(\xi', \varepsilon')(Fin(\xi', \varepsilon') \wedge \forall f \in \mathbf{F}'(f \in (\xi, \varepsilon) \Rightarrow (h(f) \neq f \Longleftrightarrow f \in (\xi', \varepsilon')))),$$

что означает, что лишь для конечного числа инволюций $f \in F'$ выполнено $h(A_f) \neq A_f$ (т. е. $h(A_f) \subset A_f \oplus A_{f'}$ для некоторой $f' \in \mathbf{F}$);

3)

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \forall f \in \mathbf{F}_i \neg(\exists f_1 \ldots \exists f_{p^i}(\bigwedge_{q \neq s} f_q \neq f_s \wedge f_1, \ldots, f_{p^i} \in F' \wedge$$
$$\wedge f_1, \ldots, f_{p^i} \in (\xi, \varepsilon) \wedge h(f_1) \in \langle f, f_1 \rangle \wedge \cdots \wedge h(f_{p^i}) \in \langle f, f_{p^i} \rangle)),$$

что означает, что для каждого $i = 1, \ldots, k$ и $f \in \mathbf{F}_i$ число таких $f' \in \mathbf{F}'$ ($f' \in (\xi, \varepsilon)$), что $h(A'_f) \subset A_f \oplus A_{f'}$, не превышает $p^i - 1$.

Два элемента h_1 и h_2 множества $Aut_{(\xi,\varepsilon)}$ будем считать эквивалентными ($h_1 \sim_{(\xi,\varepsilon)} h_2$), если выполняется следующая формула:

$$\exists h\Big(h^{-1}h_1 h \in Aut_{(\xi,\varepsilon)} \wedge \forall f \forall f'(f \in \mathbf{F}' \wedge f \in (\xi, \varepsilon) \wedge f' \in \mathbf{F} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f \neq h_2(f) \in \langle f, f' \rangle \Longleftrightarrow f \neq h^{-1}h_1 h(f) \in \langle f, f' \rangle)\Big).$$

Это означает, что существует автоморфизм h, переводящий h_1 в автоморфизм $h^{-1}h_1 h \in Aut_{(\xi,\varepsilon)}$, действующий так же, как и h_2 (т. е. образ любого слагаемого A_f ($f \in \mathbf{F}'$, $f \in (\xi, \varepsilon)$) одновременно при действии обоих этих автоморфизмов либо совпадает с этим слагаемым, либо лежит внутри $A_f \oplus A_{f'}$ для одного и того же $f' \in \mathbf{F}$). Таким образом получившееся множество $Aut_{(\xi,\varepsilon)}/\sim_{(\xi,\varepsilon)}$ обозначим через $\widetilde{Aut_{(\xi,\varepsilon)}}$. Элементы этого множества можно интерпретировать как множество, состоящее из конечных наборов экстремальных инволюций множества $\mathbf{F}$ с тем условием, что каждая инволюция из $\mathbf{F}_i$ может входить в такой набор не более $p^i - 1$ раз. Соответственно, каждый элемент множества $\widetilde{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}$ можно интерпретировать как множество пар, где первый элемент в паре — это инволюция f из $\mathbf{F}$, а второй элемент — это целое число от 0 до $p^i - 1$, где i таково, что $f \in \mathbf{F}_i$, причем почти все (все, кроме конечного числа) вторые компоненты пар равны 0. Теперь можно построить биективное отображение между множеством $\widetilde{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}$ и группой A, положив образом описанного выше множества $\{\langle f_j, l_j\rangle | j \in J\}$ элемент $\sum\limits_{j\in J} l_j b_j = a \in A$, где b_j — это некоторый заранее фиксированный образующий циклической группы A_{f_j}.

Осталось ввести на множестве $\widetilde{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}$ сложение так, чтобы полученное нами биективное отображение стало изоморфизмом абелевых групп.

Зададим сложение формулой $(h_1, h_2, h_3 \in \widetilde{Aut_{(\xi,\varepsilon)}})$

$$(h_3 = h_1 \oplus h_2) := \bigwedge_{i=1}^{k} \forall f \in \mathbf{F}_i \Big(\bigwedge_{j=0}^{p^i-1} \exists g_1 \ldots \exists g_j \in \mathbf{F}' \bigwedge_{q \neq s} (g_q \neq g_s \wedge g_q \in (\xi,\varepsilon) \wedge$$
$$\wedge\, g_q \neq h_3(g_q) \in \langle g_q, f\rangle) \wedge \neg(\exists g_1 \ldots \exists g_{j+1} \in \mathbf{F}' \bigwedge_{q \neq s} (g_q \neq g_s \wedge g_q \in (\xi,\varepsilon) \wedge$$
$$\wedge\, g_q \neq h_3(g_q) \in \langle g_q, f\rangle)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Big(\bigvee_{m=0}^{j} \exists g_1 \ldots \exists g_m \in \mathbf{F}' \bigwedge_{q \neq s} (g_q \neq g_s \wedge g_q \in (\xi,\varepsilon) \wedge$$
$$\wedge\, g_q \neq h_1(g_q) \in \langle g_q, f\rangle) \wedge$$
$$\wedge\, \neg(\exists g_1 \ldots \exists g_{m+1} \in \mathbf{F}' \bigwedge_{q \neq s} (g_q \neq g_s \wedge g_q \in (\xi,\varepsilon) \wedge$$
$$\wedge\, g_q \neq h_1(g_q) \in \langle g_q, f\rangle)) \wedge$$
$$\wedge\, \exists g_1 \ldots \exists g_{\gamma(j,m)} \in \mathbf{F}' \bigwedge_{q \neq s} (g_q \neq g_s \wedge g_q \in (\xi,\varepsilon) \wedge$$
$$\wedge\, g_q \neq h_2(g_q) \in \langle g_q, f\rangle) \wedge$$
$$\wedge\, \neg(\exists g_1 \ldots \exists g_{\gamma(j,m)+1} \in \mathbf{F}' \bigwedge_{q \neq s} (g_q \neq g_s \wedge g_q \in (\xi,\varepsilon) \wedge$$
$$\wedge\, g_q \neq h_2(g_q) \in \langle g_q, f\rangle))\Big)\Big),$$

где $\gamma(j,m) = j - m$ при $j \geq m$, и $\gamma(j,m) = p^i + j - m$ при $j < m$.

Теперь мы видим, что для каждой $(\xi,\varepsilon) \in \mathbf{F}''$ имеется формульное множество $\widetilde{Aut_{(\xi,\varepsilon)}}$ с операцией сложения $\oplus$, изоморфное группе A.

3.5 Доказательство первого случая в теореме.

Предложение 3.1. *Для двух бесконечных абелевых p-групп A_1 и A_2, ограниченных числом p^k, из элементарной эквивалентности групп* $\mathrm{Aut}\,(A_1)$ *и* $\mathrm{Aut}\,(A_2)$ *следует эквивалентность групп A_1 и A_2 в языке $\mathcal{L}_2$.*

Доказательство. Для $(\xi_1, \varepsilon_1), (\xi_2, \varepsilon_2) \in \mathbf{F}''$ введем формулу

$$Resp_{(\xi_1,\varepsilon_1),(\xi_2,\varepsilon_2)}(h) := \forall g \in \mathbf{F}'((g \in \overline{(\xi_1, \varepsilon_1)} \cap \overline{(\xi_2, \varepsilon_2)} \Rightarrow h(g) = g) \wedge$$
$$(g \in (\xi_1, \varepsilon_1) \Rightarrow h(g) \in (\xi_2, \varepsilon_2)) \wedge (g \in (\xi_2, \varepsilon_2) \Rightarrow h(g) \in (\xi_1, \varepsilon_1)))$$

Эта формула означает, что автоморфизм h изоморфно отображает друг в друга слагаемые $A_{(\xi_1,\varepsilon_1)}$ и $A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}$.

Как и раньше, рассмотрим произвольное предложение φ в логике второго порядка теории групп и укажем алгоритм, переводящий это предложение ψ в предложение $\widetilde{\psi}$ первого порядка языка теории колец такое, что $\widetilde{\psi}$ выполняется в $\mathrm{Aut}\,(A)$ тогда и только тогда, когда φ выполняется в A.

Переведем предложение ψ в предложение

$$\exists \overline{g}_1 \dots \exists \overline{g}_k \exists \overline{g}' \exists \overline{g}'' \exists \overline{g}'''(\widetilde{\varphi}_1(\overline{g}_1) \wedge \dots \widetilde{\varphi}_k(\overline{g}_k) \wedge \widetilde{\varphi}'(\overline{g}_l, \overline{g}') \wedge \widetilde{\varphi''}(\overline{g}', \overline{g}''\overline{g}''') \wedge$$
$$\wedge \exists \widetilde{(\xi, \varepsilon)} \in \mathbf{F}''(\overline{g}', \overline{g}'', \overline{g}''')\psi'(\overline{g}_1, \dots, \overline{g}_k, \overline{g}', \overline{g}'', \overline{g}''', \widetilde{(\xi, \varepsilon)})))),$$

где формула $\psi'(\dots)$ получается из предложения ψ с помощью следующих замен подформул, входящих в ψ:

1) подформула $\forall x$ заменяется на подформулу $\forall x \in \widetilde{Aut_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}}}$;

2) подформула $\exists x$ заменяется на подформулу $\exists x \in \widetilde{Aut_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}}}$;

3) подформула $\forall P_m(v_1, \dots, v_m)(\dots)$ заменяется на подформулу

$$\forall f_1^P \dots \forall f_m^P (\forall (\xi, \varepsilon) \in \mathbf{F}''(\bigwedge_{i=1}^{m}(f_i^P \in Aut_{(\xi,\varepsilon)})) \Rightarrow \dots);$$

4) подформула $\exists P_m(v_1, \dots, v_m)(\dots)$ заменяется на подформулу

$$\exists f_1^P \dots \exists f_m^P (\forall (\xi, \varepsilon) \in \mathbf{F}''(\bigwedge_{i=1}^{m}(f_i^P \in Aut_{(\xi,\varepsilon)})) \wedge \dots);$$

5) подформула $x_1 = x_2$ заменяется на подформулу $x_1 \sim_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}} x_2$;

6) подформула $x_1 = x_2 + x_3$ заменяется на подформулу $x_1 \sim_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}} x_2 \oplus x_3$;

7) Подформула $P_m(x_1, \dots, x_m)$ заменяется на подформулу

$$\exists (\xi, \varepsilon) \in \mathbf{F}'' \exists h \Big(Resp_{(\xi,\varepsilon),\widetilde{(\xi,\varepsilon)})} \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} h^{-1} f_i^P h \sim_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}} x_i \Big).$$

Объясним словами, что означают переводы. Благодаря наличию множества $\mathbf{F}''$, мы имеем μ групп $\widetilde{Aut_{(\xi,\varepsilon)}}$ для $(\xi,\varepsilon)\in\mathbf{F}''$, каждая из которых изоморфна группе A. Мы фиксируем один заранее выбранный элемент $\widetilde{(\xi,\varepsilon)}\in\mathbf{F}''$, и, таким образом, фиксируем одну группу $\widetilde{Aut}_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}}$, изоморфную A. Естественно, все подформулы $\forall x$, $\exists x$, $x_1=x_2$, $x_1=x_2+x_3$ (относящиеся к логике первого порядка) мы будем переводить в соответствующие подформулы для группы $\widetilde{Aut}_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}}$. Теперь нам нужно каким-то образом интерпретировать в кольце $\mathrm{Aut}\,(A)$ произвольное отношение $P_m(v_1,\dots,v_m)$ на множестве A. Такое отношение есть некоторое подмножество в A^m, т. е. набор упорядоченных m-ок элементов из A. Всего таких m-ок не может больше μ, поэтому множество $P_m(v_1,\dots,v_m)$ можно считать множеством из μ m-ок элементов из A (некоторые из них могут совпадать). Мы рассматриваем m автоморфизмов $f_1^P,\dots,f_m^P\in\mathrm{Aut}\,(A)$, каждый из которых является элементом $\widetilde{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}$ для любого $(\xi,\varepsilon)\in\mathbf{F}''$. Таким образом, для каждого $(\xi,\varepsilon)\in\mathbf{F}''$ ограничение автоморфизмов $f_1^P,\dots,f_m^P$ на $A_{(\xi,\varepsilon)}$ является m-кой элементов группы $\widetilde{Aut}_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}}$ $(\cong A)$, где изоморфизм между $\widetilde{Aut}_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}}$ и $\widetilde{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}$ осуществляется с помощью некоторого изоморфизма h.

Отсюда видно, что предложение ψ выполняется в группе A тогда и только тогда, когда предложение $\widetilde{\psi}$ выполняется в кольце $\mathrm{Aut}\,(A)$. Отсюда, как и в предыдущем параграфе, следует окончание доказательства. $\square$

Именно такую схему доказательства мы будем использовать в следующих параграфах для других случаев.

Глава 4

Прямые суммы делимых и ограниченных p-групп.

Любая бесконечная конечно порожденная абелева p-группа A имеет вид $D \oplus G$, где D — делимая конечно порожденная группа, G — конечная группа. Не нуждается в доказательстве следующее предложение.

Предложение 4.1. *Если абелевы p-группы A_1 и A_2 конечно порождены, то из элементарной эквивалентности их групп автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\,(A_1)$ *и* $\mathrm{Aut}\,(A_2)$ *следует, что группы A_1 и A_2 изоморфны.*

Теперь мы будем иметь дело с бесконечно порожденными группами. Нам потребуется сравнивать мощности некоторых конечных множеств экстремальных инволюций.

4.1 Сравнение мощностей множеств экстремальных инволюций.

В этом параграфе мы будем считать, что у нас есть множества G_1, G_2, G_3, G_0, F' экстремальных инволюций одного порядка (т. е. соответствующих квазициклическим прямым слагаемым или циклическим слагаемым одного порядка) и множество F'' пар инволюций, соответствующих счетно порожденным прямым слагаемым того же порядка, причем множества G_1, G_2, G_3, G_0 конечны, а $|F'| = |F''| = \mu$. Внутри каждого из множеств G_1, G_2, G_3, G_0, F' экстремальные инволюции независимы, однако разные множества могут содержать зависимые или даже совпадающие инволюции. Кроме того, каждое счетно порожденное прямое слагаемое из F'' разбивается на неразложимые прямые слагаемые, соответствующие экстремальным инволюциям из F'.

Лемма 4.1. *Следующие свойства можно выразить формулами в языке первого порядка группы автоморфизмов:*

1) $|G_1| \leq |G_2|$,

2) $|G_1| = |G_2|$,

3) $|G_1| + |G_2| = |G_3|$,

4) $|G_1| + |G_2| \equiv |G_3| \mod |G_0|$ *(при условии* $|G_1| < |G_0|$, $|G_2| < |G_0|$, $|G_3| < |G_0|$*),*

5) $|G_1| = p|G_2|$,

6) $|G_1| = p^{|G_0|}|G_2|$.

Доказательство. 1) $|G_1| \leq |G_2| \iff \exists f(f^2 = 1 \wedge \forall g \in G_1(f(g) \in G_2))$

2) $|G_1| = |G_2| \iff |G_1| \leq |G_2| \wedge |G_2| \leq |G_1|$

3) $|G_1| + |G_2| = |G_3| \iff \exists f_1 \exists f_2 (f_1^2 = f_2^2 = 1 \wedge \forall g \in G_1\ f_1(g) \in G_3 \wedge \forall g \in G_2\ f_2(g) \in G_3 \wedge \forall g \in G_3 (f_1(g) \in G_1 \wedge f_2(g) \notin G_2 \vee f_1(g) \notin G_1 \wedge f_2(g) \in G_2))$

4) При условии $|G_1| < |G_0|$, $|G_2| < |G_0|$, $|G_3| < |G_0|$

$$|G_1|+|G_2| \equiv |G_3| \mod |G_0| \iff |G_1|+|G_2| = |G_3| \vee |G_1|+|G_2| = |G_3|+|G_0|,$$

где свойство $|G_1| + |G_2| = |G_3| + |G_0|$ выражается аналогично предыдущему параграфу.

$$5)\ |G_1| = p|G_2| \iff \exists f_1, \ldots, f_p \Big(f_1^2 = \cdots = f_p^2 = 1 \wedge$$
$$\wedge \forall g \in G_1((f_1(g) \in G_2 \vee \cdots \vee f_p(g) \in G_2) \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg(f_i(g) \in G_2 \wedge f_j(g) \in G_2)) \wedge$$
$$\wedge \forall g \in g_2(f_1(g) \in G_1 \wedge \cdots \wedge f_p(g) \in G_1) \Big)$$

Последняя формула означает, что существует такой набор из $|G_0|+1$ пар инволюций, в котором есть одна пара инволюций, у которой соответствующее прямое слагаемое имеет $|G_1|$ образующих, одна пара, у которой соответствующее прямое слагаемое имеет $|G_2|$ образующих, а остальные пары выстроены в ряд, где соответствующее прямое слагаемое у каждой следующей пары имеет в p раз больше образующих, чем у предыдущей.

6) Условие $|G_1| = p^{|G_0|}|G_2|$ равносильно формуле

$$\exists(\xi_0,\varepsilon_0)\Big(Fin(\xi_0,\varepsilon_0)\wedge$$
$$\wedge\,|\{\varepsilon\in F'|\exists\xi(\xi,\varepsilon)\in F''\wedge(\xi,\varepsilon)\cap(\xi_0,\varepsilon_0)\neq\emptyset\}| = |G_0|+1\wedge$$
$$\wedge\,\forall(\xi,\varepsilon)\in F''\Big((\xi,\varepsilon)\cap(\xi_0,\varepsilon_0)\neq\emptyset\Rightarrow$$
$$\Rightarrow((\exists!(\xi',\varepsilon')\in F''((\xi',\varepsilon')\cap(\xi_0,\varepsilon_0)\neq\emptyset\wedge|\{f\in F'|f\in(\xi',\varepsilon')\cap(\xi_0,\varepsilon_0)\}| =$$
$$= p|\{f\in F'|f\in(\xi,\varepsilon)\cap(\xi_0,\varepsilon_0)\}|)\vee|\{f\in F'|f\in(\xi,\varepsilon)\cap(\xi_0,\varepsilon_0)\}| = |G_1|)\wedge$$
$$\wedge\,(\exists!(\xi',\varepsilon')\in F''((\xi',\varepsilon')\cap(\xi_0,\varepsilon_0)\neq\emptyset\wedge p|\{f\in F'|f\in(\xi',\varepsilon')\cap(\xi_0,\varepsilon_0)\}| =$$
$$= |\{f\in F'|f\in(\xi,\varepsilon)\cap(\xi_0,\varepsilon_0)\}|)\vee|\{f\in F'|f\in(\xi,\varepsilon)\cap(\xi_0,\varepsilon_0)\}| = |G_2|)\Big)\Big).$$

□

4.2 Доказательство второго случая в теореме.

Мы рассматриваем группу $A = \sum_{i=1}^{k} A_i \oplus A_\infty$, где $A_i \cong \bigoplus_{\mu_i} \mathbb{Z}_{p^i}$, $A_\infty \cong \bigoplus_{\mu_\infty} \mathbb{Z}_{p^\infty}$. С помощью формулы $Card_l$ из параграфа 3.1 найдем такое l, что $|A_l| = |A| = \mu$, $l\in\{1,\dots,k,\infty\}$. Аналогично параграфу 3.2 выделим следующие специальные множества:

1) множества $\mathbf{F}_i$ ($i\in\{1,\dots,k,\infty\}$) из μ_i независимых экстремальных инволюций порядка p^i;

2) множества $\mathbf{F}'_i$ ($i\in\{1,\dots,k,\infty\}$) из μ_i независимых экстремальных инволюций порядка p^l, соответствующих экстремальным инволюциям из $\mathbf{F}_i$;

3) множества $\mathbf{F}''_i$ ($i \in \{1, \ldots, k, \infty\}$) из μ_i пар инволюций, каждая из которых содержит экстремальную инволюцию из $\mathbf{F}_i$ и соответствующую экстремальную инволюцию из $\mathbf{F}'_l$;

4) множества $\mathbf{F}'$, $\mathbf{F}'_c$, $\mathbf{F}'_d$ из μ независимых экстремальных инволюций порядка p^l;

5) множества $\mathbf{F}''$, $\mathbf{F}''_0$ из μ_i независимых пар инволюций, соответствующим независимым прямым слагаемым группы A_l, каждое из которых является суммой счетного числа слагаемых, соответствующих инволюциям $\mathbf{F}'$, $\mathbf{F}'_c \cup \mathbf{F}'_d$ соответственно (причем в каждой паре инволюций из $\mathbf{F}''_0$ содержится счетное число инволюций и из $\mathbf{F}'_c$, и из $\mathbf{F}'_d$).

Для инволюции $f \in \mathbf{F}_i$ через $Cor(f)$ мы будем обозначать соответствующую инволюцию из $\mathbf{F}'_i$, т. е. такую инволюцию $f' \in \mathbf{F}'_i$, что $\exists (\xi, \varepsilon) \in \mathbf{F}''_i (f \in (\xi, \varepsilon) \wedge f' \in (\xi, \varepsilon))$.

Интерпретация элемента из ограниченной части группы A полностью аналогична параграфу 3.3, следует лишь в определениях $Aut_{(\xi,\varepsilon)}$, $\sim_{(\xi,\varepsilon)}$ и $\oplus$ заменить $h(f) \in \langle f, f' \rangle$ на $h(f) \in \langle f, Cor(f') \rangle$.

Теперь нам надо проинтерпретировать элемент из делимой части группы A. Для этого, как и в параграфу 3.3, зафиксируем пару (ξ, ε) и определим множество $Aut_{(\xi,\varepsilon)}$, предикат эквивалентности $\sim_{(\xi,\varepsilon)}$ и и операцию $\oplus$. Итак, рассмотрим множество $Aut_{(\xi,\varepsilon)}$ таких автоморфизмов $h \in \mathrm{Aut}\, A$, удовлетворяющих следующим условиям:

1)

$$\forall f \in \mathbf{F}'_c \cup \mathbf{F}'_d (f \in (\xi, \varepsilon) \Rightarrow (h(f) = f \vee \exists f' \in \mathbf{F}_\infty (f \neq h(f) \in \langle f, Cor(f') \rangle))),$$

что означает, что для любой экстремальной инволюции f из $\mathbf{F}'_c \cup \mathbf{F}'_d$, такой что $A_f \subset A_{(\xi,\varepsilon)}$, либо $h(A_f) = A_f$, либо $h(A_f) \subset A_f \oplus A_{Cor(f')}$ (причем $h(A_f) \neq A_f$) для некоторой экстремальной инволюции $f' \in \mathbf{F}_\infty$;

2)

$$\exists (\xi', \varepsilon') (Fin(\xi', \varepsilon') \wedge \forall f \in \mathbf{F}'_c \cup \mathbf{F}'_d (f \in (\xi, \varepsilon) \Rightarrow (h(f) \neq f \iff f \in (\xi', \varepsilon')))),$$

что означает, что лишь для конечного числа инволюций $f \in \mathbf{F}'_c \cup \mathbf{F}'_d$

выполнено $h(A_f) \neq A_f$ (т. е. $h(A_f) \subset A_f \oplus A_{Cor(f')}$ для некоторой $f' \in \mathbf{F}_\infty$);

3)

$$\forall f' \in \mathbf{F}_\infty \quad |\{f \in F'_c | f \in (\xi, \varepsilon) \wedge h(f) \in \langle f, Cor(f') \rangle\}| < \\ < p^{|\{f \in F'_d | f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h(f) \in \langle f, Cor(f')\rangle\}|},$$

что означает, что для каждого $f' \in \mathbf{F}_\infty$ число таких $f \in \mathbf{F}'_c$ ($f \in (\xi, \varepsilon)$), что $h(A_f) \subset A_f \oplus A_{Cor(f')}$, меньше p^m, где m — число таких $f \in \mathbf{F}'_d$ ($f \in (\xi, \varepsilon)$), что $h(A_f) \subset A_f \oplus A_{Cor(f')}$.

Два элемента h_1 и h_2 множества $Aut_{(\xi,\varepsilon)}$ будем считать эквивалентными ($h_1 \sim_{(\xi,\varepsilon)} h_2$), если выполняется следующая формула:

$$\begin{gathered}
\forall f' \in \mathbf{F}_\infty \Big((|\{f \in \mathbf{F}'_d | f \in (\xi, \varepsilon) \wedge h_1(f) \in \langle f, Cor(f') \rangle\}| \leq \\
\leq |\{f \in \mathbf{F}'_d | f \in (\xi, \varepsilon) \wedge h_2(f) \in \langle f, Cor(f') \rangle\}| \wedge \\
\wedge |\{f \in \mathbf{F}'_c | f \in (\xi, \varepsilon) \wedge h_2(f) \in \langle f, Cor(f') \rangle\}| = \\
= |\{f \in \mathbf{F}'_c | f \in (\xi, \varepsilon) \wedge h_1(f) \in \langle f, Cor(f') \rangle\}| \times \\
\times p^{|\{f \in \mathbf{F}'_d | f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h_2(f) \in \langle f, Cor(f')\rangle\}| - |\{f \in \mathbf{F}'_d | f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h_1(f) \in \langle f, Cor(f')\rangle\}|}) \vee \\
\vee (|\{f \in \mathbf{F}'_d | f \in (\xi, \varepsilon) \wedge h_2(f) \in \langle f, Cor(f') \rangle\}| \leq \\
\leq |\{f \in \mathbf{F}'_d | f \in (\xi, \varepsilon) \wedge h_1(f) \in \langle f, Cor(f') \rangle\}| \wedge \\
\wedge |\{f \in \mathbf{F}'_c | f \in (\xi, \varepsilon) \wedge h_1(f) \in \langle f, Cor(f') \rangle\}| = \\
= |\{f \in \mathbf{F}'_c | f \in (\xi, \varepsilon) \wedge h_2(f) \in \langle f, Cor(f') \rangle\}| \times \\
\times p^{|\{f \in \mathbf{F}'_d | f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h_1(f) \in \langle f, Cor(f')\rangle\}| - |\{f \in \mathbf{F}'_d | f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h_2(f) \in \langle f, Cor(f')\rangle\}|}) \Big).
\end{gathered}$$

Так же, как и в параграфе 3.3 получившееся множество $Aut_{(\xi,\varepsilon)} / \sim_{(\xi,\varepsilon)}$ обозначим через $\widetilde{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}$. Но, в отличие от параграфа 3.3, каждый элемент этого множества можно интерпретировать как множество не пар, а троек, где первый элемент в тройке — это инволюция f из $\mathbf{F}_\infty$ (напомним, инволюция f отвечает квазициклическому слагаемому, которое порождается элементами $c_1, \ldots, c_n, \ldots$, где

$pc_1 = 0, pc_2 = c_1, \dots, pc_{n+1} = c_n, \dots$, и каждый элемент в котором может быть представлен в виде λc_n, где $0 \leq \lambda < p^n$), второй элемент $(|\{f \in \mathbf{F}'_d | f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h(f) \in \langle f, Cor(f')\rangle\}|)$ — это натурально число, обозначающее номер порождающего элемента, а третий элемент $(|\{f \in \mathbf{F}'_c | f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h(f) \in \langle f, Cor(f')\rangle\}|)$ — коэффициент перед этим порождающим. Теперь можно построить биективное отображение между множеством $\widetilde{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}$ и группой A, положив образом описанного выше множества $\{\langle f_j, n_j, l_j\rangle | j \in J\}$ элемент $\sum\limits_{j\in J} l_j c_{j\ n_j} = a \in A$, где $c_{j\ n_j}$ — заранее фиксированный образующий с номером n_j квазициклической группы A_{f_j}.

Зададим сложение для $h_1, h_2, h_3 \in \widetilde{Aut_{(\xi,\varepsilon)}}$ формулой $h_3 = h_1 \oplus h_2$.

$$
\begin{gathered}
(h_3 = h_1 \oplus h_2) := \forall f' \in F_\infty \Big(\exists h'_1 \in \widetilde{Aut}_{(\xi,\varepsilon)} \exists h'_2 \in \widetilde{Aut}_{(\xi,\varepsilon)} \exists h'_3 \in \widetilde{Aut}_{(\xi,\varepsilon)} \\
\Big(h'_1 \sim_{(\xi,\varepsilon)} h_1 \wedge h'_2 \sim_{(\xi,\varepsilon)} h_2 \wedge h'_3 \sim_{(\xi,\varepsilon)} h_3 \wedge \\
\wedge |\{f \in \mathbf{F}'_d | f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h'_1(f) \in \langle f, Cor(f')\rangle\}| = \\
= |\{f \in \mathbf{F}'_d | f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h'_2(f) \in \langle f, Cor(f')\rangle\}| = \\
= |\{f \in \mathbf{F}'_d | f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h'_3(f) \in \langle f, Cor(f')\rangle\}| \wedge \\
\wedge |\{f \in \mathbf{F}'_c | f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h'_1(f) \in \langle f, Cor(f')\rangle\}| + \\
+ |\{f \in \mathbf{F}'_c | f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h'_2(f) \in \langle f, Cor(f')\rangle\}| \equiv \\
\equiv |\{f \in \mathbf{F}'_c | f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h'_3(f) \in \langle f, Cor(f')\rangle\}| \mod \\
\mod |\{f \in \mathbf{F}'_d | f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h'_3(f) \in \langle f, Cor(f')\rangle\}|\Big)\Big).
\end{gathered}
$$

Остаток доказательства повторяет параграф 3.4. Тем самым, мы доказали

Предложение 4.2. *Для двух бесконечно порожденных абелевых p-групп A_1 и A_2, редуцированные части которых ограничены числом p^k, из элементарной эквивалентности групп $\mathrm{Aut}\,(A_1)$ и $\mathrm{Aut}\,(A_2)$ следует эквивалентность групп A_1 и A_2 в языке $\mathcal{L}_2$.*

Глава 5

Группы с неограниченной базисной подгруппой.

Всегда в этой главе мы будем предполагать, что $A = D \oplus G$, группа D делима (она может быть нулевой), группа G редуцирована и имеет неограниченную базисную подгруппу B,

$$B = B_1 \oplus \dots \oplus B_n \oplus \dots,$$

где

$$B_n \cong \bigoplus_{\mu_n} \mathbb{Z}(p^n),$$

$r(D) = \mu_D$, $|B| = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu_n = \mu_B$, $|G| = \mu_G$, $\mu = |A| = \max(\mu_D, \mu_G)$.

Мы считаем фиксированной пару инволюций (ξ_D, ε_D), отвечающую подгруппе D.

5.1 Сравнение порядков экстремальных инволюций.

Мы хотим сравнить порядки двух экстремальных инволюций ε_1 и ε_2. Пусть порядок инволюции ε_0, независимой с данными инволюциями, больше их порядков. Тогда, по лемме 2.5, $\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1 \rangle$ содержит в себе больше экстремальных инволюций, чем $\langle \varepsilon_0, \varepsilon_2 \rangle$. Это дает нам возможность сравнивать порядки ε_1 и ε_2 формулой. Пусть у нас есть бесконечное множество $\mathbf{F}$ независимых экстремальных инволюций.

Лемма 5.1. *Формула*

$$ord(\varepsilon_1) = ord(\varepsilon_2) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \exists f\ f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$$

для экстремальных инволюций ε_1 и ε_2 означает, что порядки групп A_{ε_1} и A_{ε_2} совпадают.

Доказательство. Действительно, если существует автоморфизм f, переводящий A_{ε_1} в A_{ε_2}, то порядки этих подгрупп должны совпасть.

Обратно, если порядки подгрупп A_{ε_1} и A_{ε_2} совпадают, то существует искомый автоморфизм f, например, меняющий местами A_{ε_1} и A_{ε_2}, и тождественный на дополнении к $A_{\varepsilon_1} + A_{\varepsilon_2}$. □

Обозначим:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 \leq_{\varepsilon_0} \varepsilon_2 \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \exists f_1, f_2 \forall \varepsilon \in \mathbf{F}\Big(f_1(\varepsilon) = \varepsilon \vee \\
\vee \exists \varepsilon' \in \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1 \rangle : ord(\varepsilon') = ord(\varepsilon_1) \wedge f_1(\varepsilon) \in \langle \varepsilon, \varepsilon' \rangle) \wedge \\
\wedge (f_2(\varepsilon) = \varepsilon \vee \exists \varepsilon' \in \langle \varepsilon_0, \varepsilon_2 \rangle : ord(\varepsilon') = ord(\varepsilon_2) \wedge f_2(\varepsilon) \in \langle \varepsilon, \varepsilon' \rangle) \wedge \\
\wedge (f_1(\varepsilon) = \varepsilon \vee f_2(\varepsilon) = \varepsilon)\Big) \wedge \\
\wedge \exists f \forall \varepsilon \in \mathbf{F}(f_1(\varepsilon) \neq \varepsilon \Rightarrow \exists \varepsilon' \in \mathbf{F} : f_2(\varepsilon') \neq \varepsilon' \wedge f(\varepsilon') = \varepsilon).
\end{gathered}$$

Тогда формула $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \exists \varepsilon_0 : \varepsilon_1 \leq_{\varepsilon_0} \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_2 \not\leq_{\varepsilon_0} \varepsilon_1$ будет означать, что порядок инволюции ε_1 меньше порядка инволюции ε_2.

5.2 Выделение базисной подгруппы

Рассмотрим теперь только редуцированную часть группы $A - G$. Пусть ее мощность равна μ_G, а финальный ранг базисной подгруппы равен μ_{fin}. Существует разложение $G = G_1 \oplus G_2$ такое, что порядок любой неразложимой подгруппы G_1 меньше порядка любой неразложимой подгруппы G_2 и ранг базисной подгруппы G_2 равен μ_{fin}. Покажем, как выделить такое разложение формулой:

Лемма 5.2. *Введем формулу*

$$ByOrd(\xi,\varepsilon) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon'\Big(Extreme(\varepsilon') \Rightarrow \big(\varepsilon' \in (\xi,\varepsilon) \Leftrightarrow ord(\varepsilon') \geqslant ord(\varepsilon)\big)\Big).$$

Формула

$$\begin{aligned} Final(\xi_0,\varepsilon_0) \overset{def}{\Longleftrightarrow} ByOrd(\xi_0,\varepsilon_0)\wedge \\ \wedge\, \forall(\xi_1,\varepsilon_1) \subsetneq (\xi_0,\varepsilon_0)\Bigg(ByOrd(\xi_1,\varepsilon_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists f\Big(\big(\forall\varepsilon \in \overline{(\xi_1,\varepsilon_1)} \quad f(\varepsilon)=\varepsilon\big)\wedge \\ \wedge\, \big(\forall\varepsilon \in (\xi_0,\varepsilon_0) \cap \overline{(\xi_1,\varepsilon_1)} \quad \exists\varepsilon' \in (\xi_1,\varepsilon_1) \quad \varepsilon' \overset{f}{\mapsto} \varepsilon\big)\Big)\Bigg) \end{aligned}$$

выделяет описанное выше разложение $G = G_1 \oplus G_2$, где $G_1 = G_{\overline{(\xi_0,\varepsilon_0)}}$, $G_2 = G_{(\xi_0,\varepsilon_0)}$.

Доказательство. Формула $ByOrd$ выделяет разложения $G = G_{\overline{(\xi,\varepsilon)}} \oplus G_{(\xi,\varepsilon)}$, в которых порядок любой неразложимой подгруппы $G_{\overline{(\xi,\varepsilon)}}$ меньше порядка любой неразложимой подгруппы $G_{(\xi,\varepsilon)}$. Назовем такие разложения *разложениями по порядку*. Формула $Final$ говорит, что разложение $G = G_{\overline{(\xi_0,\varepsilon_0)}} \oplus G_{(\xi_0,\varepsilon_0)}$, во-первых, должно быть разложением по порядку, а во-вторых, для любого разложения по порядку $G_{(\xi_0,\varepsilon_0)} = G_{(\xi_1,\varepsilon_1)} \oplus G_{(\xi_0,\varepsilon_0)\cap\overline{(\xi_1,\varepsilon_1)}}$ ранг $G_{(\xi_0,\varepsilon_0)\cap\overline{(\xi_1,\varepsilon_1)}}$ не превосходит ранга базисной подгруппы $G_{(\xi_1,\varepsilon_1)}$. Последнее означает, что ранг базисной подгруппы $G_{(\xi_0,\varepsilon_0)}$ равен финальному рангу μ_{fin}. □

Зафиксируем пару (ξ_0,ε_0) и обозначим $G_{low} = G_{\overline{(\xi_0,\varepsilon_0)}}$, $G_{fin} = G_{(\xi_0,\varepsilon_0)}$.

Лемма 5.3. *Для любой редуцированной неограниченной абелевой p-группы G существует автоморфизм ν, такой что $\nu\big|_{G_{low}} = \mathrm{id}$ и для некоторой базисной подгруппы B $\mathrm{Im}\left(\nu - \mathrm{id}\big|_{G_{fin}}\right) = B$, т. е. для любого $b \in B$ существует $a \in G_{fin}$ такой, что $\nu(a) = a + b$, и, наоборот, для любого $a \in G_{fin}$ $\nu(a) = a + b$ для некоторого $b \in B$.*

Доказательство. Возьмем базисную подгруппу B, такую что $G_{low} \subset B$. По теореме 29, существует такой эндоморфизм $\varepsilon\colon G \to B$, что $\varepsilon\big|_{G_{low}} = \mathrm{id}$ и $\mathrm{Im}\left(\varepsilon\big|_{G_{fin}}\right) = B \cap G_{fin}$, причем для каждого $a \in G_{fin}$ $\mathrm{ord}\,(\varepsilon(a)) < \mathrm{ord}\,(a)$. Тогда построим автоморфизм ν независимо на G_{low} и G_{fin} таким образом: пусть $\nu\big|_{G_{low}} = \mathrm{id}$ и $\nu\big|_{G_{fin}} = \mathrm{id} + \varepsilon$. Очевидно, мы получим требуемый автоморфизм. □

Сопоставим автоморфизму ν подгруппу B_ν с помощью формулы. Следующая формула показывает, когда неразложимая подгруппа, соответствующая экстремальной инволюции ε, лежит в группе B_ν:

$$InBase(\varepsilon, \nu) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, \varepsilon_{low}, \varepsilon_{fin} \Big(Extreme(\varepsilon_{low}) \wedge Extreme(\varepsilon_{fin}) \wedge$$
$$\wedge\, \varepsilon \in \varepsilon_{low} \oplus \varepsilon_{fin} \wedge \varepsilon_{low} \subset G_{low} \wedge \varepsilon_{fin} \subset G_{fin} \wedge$$
$$\wedge\, \exists\, \varepsilon' \subset G_{fin} \big(\varepsilon' \overset{\nu}{\mapsto} \varepsilon_{fin} \wedge \mathrm{ord}\,(\varepsilon') > \mathrm{ord}\,(\varepsilon_{fin}) \big) \Big)$$

Лемма 5.4. *Для автоморфизма ν, определяемого в лемме 5.3, соответствующая подгруппа B_ν совпадает с исходной базисной подгруппой B.*

Доказательство. Пусть G_ε лежит в B. Тогда G_ε лежит в прямой сумме $G_{\varepsilon_{low}} \oplus G_{\varepsilon_{fin}}$, где $G_{\varepsilon_{low}} \subset B \cap G_{low} =: B_{low}$ и $G_{\varepsilon_{fin}} \subset B \cap G_{fin} =: B_{fin}$. Пусть $G_{\varepsilon_{fin}} = \langle b \rangle$. Тогда существует элемент $a \in G_{fin}$ большего порядка, чем b, такой что $\nu(a) = a + b$. Тогда в качестве ε' можно взять экстремальную инволюцию, соответствующую неразложимой подгруппе $\langle a \rangle$, так как $\langle a \rangle \oplus \nu(\langle a \rangle) = \langle a \rangle \oplus G_{\varepsilon_{fin}}$.

Обратно, пусть для экстремальной инволюции ε выполнена формула $InBase$. Тогда, очевидно, $G_{\varepsilon_{low}}$ лежит в B. Теперь рассмотрим $G_{\varepsilon_{fin}} = \langle b \rangle$. Пусть $G_{\varepsilon'} = \langle a \rangle$, $\nu(a) = ka + lb$. По построению ν, $k = 1$. Так как $\langle a \rangle \oplus \langle ka + lb \rangle = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$, то $l \not\vdots\, p$. Тогда для некоторого m $\nu(ma) = ma + b$, т. е. $b \in B$. Утверждение доказано. □

Теперь нам надо записать условие на ν о том, что подгруппа B_ν является базисной. Для этого введем обозначения.

1. Формула

$$Rest_{\varepsilon}(\xi_1, \varepsilon_1) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon_2 \big(\varepsilon_2 \in (\xi_1, \varepsilon_1) \Rightarrow ord(\varepsilon_2) \leqslant ord(\varepsilon)\big)$$

выделяет пары инволюций (ξ_1, ε_1), которым соответствуют прямые суммы циклических групп порядка, не превосходящего $ord(G_{\varepsilon})$.

2. Формула

$$MaxRest_{\varepsilon}(\xi_1, \varepsilon_1) \overset{def}{\Longleftrightarrow} Rest_{\varepsilon}(\xi_1, \varepsilon_1) \wedge$$
$$\wedge \forall (\xi_2, \varepsilon_2) \big(Rest_{\varepsilon}(\xi_2, \varepsilon_2) \Rightarrow (\xi_1, \varepsilon_1) \not\subset (\xi_2, \varepsilon_2)\big)$$

выделяет пары инволюций (ξ_1, ε_1), которым соответствуют максимальные прямые суммы циклических групп порядка, не превосходящего $ord(G_{\varepsilon})$.

Лемма 5.5. *Для автоморфизма ν формула*

$$IsBase(\nu) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon_0\ Extreme(\varepsilon_0) \Rightarrow \forall (\xi, \varepsilon) \Big(\forall \varepsilon' \big(\varepsilon' \subset (\xi, \varepsilon) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{ord}(\varepsilon') \leqslant \operatorname{ord}(\varepsilon_0) \wedge InBase(\varepsilon', \nu)\big) \Rightarrow MaxRest_{\varepsilon_0}(\xi, \varepsilon)\Big)$$

истинна тогда и только тогда, когда подгруппа B_{ν} базисная.

Доказательство. Условие $IsBase(\nu)$ означает, что любое ограничение порядком $\operatorname{ord}(\varepsilon_0)$ подгруппы B_{ν} является максимальным $\operatorname{ord}(\varepsilon_0)$-ограниченным слагаемым группы G. Утверждение леммы следует из теоремы 24. □

5.3 Выделение формульных множеств в базисной подгруппе

Для того, чтобы пользоваться теоремой Шелаха для случая неразложимых прямых слагаемых базисной подгруппы B, нужно интерпретировать отображения множества экстремальных инволюций из B в себя.

Для этого по отображению f построим согласно предыдущему параграфу два автоморфизма f_1 и f_2, соответствующие базисной подгруппе B, и положим

$$f(A_{\varepsilon_1}) = A_{\varepsilon_2} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \varepsilon \big(Extreme(\varepsilon) \wedge \varepsilon \overset{f_1}{\mapsto} \varepsilon_1 \wedge \varepsilon \overset{f_2}{\mapsto} \varepsilon_2 \big).$$

Композиция отображений очевидным образом выражается через последнюю формулу.

Таким образом, мы получаем теорему Шелаха в следующем виде. Пусть Ω — множество экстремальных инволюций, соответствующих прямым слагаемым из B.

Теорема 37. *Существует формула $\widetilde{\varphi}(\dots)$, удовлетворяющая следующему условию. Пусть $\{f_i\}_{i\in\mu}$ — множество элементов из Ω. Тогда можно найти вектор $\overline{g}$ такой, что формула $\widetilde{\varphi}(f, \overline{g})$ истинна в Ω тогда и только тогда, когда $f = f_i$ для некоторого $i \in \mu$.*

5.4 Введение структуры на базисной подгруппе

С помощью теоремы 37, введем множество экстремальных инволюций, соответствующее разложению базисной подгруппы на неразложимые слагаемые. Это множество должно удовлетворять двум условиям: вопервых, инволюции в нем должны быть независимы друг с другом, вовторых, любое надмножество экстремальных инволюций должно содержать зависимые инволюции. Обозначим это множество за $\mathbf{F}_B$.

Пусть $B = \bigoplus\limits_i B_i$, где B_i — неразложимые слагаемые. Мы хотим выделить множество автоморфизмов g_{ij}, где $\operatorname{ord}(B_i) \geqslant \operatorname{ord}(B_j)$, которые бы задавали порождающие элементы b_i этих неразложимых слагаемых, а именно, $B_i = \langle b_i \rangle$ для любого i, $g_{ij}\Big|_{\bigoplus\limits_{m\neq i} B_m} = \mathrm{id}$ и $g_{ij}(b_i) = b_i + b_j$ для любых i, j.

Нам потребуется следующая техническая лемма.

Лемма 5.6. *Пусть автоморфизм g таков, что $g\Big|_{\bigoplus\limits_{m\neq i} B_m} = \mathrm{id}$ и $g(b_i) = k_1b_i + k_2b_j$ для некоторых $i, j, k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, где $B_i = \langle b_i\rangle$, $B_j = \langle b_j\rangle$. Тогда $k_1 = 1$ тогда и только тогда, когда для некоторого k и автоморфизма g_0, для которого $g_0\Big|_{\bigoplus\limits_{m\neq k} B_m} = \mathrm{id}$ и $g_0(b_k) = l_1b_k + l_2b_i$ для некоторых $l_1 \neq 0, l_2 \neq 0$, где $B_k = \langle b_k\rangle$, верно $g_0^{-1}gg_0(B_k) \subset B_k \oplus B_j$.*

Доказательство.

$$g_0^{-1}gg_0(b_k) = g_0^{-1}g(l_1b_k + l_2b_i) = g_0^{-1}(l_1b_k + l_2k_1b_i + l_2k_2b_j) =$$
$$= b_k + l_2(k_1 - 1)b_i + l_2k_2b_j.$$

Отсюда видно, что $g_0^{-1}gg_0(B_k)$ лежит в $B_k \oplus B_j$ тогда и только тогда, когда $k_1 = 1$. $\square$

Теперь зададим условия на множество автоморфизмов.

1) Для каждых i и j, $\mathrm{ord}\,(B_i) \geqslant \mathrm{ord}\,(B_j)$, в множестве должен существовать ровно один автоморфизм g_{ij}, который тождественен на $\bigoplus\limits_{m\neq i} B_m$ и переводит B_i в подгруппу $B_i \oplus B_j$, не совпадающую ни с B_i, ни с B_j. Других автоморфизмов в множестве нет.

2) Для каждого автоморфизма g_{ij} из этого множества $g_{ij}(b_i) = b_i + k_{ij}b_j$ для некоторого k_{ij}, где $B_i = \langle b_i\rangle$, $B_j = \langle b_j\rangle$. Это условие можно записать формулой благодаря лемме 5.6.

3) Для любых трех автоморфизмов g_{ij}, g_{jk}, g_{ik} из этого множества выполнено $g_{jk}^{-1}g_{ij}^{-1}g_{jk}g_{ij} = g_{ik}$. Это условие согласует коэффициенты k_{ij} между собой.

Таким образом, можем считать, что все коэффициенты k_{ij} равны 1 (выбрав соответствующие порождающие b_i), т. е. $g_{ij}(b_i) = b_i + b_j$.

Назовем полученное множество $\mathbf{F}_g$.

5.5 Интерпретация теорий второго порядка подгрупп B и D

Теперь, когда мы выделили базисную подгруппу, для интерпретации теорий второго порядка подгрупп B и D мы можем поступить точно так же, как и в предыдущих двух случаях. Однако для этого нам нужно рассмотреть еще две альтернативы. В первой положим, что группа A несчетна. Тогда существует "слой" A_i, $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, мощности μ. Мы можем определить этот "слой" с помощью формулы $Card$, подобной формуле $Card_l$ из параграфа 3.1:

$$Card(\widehat{\varepsilon}) := \forall \varepsilon |\{\varepsilon' | ord(\varepsilon') = ord(\varepsilon)\}| \leq |\{\varepsilon' | ord(\varepsilon') = ord(\widehat{\varepsilon})\}|$$

Интерпретация элементов из делимой части группы A полностью аналогична параграфу 4.2 с тем лишь отличием, что здесь все специальные множества экстремальных инволюций должны быть подмножествами $\mathbf{F}_B$. Покажем, чем отличается интерпретация редуцированной части.

Во-первых, у нас не будет различных $\mathbf{F}_i, \mathbf{F}'_i, \mathbf{F}''_i, i \in \mathbb{N}$, а будут только их объединения $\mathbf{F}, \mathbf{F}', \mathbf{F}''$.

Во-вторых, в определении $Aut_{(\xi,\varepsilon)}$ третий пункт заменится на

$$\forall f \in \mathbf{F}\, \exists f_0 \in \mathbf{F} \Big(ord(f_0) > ord(f) \wedge |\{f' \in (\xi, \varepsilon) | h(f') \in f' \oplus Cor(f)\}| < \\ < |\{f_1 \in f \oplus f_0 | f \oplus f_1 = f \oplus f_0\}| \Big),$$

что означает, что для любой $f \in \mathbf{F}$ число таких $f' \in (\xi, \varepsilon)$, что $h(A_{f'}) \subset A_{Cor(f)} \oplus A_{f'}$, меньше числа разложений $f \oplus f_0$ вида $f \oplus f_1$, $f_1 \in f \oplus f_0$, для некоторой инволюции $f_0 \in \mathbf{F}$ большего порядка, а значит, меньше порядка f.

Наконец, сложение элементов будет задаваться формулой

$$h_3 = h_1 \oplus h_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall f \in \mathbf{F}\ \exists f_0 \in \mathbf{F} \Big(ord(f_0) > ord(f) \wedge$$
$$\wedge |\{f' \in (\xi, \varepsilon) | h_3(f') \in f' \oplus Cor(f)\}| \equiv$$
$$\equiv |\{f' \in (\xi, \varepsilon) | h_1(f') \in f' \oplus Cor(f)\}| +$$
$$+ |\{f' \in (\xi, \varepsilon) | h_2(f') \in f' \oplus Cor(f)\}| \mod$$
$$|\{f_1 \in f \oplus f_0 | f \oplus f_1 = f \oplus f_0\}| \Big).$$

Счетный случай отличается только тем, что может не существовать “слоя” A_i мощности $\mu = \omega$, который нужен для кодирования элементов. Но вместо этого мы определим специальное множество $\mathbf{F}_0$, содержащее по одной экстремальной инволюций для всех порядков, и вместо инволюций порядка p_l будем использовать инволюции из $\mathbf{F}_0$. Оставшаяся часть доказательства повторяет доказательство предыдущих случаев.

Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 38. *Если кольца эндоморфизмов абелевых p-групп (либо группы автоморфизмов абелевых p-групп, $p \geqslant 3$) A_1 и A_2 элементарно эквивалентны, то группы сами группы A_1 и A_2 обладают эквивалентными в логике второго порядка делимыми частями и базисными подгруппами.*

5.6 Интерпретация логики первого порядка группы A

В этом параграфе мы хотим выразить логику первого порядка группы A в языке первого порядка ее группы автоморфизмов. Для этого достаточно интерпретировать каждый элемент группы с помощью некоторого автоморфизма и задать формулы для сравнения элементов на равенство и сложения элементов.

Заметим, что любой элемент группы A имеет конечный порядок. Поэтому существует неразложимое прямое слагаемое $B_i = \langle b_i \rangle$ базисной подгруппы B большего порядка. Тогда существует автоморфизм f, тождественный на прямом дополнении к B_i и переводящий b_i в $b_i + a$. Таким автоморфизмом и будет кодироваться элемент a.

Выделим такие автоморфизмы f формулой:

$$\exists \varepsilon_i \in \mathbf{F}_B \, \exists \varepsilon_a \Big(Extreme(\varepsilon_a) \wedge \varepsilon_i \overset{f}{\mapsto} \varepsilon_a \Big) \wedge \\ \wedge \forall \varepsilon_j \in \mathbf{F}_B \Big(\varepsilon_i \neq \varepsilon_j \Rightarrow f(\varepsilon_j) = \varepsilon_j \Big).$$

Теперь запишем формулу сравнения на равенство двух таких автоморфизмов f_1 и f_2:

$$f_1 \doteq f_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbf{F}_B \, \exists \varepsilon_a \Big(Extreme(\varepsilon_a) \wedge \varepsilon_1 \overset{f_1}{\mapsto} \varepsilon_a \wedge \varepsilon_2 \overset{f_2}{\mapsto} \varepsilon_a \wedge \\ \wedge \exists g_{ij} \in \mathbf{F}_g \big(\varepsilon_1 \overset{g_{ij}}{\mapsto} \varepsilon_2 \wedge g_{ij}^{-1} f_2 g_{ij} = f_1 \big) \Big).$$

Наконец, запишем формулу сложения таких автоморфизмов:

$$f_1 \dot{+} f_2 \doteq f_3 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists f_1', f_2', f_3' \Big(f_1 \simeq f_1' \wedge f_2 \simeq f_2' \wedge f_3 \simeq f_3' \wedge \\ \wedge \exists \varepsilon_i \in \mathbf{F}_B \big(f_1'(\varepsilon_i) \neq \varepsilon_i \wedge f_2'(\varepsilon_i) \neq \varepsilon_i \wedge f_3'(\varepsilon_i) \neq \varepsilon_i \wedge f_3' = f_1' f_2' \big) \Big).$$

Эти формулы позволяют нам интерпретировать логику первого порядка группы A.

5.7 Интерпретация ограниченной логики второго порядка группы G

Рассмотрим редуцированную абелеву p-группу G, для которой известно разложение $G = G_1 \oplus G_2 = G_{low} \oplus G_{fin}$, где группа G_{fin} имеет ранг базисной подгруппы, равный финальному рангу μ_{fin}. Также известно разложение базисной подгруппы $B = B_{low} \oplus B_{fin}$, где $B_{low} \subset G_{low}$, $G_{fin} \subset A_{fin}$. В этом параграфе мы хотим выразить логику второго порядка группы G, ограниченную μ_{fin}, а затем с помощью полученного результата — выразить логику второго порядка группы G, ограниченную мощностью B.

Нам потребуется множество независимых пар инволюций, где каждая пара соответствует прямому слагаемому группы B_{fin}. В каждом таком прямом слагаемом должны содержаться неприводимые прямые слагаемые сколь угодно высокого порядка. Всего таких пар должно быть μ_{fin}. Как мы уже видели выше, такое множество можно выделить благодаря теореме 37. Обозначим это множество через $\mathbf{F}_{fin}$.

На каждом прямом слагаемом, соответствующем паре (ξ, ε) из $\mathbf{F}_{fin}$, интерпретируем элемент группы G с помощью автоморфизма точно так же, как и в предыдущем параграфе, с тем лишь отличием, что вместо неразложимых прямых слагаемых из B надо брать неразложимые прямые слагаемые из $G_{(\xi,\varepsilon)}$. Два автоморфизма объявим эквивалентными (т. е. кодирующими один и тот же элемент группы), если они отличаются на автоморфизм, тождественный на $G_{(\xi,\varepsilon)}$:

$$f_1 \sim_{(\xi,\varepsilon)} f_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists f \big(\forall \varepsilon \in (\xi, \varepsilon) f(\varepsilon) = \varepsilon \wedge f_1 = f_2 f\big).$$

Оставшаяся часть доказательства выразимости логики второго порядка полностью аналогична предыдущим подобным рассуждениям (см. упражнение 4).

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема 39. *Пусть G и G' — редуцированные абелевы p-группы с базисными подгруппами B и B' соответственно, $p \geqslant 3$. Тогда если $\mathrm{Aut}\, G \equiv \mathrm{Aut}\, G'$, то $Th_2^{|B|}(G) = Th_2^{|B'|}(G')$.*

Доказательство. Рассмотрим данную редуцированную группу G. Пусть B — ее базисная подгруппа мощности $\mu_B = |B|$. Мы хотим выразить теорию второго порядка группы G, ограниченную мощностью μ_B, с помощью теории первого порядка группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, G$. Согласно теореме 38, в этой теории первого порядка выражается полная теория второго порядка группы B. Мы будем считать, что группа G неограничена. Как мы уже знаем, можно выразить теорию второго порядка группы G, ограниченную финальным рангом μ_{fin} базисной подгруппы B. Далее мы будем выражать формулы теории $Th_2^{\mu_B}(G)$ через формулы теорий $Th_2(B)$ и $Th_2^{\mu_{fin}}(G)$. Заметим также, что выражение формул теории $Th_2(B)$ и формул теории $Th_2^{\mu_{fin}}(G)$ может быть согласованно, т. е. существует формула, показывающая, когда в формулах этих теорий выражается один и тот же элемент $b \in B$.

Чтобы выразить теорию второго порядка группы G, ограниченную мощностью μ_B, необходимо уметь выражать произвольную "последовательность" мощности не больше μ_B элементов $g_1, g_2, \ldots$ группы G. Для этого разобьем элементы группы B на μ_B классов счетной мощности. На каждом классе независимо будет выражаться один элемент из $g_1, g_2, \ldots$ (или не выражаться ни один элемент). Разбиение элементов на классы можно осуществить одним отображением $\widetilde{f}$ на множестве B: два элемента b_1 и b_2 лежат в одном классе, если $\widetilde{f}(b_1) = \widetilde{f}(b_2)$. Условия, что всего таких классов μ_B и что каждый класс счетен, легко записываются в логике второго порядка. Также на каждом классе можно выделить унарную операцию "следующий за" с помощью отображения S. Это операция позволит отождествить каждый класс с множеством натуральных чисел. Обозначим необходимые условия на отображения $\widetilde{f}$ и S через $Correct(\widetilde{f}, S)$.

Рассмотрим класс B_k элементов группы B и элемент g_k, который мы хотим выразить на этом классе. По теореме 28, для элемента g_k существует сходящаяся к нему в p-адической топологии последовательность элементов $b_1, b_2, \ldots$ базисной подгруппы B. Такую последовательность можно задать отображением f_k из счетного класса B_k в элементы $b_1, b_2, \ldots$. На такую последовательность надо наложить условие сходимости к элементу g_k в p-адической топологии. Мы наложим более сильное условие

$$Converges(f_k, g_k) := \forall i \in B_k\ h(g_k - b_{i+1}) > h(g_k - b_i),$$

где часть $h(g_k - b_{i+1}) > h(g_k - b_i)$ означает, что элемент $h(g_k - b_{i+1})$ имеет большую p-высоту, чем элемент $h(g_k - b_i)$. Эта часть выражается следующим образом. Свойство некоторого элемента a иметь p-высоту, не меньшую n, равносильно тому, что существует последовательность элементов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ с условиями $a_0 = a, pa_i = a_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$. С помощью этого свойства легко записать в логике второго порядка условие, что один элемент имеет большую p-высоту, чем другой элемент.

Из отображений f_k можно составить частичное отображение $f = \cup_{k\in\mu_B} f_k$, кодирующее всю "последовательность" элементов $g_1, g_2, \dots$ Все такие частичные отображения выделяются условием, что на каждом классе k они либо выражают какой-то элемент $g \in G$, либо пусты:

$$Seq(f) := \forall k \Big(\big(\forall b \in B_k\ \forall g\ \neg f(b,g)\big) \vee \exists g \big(Converges(f_k, g)\big) \Big)$$

Два таких отображения будем считать одинаковыми, если они кодируют одни и те же элементы на всех классах B_k:

$$f = f' := \forall k \forall g_k \big(Converges(f_k, g_k) \Leftrightarrow Converges(f'_k, g_k)\big)$$

Оставшаяся часть доказательства теоремы, а именно — интерпретацией логики второго порядка, проходит по обычной схеме. Предложение ϕ переводится в предложение

$$\exists \widetilde{f}\ \exists S\ Correct(\widetilde{f}, S) \wedge \phi',$$

где формула ϕ' получается из предложения ϕ по следующим правилам:

1) подформула $\forall P_m(x_1, \dots, x_m)(\dots)$ заменяется на подформулу

$$\forall f_1^P \dots \forall f_m^P \big(Seq(f_1) \wedge \dots \wedge Seq(f_m) \Rightarrow (\dots)\big);$$

2) подформула $\exists P_m(x_1, \dots, x_m)(\dots)$ заменяется на подформулу

$$\exists f_1^P \dots \exists f_m^P \big(Seq(f_1) \wedge \dots \wedge Seq(f_m) \wedge (\dots)\big);$$

3) подформула $P_m(g_1, \dots, g_m)$ заменяется на подформулу

$$\exists k \Big(Converges\big((f_1^P)_k, g_1\big) \wedge \dots \wedge Converges\big((f_m^P)_k, g_m\big) \Big).$$

Полученное предложение переводится на язык первого порядка группы автоморфизмов по уже известному алгоритму. В результате получается предложение, выполняющееся тогда и только тогда, когда исходное предложение ϕ выполняется в логике второго порядка группы G, ограниченной мощностью μ_B. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что если базисная подгруппа B имеет мощность не меньшую, чем мощность континуума, то, согласно теореме 26, группа G равномощна подгруппе B. В этом случае теория второго порядка группы A, ограниченная мощностью $|B|$, совпадает с полной теорией второго порядка группы G. Получаем следующую теорему.

Теорема 40. *Пусть G и G' — редуцированные абелевы p-группы с базисными подгруппами B и B' соответственно, $p \geqslant 3$. Пусть $|B|, |B'| \geqslant 2^\omega$. Тогда*

$$\operatorname{Aut} G \equiv \operatorname{Aut} G' \Longleftrightarrow G \equiv_2 G'.$$

5.8 Интерпретация фактор-группы G/B

Мы будем говорить, что автоморфизм f_a *интерпретирует элемент* $a \in A$, если существует некоторый элемент b_i, такой что

$$f_a(b_i) = b_i + a \text{ и } f_a\Big|_{\bigoplus\limits_{m\neq i} B_m} = \operatorname{id}.$$

Множество автоморфизмов, интерпретирующих элементы группы G, обозначим за F_G.

Для начала мы хотим выделить произвольное прямое квазициклическое слагаемое

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} \cong \bar{G} \subset G/B.$$

Чтобы задать такое слагаемое, достаточно задать его квазибазис — последовательность элементов

$$\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3, \ldots \in \bar{G}, \text{ где } p\bar{g}_1 = B, p\bar{g}_2 = \bar{g}_1, p\bar{g}_3 = \bar{g}_2, \ldots,$$

которая может быть задана последовательностью представителей

$$g_1 \in \bar{g}_1, g_2 \in \bar{g}_2, g_3 \in \bar{g}_3, \ldots, \text{ где } pg_1 \in B, pg_2 \in g_1 + B, pg_3 \in g_2 + B, \ldots$$

Эта последовательность уже однозначно задается одним автоморфизмом $f_{\bar{G}}$, для которого некоторая “возрастающая цепочка” порождающих базисных элементов

$$b_1, b_2, b_3, \ldots \in B \qquad (\operatorname{ord}(b_1) < \operatorname{ord}(b_2) < \operatorname{ord}(b_3) < \ldots)$$

переходит в последовательность

$$g_1, g_2, g_3, \ldots : \quad f_{\bar{G}}(b_i) = b_i + g_i,\ i = 1, 2, \ldots$$

Будем считать эту цепочку $b_1, b_2, b_3, \ldots$ одинаковой для всех слагаемых и заранее фиксированной. Условие

$$pg_1 \in B,\ pg_2 \in g_1 + B,\ pg_3 \in g_2 + B, \ldots$$

для автоморфизма $f_{\bar{G}}$ задается непосредственно:

$$\forall b_i \quad \exists b \in B\ \Big(p(f_{\bar{G}}(b_i) - b_i) = b\Big) \vee \exists b_j\ \exists b \in B\ \Big(p(f_{\bar{G}}(b_i) - b_i) - (f_{\bar{G}}(b_j) - b_j) = b\Big).$$

Кроме того, два таких автоморфизма считаются эквивалентными, если они кодируют одну и ту же последовательность $g_1 + B, g_2 + B, g_3 + B, \ldots$ (т.е. одну и ту же последовательность $g_1, g_2, g_3, \ldots$ с точностью до элементов базисной подгруппы).

Значит, можно считать, что мы выделили множество автоморфизмов $F_{G/B}$, кодирующих квазициклические слагаемые $\bar{G} \in G/B$, и отношение эквивалентности на них $=_{G/B}$.

Также с помощью интерпретации логики первого порядка группы G несложно записать условие $g + B \in \bar{G}$, для произвольного элемента $g \in G$, интерпретируемого автоморфизмом f_g, и квазициклического слагаемого $\bar{G} \in G/B$, задаваемого автоморфизмом $f_{\bar{G}}$. Будем записывать это условие как $f_g \in f_{\bar{G}}$.

Нам также понадобятся гомоморфизмы из фактор-группы G/B в делимую часть D. Гомоморфизм $f' : G/B \to D$ можно однозначно задать автоморфизмом $f \in \operatorname{Aut} A$ таким, что $f(g) = g + f'(g + B)$ для $g \in G$. Множество всех таких автоморфизмов f, соответствующих гомоморфизмам $f' : G/B \to D$, задается двумя условиями: во-первых, f должен быть тождественным на B и на D, и, во-вторых, $f(g) - g \in D$

для любого элемента $g \in G$. Обозначим множество таких автоморфизмов за $Hom_{G/B,D}$. Утверждение следующей леммы проверяется непосредственно.

Лемма 5.7. *Пусть автоморфизм f_g интерпретирует элемент $g \in G$. Тогда автоморфизм $f^{-1}f_g^{-1}ff_g$ интерпретирует элемент $f'(g+B) \in D$.*

Доказательство. Имеем:

$$f^{-1}f_g^{-1}ff_g(b_i) = f^{-1}f_g^{-1}f(b_i+g) = f^{-1}f_g^{-1}(b_i+g+f'(g+B)) = \\ = f^{-1}(b_i+f'(g+B)) = b_i+f'(g+B).$$

Пусть элемент g' лежит в прямом дополнении к $\langle b \rangle$, и $f(g') = g'+d$, где $d \in D$. Тогда

$$f^{-1}f_g^{-1}ff_g(g') = f^{-1}f_g^{-1}f(g') = f^{-1}f_g^{-1}(g'+d) = f^{-1}(g'+d) = g'.$$

□

С помощью леммы 5.7 выразим сложение гомоморфизмов $f' \in \mathrm{Hom}\,(G/B,D)$. Для горморфизмов $f_1', f_2', f_3' \in \mathrm{Hom}\,(G/B,D)$ верно $f_1' + f_2' = f_3'$ тогда и только тогда, когда

$$f_1 +_{Hom} f_2 = f_3 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall f_g \in F_G \quad f_1^{-1}f_g^{-1}f_1f_gf_2^{-1}f_g^{-1}f_2f_g = f_3^{-1}f_g^{-1}f_3f_g,$$

где через F_G обозначено множество всех автоморфизмов, интерпретирующих элементы $g \in G$. Таким образом, мы выразили теорию первого порядка группы горморфизмов $\mathrm{Hom}\,(G/B,D)$.

Теперь мы можем выразить независимость системы квазициклических слагаемых. Условие независимости системы $F \subset F_{G/B}$ определяется следующим образом: для любого квазициклического слагаемого $\bar{g}$ из этой системы и любых гомоморфизмов $h_1, h_2 \in \mathrm{Hom}\,(G/B,D)$ существует гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}\,(G/B,D)$, совпадающий с h_1 на $\bar{g}$ и с h_2 — на остальных квазициклических слагаемых этой системы:

$$
\begin{gathered}
Independ_F \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall f_{\bar g} \in F\ \forall h_1, h_2 \in Hom_{G/B,D}\ \exists h \in Hom_{G/B,D} \\
\Big(\forall f_g \in f_{\bar g}\ (h^{-1} f_g^{-1} h f_g = h_1^{-1} f_g^{-1} h_1 f_g) \wedge \\
\wedge \forall f_{\bar g'} \in F\ \big(f_{\bar g'} \neq f_{\bar g} \Rightarrow \forall f_g \in f_{\bar g'}\ (h^{-1} f_g^{-1} h f_g = h_2^{-1} f_g^{-1} h_2 f_g)\big)\Big).
\end{gathered}
$$

Таким образом, помимо множества автоморфизмов $F_{G/B}$, кодирующих квазициклические слагаемые $\bar G \in G/B$, мы задали множество автоморфизмов $Hom_{G/B,D}$, интерпретирующих гомоморфизмы из $\mathrm{Hom}\,(G/B, D)$, и операцию сложения $+_{Hom}$. Также мы ввели формулу $Independ_F$, выражающую независимость квазициклических слагаемых, задаваемых системой автоморфизмов $F \subset F_{G/B}$.

5.9 Разложение фактор-группы G/B на прямые слагаемые

Мы хотим выделить в $F_{G/B}$ множество автоморфизмов, которые зададут разложение фактор-группы G/B на прямые слагаемые.

Для того, чтобы воспользоваться теоремой Шелаха в случае множества $F_{G/B}$, нужно интерпретировать отображения множества независимых автоморфизмов из $F_{G/B}$ в себя. Пусть задано некоторое такое отображение f. Тогда можно построить два таких гомоморфизма $h_1', h_2' \in \mathrm{Hom}\,(G/B, D)$, при которых для каждой пары автоморфизмов $f_1 \in F_{G/B}$ и $f_2 \in F_{G/B}$ соответствующие им последовательности элементов G/B имеют один и тот же образ в D тогда и только тогда, когда $f(f_1) = f_2$ (это возможно благодаря ограничению по мощности $|G| \leqslant 2^\omega, |D| \geqslant \omega$, т. е. различных образов в D достаточно). Пусть h_1 и h_2 — автоморфизмы, интерпретирующие согласно предыдущему параграфу гомоморфизмы h_1' и h_2' соответственно. Тогда свойство $f(f_1) = f_2$ может быть задано формулой $h_1^{-1} f_1^{-1} h_1 f_1 = h_2^{-1} f_2^{-1} h_2 f_2$. Отображение f может быть задано автоморфизмами h_1 и h_2.

Таким образом, мы получили теорему 37 для случая $\Omega = F_{G/B}$. Теперь с помощью этой теоремы можно выделить максимальное независимое множество в $F_{G/B}$. Вектор $\bar{g}$ задает максимальное назависимое множество тогда и только тогда, когда

$$Independ_{\widetilde{\varphi}(\cdot,\bar{g})} \wedge \forall f_g \in F_{G/B}\big(\neg\widetilde{\varphi}(f_g,\bar{g}) \Rightarrow \neg Independ_{\widetilde{\varphi}(\cdot,\bar{g})\cup\{f_g\}}\big).$$

Это множество и будет задавать разложение фактор-группы G/B на прямые слагаемые.

5.10 Интерпретация логики второго порядка группы A

Для фактор-группы G/B выделено разложение на прямую сумму квазициклических слагаемых, выражены гоморфизмы в делимую часть и отображения множества независимых квазициклических слагаемых. Это позволяет отождествить G/B с делимой частью группы A в следующем смысле.

Рассмотрим два случая. Пусть $|G/B| \leqslant |D|$. Тогда существует подгруппа группы D, которую можно отождествить с G/B с помощью изоморфизма $h \in \mathrm{Hom}\,(G/B, D)$. Выше мы показали, как в случае $|D| \geqslant |B|$ выразить на группе D теорию второго порядка групп D и B. Так как группа G/B отождествлена с подгруппой группы D, то на группе D можно выразить теорию второго порядка групп D, B и G/B. Следовательно, на группе D можно интерпретировать теорию второго порядка всей группы A. Опишем эту интерпретацию.

Разложим группу D в прямую сумму

$$D = D_D \oplus D_B \oplus D_{G/B} \oplus D_o, \text{ где } |D_D| = |D_o| = |D| = |A|, |D_B| = |B|, |D_{G/B}| = |G/$$

Зададим разложения групп D_D, D_B и $D_{G/B}$ на прямые неразложимые слагаемые (циклические и квазициклические). Эти разложения будут однозначно соответствовать разложениям групп D, B и G/B на неразложимые слагаемые соответственно. Каждый элемент группы A однозначно задается тройкой

$$\langle d, \bar{g}, b\rangle, \text{ где } \in D, \bar{g} \in G/B, b \in B,$$

причем сложение элементов соответствует покоординатному сложению таких троек. Мы будем кодировать элементы $d, \bar{g}, b$ и последовательности таких элементов специальными автоморфизмами.

Разложим группу D_o в прямую сумму $D_o = \bigoplus\limits_{i\in|A|} D_i$, где каждое слагаемое D_i является прямой суммой счетного числа квазициклических слагаемых $D_i = \bigoplus\limits_{j\in\omega} D_{ij}$. Мы зададим множество кодирующих автоморфизмов, каждый из которых на каждом слагаемом D_i будет задавать одну тройку $\langle d, \bar{g}, b\rangle$ следующим образом. Разложим элемент b по базису:

$$b = k_1 b_1 + k_2 b_2 + ... + k_l b_l.$$

Тогда кодирующий автоморфизм будет прибавлять к k_1 слагаемым D_{ij} неразложимое слагаемое из D_B, соответствующее слагаемому $\langle b_1\rangle$, к k_2 слагаемым — неразложимое слагаемое, соответствующее слагаемому $\langle b_2\rangle$, и т.д. Аналогично кодируются элементы d и $\bar{g}$ с помощью коэффициентов перед порождающими из квазибазиса. На оставшихся неразложимых слагаемых $D_{ij} \subset D_i$ кодирующий автоморфизм будет тождественным. Для проверки, когда два автоморфизма кодируют одну и ту же тройку и когда один автоморфизм кодирует сумму троек, кодируемых двумя другими, задаются специальные формулы (см. упражнение 6).

Далее интерпретация логики второго порядка устроена так же, как в предыдущем параграфе.

Пусть теперь $|G/B| > |D|$. Тогда в группе G/B существует подгруппа, которую можно отождествить с D с помощью изоморфизма $h \in \operatorname{Hom}(G/B, D)$. В этом случае теория второго порядка группы A

может быть выражена на группе G/B аналогично предыдущему случаю (все необходимые операции на группе G/B уже выражены).

Таким образом, теория второго порядка группы A выражена.

Глава 6

Заключение: критерий элементарной эквивалентности

Мы уже доказали, что для абелевых групп с делимой частью из элементарной эквивалентности групп автоморфизмов следует эквивалентность второго порядка самих групп. Обратно, пусть группы A_1 и A_2 эквивалентны в логике второго порядка. В параграфе 2.1 было доказано, что в этом случае элементарно эквивалентны кольца $\operatorname{End} A_1$ и $\operatorname{End} A_2$. А так как теория первого порядка группы автоморфизмов прямым образом выражается через теорию первого порядка кольца эндоморфизмов, то группы $\operatorname{Aut} A_1$ и $\operatorname{Aut} A_2$ также элементарно эквивалентны. Таким образом, мы получили следующий критерий.

Теорема 41. *Кольца эндоморфизмов абелевых p-групп (либо группы автоморфизмов абелевых p-групп, $p \geqslant 3$) A_1 и A_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда*

1) *если одна из групп A_1 или A_2 является редуцированной, то*

$$\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(A_1) = \mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(A_2),$$

где $\varkappa_1, \varkappa_2$ — это мощности базисных подгрупп групп A_1 и A_2, соответственно;

2) *если одна из групп A_1, A_2 не является редуцированной, то*

$$\mathrm{Th}_2(A_1) = \mathrm{Th}_2(A_2).$$

Литература

[1] Бунина Е.И., Михалев А.В. Элементарная эквивалентность колец эндоморизмов абелевых p-групп. Фундаментальная и прикладная математика, том 10 (2004), вып. 2, 135–224.

[2] Гоулд В., Михалев А.В., Палютин Е.А., Степанова А.А. Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S-полигонов. Фундаментальная и прикладная математика, 2008, 14(7), 63–110.

[3] Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М. Наука, 1980.

[4] Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А. Элементарные теории. Успехи мат. наук, 1965, 20(4), 37–108.

[5] Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. Москва, Мир, 1977.

[6] Кокорин А. И., Пинус А. Г. Вопросы разрешимости расширенных теорий. Успехи мат. наук, 1978, 33(2), 49–84.

[7] Куликов Л.Я. К теории абелевых групп произвольной мощности. Мат. сборник, 1941, 9, 165–182.

[8] Куликов Л.Я. К теории абелевых групп произвольной мощности. Мат. сборник, 1945, 16, 129–162.

[9] Куликов Л.Я. Обобщенные примарные группы, I. Труды ММО, 1 (1952), 247–326; II. Труды ММО, 2 (1953), 85–167.

[10] Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука. — 1970.

[11] Ремесленников В. Н., Романьков В. А. Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп. Алгебра. Геометрия. Топология. Итоги науки. ВИНИТИ, 1983, 3–79.

[12] Сакс Дж. Теория насыщенных моделей. — Пер. с англ. М.: Мир, 1976.

[13] Теория моделей. Справочная книга по математической логике. Часть I. Перев. с англ. М.: Наука, 1982.

[14] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. т. 1,2. Мир, Москва, 1974.

[15] Baer R. Automorphism rings of primary abelian operator groups. Ann. Math., 44 (1943), 192–227.

[16] Baer R. Der kern, eine charakteristische Untergruppe. Compositio Math., 1 (1934), 254–283.

[17] Bunina E.I., Mikhalev A.V. Elementary properties of linear and algebraic groups. Journal of Mathematical Sciences, 2002, 110(3), 2595-2659.

[18] Bunina E.I., Mikhalev A.V. Elementary properties of linear groups and related questions. Journal of Mathematical Sciences, 2004, 123(2), 3921-3985.

[19] Boyer D.L. On the theory of p-basic subgroups of abelian groups. Topics in Abelian Groups, 323–330 (Chicago, Illinois, 1963).

[20] Erdélyi M. Direct Summands of abelian torsion groups. Acta Univ. Debrecen, 1955, 2, 145–149.

[21] Fuchs L. Notes on abelian groups, I. Ann. Univ. Sci. Budapest, 1959, 2, 5–23; II, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1960, 11, 117–125.

[22] Fuchs L. On the srtucture of abelian p-groups. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1953, 4, 267–288.

[23] Charles B. Le centre de l'aneeau des endomorphismes groupe abélien primaire. C.R. Acad. Sci. Paris, 236 (1953), 1122-1123.

[24] Kaluzhnin Sur lesgroupes abeliens primaires sans elements de hauteur infinie. C. R. Acad. Sci. Paris, 225 (1947), 713Ч-715.

[25] Kaplansky I. Infinite abelian groups. University of Michigan Press., Ann. Arbor, Michigan, 1954 and 1969.

[26] Leptin H. Abelsche p-Gruppen und ihre Automorphismengruppen, Math. Z., 73 (1960), 235–253.

[27] Liebert W. Isomorphic automorphism groups of primary abelian groups. II. Contemp. Math., 87 (1989), 51–59.

[28] Prufer H. Untersuchungen uber die Zerlegbarkeit der abzahlbaren primaren abelschen Gruppen. Math. Z., 1923, 17, 35–61.

[29] Shelah S. Interpreting set theory in the endomorphism semi-group of a free algebra or in the category. Annales Scientifiques L'universite Clermont, 1976, 13, 1–29.

[30] Schultz P. Automorphisms which determine an Abelian p-group. Abelian groups, module theory, and topology, Marcel Dekker Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 201, Eds. D. Dikranjan and L. Salce, 1998, 373–379.

[31] Szele T. On direct decomposition of abelian groups. J. London Math. Soc., 1953, 28, 247–250.

[32] Szele T. On the basic subgroups of abelian p-groups. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 5 (1954), 129–141. Math. Soc., 28 (1953), 247–250.

[33] Tarski A., Mostowski A., Robinson R. M. Undecidable theories. Amsterdam. North-Holland Publishing Comp., 1953.

Работы автора по теме диссертации

[34] Бунина Е.И., Ройзнер М.А. Элементарная эквивалентность групп автоморфизмов абелевых p-групп. Фундаментальная и прикладная математика, 2009, 15, вып. 7, 81–112.

[35] Ройзнер М.А. Элементарная эквивалентность групп автоморфизмов редуцированных абелевых p-групп. Вестник МГУ. Серия математика, механика. 2013, 3, 29–34.

[36] Ройзнер М.А. Критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов редуцированных абелевых p-групп. Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, 17, вып. 5, 157–163.

[37] Ройзнер М.А. Критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов абелевых нередуцированных p-групп. Фундаментальная и прикладная математика, 2013, 18, вып. 1, 159–170.

[38] Бунина Е.И., Михалев А.В., Ройзнер М.А. Критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов и колец эндоморфизмов абелевых p-групп. Доклады академии наук, 2014, 457, вып. 1, 11–12.