Отзыв

научных руководителей на диссертационную работу Ройзнера Михаила Александровича «Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов абелевых *p*-групп», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Актуальность темы диссертации. В диссертации М.А. Ройзнера рассматриваются вопросы, относящиеся к теории моделей производных структур — одному из разделов теории моделей, напрямую связанному с алгеброй.

Известна знаменитая теорема Бэра-Капланского о том, что любая периодическая абелева группа определяется своим кольцом эндоморфизмов. В 1970-1980-е годы Лептин и Либерт доказали аналогичные теоремы о группе автоморфизмов абелевой *p*-группы при $p>2$ (случай $p=2$ пока остается открытым).

С точки зрения теории моделей было интересно понять, какую часть теории абелевой группы определяет теория первого порядка кольца ее эндоморфизмов и группы ее автоморфизмов, т.е. получить аналоги как теоремы Бэра-Капланского, так и теорем Лептина и Либерта для элементарной эквивалентности абелевых групп. В 2004 году Е.И. Бунина и А.В. Михалев доказали теорему, которая утверждала, что в большинстве случаев элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов абелевых *p*-групп равносильна эквивалентности самих групп в полной логике второго порядка. Однако в некоторых случаях критерия не получалось: для элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов требовалась эквивалентность в полной логике второго порядка, а из элементарной эквивалентности выводилась эквивалентность в логике второго порядка, ограниченной некоторым кардинальным числом. Таким образом, в 2004 году полного критерия элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов абелевых *p*-групп получено не было.

М.А. Ройзнер в своей диссертации рассмотрел случай элементарной эквивалентности групп автоморфизмов абелевых *p*-групп (при $p>2$) и при этом получил критерий этой элементарной эквивалентности, также в результате закрыв вопрос об критерии элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов этих групп. В результате его работы все исследования по элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов произвольных абелевых *p*-групп и групп автоморфизмов абелевых *p*-групп при $p>2$ полностью завершены.

Содержание диссертации. В диссертации получены результаты, которые представлены в следующей теореме:

Теорема. Кольца эндоморфизмов абелевых *p*-групп (либо группы автоморфизмов абелевых p-групп, $p>2$) A_1 и A_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда

1) если одна из групп является редуцированной, то совпадают их теории второго порядка, ограниченные мощностями их базисных подгрупп;

2) если одна из групп A_1, A_2 не является редуцированной, то совпадают их полные теории второго порядка.

В качестве следствия получено, что при $p>2$ элементарные теории группы автоморфизмов абелевой p-группы и ее кольца эндоморфизмов взаимно интерпретируемы.

В главе 1 вводятся определения и известные теоремы, необходимые в данной работе. Первый параграф посвящен сведениям из теории абелевых групп. В нем вводятся основные понятия об абелевых p-группах, рангах абелевых групп, делимых группах, сервантных и базисных подгруппах, кольцах эндоморфизмов и группах автоморфизмов абелевых p-групп. Второй параграф посвящен необходимым сведениям из теории моделей. В нем определяются язык и модели второго порядка, эквивалентность второго порядка, язык второго порядка абелевых групп, ограниченные теории второго порядка.

Глава 2 посвящена доказательству импликаций основной теоремы в обратную («легкую») сторону, а также подготовке к доказательству импликаций в прямую сторону. В первом параграфе выражается элементарная теория кольца эндоморфизмов (а значит, и группы автоморфизмов) в теории второго порядка абелевой группы. Вся дальнейшая часть работы посвящена прямой импликации основного результата. Во втором параграфе вводятся дополнительные понятия, помогающие работать с группой автоморфизмов: инволюции и экстремальные инволюции. Инволюции используются для того, чтобы выразить разделение абелевой группы в прямую сумму двух подгрупп. Экстремальные инволюции используются для выделения неразложимых прямых слагаемых. Так как с помощью одной инволюции нельзя выразить произвольное прямое слагаемое, а можно выразить только разделение на прямую сумму двух слагаемых, вводится понятие пары инволюции — набора из двух коммутирующих инволюций, одна из которых экстремальная. С помощью таких пар можно выразить произвольные прямые слагаемые группы. Приводятся формулы, выражающие отношения между прямыми слагаемыми (такие как прямая сумма, пересечение, подмножество). В третьем параграфе вводятся понятия, помогающие работать с кольцом эндоморфизмов: проекторы и неразложимые проекторы. Они используются для выделения прямых слагаемых и неразложимых прямых слагаемых. Все отношения между прямыми слагаемыми также выражаются формулами для проекторов. В четвертом параграфе все абелевы p-группы разделяются на три подкласса, которые дальше будут рассматриваться по отдельности

Глава 3 посвящена подклассу ограниченных p-групп. В первом параграфе выделяются прямые слагаемые, отвечающие разложению группы на «слои», где каждый «слой» состоит из неразложимых прямых слагаемых определенного порядка. Во втором параграфе к случаю групп автомрфизмов абелевых p-групп адаптируется теорема Шелаха о выразимости теории второго порядка языка множеств в полугруппе эндоморфизмов свободной алгебры. В третьем параграфе выделяется множество прямых слагаемых, которые нужны для интерпретации элементов группы. Наконец, в последнем параграфе показывается, как выразить теорию второго порядка всей группы в теории первого порядка группы ее автоморфизмов. Таким образом, теорема доказывается для первого класса групп (ограниченные *p*-группы).

Глава 4 посвящена второму подклассу групп — суммам ограниченных и делимых.

Глава 5 посвящена самому сложному третьему подклассу — группам с неограниченной базисной подгруппой. Именно в этом случае проявляется разница в критериях элементарной эквивалентности в зависимости от наличия ненулевой делимой части. В первых двух параграфах базисная подгруппа выделяется формулой. В третьем параграфе вновь доказывается применимость теоремы Шелаха, теперь — для случая прямых слагаемых базисной группы. Четвертый параграф посвящен заданию структуры на базисной подгруппе. В пятом параграфе выражается теорию второго порядка делимой части и базисной подгруппы в языке первого порядка группы автоморфизмов. В шестом параграфе выражается логика первого порядка всей группы. Оставшаяся часть главы относятся к группам с ненулевой делимой частью. В восьмом параграфе интерпретируется фактор-группа редуцированной группы по базисной подгруппе в языке первого порядка группы автоморфизмов. С помощью этого в параграфе 9 показывается применимость теоремы Шелаха для случая квазициклических слагаемых из фактор-группы. Наконец, в последнем параграфе интерпретируется полная теория второго порядка всей группы.

Последняя глава подводит итог всей работе и объединяет все результаты для всех случаев. В ней формулируется критерий элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов (или групп автоморфизмов) — уже приведенная выше теорема.

Все основные результаты диссертации являются новыми и интересными и получены автором самостоятельно. При их получении автор преодолел ряд серьезных трудностей. Полученные результаты являются существенным продвижением в исследованиях элементарной эквивалентности производных структур, они позволили наконец-то доказать полный критерий элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов абелевых *p*-групп. В диссертации используются методы теории моделей и методы линейной алгебры, а также комбинаторики. Результаты диссертации могут найти применение в дальнейших исследованиях по абелевым группам и по элементарной эквивалентности производных структур. Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в работах автора. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Считаем, что диссертационная работа М.А. Ройзнера «Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов абелевых *p*-групп» отвечает современным требованиям ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук

Е.И. Бунина

доктор физико-математических наук, профессор

А.В. Михалев

Подписи Е.И. Буниной и А.В. Михалева удостоверяю

И.о. декана
механико-математического
факультета МГУ им. М.В.Ломоносова
профессор

В.Н. Чубариков

16 июня 2014 года