ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова»

На правах рукописи

Краснов Владимир Александрович

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ОБЪЕМОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2014

Работа выполнена в ГАОУ ВПО "Московский государственный областной социально–гуманитарный институт"

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Лексин Владимир Павлович, доктор физико-математических наук, профессор Мантуров Василий Олегович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Ахметьев Петр Михайлович (ФГУН Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН, ведущий научный сотрудник), кандидат физико-математических наук Шнурников Игорь Николаевич (кафедра прикладной математики ФГАОУ ВПО НИУ "Высшая школа экономики")

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки "Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН"

Защита состоится 26 сентября 2014 года в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП—1, Ленинские горы, д.1, ФГБОУ ВПО имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А.

Автореферат разослан 26 августа 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена вычислению объемов трехмерных неевклидовых многогранников. Основной акцент в ней сделан на гиперболических многогранниках.

Вычисление объема многогранника в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ – классическая задача, известная со времен античности и не потерявшая актуальности в наши дни.

Что касается неевклидовых пространств $\mathbb{S}^3$ и $\mathbb{H}^3$, то здесь ситуация еще более сложная. Объем бипрямоугольного тетраэдра (ортосхемы) в сферическом пространстве $\mathbb{S}^3$ был найден Л. Шлефли[1], а Н.И. Лобачевский[2] и Я. Бойяи[3] независимо друг от друга вычислили объем ортосхемы в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$.

Объем идеального гиперболического тетраэдра был найден еще в 1835 году Н.И. Лобачевским, а в 1982 году Дж. Милнор[4] представил этот результат в более элегантном виде.

В 1993 году Э.Б. Винбергом[5] были получены формулы объемов гиперболических пирамид, имеющих вершины на бесконечности.

Для произвольного гиперболического тетраэдра формулы объема долгое время были неизвестны. Лишь на рубеже веков эта проблема была полностью решена в работах Ю. Чо и Х. Кима[6], Дж. Мураками и У. Яно[7], а также Дж. Мураками и А. Ушиджимы[8]. Эти формулы являются

[1] Schläfli L. Theorie der vielfachen Kontinuität, In: Gesammelte mathematische Abhandlungen. — Basel: Birkhäuser, 1950.

[2] Лобачевский Н. И. Воображаемая геометрия // Полное собр. соч. Т. 3. — М.-Л.:1949. — 536 с.

[3] Bolyai J. Appendix. The Theory of Space // Janos Bolyai (F. Karteszi ed.). — Budapest:1987. — 239 p.

[4] Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — *V. 6*, є 1. — P. 307–332.

[5] Винберг Э. Б. Объемы неевклидовых многогранников // Успехи математических наук. — 1993. — *2 (290)*. — С. 17–46.

[6] Cho Yu., Kim H. On the volume formula for hyperbolic tetrahedra // Discrete Comput. Geom. — 1999. — *V. 22*. — P. 347–366.

[7] Murakami J., Yano M. On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron // Comm. Anal. Geom. — 2005. — *V. 13*. — P. 379–400.

[8] Murakami J., Ushijima A. A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths // Journal of Geometry. — 2005. — *V.83*, є 1-2. — P. 153–163.

довольно громоздкими и трудно обозримыми. Следует отметить, что во всех вышеперечисленных работах объем выражался как алгебраическая сумма 16 значений дилогарифмов Эйлера или функций Лобачевского. Г. Лейбону[9] удалось объяснить геометрический смысл полученных формул с точки зрения симметрий Редже, а полное геометрическое доказательство было дано Я.Моханти[10]. В 2004 году Д.А. Деревниным и А.Д. Медных[11]. была получена явная интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах его двугранных углов. Заметим, что оригинальное доказательство этой формулы основывается на теореме синусов–тангенсов, определяющей геометрические соотношения между длинами ребер тетраэдра и его двугранными углами. Кроме того, одним из ключевых шагов доказательства является применение дифференциальной формулы Шлефли, выражающей дифференциал объема через длины ребер и дифференциалы двугранных углов. В этой же работе было показано, что из формулы Деревнина–Медных вытекает полученная ранее формула Мураками–Яно.

Наконец, в 2011 году Дж. Мураками[12] были предложены формулы объема произвольного сферического тетраэдра в терминах двугранных углов и длин ребер.

Нельзя не упомянуть, что впервые формулу объема произвольного неевклидова тетраэдра выписал в 1906 году итальянский герцог Г.Сфорца[13]. К сожалению, формула Сфорцы содержит многозначную функцию. При этом в работе не указано, какая ее ветвь дает объем. В связи с этим формула Сфорцы долгое время была полностью забыта.

В 2002 году Я.Моханти были вычислены объемы симметричного идеального октаэдра и идеальной треугольной призмы, а в 2008 году Н.В. Абросимовым, М. Годой–Молина и А.Д. Медных[14] были получены

[9] Leibon G. The symmetries of hyperbolic volume // Preprint. — 2002.

[10] Mohanty Y. The Regge symmetry is a scissors congruence in hyperbolic space // Algebraic and Geometric Topology. — 2003. — *3*. — P. 1–31.

[11] Derevnin D. A., Mednykh A. D. A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron // Rus. Math. Surv. — 2005. — *60(2):346*

[12] Murakami J. The volume formulas for a spherical tetrahedron // Arxiv e-prints, Arxiv:1011.2584v4. — 2011. — 7 pp.

[13] Sforza G. Spazi metrico-proiettivi // Ric. Esten. Different. Ser. — 1906. — *V.8*, є 3. — P. 3–66.

[14] Абросимов Н. В., Годой-Молина М., Медных А. Д. Об объеме сферического октаэдра с симметриями // Современная математика и ее приложения. —2008. —*60*. — С. 3–12.

формулы объемов трехмерных сферических многогранников, обладающих нетривиальными симметриями, в частности, mmm- и 2|m-октаэдров. Кроме того, в 2011 году Г.А. Байгонакова, М. Годой-Молина и А.Д. Медных[15] вычислили объем гиперболического mmm-октаэдра в простейшей геометрической ситуации.

В настоящей работе приведен вывод формулы Деревнина–Медных из формулы Мураками–Яно; выписана интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах длин его ребер; с помощью формулы Деревнина–Медных объема произвольного гиперболического тетраэдра получены явные интегральные формулы объема *произвольных* гиперболических mmm- и $2|m$-октаэдров и найдены критерии существования таких октаэдров в терминах двугранных углов; описан алгоритм получения формул объема неевклидовых mm2- и 4|m-октаэдров в терминах двугранных углов; вычислены объемы *собственных* остроугольных гиперболических треугольных и четырехугольных призм при некоторых ограничениях на ее двугранные углы, а также приведен алгоритм получения аналогичных формул для произвольных выпуклых остроугольных компактных гиперболических многогранников. В случае симплициальных многогранников ограничения, при которых существует единственный с точностью до движения пространства выпуклый гиперболический многогранник с заданным набором двугранных углов, были найдены в 1970 году Е.М. Андреевым[16].

Цели диссертационной работы

1) Вывести формулу Деревнина–Медных из формулы Мураками–Яно.

2) Получить интегральную формулу объема гиперболического тетраэдра в терминах длин ребер, выражающую объем интегралом по отрезку вещественной прямой от вещественнозначной подынтегральной функции;

3) Найти критерии существования гиперболических mmm- и 2|m-октаэдров, заданных наборами определяющих их двугранных углов;

[15] Байгонакова Г. А., Годой-Молина М., Медных А. Д. О геометрических свойствах гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией // Вестник Кемеровского госуд. университета. — 2011. — *3/1 (47)*. — С. 13–18.

[16] Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского // Математический сборник. — 1970. — *81 (123)*. — С. 445–478.

4) Вычислить объем:

а) гиперболических октаэдров, обладающих нетривиальными симметриями;

б) собственных остроугольных гиперболических многогранников при некоторых ограничениях на их двугранные углы.

Научная новизна

Основные результаты работы являются новыми и заключаются в следующем:

- Приведен вывод интегральной формулы Деревнина–Медных объема произвольного гиперболического тетраэдра из формулы Мураками–Яно;
- Получена интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах длин ребер;
- Найдены явные интегральные формулы объема гиперболических октаэдров, обладающих нетривиальными симметриями;
- Доказаны критерии существования гиперболических октаэдров с симметриями в терминах двугранных углов;
- Получены формулы объема собственных треугольных и четырехугольных гиперболических призм при некоторых ограничениях на их двугранные углы;
- Найден алгоритм вычисления объема произвольного гиперболического остроугольного выпуклого компактного многогранника в терминах двугранных углов.

Теоретическая и практическая ценность

Настоящая работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы для дальнейшего изучения объемов неевклидовых многогранников, в частности, для вычисления объемов многогранников в пространствах размерности $n \geq 4$. Работа представляет несомненный интерес для специалистов по маломерной топологии и неевклидовым геометриям.

Апробация

Основные результаты диссертации были доложены на следующих семинарах и конференциях:

- семинар "Дифференциальная геометрия и приложения" (Москва, МГУ, 3 марта 2014) под руководством акад. РАН А.Т. Фоменко
- семинар "Современные геометрические методы" (Москва, МГУ, 30 октября 2013) под руководством акад. РАН А.Т. Фоменко, А.В. Болсинова, А.С. Мищенко, А.А. Ошемкова, Е.А. Кудрявцевой и И.М. Никонова;
- семинар "Алгебраическая топология и ее приложения" имени М.М. Постникова (Москва, МГУ, 20 ноября 2012) под руководством член-корр. РАН В.М. Бухштабера, А.В. Чернавского, И.А. Дынникова, Т.Е. Панова, Л.А. Алании, А.А. Гайфуллина, Д.В. Миллионщикова;
- семинар "Инварианты трехмерных многообразий" (Новосибирск, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 18 марта 2014) под руководством член-корр. РАН А.Ю. Веснина;
- семинар "Узлы и теория представлений" (Москва, МГУ, 6 ноября 2012 и 5 марта 2013) под руководством В.О.Мантурова, Д.П.Ильютко и И.М.Никонова;
- семинар по аналитической теории дифференциальных уравнений (Москва, МИРАН, неоднократно с 2011 по 2012) под руководством акад. РАН Д.В. Аносова и В.П. Лексина;
- семинар по дифференциальным и функционально–дифференциальным уравнениям (Москва, РУДН, 22 октября 2013) под руководством А.Л. Скубачевского;
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 29 июня–4 июля 2012)
- Всероссийская математическая школа-конференция "Понтрягинские чтения" (Воронеж, май 2011–2013)

Публикации

По теме диссертации опубликовано 11 печатных работ, из них 2 в изданиях по перечню ВАК.

Объем и структура диссертации

Диссертация изложена на 95 страницах печатного текста. Она состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы. Список литературы состоит из 47 наименований работ российских и зарубежных авторов.

Содержание работы

Введение содержит краткий обзор исследований по теме диссертации, а также список результатов, выносимых на защиту. Также во введении обосновывается актуальность темы диссертации, рассказывается об основных методах диссертационного исследования, о теоретическом значении полученных результатов.

В первой главе подробно изучаются неевклидовы тетраэдры, причем основной акцент делается на гиперболическом случае. Начальные параграфы содержат основные сведения, необходимые для вычисления их объема. Затем приводится обзор основных результатов, относящихся к объемам неевклидовых тетраэдров. Особая роль отводится интегральной формуле Деревнина–Медных объема произвольного гиперболического тетраэдра, на которой строятся дальнейшие рассуждения настоящей работы.

Теорема 11 *(Деревнин, Медных, 2004). Пусть* $T = T(A, B, C, D, E, F)$ *— гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого* A, B, C *лежат при одной вершине, а* D, E, F *— противолежащие им двугранные углы. Тогда объем гиперболического тетраэдра* $\mathrm{Vol(T)}$ *выражается интегралом по отрезку вещественной прямой с вещественнозначной подынтегральной функцией*

$$\mathrm{Vol}(T) = -\frac{1}{4}\int_{Z_2}^{Z_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+A+B+D+E}{2}\sin\frac{\xi+A+C+D+F}{2}\sin\frac{\xi+B+C+E+F}{2}}{\cos\frac{\xi+A+B+C}{2}\cos\frac{\xi+A+E+F}{2}\cos\frac{\xi+B+D+F}{2}\cos\frac{\xi+C+D+E}{2}}\right| d\xi,$$

где

$$Z_1 = \mathrm{arctg}\frac{k_2}{k_1} - \mathrm{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$Z_2 = \mathrm{arctg}\frac{k_2}{k_1} + \mathrm{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

а вещественные числа k_1, k_2, k_3 *и* k_4 *имеют вид:*

$$k_1 = -(\cos(A+B+C+D+E+F) + \cos(A+D) + \cos(B+E) + \cos(C+F) +$$

$$+\cos(D+E+F) + \cos(D+B+C) + \cos(A+E+C) + \cos(A+B+F)),$$

$$k_2 = \sin(A+B+C+D+E+F) + \sin(A+D) + \sin(B+E) + \sin(C+F) +$$

$$+\sin(D+E+F) + \sin(D+B+C) + \sin(A+E+C) + \sin(A+B+F)),$$

$$k_3 = 2(\sin A \sin D + \sin B \sin E + \sin C \sin F),$$

$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}.$$

В конце главы приводится вывод этой формулы из теоремы Мураками–Яно объема произвольного гиперболического тетраэдра, который отличается от доказательства, предложенного в оригинальной работе.

Теорема 10 *(J. Murakami, M.Yano, 2001). Пусть* $T = T(A, B, C, D, E, F)$ *— гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого* A, B, C *лежат при одной вершине, а* D, E, F *— противолежащие им двугранные углы. Тогда объем тетраэдра* T *задается формулой*

$$\mathrm{Vol}(T) = \left| \mathrm{Im}\left\{ \frac{U(z_1, T) - U(z_2, T)}{2} \right\} \right|,$$

где

$$a = \exp(iA), b = \exp(iB), c = \exp(iC), d = \exp(iD), e = \exp(iE), f = \exp(iF),$$

$$U(z,T) = \frac{1}{2}\{Li_2(z) + Li_2(z\,a\,b\,d\,e) + Li_2(z\,a\,c\,d\,f) + Li_2(z\,b\,c\,e\,f) -$$

$$-Li_2(-z\,a\,b\,c) - Li_2(-z\,a\,e\,f) - Li_2(-z\,b\,d\,f) - Li_2(-z\,c\,d\,e)\},$$

$Li_2(z)$ *— ветвь дилогарифма Эйлера*

$$Li_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t}dt \quad (z \in \mathbb{C}\backslash[1;+\infty)),$$

отвечающая ветви логарифмической функции $\ln\theta = \ln|\theta| + i\arg\theta$ *(*$-\pi < \arg\theta < \pi$*), а* z_1 *и* z_2 *суть решения квадратного уравнения*

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0,$$

с коэффициентами

$$\alpha = abcdef(abcdef + ad + be + cf + abf + ace + bcd + def),$$
$$\beta = -abcdef\{\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(d-\frac{1}{d}\right)+\left(b-\frac{1}{b}\right)\left(e-\frac{1}{e}\right)+\left(c-\frac{1}{c}\right)\left(f-\frac{1}{f}\right)\},$$
$$\gamma = 1 + abde + acdf + bcef + abc + aef + bdf + cde.$$

В заключение первой главы получена формула объема гиперболического тетраэдра в терминах длин ребер.

Теорема 12. *Пусть* $T = T(l_A, l_B, l_C, l_D, l_E, l_F)$ *– гиперболический тетраэдр, длины ребер которого суть* $l_i, i \in \{A, B, C, D, E, F\}$. *Положим, что ребра* l_A, l_B, l_C *сходятся в одной вершине, а* l_D, l_E, l_F *лежат против* l_A, l_B *и* l_C *соответственно.*

Далее, пусть величины $A_l, B_l, C_l, D_l, E_l, F_l$ *отыскиваются соответственно по формулам:*

$$A_l = \arccos\frac{c_{l_{12}}}{\sqrt{c_{l_{11}}\cdot c_{l_{22}}}},\ B_l = \arccos\frac{c_{l_{13}}}{\sqrt{c_{l_{11}}\cdot c_{l_{33}}}},\ C_l = \arccos\frac{c_{l_{23}}}{\sqrt{c_{l_{22}}\cdot c_{l_{33}}}},$$
$$D_l = \arccos\frac{c_{l_{34}}}{\sqrt{c_{l_{33}}\cdot c_{l_{44}}}},\ E_l = \arccos\frac{c_{l_{24}}}{\sqrt{c_{l_{22}}\cdot c_{l_{44}}}},\ F_l = \arccos\frac{c_{l_{14}}}{\sqrt{c_{l_{11}}\cdot c_{l_{44}}}},$$

где $c_{l_{ij}} = (-1)^{i+j}\cdot G_{l_{ij}}$ *— алгебраическое дополнение к* ij*-му элементу матрицы*

$$G_l = \begin{pmatrix} -1 & -\mathrm{ch} l_D & -\mathrm{ch} l_E & -\mathrm{ch} l_C \\ -\mathrm{ch} l_D & -1 & -\mathrm{ch} l_F & -\mathrm{ch} l_B \\ -\mathrm{ch} l_E & -\mathrm{ch} l_F & -1 & -\mathrm{ch} l_A \\ -\mathrm{ch} l_C & -\mathrm{ch} l_B & -\mathrm{ch} l_A & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда объем гиперболического тетраэдра находится по формуле

$$\mathrm{Vol}(T) = -\frac{1}{4}\int_{Z_{2_l}}^{Z_{1_l}} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+A_l+B_l+D_l+E_l}{2}\sin\frac{\xi+A_l+C_l+D_l+F_l}{2}\sin\frac{\xi+B_l+C_l+E_l+F_l}{2}}{\cos\frac{\xi+A_l+B_l+C_l}{2}\cos\frac{\xi+A_l+E_l+F_l}{2}\cos\frac{\xi+B_l+D_l+F_l}{2}\cos\frac{\xi+C_l+D_l+E_l}{2}}\right| d\xi,$$

где

$$Z_{1_l} = \mathrm{arctg}\frac{k_{2_l}}{k_{1_l}} - \mathrm{arctg}\frac{k_{4_l}}{k_{3_l}},$$
$$Z_{2_l} = \mathrm{arctg}\frac{k_{2_l}}{k_{1_l}} + \mathrm{arctg}\frac{k_{4_l}}{k_{3_l}},$$

$$k_{1_l} = -(\cos(A_l + B_l + C_l + D_l + E_l + F_l) + \cos(A_l + D_l) +$$
$$+ \cos(B_l + E_l) + \cos(C_l + F_l) +$$
$$+ \cos(D_l + E_l + F_l) + \cos(D_l + B_l + C_l) +$$
$$+ \cos(A_l + E_l + C_l) + \cos(A_l + B_l + F_l)),$$
$$k_{2_l} = \sin(A_l + B_l + C_l + D_l + E_l + F_l) + \sin(A_l + D_l) + \sin(B_l + E_l) + \sin(C_l + F_l) +$$
$$+ \sin(D_l + E_l + F_l) + \sin(D_l + B_l + C_l) + \sin(A_l + E_l + C_l) + \sin(A_l + B_l + F_l)),$$
$$k_{3_l} = 2(\sin A_l \sin D_l + \sin B_l \sin E_l + \sin C_l \sin F_l),$$
$$k_{4_l} = \sqrt{k_{1_l}^2 + k_{2_l}^2 - k_{3_l}^2}.$$

Данная формула выражает объем тетраэдра интегралом по отрезку вещественной прямой от вещественнозначной подынтегральной функции в отличие от формулы Мураками–Ушиджимы, содержащей многозначные функции комплексного переменного.

Во второй главе рассматриваются гиперболические октаэдры, обладающие нетривиальными симметриями, mmm- и 2|m-симметриями.

Октаэдр O, обладающий mmm-*симметрией* (или mmm-*октаэдр*), — это октаэдр, остающийся инвариантным при отражениях от трех взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающих O по его реберным циклам. В неевклидовых случаях такой октаэдр однозначно с точностью до движения пространства определяется тремя двугранными углами, т.е. $O = O(A, B, C)$.

В свою очередь, *октаэдр O, допускающий* 2|m-*симметрию* (или 2|m-*октаэдр*), — это октаэдр, остающийся инвариантным при вращении вокруг оси на угол π и отражении относительно перпендикулярной ей плоскости. В неевклидовых пространствах такой октаэдр определяется четырьмя двугранными углами. Таким образом, $O = O(A, B, C, D)$.

Глава имеет следующую структуру. В начале главы приводится обзор ранее полученных результатов для евклидова и сферического случаев. В последующих параграфах выводятся полученные автором формулы объема произвольных гиперболических mmm- и 2|m-октаэдров, а также доказываются критерии существования таких октаэдров в терминах определяющих их двугранных углов.

Теорема 19. *Пусть $O = O(A,B,C)$ – гиперболический октаэдр, обладающий* mmm*-симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ выражается формулой*

$$V(O) = -2\int_{\tilde{Z}_2}^{\tilde{Z}_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{2\xi+A+B}{4}\cos\frac{2\xi+A+C}{4}\cos\frac{2\xi+B+C}{4}}{\cos\frac{2\xi+A+B+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+A+C+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+B+C+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+3\pi}{4}}\right| d\xi,$$

где

$$\tilde{Z}_1 = \mathrm{arctg}\frac{\tilde{k_2}}{\tilde{k_1}} - \mathrm{arctg}\frac{\tilde{k_4}}{\tilde{k_3}},$$

$$\tilde{Z}_2 = \mathrm{arctg}\frac{\tilde{k_2}}{\tilde{k_1}} + \mathrm{arctg}\frac{\tilde{k_4}}{\tilde{k_3}},$$

а вещественные числа $\tilde{k_1}$, $\tilde{k_2}$, $\tilde{k_3}$ и $\tilde{k_4}$ имеют вид:

$$\tilde{k_1} = \sqrt{2}(\sin\left(\frac{2A+\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2B+\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2C+\pi}{4}\right) -$$

$$-\sin\left(\frac{2A+2B+2C+\pi}{4}\right)),$$

$$\tilde{k_2} = -\sqrt{2}(\sin\left(\frac{2A-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2B-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2C-\pi}{4}\right) -$$

$$-\sin\left(\frac{2A+2B+2C-\pi}{4}\right)),$$

$$\tilde{k_3} = 2\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right),$$

$$\tilde{k_4} = \sqrt{\tilde{k_1}^2 + \tilde{k_2}^2 - \tilde{k_3}^2}.$$

Теорема 21. *Пусть $O = O(A,B,C,D)$ — гиперболический октаэдр, обладающий* 2|m*-симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ выражается интегралом по отрезку вещественной прямой с вещественнозначной подынтегральной функцией*

$$V(O) = \int_{z_1}^{z_2} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{2\xi+2B+D+2\lambda+\pi}{4}\sin\frac{2\xi+2A+2B+C-2\lambda+\pi}{4}\sin\frac{2\xi+2A+C+D}{4}}{\cos\frac{\xi+A+B}{2}\cos\frac{2\xi+2B+C+D}{4}\cos\frac{2\xi+C+2\lambda+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+2A+D-2\lambda+\pi}{4}}\right| d\xi,$$

где

$$z_1 = \mathrm{arctg}\frac{p_2}{p_1} - \mathrm{arctg}\frac{p_4}{p_3},$$

$$z_2 = \operatorname{arctg}\frac{p_2}{p_1} + \operatorname{arctg}\frac{p_4}{p_3},$$
$$\lambda = \operatorname{arcctg}\frac{\cos\frac{D}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos A}{\cos\frac{C}{2}\sin A},$$

а вещественные числа p_1, p_2, p_3 и p_4 имеют вид:

$$p_1 = \sin A + \sin B + \sin\left(\frac{2A+2B+C+D}{2}\right) + \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) -$$
$$-\cos\left(\frac{D+2\lambda}{2}\right) - \cos\left(\frac{2A+C-2\lambda}{2}\right) -$$
$$-\cos\left(\frac{2A+2B+D-2\lambda}{2}\right) - \cos\left(\frac{2B+C+2\lambda}{2}\right),$$
$$p_2 = \sin\left(\frac{2A+C-2\lambda}{2}\right) + \sin\left(\frac{D+2\lambda}{2}\right) + \sin\left(\frac{2B+C+2\lambda}{2}\right) +$$
$$+\sin\left(\frac{2A+2B+D-2\lambda}{2}\right) + \cos\left(\frac{2A+2B+C+D}{2}\right) + \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) +$$
$$+\cos A + \cos B,$$
$$p_3 = 2\left(\sin B + \sin\frac{D}{2}\sin\lambda + \sin\frac{C}{2}\sin(A-\lambda)\right),$$
$$p_4 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2}.$$

Основная идея вывода этих формул заключается в выборе подходящего разбиения октаэдров на тетраэдры, исключении появляющихся вспомогательных параметров, определяемых двугранными углами тетраэдров триангуляции, и выражении объемов тетраэдров через двугранные углы по формуле Деревнина–Медных.

В свою очередь, критерии существования гиперболических октаэдров, обладающих mmm- и 2|m-симметриями, формулировки которых даются следующими теоремами.

Теорема 18. *Для существования компактного гиперболического* mmm-*октаэдра $O = O(A, B, C)$ необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:*

$$\begin{cases} A + B > \pi \\ A + C > \pi \\ B + C > \pi \\ \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} > 1. \end{cases}$$

Теорема 22. *Для существования ограниченного гиперболического* 2|m-*октаэдра* $O = O(A,B,C,D)$ *необходимо и достаточно выполнение следующей системы условий:*

$$\begin{cases} \mathrm{sign} G = (3,1) \\ c_{ij} > 0, i \neq j \\ \frac{c_{14}}{\sqrt{c_{11}}} = \frac{c_{24}}{\sqrt{c_{22}}} \end{cases}.$$

Доказательства теорем 18 и 22 основаны на эквивалентности существования октаэдров и тетраэдров подходящих триангуляций, и применении к последним критериев существования тетраэдров с заданным набором двугранных углов, доказанных Е.М. Андреевым[17] и А. Ушиджимой[18].

В заключении главы автором описывается алгоритм получения формул объема неевклидовых октаэдров, обладающих 4|m- и mm2-симметриями.

Формулы, полученные во второй главе диссертации, являются обобщениями результатов Галиулина–Михалева–Сабитова[19] на неевклидовы случаи.

В третьей главе выводятся формулы объема собственных остроугольных гиперболических призм при некоторых ограничениях на их двугранные углы. В первом параграфе приводятся основные результаты об остроугольных многогранниках и даются формулировки теорем Андреева, на которых строятся дальнейшие рассуждения третьей главы. Наконец, в последующих разделах третьей главы доказываются теоремы об объемах остроугольных гиперболических призм. Подробно разобраны случаи треугольной и четырехугольной призм. Так, следующая теорема позволяет вычислить объем треугольной гиперболической призмы с нетупыми двугранными углами.

Теорема 25. *Пусть* $P = P(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9)$ *— треугольная гиперболическая призма, двугранные углы которой*

[17] Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского // Математический сборник. — 1970. — *83 (125)*. — С. 256–260.

[18] Ushijima A. A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra // Non-Euclidean Geometries (Prҷkopa A., Molnär E., eds.). — 2006. — *581*. — P. 249–265.

[19] Галиулин Р. В., Михалев С. Н., Сабитов И. Х. Некоторые приложения формулы для объема октаэдра // Математические заметки. — 2004. — *1 (76)*. — С. 27–43

удовлетворяют условиям:

$$\mathfrak{m}_1. \qquad 0 < A_i \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\mathfrak{m}_2. \qquad \begin{cases} A_1 + A_2 + A_4 > \pi \\ A_1 + A_2 + A_5 > \pi \\ A_2 + A_3 + A_6 > \pi \\ A_4 + A_7 + A_9 > \pi \\ A_5 + A_7 + A_8 > \pi \\ A_6 + A_8 + A_9 > \pi \end{cases}$$

$$\mathfrak{m}_3. \qquad A_4 + A_5 + A_6 < \pi;$$

$$\mathfrak{m}_4. \qquad A_3 + A_9 + A_7 + A_1 + A_8 + A_2 < 3\pi.$$

Тогда ее объем $\mathrm{Vol}(P)$ *выражается следующей формулой*

$$\mathrm{Vol}(P) = V(a, A_5, b, A_2, c, A_1) + V(e, \pi - a, d, A_3 - c, f, A_4) +$$

$$+ V(A_9, A_8, A_6, \pi - b - d, \pi - f, A_7 - e),$$

где

$$V(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\zeta) = -\frac{1}{4}\int_{z_2}^{z_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+\alpha+\beta+\delta+\epsilon}{2}\sin\frac{\xi+\alpha+\gamma+\delta+\zeta}{2}\sin\frac{\xi+\beta+\gamma+\epsilon+\zeta}{2}}{\cos\frac{\xi+\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\xi+\alpha+\epsilon+\zeta}{2}\cos\frac{\xi+\beta+\delta+\zeta}{2}\cos\frac{\xi+\gamma+\delta+\epsilon}{2}}\right| d\xi,$$

$$z_1 = \mathrm{arctg}\frac{k_2}{k_1} - \mathrm{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$z_2 = \mathrm{arctg}\frac{k_2}{k_1} + \mathrm{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$k_1 = -(\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon+\zeta) + \cos(\alpha+\delta) + \cos(\beta+\epsilon) + \cos(\gamma+\zeta) +$$

$$+ \cos(\delta+\epsilon+\zeta) + \cos(\delta+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\epsilon+\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\zeta)),$$

$$k_2 = \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon+\zeta) + \sin(\alpha+\delta) + \sin(\beta+\epsilon) + \sin(\gamma+\zeta) +$$

$$+ \sin(\delta+\epsilon+\zeta) + \sin(\delta+\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\epsilon+\gamma) + \sin(\alpha+\beta+\zeta)),$$

$$k_3 = 2(\sin\alpha\sin\delta + \sin\beta\sin\epsilon + \sin\gamma\sin\zeta),$$

$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2},$$

а $(a;b;c;d;e;f)$, $a,b,c,d,e,f \in [0;\pi]$ — *единственное решение системы*

$$\begin{cases} \frac{c^1_{34}}{\sqrt{c^1_{33}c^1_{44}}} = \frac{c^2_{24}}{\sqrt{c^2_{22}c^2_{44}}} \\ \frac{c^1_{13}}{\sqrt{c^1_{11}c^1_{33}}} = \frac{c^2_{12}}{\sqrt{c^2_{11}c^2_{22}}} \\ \frac{c^1_{14}}{\sqrt{c^1_{11}c^1_{44}}} = \frac{c^2_{14}}{\sqrt{c^2_{11}c^2_{44}}} \\ \frac{c^1_{14}}{\sqrt{c^1_{11}c^1_{44}}} = \frac{c^3_{12}}{\sqrt{c^3_{11}c^3_{22}}} \\ \frac{c^2_{13}}{\sqrt{c^2_{11}c^2_{33}}} = \frac{c^3_{13}}{\sqrt{c^3_{11}c^3_{33}}} \\ \frac{c^2_{34}}{\sqrt{c^2_{33}c^2_{44}}} = \frac{c^3_{23}}{\sqrt{c^3_{22}c^3_{33}}} \\ c^k_{ij} > 0, i,j, \in \{1,2,3,4\}, i \neq j, k \in \{1,2,3\} \\ \mathrm{sgn} G_i = (3,1), i \in \{1,2,3\} \end{cases},$$

где $c^1_{ij}, c^2_{ij}, c^3_{ij}$ — *соответствующие алгебраические дополнения к* ij*-м элементам матриц:*

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos x_1 & -\cos A_5 & -\cos A_1 \\ -\cos x_1 & 1 & -\cos x_2 & -\cos x_3 \\ -\cos A_5 & -\cos x_2 & 1 & -\cos A_2 \\ -\cos A_1 & -\cos x_3 & -\cos A_2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos x_5 & \cos x_1 & -\cos A_4 \\ -\cos x_5 & 1 & -\cos x_4 & -\cos x_6 \\ \cos x_1 & -\cos x_4 & 1 & -\cos(A_3 - x_3) \\ -\cos A_4 & -\cos x_6 & -\cos(A_3 - x_3) & 1 \end{pmatrix};$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A_9 & -\cos A_8 & -\cos(A_7 - x_5) \\ -\cos A_9 & 1 & -\cos A_6 & \cos x_6 \\ -\cos A_8 & -\cos A_6 & 1 & \cos(x_1 + x_2) \\ -\cos(A_7 - x_5) & \cos x_6 & \cos(x_1 + x_2) & 1 \end{pmatrix}.$$

Для доказательства теоремы 21 мы выбираем триангуляцию призм так, чтобы вершины тетраэдра располагались в вершинах призмы. Для устранения возникающих вспомогательных параметров мы используем теоремы Андреева[20], которые позволяют утверждать существование единственного решения приведенной выше системы уравнений, полученной с использованием формулы синусов–тагенсов.

В конце главы описывается алгоритм получения аналогичных формул в случае *произвольных* выпуклых ограниченных остроугольных гиперболических многогранников, который основан на их триангуляциях без новых вершин[21], составлении и решении нелинейных систем, аналогичных системе, присутствующей в формулировке теоремы 25.

Основные результаты работы

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Приведен вывод интегральной формулы Деревнина–Медных объема произвольного гиперболического тетраэдра из формулы Мураками–Яно;

2. Получена интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах длин ребер;

3. Найдены явные интегральные формулы объема гиперболических октаэдров, обладающих нетривиальными симметриями;

4. Доказаны критерии существования гиперболических октаэдров с симметриями в терминах двугранных углов;

5. Получены формулы объема собственных остроугольных гиперболических призм, и описан алгоритм вычисления объема произвольного выпуклого ограниченного гиперболического многогранника с нетупыми двугранными углами.

Перечисленные результаты получены лично автором.

[20]Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского // Математический сборник. — 1970. — *83 (125)*. — С. 256–260.

[21]Шевченко В.Н. О разбиении выпуклого политопа на симплексы без новых вершин // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1997. — *12 (427)*. — С. 89–99.

Работы автора по теме диссертации

[1] **Краснов В. А. Об интегральных формулах объема гиперболических тетраэдров // Совр. математика. Фундам. направления. — 2013. —** *43.* **— С. 89–99.**

[2] **Краснов В. А. Об объеме гиперболического октаэдра с нетривиальными симметриями // Совр. математика. Фундам. направления. — 2013. —** *51.* **— С. 74–86.**

[3] Краснов В. А. Об объемах гиперболических симплексов // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — 2012. — С. 97–99.

[4] Краснов В. А. Объемы многогранников в классических неевклидовых пространствах // Современные методы теории краевых задач: материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения - XXII" (тезисы докладов). — 2011. — С. 96–97.

[5] Краснов В. А. Об интегральных формулах объема тетраэдров в пространстве Лобачевского // Современные методы теории краевых задач: материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения - XXIII" (тезисы докладов). — 2012. — С. 98–99.

[6] Краснов В. А. Об объемах гиперболических призм и октаэдров с симметриями // Современные методы теории краевых задач: материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения - XXIV" (тезисы докладов). — 2013. — С. 114–115.

[7] Краснов В. А. Объемы тетраэдров в пространстве Лобачевского // Вестник Московского государственного областного социально-гуманитарного института. — *1(11).* — С. 44–49.

[8] Краснов В. А. Об объемах многогранников в пространствах постоянной отрицательной кривизны // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы: материалы IV научной конференции молодых ученых Москвы и Коломны. — 2012. — С. 32–34.

[9] Краснов В. А. Интегральная формула Деревнина–Медных как инструмент для вычисления объемов гиперболических призм и пирамид // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы: материалы V научной конференции молодых ученых Москвы и Коломны. — 2013. — С. 33–39.

[10] Краснов В. А. Объемы многогранников в неевклидовых пространствах // Начало - 10: сборник научных статей аспирантов и соискателей. — 2011. — С. 293–307.

[11] Краснов В. А. О применениях формулы Деревнина–Медных к вычислению объемов гиперболических выпуклых многогранников // Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация: труды всероссийской научно-практической конференции. Москва, РУДН, 23 - 26 апреля, 2013 г. — 2013. — С. 96–98.