

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор ФГБОУ ВПО

«Московский педагогический  
государственный университет»,  
академик РАН, академик РАО,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

\_\_\_\_\_ Семенов Алексей Львович  
«5» сентября 2014 г.

### ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию Ройзнера Михаила Александровича  
«Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов и групп  
автоморфизмов абелевых  $p$ -групп»  
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по  
специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертационная работа Ройзнера М.А. посвящена исследованию связей между теориями первого порядка колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов абелевых  $p$ -групп и теориями второго порядка самих групп. Применение теоретико-модельных методов в теории групп приводит к появлению новых интересных задач. Исследования в этой области связаны с именами А.И. Мальцева, В.Н. Ремесленникова, Е.А. Романькова, А. Tarski, А. Mostowski, R.M. Robinson, А.И. Кокорина, А.Г. Пинуса, Ю.Л. Ершова, А.В. Михалева, Е.И. Буниной и др. А.В. Михалевым и Е.И. Буниной были установлены зависимости между теориями первого порядка колец эндоморфизмов абелевых  $p$ -групп и теориями второго порядка самих групп для некоторых конкретных случаев, но общий критерий не был получен. Получение такого критерия является одной из задач представленной диссертации.

Диссертация состоит из введения, шести глав и списка цитированной литературы, включающего 38 наименований. Общий ее объём составляет 98 страниц.

Во введении дается обзор полученных ранее результатов, относящихся к данной проблематике, приводятся формулировки основных результатов диссертации, дается краткое содержание диссертации по главам.

Первая глава имеет вспомогательный характер, в ней содержатся основные определения и факты из теории абелевых групп и теории моделей, необходимые для дальнейшего изложения.

С помощью построения модели кольца эндоморфизмов абелевой группы по модели самой группы во второй главе диссертации доказывается, что из эквивалентности абелевых групп в языке второго порядка следует

элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов этих групп. Далее выводится формула в языке второго порядка, которая справедлива только для редуцированных  $p$ -групп, базисные подгруппы которых счётные. Ройзнером показано, что эквивалентность теорий второго порядка таких групп влечет элементарную эквивалентность колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов этих групп.

Во втором параграфе второй главы рассматриваются свойства инволюций в группах автоморфизмов абелевых  $p$ -групп при  $p > 2$ . В третьем параграфе рассматриваются понятия, необходимые для работы с кольцами эндоморфизмов.

В четвертом параграфе приводятся формулы языка первого порядка группы автоморфизмов, которые позволяют разделить все абелевы  $p$ -группы на три подкласса, исследованию каждого из которых отводится отдельная глава.

В третьей главе исследуются свойства ограниченных абелевых  $p$ -групп. Здесь известная теорема Шелаха адаптируется для группы автоморфизмов и позволяет выразить теорию второго порядка всей группы через теорию первого порядка ее группы автоморфизмов.

Четвертая глава посвящена исследованию абелевых  $p$ -групп с ненулевой делимой частью и ограниченной редуцированной.

В пятой главе рассматриваются группы с неограниченной базисной подгруппой. Здесь теории второго порядка делимой части и базисной подгруппы выражаются в языке первого порядка группы автоморфизмов. Ройзнером показано, что элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов абелевых  $p$ -групп или групп автоморфизмов абелевых  $p$ -групп при  $p > 2$  влечет эквивалентность делимых частей и базисных подгрупп таких групп в логике второго порядка.

Сопоставляя с помощью автоморфизмов каждому элементу группы элемент базисной подгруппы, автор получает выражение логики первого порядка всей группы. Затем интерпретируется ограниченная логика второго порядка редуцированной группы. В итоге получена интерпретация полной теории второго порядка всей группы.

В шестой главе формулируется критерий элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов (групп автоморфизмов).

По нашему мнению, результаты глав 3 и 5 являются наиболее значимыми и интересными. Они будут полезны специалистам, работающим в данной области.

Таким образом, к основным достижениям работы можно причислить следующие:

1. найден общий критерий элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов абелевых  $p$ -групп;
2. найден критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов редуцированных абелевых  $p$ -групп при  $p > 2$ ;

3. найден критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов абелевых  $p$ -групп при  $p > 2$  с ненулевой делимой частью;
4. разработаны новые методы выражения свойств языка второго порядка абелевых  $p$ -групп через свойства языка первого порядка их групп автоморфизмов при  $p > 2$  и колец эндоморфизмов.

В диссертации, кроме указанных новых методов, применяются методы классических теорий: теории абелевых групп и теории моделей.

Отметим некоторые недостатки.

Приводимые в диссертации известные факты из книг часто не имеют четкой ссылки – только ссылка на книгу, без указания номера теоремы или хотя бы номера параграфа в книге, что затрудняет чтение.

В определении квазициклической группы (стр.20) потерян показатель степени “ $n$ ”.

В формулировке теоремы 30 вместо «центр ... состоит из умножения» должно быть написано «центр ... состоит из умножений». Та же ошибка на странице 48.

В третьей строке снизу на странице 34 написано «элементы модели  $Ax$ » вместо «элементы модели  $A$ ».

Номерами 2.1 и 2.5 (2.2 и 2.6) отмечена одна и та же формула. При этом ссылки делаются только на номер 2.5 (2.6).

На странице 60 упомянута теорема 2.35 вместо 3.5.

На странице 66 предлагается рассмотреть предложение «фи», которое сразу переименовывается в «пси».

На странице 71 «как в параграфе 3.3» вместо «как в параграфе 3.3».

В формулировке теоремы 38 лишнее слово «группа».

На страницах 84 и 92 говорится об упражнениях 4 и 6, которых нет в работе.

В теореме 41 плохо согласуются слова «когда если».

Данные недостатки являются несущественными и не влияют на общее хорошее впечатление о работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах, из них 3 написаны автором самостоятельно, 2 в соавторстве с научными руководителями. Статьи опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК Российских рецензируемых научных журналов, и журналах, входящих в базу цитирования Scopus. В диссертации имеются ссылки на все эти работы. Содержание диссертации соответствует содержанию автореферата и опубликованных работ.

Диссертация Ройзнера Михаила Александровича представляет собой полноценное научное исследование; полученные результаты являются существенным продвижением в применении теоретико-модельных методов в теории абелевых групп. Работа имеет теоретический характер. Все результаты диссертации являются новыми, снабжены строгими математическими доказательствами.

Все изложенное позволяет сделать вывод, что диссертация представляет собой законченную научно-квалификационную работу на актуальную тему, полностью отвечает требованиям п.п. 9,10,11,13,14 Положения о порядке присуждения ученых степеней ВАК Министерства образования и науки РФ от 24 сентября 2013 г. № 842, предъявляемым к кандидатским диссертациям. Диссертация соответствует специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел» и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор Михаил Александрович Ройзнер заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв составлен профессором кафедры алгебры, к.ф.-м.н., доцентом Е.Е. Ширшовой и утвержден на заседании кафедры алгебры МПГУ «1» сентября 2014 г., протокол №1.

Заведующий кафедрой алгебры МПГУ,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Фомин А.А.

**Контактная информация:**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский педагогический государственный университет»

Адрес: 119991, г. Москва, ул. Малая Пироговская, д. 1, стр. 1, каб. 123

E-mail: algebra@mpgu.edu.ru

Телефон: (499) 264-25-56