ГАОУ ВПО «Московский государственный областной
социально–гуманитарный институт»

На правах рукописи

КРАСНОВ Владимир Александрович

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ОБЪЕМОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ

01.01.04 – геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук
В.П. Лексин,
доктор физико-математических наук
В.О. Мантуров

Москва — 2014

Оглавление

Введение **4**

0.1 Первичные определения и понятия 4

0.2 Актуальность темы исследования 6

0.3 Цели работы 9

0.4 Методы исследования 10

0.5 Научная новизна 10

0.6 Теоретическая и практическая ценность 11

0.7 Апробация результатов работы 11

0.8 Структура и объем диссертации 13

1 Объемы неевклидовых тетраэдров **15**

1.1 Объемы евклидовых многогранников 16

1.2 Объемы неевклидовых тетраэдров специального вида . . 18

1.2.1 Некоторые предварительные результаты 18

1.2.2 Объем ортосхемы в $\mathbb{S}^3$ и $\mathbb{H}^3$ 24

1.2.3 Объем идеального тетраэдра 27

1.3 Объемы произвольных неевклидовых тетраэдров 29

1.3.1 Формула Сфорцы объема произвольного неевклидова тетраэдра 29

1.3.2 Формула Мураками–Яно 31

1.3.3 Специальная функция Лобачевского и ее свойства 37

1.3.4 Формула Деревнина–Медных 38

2 Объемы гиперболических октаэдров с нетривиальными симметриями 46

2.1 Объемы евклидовых и сферических октаэдров, обладающих mmm- и 2|m-симметриями 46

2.2 Объем гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией 51

2.3 Объем гиперболического октаэдра, обладающего 2|m-симметрией 59

3 Объемы компактных остроугольных гиперболических многогранников 70

3.1 Остроугольные многогранники 71

3.2 Вычисление объема гиперболической треугольной призмы при некоторых ограничениях на ее двугранные углы 73

3.3 Объем остроугольного гиперболического куба 78

3.4 Вычисление объема произвольного гиперболического компактного остроугольного многогранника 87

Литература 90

Введение

0.1 Первичные определения и понятия

Мы рассматриваем задачу вычисления объема *трехмерного* многогранника в *классических неевклидовых пространствах*. Под классическими неевклидовыми пространствами мы будем понимать *сферическое пространство* $\mathbb{S}^3$ и *гиперболическое пространство* $\mathbb{H}^3$. Причем всегда будем предполагать, что данные пространства наделены стандартными метриками, в которых они имеют постоянные кривизны $K = 1$ и $K = -1$ соответственно.

Определим $\mathbb{S}^3$ как множество точек евклидова пространства $\mathbb{E}^4$, координаты которых удовлетворяют условию:

$$(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Аналогично, определим пространство $\mathbb{H}^3$ как множество точек псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}^{3,1}$, координаты которых удовлетворяют следующей системе условий:

$$\begin{cases} (\vec{x}, \vec{x}) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -1 \\ x_1 > 0. \end{cases}$$

Следовательно, гиперболическое пространство $\mathbb{H}^3$ может быть реализовано как связная компонента двуполостного гиперболоида $(\vec{x}, \vec{x}) = -1$ в $\mathbb{E}^4$.

Обозначим через $\mathbb{X}^3$ сферическое пространство $\mathbb{S}^3$ или гиперболическое пространство $\mathbb{H}^3$.

Плоскости, прямые и точки $\mathbb{S}^3$ (соответственно, $\mathbb{H}^3$) в нашем случае представляют собой пересечение линейных подпространств пространства $\mathbb{E}^4$ ($\mathbb{E}^{3,1}$) коразмерности один, два и три соотвественно, и $\mathbb{S}^3$ (соответственно, $\mathbb{H}^3$). В частности, всякую плоскость $H_e \subset \mathbb{X}^3$ можно представить в виде:

$$H_e = \{x \in \mathbb{X}^3 \mid (\vec{x}, \vec{e}) = 0\},$$

где $\vec{e}$ – единичный вектор нормали к H_e, т.е. $(\vec{e}, \vec{e}) = 1$, а $\vec{x}$ представляет собой радиус–вектор точки $x \in \mathbb{X}^3$.

Точки пространства $\mathbb{H}^3$ мы также будем иногда называть *собственными* точками пространства $\mathbb{H}^3$. Мы также скажем, что прямым, являющимся образующими конуса $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, соответствуют *бесконечно удаленные (идеальные)* точки пространства $\mathbb{H}^3$. Множество бесконечно удаленных точек, представляющих собой компактификацию пространства $\mathbb{H}^3$, будем обозначать через $\mathbb{H}^3_\infty$. Наконец, назовем множество $\bar{\mathbb{H}}^3 = \mathbb{H}^3 \cup \mathbb{H}^3_\infty$ *замыканием* пространства $\mathbb{H}^3$.

Далее, угол между пересекающимися плоскостями H_e и H_p с нормальными векторами $\vec{e}$ и $\vec{p}$ пространства $\mathbb{X}^3$ вычисляется по формуле:

$$\cos(\widehat{H_e, H_p}) = -(\vec{e}, \vec{p}). \tag{1}$$

Легко показать, что расстояние $\rho(x, y)$ между двумя точками x и y пространства $\mathbb{S}^3$ находится следующим образом:

$$\cos \rho(x, y) = (\vec{x}, \vec{y}),$$

где $\vec{x}$ и $\vec{y}$ суть радиус–векторы точек x и y соответственно.

В случае гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$ формула для расстояния имеет аналогичный вид:

$$\mathrm{ch}\rho(x, y) = -(\vec{x}, \vec{y}).$$

Далее, назовем *конусом будущего* C_+ множество точек пространства $\mathbb{E}^4$ ($\mathbb{E}^{3,1}$), координаты которых удовлетворяют следующей системе условий:

$$\begin{cases} (\vec{x}, \vec{x}) = 0 \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Тетраэдр $T \subset \mathbb{X}^3$ будет представлять в нашем случае пересечение с пространством $\mathbb{X}^3$ некоторого замкнутого симплициального конуса $K \subset C_+$.

Так как базис пространства $\mathbb{E}^4$ ($\mathbb{E}^{3,1}$) однозначно с точностью до ортогонального (псевдоортогонального) преобразования определяется своей матрицей Грама, то из формулы (1) следует, что тетраэдр $T \subset \mathbb{X}^3$ однозначно с точностью до движения определяется своими двугранными углами. Отметим, что тетраэдр в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ определяется своими двугранными углами лишь с точностью до подобия.

Отметим, что при $n \neq 3$ пространства $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{H}^n$ определяются аналогично рассмотренному выше случаю $n = 3$.

0.2 Актуальность темы исследования

Настоящая диссертация посвящена вычислению объемов трехмерных неевклидовых многогранников. При этом основной акцент в ней будет сделан на гиперболических многогранниках.

Вычисление объема многогранника в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ – старая и трудная задача, известная со времен античности и не потерявшая актуальности в наши дни.

Что касается неевклидовых пространств $\mathbb{S}^3$ и $\mathbb{H}^3$, то здесь ситуация еще более сложная. Объем бипрямоугольного тетраэдра (ортосхемы) в сферическом случае был найден Л. Шлефли [43], а Н.И. Лобачевский [32] и Я. Бойяи [20] независимо друг от друга вычислили объем ортосхемы в $\mathbb{H}^3$. Объем идеального гиперболического тетраэдра был найден еще в 1835 году Н.И. Лобачевским [32], а в 1982 году Дж. Милнор [33] представил этот результат в более элегантном виде. В свою очередь, Э.Б. Винбергом [18] были получены формулы объемов гиперболических пирамид, имеющих вершины на бесконечности.

А вот формула объема произвольного гиперболического тетраэдра долгое время была неизвестна. Лишь на рубеже веков эта проблема была полностью решена в работах Ю. Чо и Х. Кима [39], Дж. Мураками и У. Яно [37], а также Дж. Мураками и А. Ушиджимы [36], но формулы, полученные вышеназванными математиками, являются довольно громоздкими и трудно обозримыми. Следует отметить, что во всех вышеперечисленных работах объем выражался как алгебраическая сумма 16 значений дилогарифмов Эйлера или функций Лобачевского. Геометрический смысл полученных формул удалось объяснить Г. Лейбону [31] с точки зрения симметрий Редже, а их полное геометрическое доказательство было дано Я.Моханти [34]. В 2004 году Д.А. Деревниным и А.Д. Медных [28] была получена явная интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах его двугранных углов. Заметим, что оригинальное доказательство этой формулы основывается на геометрических соотношениях между длинами ребер тетраэдра и его двугранными углами, определенных теоремой синусов–тангенсов. Кроме того, одним из ключевых шагов доказательства является применение дифференциальной формулы Шлефли, выражающей дифференциал объема через длины ребер и дифференциалы двугранных углов. В этой же работе было сказано, что из формулы Деревнина–Медных вытекает полученная ранее формула Мураками–Яно.

Наконец, формулы объема произвольного сферического тетраэдра в терминах двугранных углов и длин ребер были предложены в 2011 году Дж. Мураками [35].

Нельзя не упомянуть, что впервые формулу объема произвольного неевклидова тетраэдра выписал в 1906 году итальянский герцог Г.Сфорца [44]. К сожалению, формула Сфорцы содержит многозначную функцию. При этом в работе [44] не указано, какая ее ветвь дает объем. В связи с этим формула Сфорцы долгое время была полностью забыта и приобрела широкую известность лишь после дискуссии А.Д. Медных с Х.М. Монтесиносом на конференции в Испании в августе 2006 года.

В 2002 году Я.Моханти [34] были вычислены объемы симметричного идеального октаэдра и идеальной треугольной призмы, а в 2008 году Н.В. Абросимовым, М. Годой–Молина и А.Д. Медных [14] были получены формулы объемов трехмерных сферических многогранников, обладающих нетривиальными симметриями, в частности, mmm- и 2|m-октаэдров. Кроме того, в 2011 году Г.А. Байгонакова, М. Годой-Молина и А.Д. Медных [19] вычислили объем гиперболического mmm-октаэдра в простейшей геометрической ситуации.

В настоящей работе приведен вывод формулы Деревнина–Медных из формулы Мураками–Яно; выписана интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах длин его ребер; получены явные интегральные формулы объема *произвольных* гиперболических mmm- и $2|m$-октаэдров, а также доказаны критерии существования таких октаэдров в терминах двугранных углов; приведен алгоритм вычисления объема неевклидовых октаэдров с $4|m$- и $mm2$-симметриями в терминах двугранных углов; найдены формулы объема *собственных* остроугольных гиперболических треугольных и четырехугольных призм при некоторых ограничениях на ее двугранные углы, а также описан алгоритм получения аналогичных формул для произвольных остроугольных выпуклых гиперболических многогранников. Отметим, что данные ограничения, при которых существует единственный с точностью до движения пространства выпуклый гиперболический остроугольный многогранник с заданным набором двугранных углов, были найдены в 1970 году Е.М. Андреевым [16].

0.3 Цели работы

1) Вывести формулу Деревнина–Медных из формулы Мураками–Яно.

2) Получить интегральную формулу объема гиперболического тетраэдра в терминах длин ребер.

3) Вычислить объем:

а) гиперболических октаэдров, обладающих нетривиальными симметриями;

б) собственных остроугольных гиперболических многогранников при некоторых ограничениях на их двугранные углы.

0.4 Методы исследования

В качестве основного метода для решения поставленных целей используется метод триангуляции выпуклого многогранника. Таким образом, объем рассматриваемых многогранников мы представляем в виде алгебраической суммы объемов тетраэдров, которые, в свою очередь, могут быть вычислены по достаточно обозримым формулам. При этом для нахождения дополнительных параметров, возникающих в результате триангуляций, используются как методы классических неевклидовых геометрий, которые были развиты еще в работах Н.И. Лобачевского и Л. Шлефли, так и новый метод, основанный на применении теоремы Н.М. Андреева.

В диссертации также применяется современный метод, заключающийся в использовании дифференциальной формулы Шлефли, разработанный еще Л. Шлефли и получивший широкое применение в работах Э.Б. Винберга, А.Ю. Веснина, А.Д. Медных, Д.В. Деревнина, Н.В. Абросимова, М.Г. Пашкевич, М. Годой–Молина и др.

0.5 Научная новизна

Основные результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, являются новыми. Кроме того, работа содержит также и дополнения к полученным ранее результатам.

На защиту выносятся следующие результаты:

- Приведен вывод интегральной формулы Деревнина–Медных объема произвольного гиперболического тетраэдра из формулы Мураками–Яно;

- Получена новая интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах длин ребер, выражающая объем интегралом по отрезку вещественной прямой от вещественнозначной подынтегральной функции;
- Найдены явные интегральные формулы объема гиперболических октаэдров, обладающих нетривиальными симметриями;
- Доказаны критерии существования гиперболических октаэдров с симметриями в терминах двугранных углов;
- Получены формулы объема собственных гиперболических призм при некоторых ограничениях на их двугранные углы и описан алгоритм вычисления объема произвольного остроугольного выпуклого гиперболического многогранника.

0.6 Теоретическая и практическая ценность

Настоящая работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы для дальнейшего изучения объемов неевклидовых многогранников, в частности, для вычисления объемов многогранников в пространствах размерности $n \geq 4$. Также результаты работы представляют интерес для специалистов по маломерной топологии и неевклидовым геометриям.

0.7 Апробация результатов работы

Основные результаты диссертации были доложены на следующих семинарах и конференциях:

- семинар ”Дифференциальная геометрия и приложения” (Москва, МГУ, 3 марта 2014) под руководством акад. РАН А.Т. Фоменко;
- семинар ”Современные геометрические методы” (Москва, МГУ, 30 октября 2013) под руководством акад. РАН А.Т. Фоменко, А.В. Болсинова, А.С. Мищенко, А.А. Ошемкова, Е.А. Кудрявцевой и И.М. Никонова;
- семинар ”Алгебраическая топология и ее приложения” имени М.М. Постникова (Москва, МГУ, 20 ноября 2012) под руководством член-корр. РАН В.М. Бухштабера, А.В. Чернавского, И.А. Дынникова, Т.Е. Панова, Л.А. Алании, А.А. Гайфуллина и Д.В. Миллионщикова;
- семинар ”Инварианты трехмерных многообразий” (Новосибирск, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 18 марта 2014) под руководством член-корр. РАН А.Ю. Веснина;
- семинар ”Узлы и теория представлений” (Москва, МГУ, 6 ноября 2012 и 5 марта 2013) под руководством В.О.Мантурова, Д.П.Ильютко и И.М.Никонова;
- семинар по аналитической теории дифференциальных уравнений (Москва, МИРАН, неоднократно с 2011 по 2012) под руководством акад. РАН Д.В. Аносова и В.П. Лексина;
- семинар по дифференциальным и функционально–дифференциальным уравнениям (Москва, РУДН, 22 октября 2013) под руководством А.Л. Скубачевского;
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 29 июня–4 июля 2012)

- Всероссийская математическая школа-конференция "Понтрягинские чтения" (Воронеж, май 2011–2013)

0.8 Структура и объем диссертации

Диссертация изложена на 95 страницах печатного текста. Она состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы. Список литературы состоит из 47 наименований работ российских и зарубежных авторов.

Структура диссертации такова.

Введение содержит краткий обзор исследований по теме диссертации, а также список результатов, выносимых на защиту. Рассказывается об основных методах диссертационного исследования, а также о теоретическом и практическом значении полученных результатов.

В первой главе подробно изучаются неевклидовы тетраэдры, причем основной акцент делается на гиперболическом случае. Ее начальные параграфы содержат основные сведения, необходимые для вычисления их объема. Затем приводится обзор основных результатов, относящихся к объемам неевклидовых тетраэдров. Особая роль отводится интегральной формуле Деревнина–Медных объема произвольного гиперболического тетраэдра, на которой строятся дальнейшие рассуждения настоящей работы. В конце главы приводится вывод этой формулы из доказанной ранее теоремы Мураками–Яно, который отличается от доказательства, предложенного в оригинальной работе. Как следствие, выписывается формула объема гиперболического тетраэдра в терминах длин ребер, которая выражает объем тетраэдра интегралом по отрезку вещественной прямой от вещественнозначной подынтегральной функции в отличие от полученной ранее формулы Мураками–Ушиджимы, содержащей многозначные функции комплексного переменного.

Во второй главе рассматриваются гиперболические октаэдры, обладающие нетривиальными симметриями. Глава имеет следующую структуру. Начало главы состоит из обзора результатов, полученных ранее другими авторами для случаев $\mathbb{E}^3$ и $\mathbb{S}^3$. В последующих параграфах выводятся полученные автором формулы объема произвольных гиперболических mmm- и 2|m-октаэдров и доказываются критерии существования таких октаэдров с заданным набором двугранных углов. В конце главы описывается алгоритм получения формул объема неевклидовых октаэдров, обладающих 4|m- и mm2-симметриями.

В третьей главе выводятся формулы объема компактных остроугольных гиперболических призм в терминах двугранных углов с некоторыми ограничениями на них. Как было сказано выше, данные ограничения были получены Е.М. Андреевым. Поэтому в первом параграфе приводятся основные результаты об остроугольных многогранниках и даются формулировки теорем Андреева, на которых строятся основные рассуждения третьей главы. Наконец, в последующих разделах доказываются теоремы об объемах остроугольных гиперболических призм. Подробно разобраны случаи треугольной и четырехугольной призм. В конце главы приведен алгоритм получения аналогичных формул в случае *произвольного* выпуклого гиперболического компактного многогранника с нетупыми двугранными углами.

Глава 1

Объемы неевклидовых тетраэдров

В настоящей главе будут подробно изучены неевклидовы тетраэдры. Вначале мы приведем основные результаты о них, которые понадобятся нам в дальнейшем для вычисления их объемов. Затем дадим краткий обзор основных результатов, относящихся к данной проблематике. Особый акцент будет сделан на интегральной формуле Деревнина–Медных объема произвольного гиперболического тетраэдра, на которой строятся дальнейшие рассуждения настоящей диссертации. В конце будет представлен основной результат первой главы. Он заключается в обратном выводе формулы Деревнина–Медных из теоремы Мураками–Яно. Как следствие, мы выпишем формулу объема гиперболического тетраэдра в терминах длин его ребер, которая выражает объем тетраэдра интегралом по отрезку вещественной прямой от вещественнозначной подынтегральной функции в отличие от полученной ранее формулы Мураками–Ушиджимы, содержащей многозначные функции комплексного переменного.

Но мы начнем изучение объемов тетраэдров с привычного для нас евклидова случая.

1.1 Объемы евклидовых многогранников

Как было сказано во введении, вычисление объема многогранника является классической проблемой геометрии, которая известна со времен античности и не потеряла актуальности по сей день.

Первый серьезный результат об объеме треугольной пирамиды получен еще Архимедом, а в 16 веке Тарталья выразил объем евклидова тетраэдра через квадраты длин его ребер. Хотя задачу нахождения объема тетраэдра через длины его ребер впервые решил, по-видимому, Пьеро ди Франческа. Затем эта задача рассматривалась Л. Пачоли. Тарталья же повторил ее решение в работе "General trattato di numeri et misure" [38]. В настоящее время результат Тартальи может быть выражен с помощью детерминантной формулы Кэли–Менгера. Аналогичная формула имеет место и для многомерных симплексов. Заметим, что в общем виде формула объема евклидова тетраэдра в терминах длин ребер была впервые получена Эйлером.

Теорема 1. *(Тарталья, XVI в.). Пусть T — евклидов тетраэдр с длинами ребер d_{ij}, $1 \le i < j \le 4$, соединяющими i-ю и j-ю вершины. Тогда объем данного тетраэдра $V = V(T)$ вычисляется по формуле:*

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Доказательство теоремы 1 можно найти, например, в [38].

В формуле (2) объем тетраэдра является корнем квадратного уравнения, коэффициенты которого суть многочлены с целыми коэффициентами, зависящими от длин ребер. Удивительно, но этот результат может быть обобщен и на случай произвольного евклидова многогранника. И.Х. Сабитов доказал соответствующую теорему для произвольного многогранника в $\mathbb{R}^3$ [42]. Затем Р. Коннели, И.Х. Сабитов и А. Вальц [40] дали второе доказательство для общего случая двумерной полиэдральной поверхности.

Теорема 2. *(Сабитов, 1996; Connely, Sabitov, Walz, 1997). Путь P – многогранник в $\mathbb{R}^3$ с треугольными гранями и длинами ребер d_{ij}. Тогда его объем $V = V(P)$ является корнем многочлена четной степени, коэффициенты которого суть многочлены с рациональными коэффициентами от d_{ij}^2 и зависят только от комбинаторного типа многогранника P.*

Заметим, что это теорема носит чисто теоретический характер. Явный вид указанных в теореме многочленов известен лишь в частных случаях, например, для октаэдров с симметриями.

Теорема 2 позволяет положительно решить *гипотезу о кузнечных мехах*, высказанную в 70-х годах прошлого века.

Гипотеза о кузнечных мехах (Connely, Kuiper, Sullivan). Объем изгибаемого многогранника остается постоянным в процессе изгибания.

По определению, при изгибании двугранные углы многогранника изменяются непрерывным образом, в то время как его комбинаторный тип не меняется и грани остаются жесткими. Тогда по теореме 2 все значения объема многогранника при изгибании суть корни одного и того же многочлена с постоянными коэффициентами. Так как множество корней многочлена конечно, то при малой деформации объем изгибаемого многогранника остоется постоянным.

Теорема Коши о многогранниках (1813) утверждает, что всякий выпуклый многогранник является жестким. Но это неверно для невыпуклых многогранников, среди них существуют изгибаемые многогранники. Первый пример изгибаемого многогранника был найден Брикаром (1897). Он представляет собой самопересекающийся октаэдр. Пример изгибаемого многогранника без самопересечений впервые был построен Р. Коннелли (1978).

В 2011 году А.А. Гайфуллиным [24] был доказан аналог теоремы 2 для полиэдров в $\mathbb{R}^4$, а в 2012 году им же была доказана аналогичная теорема для многогранника произвольной размерности в случае, когда все его двумерные грани суть треугольники [25].

Что касается неевклидовых многогранников, то для них аналога теоремы 2 нет. Из результатов, приведенных в последующих главах и разделах, будет следовать, что объем многогранника в сферическом или в гиперболическом пространствах, как правило, не выражается через элементарные функции.

1.2 Объемы неевклидовых тетраэдров специального вида

Вычисление объема многогранника в сферическом и гиперболическом случае является еще более сложной задачей. Гаусс, один из основателей неевклидовой геометрии, сравнивал задачу вычисления неевклидовых объемов с ”джунглями”.

1.2.1 Некоторые предварительные результаты

В настоящем подразделе мы приведем некоторые ключевые результаты, касающиеся произвольных неевклидовых тетраэдров, которые понадобятся нам в дальнейшем.

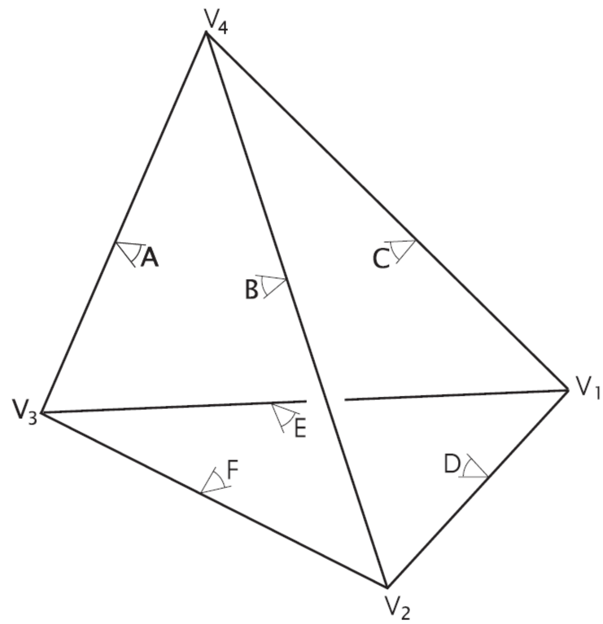

Рис. 1.1. Тетраэдр $T = T(A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F)$ в $\mathbb{H}^3$ или $\mathbb{S}^3$

Пусть T – гиперболический (или сферический) тетраэдр, двугранные углы которого суть A, B, C, D, E, F. Кроме того, будем полагать, что A, B, C – двугранные углы при ребрах с общей вершиной, а D, E, F – противолежащие им двугранные углы (Рис. 1.2.1).

Обозначим через

$$G = \langle -\cos\alpha_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

матрицу Грама тетраэдра T. Рассмотрим присоединенную матрицу $H = \langle c_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4}$, где $c_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, при этом M_{ij} – ij-й минор матрицы G. В следующей теореме приведены некоторые основные соотношения для двугранных углов и длин ребер гиперболического тетраэдра.

Следующее предложение содержит основные результаты о неевклидовых тетраэрах [45].

Предложение 1. *Пусть T – гиперболический (соответственно, сферический) тетраэдр. Тогда:*

$$\begin{gathered}\text{(i)} \quad \det G < 0 \quad (\det G > 0);\\ \text{(ii)} \quad c_{ii} > 0;\\ \text{(iii)} \quad \operatorname{ch} l_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}} \quad (\cos l_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}),\end{gathered} \tag{4}$$

где l_{ij} есть длина ребра, соединяющего вершины V_i и V_j ($i, j = 1, 2, 3, 4; i \neq j$).

Основным инструментом при вычислении объемов неевклидовых многогранников является формула Шлефли для дифференциала объема. Заметим, что Л. Шлефли [43] доказал эту формулу для сферического n-мерного пространства, а позднее Х. Кнезер [30] обобщил ее и на гиперболический случай. Однако нас будет интересовать лишь ее частный случай, когда $n = 3$.

Теорема 3. *Пусть P — выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{S}^3$ или $\mathbb{H}^3$. Если многогранник P непрерывно деформируется в пространстве, не изменяя своего комбинаторного строения, а его двугранные углы изменяются дифференцируемым образом, то и объем $V = V(P)$ также изменяется дифференцируемым образом и его дифференциал выражается по формуле:*

$$K\, dV = \frac{1}{2} \sum_i l_i\, d\alpha_i, \tag{5}$$

где K — кривизна пространства, l_i — длина i-го ребра многогранника, а суммирование ведется по всем ребрам многогранника P. При этом $d\alpha_i$ обозначает дифференциал двугранного угла α_i при i-м ребре.

Доказательство. При доказательстве формулы (5) мы будем пользоваться тем, что многогранник P триангулирован, т.е. его можно представить в виде объединения конечного числа тетраэдров $P = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$ и триангуляция деформируется вместе с многогранником. При этом тетраэдры разбиения $T_i \neq T_j$ либо не пересекаются, либо имеют общую вершину, либо общее ребро, либо общую грань. Кроме того, мы исключим случай, когда ребро тетраэдра триангуляции является частью ребра исходного многогранника P.

Сначала покажем, что выражения, стоящие в левых и правых частях формулы Шлефли (5), равны суммам аналогичных выражений для тетраэдров разбиения.

Действительно, что касается левой части формулы (5), то в силу свойства аддитивности объема и линейности дифференциала, имеем:

$$K\,dV = K\,d(\sum_{i=1}^{n} T_i) = K\,dV(T_1) + K\,dV(T_2) + ... + K\,dV(T_n).$$

Теперь докажем аналогичный факт для правой части.

Рассмотрим произвольный тетраэдр разбиения T_i и его ребро a, которое не является ребром исходного многограннника P. Может случиться, что T_i вообще не содержит ни одного ребра, которое совпадало бы с ребром исходного многогранника.

Ребро a принадлежит как минимум еще одному тетраэдру разбиения T_j, и сумма двугранных углов при данном ребре всегда постоянна и равна 2π или π если ребро принадлежит грани P.

Теперь для каждого из тетраэдров разбиения составим выражения, аналогичные выражению в правой части формулы Шлефли, и сложим их. Затем сгруппируем слагаемые, содержащие объемы всех тетраэдров, имеющих заданное общее ребро. После вынесения за скобку длины данного ребра, в скобках получатся суммы следующего вида, которые вследствие свойства линейности дифференциала, примененного уже в другую сторону, равны нулю:

$$d\alpha_1 + d\alpha_2 + ... + d\alpha_s = d(\Sigma_{i=1}^{s}\alpha_s) = dc = 0,$$

где α_i суть двугранные углы тетраэдров разбиения при соответствующем ребре, а $c = 2\pi$ или $c = \pi$.

Следовательно, сумма всех слагаемых, содержащих ребра тетраэдров разбиения, которые не являются ребрами исходного многогранника P, равна нулю. В свою очередь, просуммировав остальные слагаемые мы получим в точности правую часть формулы Шлефли.

Таким образом, нам достаточно доказать формулу (4) для тетраэдра.

Пусть тетраэдр T ограничен плоскостями H_1, H_2, H_3, H_4. Рассмотрим деформацию T, при которой меняется лишь один его двугранный угол. Такая деформация может быть описана как бесконечно малый сдвиг плоскости H_1 вдоль прямой $m = H_3 \cap H_4$. При этом изменится лишь двугранный угол α при ребре $e = T \cap H_1 \cap H_2$.

Далее, пусть p – вершина T, которая не принадлежит H_2, а $m^{'}$ – проходящая через нее прямая, перпендикулярная H_1.

Тогда приращение объема можно, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, рассматривать как клин с ребром, которое принадлежит $m^{'}$ (Рис. 1.2).

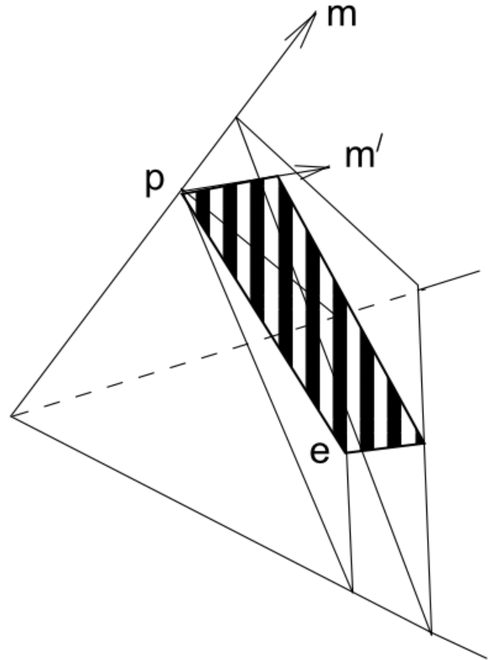

Рис. 1.2.

Площадь среза такого клина равна площади четырехугольника Q, угловой избыток которого равен $d\alpha$ (Рис. 1.3).

Значит, площадь Q равна $K\,d\alpha$ (см., напр., [21]), и по формуле объема клина получаем:

$$K\,dV(T) = \frac{1}{2} \cdot e \cdot d\alpha.$$

$\square$

Наконец, нам понадобится также следующее утверждение, доказанное Якоби.

Предложение 2. *(теорема Якоби). Пусть* $M = \langle m_{ij} \rangle_{i,j=1,\dots,n}$ *– матрица с отпределителем* $\Delta = \det M$*. Далее, пусть* $H = \langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4}$*, где* $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$*, а* M_{ij} *— ij-й минор матрицы* G*. Тогда для любых* $k, 1 \le k \le n-1$ *имеет место равенство:*

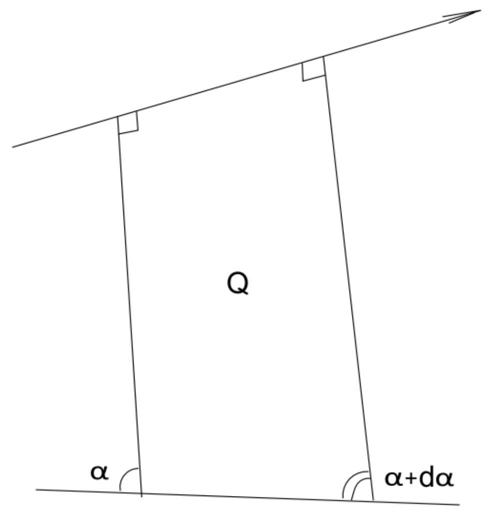

Рис. 1.3.

$$\det\langle c_{ij}\rangle_{i,j=1,\dots,k} = \Delta^{k-1}\det\langle m_{ij}\rangle_{i,j=k+1,\dots,n} \qquad (6).$$

1.2.2 Объем ортосхемы в $\mathbb{S}^3$ и $\mathbb{H}^3$

Первые шаги к решению задачи вычисления объемов неевклидовых многогранников были сделаны еще Н.И. Лобачевским, Я. Больяи и Л. Шлефли. Они вычислили объем неевклидовых тетраэдров в некотором специальном случае. В частности, Л. Шлефли вычислил объем *ортосхемы* в $\mathbb{S}^3$.

Определение 1. *Ортосхемой в $\mathbb{X}^n$ называется n-мерный симплекс, имеющий последовательность взаимно ортогональных ребер $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n)$.*

Трехмерную ортосхему часто называют *бипрямоугольным тетраэдром.*

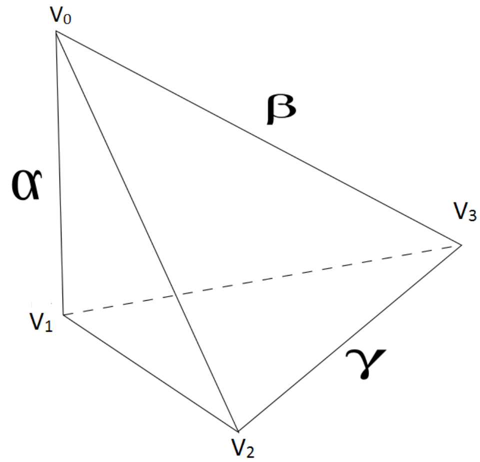

Рис. 1.4. Бипрямоугольный тетраэдр $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$

Из шести двугранных углов бипрямоугольного тетраэдра три – прямые. Остальные три обозначим буквами α, β, γ и назовем их *существенными двугранными углами* (Рис. 1.4.).

Бипрямоугольные тетраэдры особенно интересны в связи с тем, что всякий тетраэдр можно разбить на бипрямоугольные, опустив из какой-либо его вершины перпендикуляры на плоскость противоположной грани и на прямые, ограничивающие эту грань.

Теорема 4. *(Schläfli, 1858). Пусть T — сферический бипрямоугольный тетраэдр с существенными двугранными углами α, β, γ. Тогда его объем $V = V(T)$ задается формулой:*

$$V = \frac{1}{4} S(\alpha, \beta, \gamma),$$

где

$$S(\frac{\pi}{2} - x, y, \frac{\pi}{2} - z) = \hat{S}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} [\left(\frac{D - \sin x \sin y}{D + \sin x \sin y} \right)^m \cdot$$

$$\cdot \frac{\cos 2mx - \cos 2my + \cos 2mz - 1}{m^2}] - x^2 + y^2 - z^2,$$

а

$$D \equiv \sqrt{\cos^2 x \cos^2 z - \cos^2 y}.$$

Доказательство теоремы 4 приведено в работе [43].

Функция $S(x, y, z)$, которая фигурирует в Теореме 4, носит название *функции Шлефли.*

Объем бипрямоугольного тетраэдра в $\mathbb{H}^3$ вычислили независимо друг от друга Н.И. Лобачевский [32] и Я. Больяи [20].

В следующей теореме результат Н.И. Лобачевского представлен в очень компактном виде. В такой форме его впервые записал Г.С.М. Кокстер [41].

Теорема 5. *(Лобачевский, 1835; Coxeter, 1935). Пусть T — бипрямоугольный тетраэдр в $\mathbb{H}^3$ с существенными двугранными углами α, β, γ. Тогда его объем $V = V(T)$ задается формулой:*

$$V = \frac{i}{4} S(\alpha, \beta, \gamma),$$

где $S(\alpha, \beta, \gamma)$ — функция Шлефли.

В заключение подраздела мы приведем результат Я. Больяи, который вычислил объем гиперболического бипрямоугольного тетраэдра в терминах его плоских углов и длины ребра.

Пусть $T = ABCD$ – бипрямоугольный тетраэдр с прямыми двугранными углами при ребрах AC, BC, BD. Далее, пусть α, β и γ — величины соответствующих плоских углов, а z — длина ребра CD (Рис. 1.2.2).

Теорема 6. *(Bolyai, 1832). Пусть T –бипрямоугольный тетраэдр с плоскими углами α, β и γ и длиной ребра z (Рис. 1.5.). Тогда его объем*

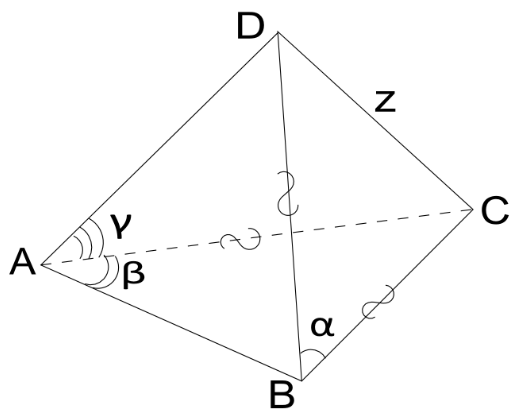

Рис. 1.5.

$V = V(T)$ *вычисляется по формуле:*

$$V = \frac{\mathrm{tg}\gamma}{2\mathrm{tg}\beta}\int_0^z \frac{u\,\mathrm{sh}u\,du}{\left(\frac{\mathrm{ch}^2 u}{\cos^2\alpha} - 1\right)\sqrt{\frac{\mathrm{ch}^2 u}{\cos^2\gamma} - 1}}.$$

1.2.3 Объем идеального тетраэдра

Определение 2. *Идеальным тетраэдром называется гиперболический тетраэдр, все вершины которого являются идеальными.*

Сумма двугранных углов при каждой вершине такого тетраэдра равна π. Очевидно, что противоположные двугранные углы идеального тетраэдра попарно равны, т.е. он однозначно с точностью до движения определяется тремя двугранными углами A, B и C. Таким образом, $T = T(A, B, C)$.

Объем идеального тетраэдра был впервые вычислен Н.И. Лобачевским [32]. Дж. Милнор [33] же представил результат Лобачевского в более элегантном виде.

Теорема 7. *(Лобачевский, 1835; Milnor, 1982). Пусть T – идеальный тетраэдр с двугранными углами A, B и C. Тогда его объем выражается формулой:*

$$V = \Lambda(A) + \Lambda(B) + \Lambda(C),$$

где

$$\Lambda(x) = -\int_0^x \ln|2\,\sin t|dt,\, x \in \mathbb{R}$$

есть функция Лобачевского.

Замечание 1. *Функция $\Lambda(x)$ была введена Д.Милнором в работе [33] и является модифицированным определением специальной функции*

$$L(x) = -\int_0^x \ln|\cos t|dt,$$

введенной самим Н.И.Лобачевским в [32]. Функции $L(x)$ и $\Lambda(x)$ связаны между собой соотношением:

$$L(x) = \Lambda\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + x\ln 2.$$

В дальнейшем под функцией Лобачевского мы будем понимать именно модифицированную функцию $\Lambda(x)$.

Нельзя не упомянуть, что в общем случае формулы объемов тетраэдров, имеющих хотя бы одну вершину на бесконечности, были найдены Э.Б. Винбергом [18]. Основная идея при этом состоит в представлении объема тетраэдра с идеальными вершинами в виде алгебраической суммы объемов бипрямоугольных тетраэдров, которые могут быть найдены согласно рассмотренной ранее теореме 5.

1.3 Объемы произвольных неевклидовых тетраэдров

Несмотря на то, что объемы тетраэдров специального вида были вычислены еще в XIX веке, формула объема произвольного неевклидова тетраэдра до недавнего времени оставалась неизвестной. Настоящий раздел будет посвящен обзору некоторых основных результатов об объемах произвольных неевклидовых тетраэдров. В заключение будет приведен основной результат первой главы, который заключается в выводе формулы Деревнина–Медных объема произвольного тетраэдра в $\mathbb{H}^3$ из формулы Мураками–Яно.

1.3.1 Формула Сфорцы объема произвольного неевклидова тетраэдра

Первым данную задачу в 1907 году решил итальянский герцог Г. Сфорца. Но, как было сказано во введении, формула Сфорцы содержала многозначную функцию и в работе не было указано, какая из ее ветвей дает объем. Поэтому выдающаяся работа Г. Сфорцы [44] долгое время была полностью забыта и приобрела широкую известность лишь после дискуссии А.Д. Медных с Х.М. Монтесиносом на конференции в Испании в августе 2006 года.

Оригинальное доказательство формулы Сфорцы, помимо использования дифференциального тождества Шлефли (4), основано на уравнении Паскаля для миноров матрицы Грама. В данном подразделе будет приведено современное доказательство данной формулы, принадлежащее Н.В. Абросимову и А.Д. Медных [15].

Теорема 8. *(Sforza, 1907). Пусть T – произвольный тетраэдр в $\mathbb{H}^3$ (Рис. 1.1.) с матрицей Грама (3). Будем рассматривать* $\det G = \det G(A)$ *как функцию от двугранного угла A. Тогда объем тетраэдра*

$V = V(T)$ задается формулой:

$$V = \frac{1}{4}\int_{A_0}^{A} \ln \frac{c_{34} - \sqrt{-\mathrm{det}G(A)}\sin A}{c_{34} + \sqrt{-\mathrm{det}G(A)}\sin A} dA,$$

где A_0 есть подходящее решение уравнения $\mathrm{det}G(A) = 0$, а $c_{34} = c_{34}(A)$ — алгебраическое дополнение к элементу 34 матрицы $G(A)$.

Доказательство. (Абросимов, Медных). Обозначим $\mathrm{det}G$ через Δ, а длину ребра двугранного угла A через l_A. К матрице G применим теорему Якоби (6). При $n = 4$ и $k = 2$ имеем:

$$c_{33}c_{44} - c_{34}^2 = \Delta(1 - \cos^2 A).$$

Применяя формулу (iii) предложения 1, получим $\mathrm{ch}\, l_A = \frac{c_{34}}{\sqrt{c_{33}c_{44}}}$. Следовательно,

$$\mathrm{sh}\, l_A = \sqrt{\mathrm{ch}^2 l_A - 1} = \sqrt{\frac{c_{34}^2 - c_{33}c_{44}}{c_{33}c_{44}}} = \frac{\sqrt{-\Delta}\sin A}{\sqrt{c_{33}c_{44}}}.$$

Так как $\exp(\pm l_A) = \mathrm{ch} l_A \pm \mathrm{sh} l_A$, то:

$$\exp(\pm l_A) = \frac{c_{34} \pm \sqrt{-\Delta}\sin A}{\sqrt{c_{33}c_{44}}}.$$

Таким образом,

$$\exp(2l_A) = \frac{\exp(l_A)}{\exp(-l_A)} = \frac{c_{34} + \Delta\sin A}{c_{34} - \Delta\sin A},$$

и

$$l_A = \frac{1}{2}\ln\frac{c_{34} - \sqrt{-\mathrm{det}G(A)}\sin A}{c_{34} + \sqrt{-\mathrm{det}G(A)}\sin A}.$$

Теперь запишем для тетраэдра T формулу Шлефли:

$$-dV = \frac{1}{2} l_A dA.$$

Учтем тот факт, что $\Delta \to 0$ при $A \to A_0$. Следовательно, $V \to 0$ при $A \to A_0$. Наконец, интегрируя обе части последнего уравнения, получим:

$$V = \int_{A_0}^{A} \left(-\frac{l_A}{2}\right) dA = \frac{1}{4} \int_{A_0}^{A} \ln \frac{c_{34} - \sqrt{-\det G(A)} \sin A}{c_{34} + \sqrt{-\det G(A)} \sin A} dA.$$

$\square$

В свою очередь, следующая теорема представляет собой сферический вариант формулы Сфорцы.

Теорема 9. *Пусть T – произвольный сферический тетраэдр (Рис. 1.1.) с матрицей Грама (3). Будем рассматривать $G = G(A)$ как функцию от двугранного угла A. Тогда объем тетраэдра $V = V(T)$ задается формулой:*

$$V = \frac{1}{4i} \int_{A_0}^{A} \ln \frac{c_{34} - i\sqrt{\det G(A)} \sin A}{c_{34} + i\sqrt{\det G(A)} \sin A} dA,$$

где A_0 суть подходящее решение уравнения $\det G(A) = 0$, а $c_{34} = c_{34}(A)$ есть алгебраическое дополнение к элементу 34 матрицы $G(A)$.

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству для гиперболического случая.

1.3.2 Формула Мураками–Яно

Ввиду того, что формула Сфорцы содержит многозначную функцию, возникла потребность в нахождении обозримой и компактной формулы, выражающей объем произвольного неевклидова тетраэдра в терминах вещественных функций.

Первый шаг к решению поставленной проблемы был сделан Сяном [46], который предложил лишь общий алгоритм нахождения такой формулы. Полное решение поставленной проблемы было получено десять лет спустя Ю. Чо и Х. Кимом [39]. Но формула Чо–Кима была асимметричной относительно перестановки углов. Затем Дж. Мураками и У. Яно [37] была получена формула объема произвольного неевклидова тетраэдра, симметричная относительно перестановки двугранных углов. Дж. Мураками и А. Ушиджимой [36] был вычислен объем произвольного гиперболического тетраэдра в терминах длин ребер.

Но формулы, предложенные вышеназванными математиками, являются довольно громоздкими. Кроме того, некоторые параметры в них выражены неявно через начальные данные.

И лишь в 2004 году Д.А. Деревниным и А.Д. Медных была предложена более компактная интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах его двугранных углов [28]. Доказательство этой формулы основывается на геометрических соотношениях между длинами ребер тетраэдра и его двугранными углами, определенных теоремой синусов–тангенсов. Кроме того, одним из ключевых шагов доказательства является применение дифференциальной формулы Шлефли, выражающей дифференциал объема через длины ребер и дифференциалы двугранных углов. В этой же работе было сказано, что из формулы Деревнина–Медных вытекает формула Мураками–Яно.

В настоящем же разделе будут приведены обратный вывод формулы Деревнина–Медных из формулы Мураками–Яно и интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах длин его ребер.

Рассматривается задача вычисления объема произвольного тетраэдра в $\mathbb{H}^3$.

Пусть, как и прежде, T — гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого суть A, B, C, D, E, F. Кроме того, будем полагать, что A, B, C – двугранные углы при ребрах с общей вершиной, а D, E, F – противолежащие им двугранные углы (Рис. 1.1.).

Далее, пусть $a = \exp(iA), b = \exp(iB), c = \exp(iC), d = \exp(iD), e = \exp(iE), f = \exp(iF)$, а $U(z, T)$ – эмпирическая функция Мураками–Яно:

$$U(z,T) = \frac{1}{2}\{Li_2(z) + Li_2(z\,a\,b\,d\,e) + Li_2(z\,a\,c\,d\,f) + Li_2(z\,b\,c\,e\,f) -$$

$$-Li_2(-z\,a\,b\,c) - Li_2(-z\,a\,e\,f) - Li_2(-z\,b\,d\,f) - Li_2(-z\,c\,d\,e)\} \qquad (7),$$

где $Li_2(z)$ – ветвь дилогарифма Эйлера

$$Li_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t}dt \quad (z \in \mathbb{C}\backslash[1;+\infty)),$$

отвечающая ветви логарифмической функции $\ln\theta = \ln|\theta| + i\arg\theta$ $(-\pi < \arg\theta < \pi)$.

Исследуем уравнение $dU/dz = 0$. Вычислим dU/dz:

$$\frac{dU(z,T)}{dz} = -\frac{1}{2z}(\ln(1-z) + \ln(1-a\,b\,d\,e\,z) + \ln(1-a\,c\,d\,f\,z) + \ln(1-b\,c\,e\,f\,z) -$$

$$-\ln(1+a\,b\,c\,z) - \ln(1+a\,e\,f\,z) - \ln(1+b\,d\,f\,z) - \ln(1+c\,d\,e\,z)).$$

Следовательно, уравнение $dU/dz = 0$ эквивалентно следующему:

$$(1-z)(1-a\,b\,d\,e\,z)(1-a\,c\,d\,f\,z)(1-b\,c\,e\,f\,z) -$$

$$-(1+a\,b\,c\,z)(1+a\,e\,f\,z)(1+b\,d\,f\,z)(1+c\,d\,e\,z) = 0. \qquad (8)$$

Как нетрудно видеть, свободный член (8) равен нулю. Следовательно, исходное уравнение $dU/dz = 0$ эквивалентно квадратному уравнению:

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0, \qquad (9)$$

где

$$\alpha = abcdef(abcdef + ad + be + cf + abf + ace + bcd + def),$$
$$\beta = -abcdef\{(a-\frac{1}{a})(d-\frac{1}{d}) + (b-\frac{1}{b})(e-\frac{1}{e}) + (c-\frac{1}{c})(f-\frac{1}{f})\},$$
$$\gamma = 1 + abde + acdf + bcef + abc + aef + bdf + cde.$$

Легко видеть, что число $\beta_1 = \frac{\beta}{abcdef}$ является вещественным, а также имеет место соотношение:

$$\alpha = (abcdef)^2\bar{\gamma},$$

где $\bar{\gamma}$ есть комплексное число, сопряженное числу γ.

Обозначим через z_1 и z_2 решения (9). Сформулируем и докажем следующую лемму, которая понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 1. *(J. Murakami, M. Yano). Пусть T – гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого суть A, B, C, D, E, F. Кроме того, будем полагать, что A, B, C – двугранные углы при ребрах с общей вершиной, а D, E, F – противолежащие им двугранные углы (Рис. 1.1.). Далее, пусть z_1 и z_2 – решения уравнения (9). Тогда*

$$|z_1| = |z_2| = 1.$$

Доказательство. Пусть $G(T)$ – матрица Грама тетраэдра T

$$G(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, так как T – гиперболический тетраэдр, то (см., например, [45])

$$\det G(T) < 0.$$

Как и прежде, обозначим через $a = \exp(iA), b = \exp(iB), \ldots, f = \exp(iF)$. Тогда:

$$G(T) = \begin{pmatrix} 1 & -(a+a^{-1})/2 & -(b+b^{-1})/2 & -(f+f^{-1})/2 \\ -(a+a^{-1})/2 & 1 & -(c+c^{-1})/2 & -(e+e^{-1})/2 \\ -(b+b^{-1})/2 & -(c+c^{-1})/2 & 1 & -(d+d^{-1})/2 \\ -(f+f^{-1})/2 & -(e+e^{-1})/2 & -(d+d^{-1})/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{D}$ – дискриминант уравнения (9) , т.е.

$$\mathcal{D} = \beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma.$$

Тогда

$$\mathcal{D} = (a\,b\,c\,d\,e\,f)^2\,(\beta_1^2 - 4|\gamma|^2).$$

Прямыми вычислениями можно показать, что:

$$\frac{\mathcal{D}}{16\,(a\,b\,c\,d\,e\,f)^2} = \det G(T).$$

Следовательно,

$$\beta_1^2 - 4|\gamma|^2 < 0.$$

Найдем решения z_1 и z_2:

$$z_1, z_2 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = a\,b\,c\,d\,e\,f\,\frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4|\gamma|^2}}{2\alpha},$$

значит

$$|z_1|^2 = |z_2|^2 = \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|^2.$$

А так как

$$\left|\frac{\gamma}{\alpha}\right| = \left|\frac{1 + a\,b\,c + a\,b\,d\,e + a\,c\,d\,f + a\,e\,f + b\,c\,e\,f + b\,d\,f + c\,d\,e}{1 + \overline{a\,b\,c} + \overline{a\,b\,d\,e} + \overline{a\,c\,d\,f} + \overline{a\,e\,f} + \overline{b\,c\,e\,f} + \overline{b\,d\,f} + \overline{c\,d\,e}}\right| = 1,$$

то мы получаем, что $|z_1| = |z_2| = 1$. □

Далее, пусть $\mathrm{Vol}(T)$ – объем гиперболического тетраэдра T. Имеет место следующая теорема Мураками-Яно ([MY]), доказанная в [37].

Теорема 10. *(J. Murakami, M. Yano, 2001). Объем гиперболического тетраэдра T находится по формуле:*

$$\mathrm{Vol}(T) = \mathrm{Im}\left\{\frac{U(z_1,T) - U(z_2,T)}{2}\right\}. \tag{10}$$

Замечание 2. *В работе [37] вводятся в рассмотрение следующие величины:*

$$V_1(T) = U(z_1,T) + \Delta(T),$$

$$V_2(T) = U(z_2,T) + \Delta(T),$$

где

$$\tilde{\Delta}(a,b,c) = -\frac{1}{4}(Li_2(-abc^{-1}) + Li_2(-ab^{-1}c) + Li_2(-a^{-1}bc) +$$

$$+ Li_2(-a^{-1}b^{-1}c^{-1}) + (\ln a)^2 + (\ln b)^2 + (\ln c)^2),$$

$$\Delta(T) = \tilde{\Delta}(a,b,c) + \tilde{\Delta}(a,e,f) + \tilde{\Delta}(b,d,f) + \tilde{\Delta}(c,d,e) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\ln a \ln d + \ln b \ln e + \ln c \ln f).$$

Можно показать (см. [37]), что мнимые части $V_1(T)$ и $V_2(T)$ равны по абсолютной величине, а отличаются лишь знаком. Поэтому под z_1 понимается такое решение, что соответствующая величина $\mathrm{Im}V_1(T) > 0$.

Вывод формулы Мураками–Яно можно найти в работе [37]. Он основан на доказательстве того, что функция объема (10) удовлетворяет дифференциальной формуле Шлефли (5) и, кроме того, опирается на полученную ранее формулу Чо–Кима [39].

Формула (10) позволяет в явном виде выписать выражение для объема произвольного гиперболического тетраэдра в терминах специальной функции Лобачевского.

1.3.3 Специальная функция Лобачевского и ее свойства

Напомним, что специальная функция Лобачевского $\Lambda(x)$–это функция, определенная на всей вещественной прямой следующим интегралом:

$$\Lambda(x) = -\int_0^x \ln|2\sin t|dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим теперь основные свойства функции Лобачевского (некоторые из них понадобятся нам при доказательстве интегральной формулы объема гиперболического тетраэдра):

Свойство 1. $\Lambda(x)$ *является функцией, непрерывной на всей вещественной прямой.*

Свойство 2. $\Lambda(x)$ *является периодической функцией с основным периодом* π.

Свойство 3. $\Lambda(-x) = -\Lambda(x)$, *то есть* $\Lambda(x)$ *является нечетной функцией.*

Свойство 4. $\Lambda(x)$ *обладает свойством симметрии, то есть*

$$\Lambda(\pi - x) = -\Lambda(x).$$

Свойство 5. *Для любого натурального* n *справедливо равенство:*

$$\Lambda(nx) = n\sum_{j=0}^{n-1}\Lambda\left(x + \frac{j\pi}{n}\right), n \in \mathbb{N}.$$

В частности,

$$\Lambda(2x) = 2\Lambda(x) + 2\Lambda\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Свойство 6. *Функция* $\Lambda(x)$ *связана с дилогарифмом Эйлера формулой:*

$$\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(exp(\mathrm{ix})) = 2\Lambda\left(\frac{x}{2}\right).$$

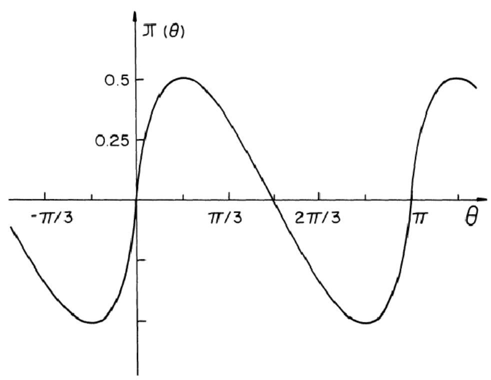

Рис. 1.6.

Кроме того заметим, что функция $\Lambda(x)$ обращается в нуль в точках $\frac{\pi n}{2}$, достигает максимума, равного

$$M = 0,5074708...,$$

в точках $\pi n + \frac{\pi}{6}$, и минимума, равного $-M$, в точках $\pi n - \frac{\pi}{6}$. Она дифференцируема всюду, кроме точек πn, где ее производная обращается в $+\infty$. График функции $\Lambda(\theta)$ представлен на рис. 1.3.3.

Доказательство вышеперечисленных свойств, а также некоторые другие свойства можно найти в работе [41].

Метод приближенного вычисления значений функции Лобачевского приведен в [33].

1.3.4 Формула Деревнина–Медных

В настоящем подразделе будут приведены основные результаты первой главы, а именно обратный вывод формулы Деревнина–Медных из формулы Мураками–Яно и интегральная формула объема произвольного гиперболического тетраэдра в терминах двугранных углов, которая является прямым следствием теоремы Деревнина–Медных.

Для вывода формулы Деревнина–Медных мы сначала, используя формулу (10) и свойство 6 из предыдущего раздела, выразим объем произвольного гиперболического тетраэдра в терминах специальной функции Лобачевского.

Таким образом, согласно формуле (7):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(T) = \frac{\mathrm{Im}\{U(z_1,T) - U(z_2,T)\}}{2} &= \frac{1}{2}(\Lambda\left(\frac{Z_1}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{Z_2}{2}\right) + \\
+\Lambda\left(\frac{Z_1+A+B+D+E}{2}\right) &- \Lambda\left(\frac{Z_2+A+B+D+E}{2}\right) + \\
+\Lambda\left(\frac{Z_1+A+C+D+F}{2}\right) &- \Lambda\left(\frac{Z_2+A+C+D+F}{2}\right) + \\
+\Lambda\left(\frac{Z_1+B+C+E+F}{2}\right) &- \Lambda\left(\frac{Z_2+B+C+E+F}{2}\right) + \\
+\Lambda\left(\frac{Z_2+\pi+A+B+C}{2}\right) &- \Lambda\left(\frac{Z_1+\pi+A+B+C}{2}\right) + \\
+\Lambda\left(\frac{Z_2+\pi+A+E+F}{2}\right) &- \Lambda\left(\frac{Z_1+\pi+A+E+F}{2}\right) + \\
+\Lambda\left(\frac{Z_2+\pi+B+D+F}{2}\right) &- \Lambda\left(\frac{Z_1+\pi+B+D+F}{2}\right) + \\
+\Lambda\left(\frac{Z_2+\pi+C+D+E}{2}\right) &- \Lambda\left(\frac{Z_1+\pi+C+D+E}{2}\right)),
\end{aligned} \tag{10$'$}$$

где $Z_1 = \mathrm{arg} z_1$, $Z_2 = \mathrm{arg} z_2$.

Следовательно, объем гиперболического тетраэдра представляется в виде алгебраической суммы шестнадцати значений функции Лобачевского.

Имеет место

Теорема 11. *(D.A. Derevnin, A.D. Mednykh, 2004). Пусть* $T = T(A, B, C, D, E, F)$*–гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого* A, B, C *лежат при одной вершине, а* D, E, F *– противолежащие им двугранные углы. Далее, пусть* z_1 *и* z_2 *– решения уравнения* (9) *и* $Z_1 = \arg z_1$, $Z_2 = \arg z_2$. *Тогда объем гиперболического тетраэдра выражается интегралом по отрезку вещественной прямой с вещественнозначной подынтегральной функцией:*

$$\mathrm{Vol}(T) = -\frac{1}{4}\int_{Z_2}^{Z_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+A+B+D+E}{2}\sin\frac{\xi+A+C+D+F}{2}\sin\frac{\xi+B+C+E+F}{2}}{\cos\frac{\xi+A+B+C}{2}\cos\frac{\xi+A+E+F}{2}\cos\frac{\xi+B+D+F}{2}\cos\frac{\xi+C+D+E}{2}}\right| d\xi. \tag{11}$$

Доказательство. С помощью определения функции Лобачевского формулу (10') перепишем в виде

$$\mathrm{Vol}(T) = -\frac{1}{2}\Big\{\int_{\frac{Z_2}{2}}^{\frac{Z_1}{2}} \ln|\sin t|dt + \int_{\frac{Z_2+A+B+D+E}{2}}^{\frac{Z_1+A+B+D+E}{2}} \ln|\sin t|dt + \int_{\frac{Z_2+A+C+D+F}{2}}^{\frac{Z_1+A+C+D+F}{2}} \ln|\sin t|dt +$$

$$+\int_{\frac{Z_2+B+C+E+F}{2}}^{\frac{Z_1+B+C+E+F}{2}} \ln|\sin t|dt + \int_{\frac{Z_1+\pi+A+B+C}{2}}^{\frac{Z_2+\pi+A+B+C}{2}} \ln|\sin t|dt + \int_{\frac{Z_1+\pi+A+E+F}{2}}^{\frac{Z_2+\pi+A+E+F}{2}} \ln|\sin t|dt +$$

$$+\int_{\frac{Z_1+\pi+B+D+F}{2}}^{\frac{Z_2+\pi+B+D+F}{2}} \ln|\sin t|dt + \int_{\frac{Z_1+\pi+C+D+E}{2}}^{\frac{Z_2+\pi+C+D+E}{2}} \ln|\sin t|dt\Big\}.$$

Наконец, добьемся того, чтобы нижний и верхний пределы интегрирования в каждом интеграле были равны Z_2 и Z_1 соответственно. Для этого выполним подходящие замены переменных в каждом из 8 получившихся интегральных слагаемых, а именно:

$$1)\quad t \to \frac{\xi}{2};$$

$$2)\quad t \to \frac{\xi + A + B + C + D}{2};$$

$$3)\quad t \to \frac{\xi + A + C + D + F}{2};$$

$$4)\quad t \to \frac{\xi + B + C + E + F}{2};$$
$$5)\quad t \to \frac{\xi + \pi + A + B + C}{2};$$
$$6)\quad t \to \frac{\xi + \pi + A + E + F}{2};$$
$$7)\quad t \to \frac{\xi + \pi + B + D + F}{2};$$
$$8)\quad t \to \frac{\xi + \pi + C + D + E}{2}.$$

Окончательно получаем

$$\mathrm{Vol}(T) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1} \ln\left|\sin\frac{\xi}{2}\right| d\xi + \frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1} \ln\left|\sin\frac{\xi + A + B + D + E}{2}\right| d\xi +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1} \ln\left|\sin\frac{\xi + A + C + D + F}{2}\right| d\xi + \frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1} \ln\left|\sin\frac{\xi + B + C + E + F}{2}\right| d\xi -$$
$$-\frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1} \ln\left|\cos\frac{\xi + A + B + C}{2}\right| d\xi - \frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1} \ln\left|\cos\frac{\xi + A + E + F}{2}\right| d\xi -$$
$$-\frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1} \ln\left|\cos\frac{\xi + B + D + F}{2}\right| d\xi - \frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1} \ln\left|\cos\frac{\xi + \ + D + E}{2}\right| d\xi) =$$
$$= -\frac{1}{4}\int_{Z_2}^{Z_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+A+B+D+E}{2}\sin\frac{\xi+A+C+D+F}{2}\sin\frac{\xi+B+C+E+F}{2}}{\cos\frac{\xi+A+B+C}{2}\cos\frac{\xi+A+E+F}{2}\cos\frac{\xi+B+D+F}{2}\cos\frac{\xi+C+D+E}{2}}\right| d\xi.$$

А теперь покажем, что Z_1 и Z_2 в теореме совпадают с выражениями для пределов интегрирования, полученными Д.А.Деревниным и А.Д.Медных в [28]. В их работе пределы интегрирования выражаются следующим образом:

$$Z_1 = \mathrm{arctg}\frac{k_2}{k_1} - \mathrm{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$Z_2 = \mathrm{arctg}\frac{k_2}{k_1} + \mathrm{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

где вещественные числа k_1, k_2, k_3 и k_4 имеют вид:

$$k_1 = -(\cos(A+B+C+D+E+F)+\cos(A+D)+\cos(B+E)+\cos(C+F)+$$

$$+\cos(D+E+F)+\cos(D+B+C)+\cos(A+E+C)+\cos(A+B+F)),$$

$$k_2 = \sin(A+B+C+D+E+F)+\sin(A+D)+\sin(B+E)+\sin(C+F)+$$

$$+\sin(D+E+F)+\sin(D+B+C)+\sin(A+E+C)+\sin(A+B+F)),$$

$$k_3 = 2(\sin A\sin D + \sin B\sin E + \sin C\sin F),$$

$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}.$$

Действительно, учитывая равенство

$$\frac{\mathcal{D}}{16\,(a\,b\,c\,d\,e\,f)^2} = \det G(T),$$

выразим решения z_1 и z_2 уравнения (9) через величины двугранных углов тетраэдра и определитель его матрицы Грама [45]:

$$z_1 = -2\frac{\sin A\sin D + \sin B\sin E + \sin C\sin F - \sqrt{\det G}}{ad+be+cf+abf+ace+bcd+def+abcdef},$$

$$z_2 = -2\frac{\sin A\sin D + \sin B\sin E + \sin C\sin F + \sqrt{\det G}}{ad+be+cf+abf+ace+bcd+def+abcdef}.$$

Используя принятые выше обозначения, получим:

$$z_1 = \frac{k_3 - 2\sqrt{\det G}}{k_1 - ik_2},$$

$$z_2 = \frac{k_3 + 2\sqrt{\det G}}{k_1 - ik_2}.$$

Далее, так как [28]

$$k_1^2 + k_2^2 - k_3^3 = k_4^2 = -4\det G,$$

то

$$z_1 = \frac{k_3 - ik_4}{k_1 - ik_2},$$

$$z_2 = \frac{k_3 + ik_4}{k_1 - ik_2}.$$

Теперь запишем комплексные числа z_1 и z_2 в алгебраической форме. Окончательно имеем:

$$z_1 = \frac{k_1k_3 + k_2k_4}{k_1^2 + k_2^2} + i\frac{k_2k_3 - k_1k_4}{k_1^2 + k_2^2},$$

$$z_2 = \frac{k_1k_3 - k_2k_4}{k_1^2 + k_2^2} + i\frac{k_2k_3 + k_1k_4}{k_1^2 + k_2^2}.$$

Попутно заметим, что пределы интегрирования в формуле (11) $Z_1 = \arg z_1$, $Z_2 = \arg z_2$ обязаны также удовлетворять дифференциальной формуле Шлефли [43]. В связи с этим получаем следующие оценки для k_1, k_2, k_3 и k_4:

$$k_1k_3 + k_2k_4 > 0, k_1k_3 - k_2k_4 > 0, \frac{k_2k_4}{k_1k_3} < 1.$$

Наконец, учитывая известные тригонометрические формулы

$$\mathrm{arctg} a \pm \mathrm{arctg} b = \mathrm{arctg}\frac{a \pm b}{1 \mp ab}(ab < 1),$$

получим требуемые выражения для пределов интегрирования. $\square$

Таким образом, опираясь на формулу Мураками-Яно, мы доказали интегральную формулу Деревнина-Медных.

В заключение, как следствие формулы (11), выпишем интегральную формулу объема гиперболического тетраэдра, зависящую только от длин его ребер.

По-прежнему, пусть A, B, C — двугранные углы гиперболического тетраэдра при ребрах с общей вершиной, а D, E, F — противолежащие им двугранные углы. Обозначим длины ребер тетраэдра через $l_i, i \in \{A,B,C,D,E,F\}$. Наконец, предположим, что отрезки $l_A, l_B, l_C, l_D, l_E, l_F$ принадлежат ребрам двугранных углов A,B,C,D,E,F соответственно.

Воспользуемся формулами, выражающими величины двугранных углов T через длины его ребер (см. [45] и [36]):

$$A_l = \arccos\frac{c_{l_{12}}}{\sqrt{c_{l_{11}}\cdot c_{l_{22}}}},\ B_l = \arccos\frac{c_{l_{13}}}{\sqrt{c_{l_{11}}\cdot c_{l_{33}}}},\ C_l = \arccos\frac{c_{l_{23}}}{\sqrt{c_{l_{22}}\cdot c_{l_{33}}}},$$
$$D_l = \arccos\frac{c_{l_{34}}}{\sqrt{c_{l_{33}}\cdot c_{l_{44}}}},\ E_l = \arccos\frac{c_{l_{24}}}{\sqrt{c_{l_{22}}\cdot c_{l_{44}}}},\ F_l = \arccos\frac{c_{l_{14}}}{\sqrt{c_{l_{11}}\cdot c_{l_{44}}}}, \tag{12}$$

где $c_{l_{ij}} = (-1)^{i+j}\cdot G_{l_{ij}}$ – алгебраическое дополнение к ij-му элементу матрицы

$$G_l = \begin{pmatrix} -1 & -\mathrm{ch} l_D & -\mathrm{ch} l_E & -\mathrm{ch} l_C \\ -\mathrm{ch} l_D & -1 & -\mathrm{ch} l_F & -\mathrm{ch} l_B \\ -\mathrm{ch} l_E & -\mathrm{ch} l_F & -1 & -\mathrm{ch} l_A \\ -\mathrm{ch} l_C & -\mathrm{ch} l_B & -\mathrm{ch} l_A & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получаем следствие формулы (11).

Теорема 12. *Пусть* $T = T(l_A, l_B, l_C, l_D, l_E, l_F)$ – *гиперболический тетраэдр, длины ребер которого суть* $l_i, i \in \{A,B,C,D,E,F\}$. *Положим, что ребра* l_A, l_B, l_C *сходятся в одной вершине, а* l_D, l_E, l_F *лежат против* l_A, l_B *и* l_C *соответственно.*

Далее, пусть величины $A_l, B_l, C_l, D_l, E_l, F_l$ *отыскиваются соответственно по формулам (12). Тогда объем гиперболического тетраэдра находится по формуле:*

$$Vol(T) = -\frac{1}{4}\int_{Z_{2_l}}^{Z_{1_l}} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+A_l+B_l+D_l+E_l}{2}\sin\frac{\xi+A_l+C_l+D_l+F_l}{2}\sin\frac{\xi+B_l+C_l+E_l+F_l}{2}}{\cos\frac{\xi+A_l+B_l+C_l}{2}\cos\frac{\xi+A_l+E_l+F_l}{2}\cos\frac{\xi+B_l+D_l+F_l}{2}\cos\frac{\xi+C_l+D_l+E_l}{2}}\right| d\xi. \tag{13}$$

При этом:

$$Z_{1_l} = \operatorname{arctg}\frac{k_{2_l}}{k_{1_l}} - \operatorname{arctg}\frac{k_{4_l}}{k_{3_l}},$$

$$Z_{2_l} = \operatorname{arctg}\frac{k_{2_l}}{k_{1_l}} + \operatorname{arctg}\frac{k_{4_l}}{k_{3_l}},$$

$$\begin{gathered}
k_{1_l} = -(\cos(A_l + B_l + C_l + D_l + E_l + F_l) + \cos(A_l + D_l) + \\
+ \cos(B_l + E_l) + \cos(C_l + F_l) + \\
+ \cos(D_l + E_l + F_l) + \cos(D_l + B_l + C_l) + \\
+ \cos(A_l + E_l + C_l) + \cos(A_l + B_l + F_l)),
\end{gathered}$$

$$k_{2_l} = \sin(A_l + B_l + C_l + D_l + E_l + F_l) + \sin(A_l + D_l) + \sin(B_l + E_l) + \sin(C_l + F_l) +$$

$$+ \sin(D_l + E_l + F_l) + \sin(D_l + B_l + C_l) + \sin(A_l + E_l + C_l) + \sin(A_l + B_l + F_l)),$$

$$k_{3_l} = 2(\sin A_l \sin D_l + \sin B_l \sin E_l + \sin C_l \sin F_l),$$

$$k_{4_l} = \sqrt{k_{1_l}^2 + k_{2_l}^2 - k_{3_l}^2}.$$

Таким образом, формула (13) является интегральной формулой, выражающей объем гиперболического тетраэдра через длины ребер. Она компактнее в своей записи, чем найденная ранее формула Мураками-Ушиджимы [36].

Глава 2

Объемы гиперболических октаэдров с нетривиальными симметриями

В настоящей главе рассматриваются гиперболические октаэдры, обладающие mmm- и $2|$m-симметриями. В первом разделе будут приведены определения октаэдров, обладающих mmm- и $2|$m-симметриями, а также формулы, выражающие их объем в евклидовом и сферическом случаях, полученные ранее Р.В. Галиулиным, С.Н. Михалевым, И.Х. Сабитовым для $\mathbb{E}^3$ и Н.В. Абросимовым, М. Годой–Молина и А.Д. Медных в случае $\mathbb{S}^3$. В следующих двух разделах будут представлены основные результаты главы, а именно элементарные интегральные формулы объема произвольных гиперболических октаэдров, обладающих указанными симметриями.

2.1 Объемы евклидовых и сферических октаэдров, обладающих mmm- и $2|$m-симметриями

Вначале рассмотрим *октаэдр O, обладающий* mmm-*симметрией* (или mmm-*октаэдр*), то есть октаэдр, остающийся инвариантным при отражениях от трех взаимно перпендикулярных плоскостей,

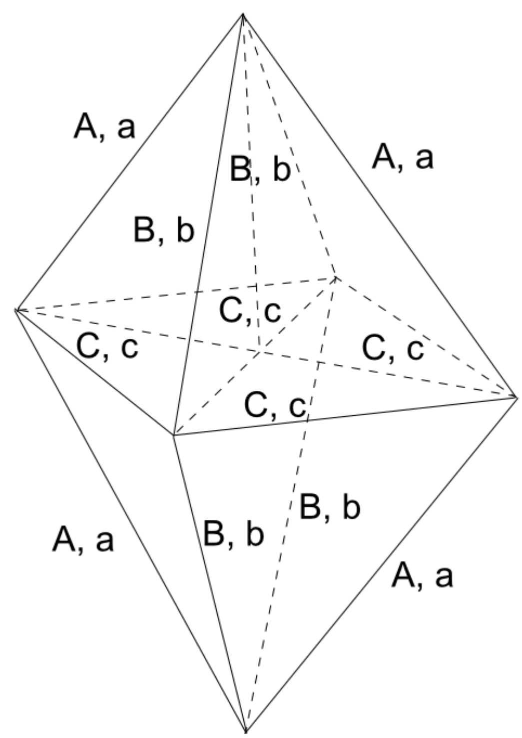

Рис. 2.1.

пересекающих O по его реберным циклам (Рис. 2.1). Заметим, что у такого октаэдра все восемь граней попарно конгруентны между собой. Обозначим через a, b, c длины ребер mmm-октаэдра, а через A, B, C величины его двугранных углов. Таким образом, $O = O(a, b, c, A, B, C)$.

В евклидовом случае имеет место следующая теорема, доказанная Р.В. Галиулиным, С.Н. Михалевым и И.Х. Сабитовым [23].

Теорема 13. *(Галиулин, Михалев, Сабитов, 2004). Пусть* $O(a, b, c, A, B, C)$ *— евклидов октаэдр, обладающий* mmm-*симметрией. Тогда его объем* $V = V(O)$ *может быть найден из уравнения:*

$$9V^2 = 2(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2). \qquad (14)$$

Что касается неевклидовых случаев, то здесь длины ребер mmm-октаэдра могут быть выражены через двугранные углы по правилу синусов-тангенсов (см. [19] и [14]).

Теорема 14. (правило синусов-тангенсов) *Пусть* $O = O(a,b,c,A,B,C)$– *неевклидов октаэдр, обладающий* mmm-*симметрией. Тогда*

1) для $\mathbb{S}^3$*:*

$$\frac{\sin A}{\operatorname{tg} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{tg} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{tg} c} = \bar{T}, \qquad (15)$$

где $\bar{T}$*–положительное число, удовлетворяющее уравнению*

$$\bar{T}^2 + \frac{(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{1+\cos A+\cos B+\cos C} = 0;$$

2) для $\mathbb{H}^3$*:*

$$\frac{\sin A}{\operatorname{th} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{th} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{th} c} = \bar{T}, \qquad (16)$$

где $\bar{T}$*–положительное число, удовлетворяющее уравнению*

$$\bar{T}^2 - \frac{(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{1+\cos A+\cos B+\cos C} = 0.$$

Таким образом, формулы (15) и (16) показывают, что неевклидов октаэдр, обладающий mmm-симметрией, однозначно с точностью до изометрии определяется лишь набором двугранных углов, то есть $O = O(A,B,C)$.

Для сферического пространства задача вычисления объема октаэдра, обладающего mmm-симметрией, полностью решена Н.В. Абросимовым, М. Годой–Молина и А.Д. Медных в работе [14]. А именно, имеет место

Теорема 15. *Пусть* $O = O(A,B,C)$ *— сферический октаэдр, обладающий* mmm-*симметрией. Тогда его объем* $V = V(O)$ *задается следующим выражением:*

$$V(O) = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}(\mathrm{arth}(\cos A\cos t) + \mathrm{arth}(\cos B\cos t)+$$

$$+\mathrm{arth}(\cos C\cos t) + \mathrm{arth}(\cos t))\frac{dt}{\cos t}, \qquad (17)$$

где $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$*– корень уравнения*

$$\mathrm{tg}^2\theta + \frac{(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{1+\cos A+\cos B+\cos C} = 0.$$

Кроме того, θ *может быть найдено из правила синусов–тангенсов*

$$\frac{\sin A}{\mathrm{tg}\, a} = \frac{\sin B}{\mathrm{tg}\, b} = \frac{\sin C}{\mathrm{tg}\, c} = \mathrm{tg}\theta. \qquad (18)$$

А теперь рассмотрим гиперболический октаэдр $O = O(a,b,c,d,A,B,C,D)$, допускающий 2|m-симметрию, то есть вращение вокруг оси на угол π и отражение относительно перпендикулярной ей плоскости (рис. 2.2.).

В евклидовом случае формула объема октаэдра, обладающего 2|m-симметрией, была получена в работе [23]. Имеет место

Теорема 16. *(Галиулин, Михалев, Сабитов, 2004). Пусть* $O(a,b,c,A,B,C)$*–евклидов октаэдр, обладающий* 2|m-*симметрией. Тогда его объем* $V = V(O)$ *может быть найден как положительный корень уравнения:*

$$9V^2 = (2a^2+2b^2-c^2-d^2)(a^2-b^2+cd)(b^2-a^2+cd). \qquad (19)$$

В свою очередь, объем сферического 2|m-октаэдра был вычислен в работе [14]. Попутно в [14] показано, что длины ребер сферического

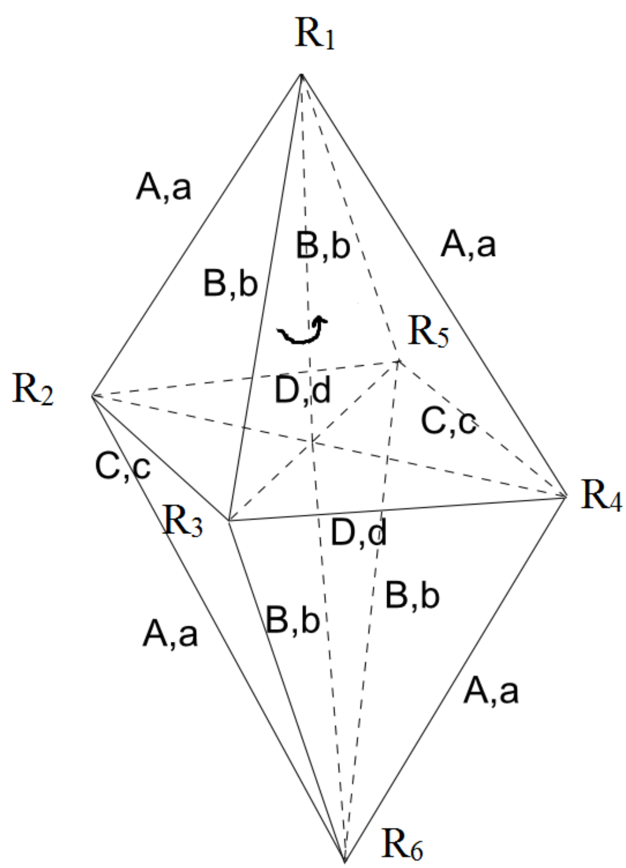

Рис. 2.2.

октаэдра, обладающего 2|m-симметрией, ровно как и mmm-октаэдра, могут быть выражены через двугранные углы. Таким образом, $O = O(A, B, C, D)$. Для объема сферического 2|m-октаэдра справедлива следующая теорема, доказательство которой приведено в [14].

Теорема 17. *Пусть $O = O(A, B, C, D)$ — сферический октаэдр, обладающий 2|m-симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ задается следующим выражением:*

$$V(O) = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} (\operatorname{arth}(\cos A \cos t) + \operatorname{arth}(\cos B \cos t) + \operatorname{arth}(\cos \frac{C+D}{2} \cos t) + \\ + \operatorname{arth}(\cos \frac{C-D}{2} \cos t)) \frac{dt}{\cos t}, \qquad (20)$$

где $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ находится из правила синусов–тангенсов для сферического 2|m-октаэдра

$$\frac{\sin A}{\operatorname{tg} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{tg} b} = \frac{\sin \frac{C+D}{2}}{\operatorname{tg} \frac{c+d}{2}} = \frac{\sin \frac{C-D}{2}}{\operatorname{tg} \frac{c-d}{2}} = \operatorname{tg} \theta. \qquad (21)$$

В следующем разделе будут приведены результаты автора, который представляют собой гиперболические аналоги приведенных выше теорем.

2.2 Объем гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией

Вначале рассмотрим задачу вычисления объема произвольного гиперболического mmm-октаэдра.

Замечание 3. *В настоящем разделе мы будем рассматривать гиперболические* mmm-*октаэдры, у которых все вершины* *собственные. В самом деле, если рассмотреть октаэдр с идеальными вершинами, обладающий* mmm*-симметрией, то посредством очевидных разбиений вычисление его объема можно свести к задаче об объеме пирамид с бесконечно удаленными вершинами, полностью решенную Э.Б. Винбергом в [18].*

Для вычисления объема гиперболического mmm-октаэдра прежде всего заметим, что его в силу mmm-симметрии можно разбить на 8 попарно конгруентных между собой тетраэдров $\tilde{T}$, двугранные углы которых равны $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ (Рис. 2.3).

Такое разбиение можно получить, "разрезав" октаэдр вдоль трех плоскостей симметрии. При этом три двугранных угла тетраэдра разбиения в силу попарной ортогональности плоскостей симметрии будут прямыми. В свою очередь, три других двугранных угла будут равны половинам двугранных углов исходного октаэдра $O = O(A, B, C)$, так как отражение относительно плоскости является движением гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$ и, следовательно, сохраняет двугранные углы.

Таким образом, существование mmm-октаэдра $O = O(A, B, C)$ эквивалентно существованию гиперболического тетраэдра
$\tilde{T} = \tilde{T}(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Предложение 3. *(Н.М. Андреев) Для существования в* $\mathbb{H}^3$ *ограниченного тетраэдра с нетупыми двугранными углами необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий:*

1) сумма двугранных углов при каждой вершине больше π*;*

2) определитель матрицы Грама отрицателен.

Замечание 4. *Предложение 4 является критерием существования*

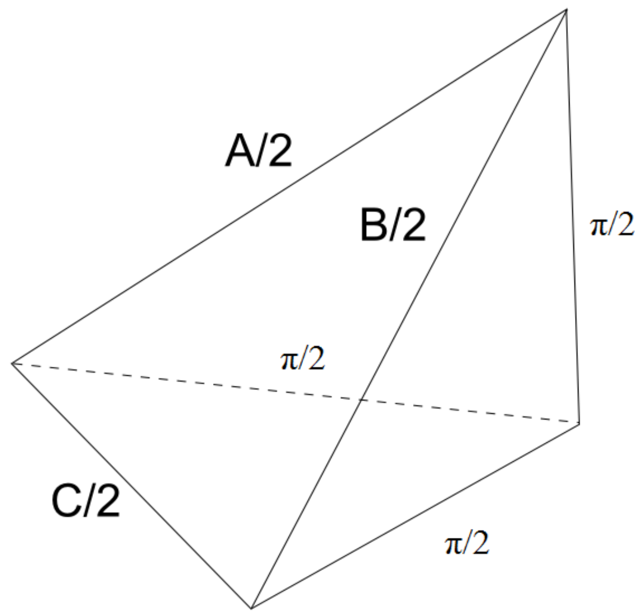

Рис. 2.3.

компактного выпуклого остроугольного многогранника в $\mathbb{H}^3$ *с заданными двугранными углами, примененным к тетраэдру (см. [16], [17]). Проблема вычисления объемов некоторых ограниченных остроугольных многогранников, отличных от тетраэдра, будет рассмотрена в третьей главе настоящей диссертации.*

Применяя это утверждение к тетраэдру $\tilde{T}$, можно легко получить критерий существования компактного гиперболического mmm-октаэдра, заданного набором двугранных углов A, B, C.

Теорема 18. *Для существования компактного гиперболического* mmm-*октаэдра* $O = O(A, B, C)$ *(рис. 2.1) необходимо и достаточно* *выполнение следующей системы неравенств:*

$$\begin{cases} A+B>\pi \\ A+C>\pi \\ B+C>\pi \\ \cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}>1. \end{cases} \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $O = O(A,B,C)$ — гиперболический mmm-октаэдр. Как было сказано выше, существование mmm-октаэдра $O = O(A,B,C)$ равносильно существованию гиперболического тетраэдра $\tilde{T} = \tilde{T}(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ с матрицей Грама

$$G(\tilde{T}) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\frac{A}{2} & -\cos\frac{B}{2} & -\cos\frac{C}{2} \\ -\cos\frac{A}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\cos\frac{B}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\cos\frac{C}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя предложение 4 к тетраэдру $\tilde{T}$, получаем требуемую систему. $\square$

Возвращаясь к вычислению объема mmm-октаэдра $O = O(A,B,C)$, имеем:

$$V(O) = 8V(\tilde{T}). \tag{23}$$

В свою очередь, объем тетраэдра $\tilde{T}$ может быть вычислен по формуле (11). Имеем:

$$V(\tilde{T}) = -\frac{1}{4}\int_{\tilde{Z}_2}^{\tilde{Z}_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{2\xi+A+B}{4}\cos\frac{2\xi+A+C}{4}\cos\frac{2\xi+B+C}{4}}{\cos\frac{2\xi+A+B+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+A+C+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+B+C+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+3\pi}{4}}\right| d\xi, \tag{24}$$

где

$$\tilde{Z}_1 = \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k_2}}{\tilde{k_1}} - \operatorname{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$\tilde{Z}_2 = \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k_2}}{\tilde{k_1}} + \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k_4}}{\tilde{k_3}},$$

где числа $\tilde{k_1}, \tilde{k_2}, \tilde{k_3}$ и $\tilde{k_4}$ после алгебраических преобразований приобретают вид:

$$\tilde{k_1} = \sqrt{2}(\sin\left(\frac{2A+\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2B+\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2C+\pi}{4}\right) -$$

$$- \sin\left(\frac{2A+2B+2C+\pi}{4}\right)),$$

$$\tilde{k_2} = -\sqrt{2}(\sin\left(\frac{2A-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2B-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2C-\pi}{4}\right) -$$

$$- \sin\left(\frac{2A+2B+2C-\pi}{4}\right)),$$

$$\tilde{k_3} = 2\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right),$$

$$\tilde{k_4} = \sqrt{\tilde{k_1}^2 + \tilde{k_2}^2 - \tilde{k_3}^2}.$$

Таким образом, из формул (23) и (24) получаем теорему.

Теорема 19. *Пусть $O = O(A, B, C)$– гиперболический октаэдр, обладающий* mmm*-симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ выражается формулой:*

$$V(O) = -2\int_{\tilde{Z}_2}^{\tilde{Z}_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{2\xi+A+B}{4}\cos\frac{2\xi+A+C}{4}\cos\frac{2\xi+B+C}{4}}{\cos\frac{2\xi+A+B+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+A+C+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+B+C+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+3\pi}{4}}\right| d\xi, \tag{25}$$

где

$$\tilde{Z}_1 = \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k_2}}{\tilde{k_1}} - \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k_4}}{\tilde{k_3}},$$

$$\tilde{Z}_2 = \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k_2}}{\tilde{k_1}} + \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k_4}}{\tilde{k_3}},$$

а вещественные числа $\tilde{k_1}$, $\tilde{k_2}$, $\tilde{k_3}$ *и* $\tilde{k_4}$ *имеют вид:*

$$\tilde{k_1} = \sqrt{2}(\sin\left(\frac{2A+\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2B+\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2C+\pi}{4}\right) - \\ - \sin\left(\frac{2A+2B+2C+\pi}{4}\right)),$$

$$\tilde{k_2} = -\sqrt{2}(\sin\left(\frac{2A-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2B-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2C-\pi}{4}\right) - \\ - \sin\left(\frac{2A+2B+2C-\pi}{4}\right)),$$

$$\tilde{k_3} = 2\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right),$$

$$\tilde{k_4} = \sqrt{\tilde{k_1}^2 + \tilde{k_2}^2 - \tilde{k_3}^2}.$$

Таким образом, (25) является интегральной формулой, выражающей объем *произвольного* гиперболического mmm-октаэдра в терминах определяющих его двугранных углов A, B, C.

Замечание 5. *К формуле (25) можно прийти и обратным путем. А именно, используя результаты теорем 1 и 5, прямыми вычислениями можно легко установить, что длины ребер двугранных углов* $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ *тетраэдра* $\tilde{T}$ *равны длинам ребер двугранных углов* A, B, C *октаэдра* O *соответственно. Значит, если подходящим образом склеить 8 одинаковых экземпляров* $\tilde{T}$, *то получится в точности гиперболический* mmm-*октаэдр* $O(A, B, C)$.

Замечание 6. *В работе [19] получены компактные формулы, выражающие двугранные углы гиперболического* mmm-*октаэдра через* *длины его ребер, то есть $O = O(a, b, c)$:*

$$\frac{\sin A}{\operatorname{th} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{th} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{th} c} = \frac{2\sqrt{(xy - z)(yz - x)(xz - y)}}{2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1}, \qquad (26)$$

где $x = \operatorname{ch} a, y = \operatorname{ch} b, z = \operatorname{ch} c$.

Выразив из формул (26) величины двугранных углов A, B, C через длины ребер a, b, c и подставив полученные выражения в (25), можно получить интегральную формулу объема произвольного гиперболического октаэдра, обладающего mmm*-симметрией, в терминах длин его ребер.*

В 2013 году Н.В. Абросимовым и Г.А. Байгонаковой [13] параллельно и независимо были получены новые формулы объема гиперболического октаэдра с mmm-симметрией. Но, в отличие от формулы (25), они выражают объем не только через двугранные углы, но и через *главный параметр*

$$T = \sqrt{\frac{(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C)}{1 + \cos A + \cos B + \cos C}}.$$

Теорема 20. *(Абросимов, Байгонакова, 2013). Пусть $O = O(A, B, C)$ — гиперболический октаэдр с* mmm*-симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ отыскивается по формулам:*

1) если $0 \le T \le 1$, то

$$V = -\int_0^\tau \ln\left|\frac{(1 - \cos A)(\cos A - \cos t)(\cos B - \cos t)(\cos C - \cos t)}{(1 + \cos A)(\cos A + \cos t)(\cos B + \cos t)(\cos C + \cos t)}\right| dt,$$

где острый угол $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ находится из уравнения $\sin \tau = T$;

2) если $T > 1$, то

$$V = 2\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\operatorname{tg}\eta} + \operatorname{arctg}\frac{\cos A}{\operatorname{tg}\eta} + \operatorname{arctg}\frac{\cos B}{\operatorname{tg}\eta} + \operatorname{arctg}\frac{\cos C}{\operatorname{tg}\eta}\right)\frac{d\eta}{\cos\eta},$$

где величина $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ находится из уравнения $\frac{1}{\cos\theta} = T$;

3) если $T = 1$, то

$$V = 2\left(\int_0^{\mathrm{arth}(\sin A)} \frac{xdx}{\mathrm{ch}x} + \int_0^{\mathrm{arth}(\sin B)} \frac{xdx}{\mathrm{ch}x} - \int_0^{\mathrm{arth}(\sin C)} \frac{xdx}{\mathrm{ch}x}\right).$$

В той же работе приведено другое доказательство теоремы 18.

Пример 1. *Рассмотрим гиперболический* mmm-*октаэдр $O = O(A, B, C)$, где*

$$A = B = \frac{2\pi}{3}, C = \arccos\frac{2}{5}.$$

Тогда по теореме 18 $V(O) \approx 0.948$.

Пример 2. *Пусть $O = O(A, B, C)$ — гиперболический октаэдр с* mmm-*симметрией, при этом пусть*

$$A = B = \frac{2\pi}{3}, C = \arccos\frac{1}{3}.$$

Согласно формуле (25), $V(O) \approx 0.661$.

Пример 3. *Рассмотрим гиперболический* mmm-*октаэдр $O = O(A, B, C)$. Пусть*

$$A = B = \frac{2\pi}{3}, C = \arccos\frac{1}{4}.$$

Тогда $V(O) \approx 0.394$.

Можно убедиться, что, вычислив объемы данных октаэдров по формулам теоремы 20, мы получим те же результаты [13].

2.3 Объем гиперболического октаэдра, обладающего 2|m-симметрией

А теперь рассмотрим задачу вычисления объема произвольного гиперболического октаэдра, обладающего 2|m-симметрией (Рис. 2.2.).

Замечание 7. *Как и в предыдущем разделе, мы будем предполагать, что все вершины гиперболического* 2|m-*октаэдра собственные. Действительно, если октаэдр* $O = O(a, b, c, d, A, B, C, D)$ *имеет вершины на абсолюте, то подходящими разбиениями задачу вычисления его объема можно также свести к задаче об объеме пирамид с бесконечно удаленными вершинами [18].*

Для вычисления объема 2|m-октаэдра $O = O(a, b, c, d, A, B, C, D)$ в гиперболическом случае разобьем O в силу $2|m$-симметрии на две конгруентные пирамиды $R_1R_2R_3R_4R_5$ и $R_6R_2R_3R_4R_5$, "разрезав"исходный многогранник плоскостью симметрии $R_2R_3R_4R_5$.

В свою очередь, каждую из пирамид можно разбить на два равных тетраэдра, проведя диагональ основания пирамиды. Например, объем пирамиды $R_1R_2R_3R_4R_5$ можно представить в виде суммы объемов тетраэдров $R_1R_2R_3R_4$ и $R_1R_2R_4R_5$, которые, как видно из рисунка 2.4, конгруентны между собой.

Следовательно,

$$V(O) = 4V(R_1R_2R_3R_4). \tag{27}$$

Таким образом, вычисление объема октаэдра O сводится к нахождению двугранного угла x при ребре R_1R_2.

Для нахождения двугранного угла x будем использовать технику, которая применялась еще Н.И. Лобачевским в [32], а позднее была использована в работах [19] и [14]. Обозначим плоский угол при

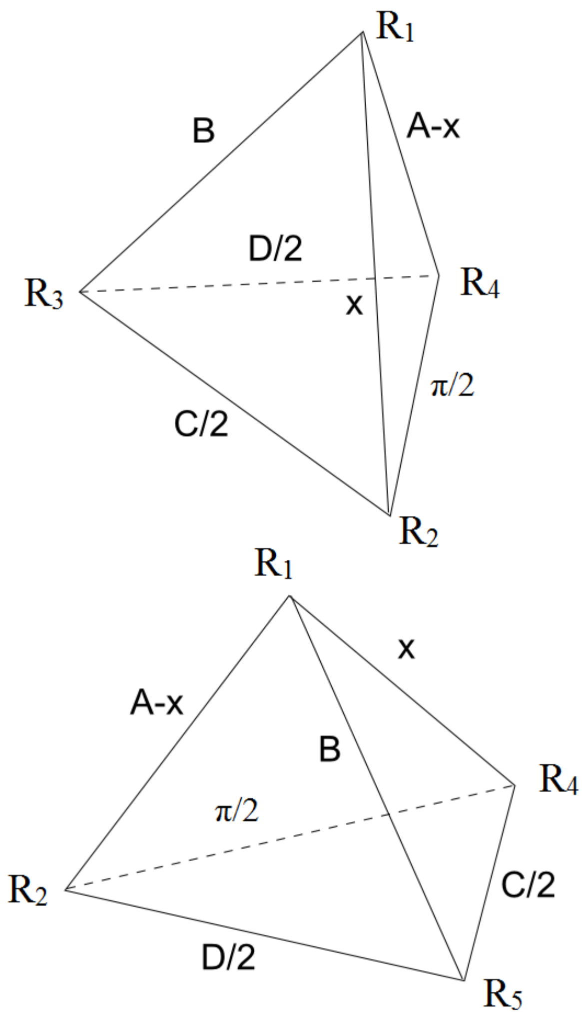

Рис. 2.4.

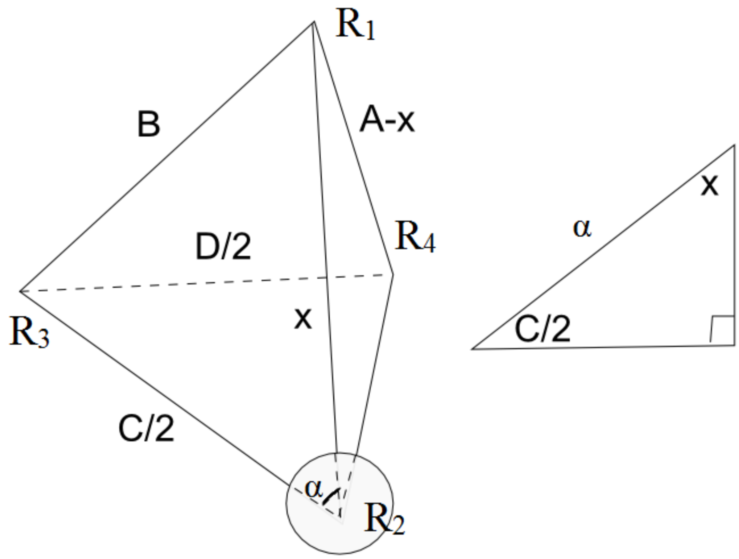

Рис. 2.5.

вершине R_2 грани $R_1R_2R_3$ через α и рассмотрим пересечение тетраэдра $R_1R_2R_4R_5$ со сферой достаточно малого радиуса с центром в вершине R_2. Не нарушая общности, предположим, что полученное пересечение – сферический прямоугольный треугольник с гипотенузой α и внутренними непрямыми углами $\frac{C}{2}$ и x (Рис. 2.5).

Применяя формулу котангенсов для данного сферического прямоугольного треугольника, получаем

$$\cos\alpha = \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg} x,$$

откуда

$$x = \operatorname{arcctg}\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}. \tag{28}$$

Наконец, чтобы выразить $\cos\alpha$ через двугранные углы исходного октаэдра $O = O(a,b,c,d,A,B,C,D)$, рассмотрим пересечение тетраэдра $R_1R_2R_3R_5$ со сферой бесконечно малого радиуса. Аналогично, не нарушая общности, предположим, что

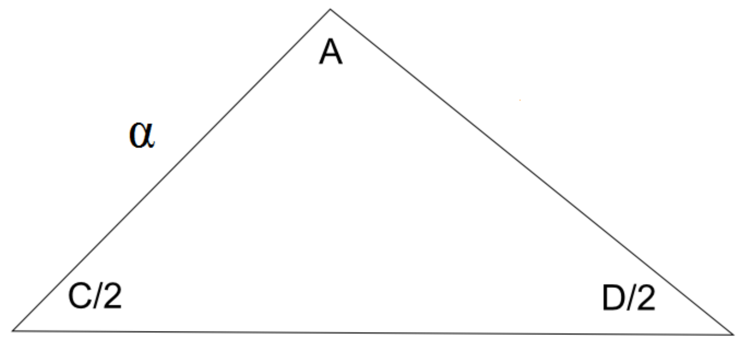

Рис. 2.6.

рассматриваемое пересечение представляет собой сферический треугольник с углами $\frac{C}{2}$, $\frac{D}{2}$, A и стороной α, лежащей против угла $\frac{D}{2}$ (Рис. 2.7).

Применим к полученному сферическому треугольнику вторую теорему косинусов. Имеем:

$$\cos\frac{D}{2} = -\cos\frac{C}{2}\cos A + \sin\frac{C}{2}\sin A\cos\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{D}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos A}{\sin\frac{C}{2}\sin A}. \tag{29}$$

Наконец, из (27) получаем, что

$$x = \operatorname{arcctg}\frac{\cos\frac{D}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos A}{\cos\frac{C}{2}\sin A}. \tag{30}$$

Замечание 8. *Формула (30) показывает, что двугранные углы тетраэдров разбиения могут быть выражены через двугранные углы исходного октаэдра O. Поэтому в силу пункта (iii) предложения 1 длины ребер октаэдра O являются функциями от его двугранных углов. Следовательно, $O = O(A, B, C, D)$.*

Таким образом, в силу формулы Деревнина–Медных (11), объем тетраэдра $R_1R_2R_3R_4$ равен:

$$V(R_1R_2R_3R_4) =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{z_2}^{z_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{2\xi+2B+D+2\lambda+\pi}{4}\sin\frac{2\xi+2A+2B+C-2\lambda+\pi}{4}\sin\frac{2\xi+2A+C+D}{4}}{\cos\frac{\xi+A+B}{2}\cos\frac{2\xi+2B+C+D}{4}\cos\frac{2\xi+C+2\lambda+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+2A+D-2\lambda+\pi}{4}}\right| d\xi, \tag{31}$$

где

$$z_1 = \mathrm{arctg}\frac{p_2}{p_1} - \mathrm{arctg}\frac{p_4}{p_3},$$

$$z_2 = \mathrm{arctg}\frac{p_2}{p_1} + \mathrm{arctg}\frac{p_4}{p_3},$$

$$\lambda = \mathrm{arcctg}\frac{\cos\frac{D}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos A}{\cos\frac{C}{2}\sin A},$$

а вещественные числа p_1, p_2, p_3 и p_4 имеют вид:

$$p_1 = \sin A + \sin B + \sin\left(\frac{2A+2B+C+D}{2}\right) + \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) -$$

$$-\cos\left(\frac{D+2\lambda}{2}\right) - \cos\left(\frac{2A+C-2\lambda}{2}\right) -$$

$$-\cos\left(\frac{2A+2B+D-2\lambda}{2}\right) - \cos\left(\frac{2B+C+2\lambda}{2}\right),$$

$$p_2 = \sin\left(\frac{2A+C-2\lambda}{2}\right) + \sin\left(\frac{D+2\lambda}{2}\right) +$$

$$+\sin\left(\frac{2B+C+2\lambda}{2}\right) + \sin\left(\frac{2A+2B+D-2\lambda}{2}\right) +$$

$$+\cos\left(\frac{2A+2B+C+D}{2}\right) + \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) + \cos A + \cos B,$$

$$p_3 = 2\left(\sin B + \sin\frac{D}{2}\sin\lambda + \sin\frac{C}{2}\sin(A-\lambda)\right),$$

$$p_4 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2}.$$

Окончательно, подставив (31) в (27), получим следующую теорему.

Теорема 21. *Пусть $O = O(A,B,C,D)$– гиперболический октаэдр, обладающий* $2|\mathrm{m}$-*симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ выражается интегралом по отрезку вещественной прямой с вещественнозначной подынтегральной функцией:*

$$V(O) = \int_{z_1}^{z_2} \ln \left| \frac{\sin\frac{\xi}{2} \sin\frac{2\xi+2B+D+2\lambda+\pi}{4} \sin\frac{2\xi+2A+2B+C-2\lambda+\pi}{4} \sin\frac{2\xi+2A+C+D}{4}}{\cos\frac{\xi+A+B}{2} \cos\frac{2\xi+2B+C+D}{4} \cos\frac{2\xi+C+2\lambda+\pi}{4} \cos\frac{2\xi+2A+D-2\lambda+\pi}{4}} \right| d\xi, \tag{32}$$

где

$$z_1 = \mathrm{arctg}\frac{p_2}{p_1} - \mathrm{arctg}\frac{p_4}{p_3},$$

$$z_2 = \mathrm{arctg}\frac{p_2}{p_1} + \mathrm{arctg}\frac{p_4}{p_3},$$

$$\lambda = \mathrm{arcctg}\frac{\cos\frac{D}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos A}{\cos\frac{C}{2}\sin A},$$

а вещественные числа p_1, p_2, p_3 и p_4 имеют вид:

$$p_1 = \sin A + \sin B + \sin\left(\frac{2A+2B+C+D}{2}\right) + \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) -$$

$$-\cos\left(\frac{D+2\lambda}{2}\right) - \cos\left(\frac{2A+C-2\lambda}{2}\right) -$$

$$-\cos\left(\frac{2A+2B+D-2\lambda}{2}\right) - \cos\left(\frac{2B+C+2\lambda}{2}\right),$$

$$p_2 = \sin\left(\frac{2A+C-2\lambda}{2}\right) + \sin\left(\frac{D+2\lambda}{2}\right) + \sin\left(\frac{2B+C+2\lambda}{2}\right) +$$

$$+\sin\left(\frac{2A+2B+D-2\lambda}{2}\right) + \cos\left(\frac{2A+2B+C+D}{2}\right) + \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) +$$

$$+\cos A + \cos B,$$

$$p_3 = 2\left(\sin B + \sin\frac{D}{2}\sin\lambda + \sin\frac{C}{2}\sin(A-\lambda)\right),$$
$$p_4 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2}.$$

Таким образом, формула (32) является интегральной формулой, выражающей объем произвольного гиперболического октаэдра, обладающего 2|m-симметрией, через величины двугранных углов.

Замечание 9. *В работе [36] приведены компактные формулы, выражающие двугранные углы произвольного тетраэдра через длины ребер. Поэтому объем тетраэдра $R_1R_2R_3R_4$, а значит и* 2|m-*октаэдра O, можно при желании выразить через длины ребер a, b, c, d. Значит, $O = O(a, b, c, d)$.*

Как и в случае mmm-симметрии, существование ограниченного гиперболического 2|m-октаэдра $O = O(A, B, C, D)$ эквивалентно существованию тетраэдра $T = T(B, l, A-l, \frac{\pi}{2}, \frac{D}{2}, \frac{C}{2})$ с матрицей Грама

$$G(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos B & -\cos l & -\cos\frac{C}{2} \\ -\cos B & 1 & -\cos(A-l) & -\cos\frac{D}{2} \\ -\cos l & -\cos(A-l) & 1 & 0 \\ -\cos\frac{C}{2} & -\cos\frac{D}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$l = \operatorname{arcctg}\frac{\cos\frac{D}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos A}{\cos\frac{C}{2}\sin A}.$$

Кроме того, у такого тетраэдра должны быть равны длины ребер двугранных углов l и $(A-l)$.

Пусть, как и прежде, $c_{ij} = (-1)^{i+j}G_{ij}$ — алгебраическое дополнение к ij-му элементу матрицы G.

Имеет место

Теорема 22. *Для существования ограниченного гиперболического* 2|m-*октаэдра* $O = O(A, B, C, D)$ *(рис. 2.2.) необходимо и достаточно выполнение следующей системы условий:*

$$\begin{cases} \mathrm{sign} G = (3,1) \\ c_{ij} > 0, i \neq j \\ \frac{c_{14}}{\sqrt{c_{11}}} = \frac{c_{24}}{\sqrt{c_{22}}} \end{cases}. \tag{33}$$

Доказательство. Неравенства системы (33) немедленно вытекают из теоремы А. Ушиджимы [45] о существовании произвольного гиперболического тетраэдра с заданным набором двугранных углов, если применить ее к рассматриваемому тетраэдру $T = T(B, l, A - l, \frac{\pi}{2}, \frac{D}{2}, \frac{C}{2})$ $(l = \mathrm{arcctg}\frac{\cos\frac{D}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos A}{\cos\frac{C}{2}\sin A})$.

Что касается уравнения, входящего в систему (33), то оно следует из правила синусов–тангенсов (формула (iii) предложения 1), записанного для ребер двугранных углов $(A - l)$ и l. $\square$

Пример 4. *Рассмотрим гиперболический* 2|m-*октаэдр* $O = O(A, B, C, D)$, *где*

$$A = \frac{5\pi}{6}, B = \frac{10\pi}{19}, C = \frac{\pi}{2}, D = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно $l \approx 1.309$. *Тогда, согласно теореме 21,* $2|m$-*октаэдр с таким набором двугранных углов реализуем в* $\mathbb{H}^3$.

Вычисляя его объем по формуле (32), получаем, что $V(O) \approx 0.049$.

Заметим, что всякий mmm-октаэдр является октаэдром, обладающим $2|m$-симметрией. Следовательно, формулу (32) можно использовать и для вычисления объема произвольного mmm-

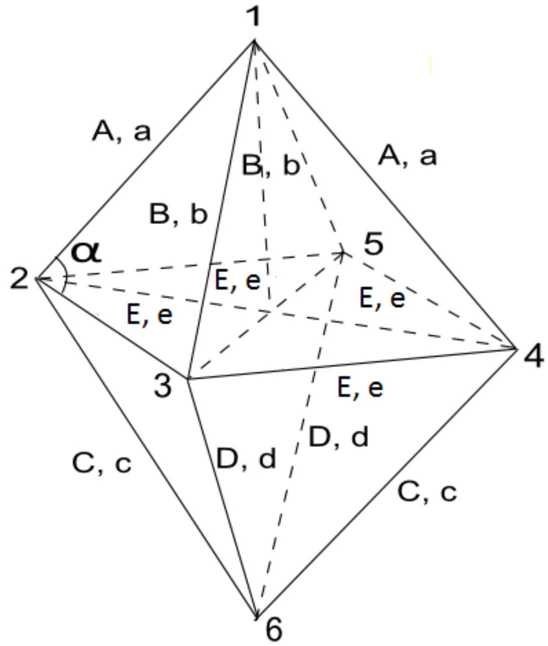

Рис. 2.7.

октаэдра. Если мы вычислим объем многогранника из примера 4 по формуле (25), то получится точно такой же результат.

Замечание 10. *Идея триангуляции выпуклого многогранника и последующего исключения возникающих при этом дополнительных параметров может быть использована и при вычислении объема компактных неевклидовых октаэдров с другими типами нетривиальных симметрий, а именно* 4|m- *и* mm2-*октаэдров. Евклидовы многогранники с данными типами симметрий, по-видимому, впервые были также рассмотрены в работе [23].*

Если рассмотреть октаэдр O, допускающий 4|m-*симметрию, то есть вращение вокруг оси на угол $\frac{\pi}{2}$ и отражение относительно перпендикулярной ей плоскости [23], то формула для вычисления* *его объема в гиперболическом случае является прямым следствием формулы (32) и получается из нее путем замены параметров B на A и D на C соответственно. Что касается случая $\mathbb{S}^3$, то здесь вместо формулы Деревнина–Медных для вычислении объема тетраэдра триангуляции (рис. 2.4.) можно использовать формулу Мураками [35] объема произвольного сферического тетраэдра в терминах двугранных углов, а вспомогательный параметр λ будет выражаться через двугранные углы A и C точно так же, как и в гиперболическом случае [32].*

Что касается случая неевклидова октаэдра, допускающего mm2-*симметрию, то есть отражение относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающих многогранник по реберным циклам (см. рис. 2.7.), то для нахождения неизвестного двугранного угла x при основании пирамиды* (12345) *может быть также использована техника, заключающаяся в описании сферы бесконечно малого радиуса и последующим применением сферической теоремы косинусов.*

Так, описав сферу бесконечного малого радиуса с центром в вершине 2 *и найдя ее пересечение с тетраэдром триангуляции* (1234), *получим $x = \mathrm{arctg}\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\frac{A}{2}}$. В свою очередь, плоский угол α можно найти по сферической теореме косинусов, рассмотрев пирамиду* (12643) *и описав сферу бесконечно малого радиуса с центром в вершине* 2*:*

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos E}{\sin\frac{A}{2}\sin E}.$$

Вычислив объемы тетраэдров триангуляции по формулам Деревнина–Медных (для $\mathbb{H}^3$) и Мураками (для $\mathbb{S}^3$), можно получить формулы объема сферического и гиперболического mm2-*октаэдра.*

Очевидно, частным случаем mm2-*октаэдра является* mmm-*октаэдр.*

Глава 3

Объемы компактных остроугольных гиперболических многогранников

Настоящая глава посвящена проблеме вычисления объемов собственных гиперболических остроугольных многогранников. Дело в том, что интерес к изучению таких многоранников вызван тем, что они связаны с дискретными группами с компактными фундаментальными областями, порожденными отражениями в плоскостях, действующими в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$. Оказывается, для перечисления таких групп достаточно описать все выпуклые собственные многогранники с двугранными углами $\frac{\pi}{n}$ ([22], [16]).

Как было сказано во введении, подробно будут разобраны случаи треугольной и четырехугольной призм. В конце главы мы укажем алгоритм вычисления объема произвольного остроугольного гиперболического многогранника.

3.1 Остроугольные многогранники

В данном разделе будут даны основные сведения об остроугольных многогранниках и приведены две теоремы для случая $\mathbb{H}^3$, доказанные Е.М. Андреевым [16], на которых строятся основные рассуждения третьей главы.

Напомним, что ограниченный выпуклый многогранник в $\mathbb{X}^n$ называется *остроугольным*, если все его двугранные углы при $(n-2)$-мерных гранях не превосходят $\frac{\pi}{2}$. Можно показать [18], что каждая грань остроугольного многогранника сама является остроугольным многогранником.

Далее, выпуклый многогранник P называется *простым в своей* $(n-k)$*-мерной грани* F, если эта грань содержится ровно в k $(n-1)$-мерных гранях. В этом случае он также прост в любой грани, содержащей F. Многогранник P называется *простым*, если он прост в каждой своей грани. Очевидно, что ограниченный многогранник прост, если он прост в каждой своей вершине. Из того, что всякий невыожденный остроугольный сферический многогранник есть симплекс, легко вытекает (см., напр., [18]), что всякий остроугольный многогранник является простым.

Пусть теперь $\mathbb{X}^n = \mathbb{H}^n$. Если $n = 2$, то выпуклый k-угольник в $\mathbb{H}^2$ с внутренними углами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ существует тогда и только тогда, когда [18]

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k \leq \pi(k-2).$$

В случае $n = 3$ ситуация совершенно иная. Имеет место

Теорема 23. *(Андреев, 1970). Остроугольный многогранник в пространстве* $\mathbb{H}^n$ *при* $n \geq 3$ *однозначно с точностью до движения* *определяется своим комбинаторным типом и двугранными углами.*

Теперь перейдем к проблеме существования остроугольного многогранника с заданным набором двугранных углов. Утвердительное решение данной проблемы получено только в двумерном и трехмерном случаях. Здесь условия существования задаются элементарными неравенствами.

Теорема 24. *(Андреев, 1970). Для существования ограниченного остроугольного многогранника P в $\mathbb{H}^3$ заданного комбинаторного типа, отличного от тетраэдра и треугольной призмы, с заданными двугранными углами необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий:*

1) если какие-либо три грани сходятся в одной вершине, то сумма углов между ними больше π;

2) если какие-либо три грани попарно смежны (как в случае треугольной призмы), но не сходятся в одной вершине, то сумма углов между ними меньше π;

3) если какие-либо четыре грани смежны "по кругу" (как в случае четырехугольной призмы), то не все углы между ними равны $\frac{\pi}{2}$.

В случае треугольной призмы нужно еще дополнительно потребовать, чтобы не все углы, образуемые основаниями с боковыми гранями, были равны $\frac{\pi}{2}$, а в случае тетраэдра, чтобы определитель его матрицы Грама был отрицателен.

Подробные доказательства теорем 23 и 24 приведены в [16]. В той же работе доказано, что система, соответствующая условиям 1)–3) теоремы 24 совместна, если многогранник P является простым.

Результаты теорем 23 и 24 мы теперь можем использовать для вычисления объемов остроугольных призм и пирамид. Начнем со

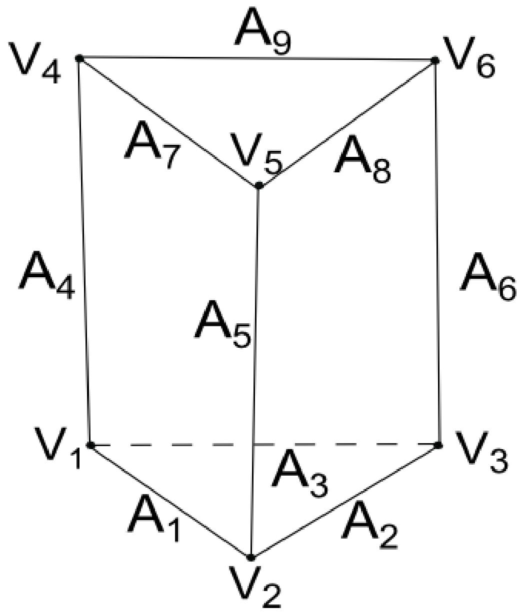

Рис. 3.1. Гиперболическая треугольная призма $P = V_1V_2V_3V_4V_5V_6$

случая гиперболической треугольной призмы.

3.2 Вычисление объема гиперболической треугольной призмы при некоторых ограничениях на ее двугранные углы

Под гиперболической треугольной призмой мы будем понимать многогранник в $\mathbb{H}^3$, имеющий комбинаторный тип треугольной призмы. Объем идеальной треугольной призмы в терминах спецфункции Лобачевского был вычислен Я. Моханти [34].

Мы рассмотрим задачу вычисления объема *собственной* треугольной призмы $P = V_1V_2V_3V_4V_5V_6$, двугранные углы которой равны
$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9$ (Рис. 3.1.).

Кроме того, пусть двугранные углы A_i призмы P удовлетворяют следующей системе неравенств $\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_4$:

$$\mathfrak{m}_1. \qquad 0 < A_i \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\mathfrak{m}_2. \qquad \begin{cases} A_1 + A_2 + A_4 > \pi \\ A_1 + A_2 + A_5 > \pi \\ A_2 + A_3 + A_6 > \pi \\ A_4 + A_7 + A_9 > \pi \\ A_5 + A_7 + A_8 > \pi \\ A_6 + A_8 + A_9 > \pi \end{cases}$$

$$\mathfrak{m}_3. \qquad A_4 + A_5 + A_6 < \pi;$$

$$\mathfrak{m}_4. \qquad A_3 + A_9 + A_7 + A_1 + A_8 + A_2 < 3\pi.$$

Из теоремы 23 следует, что $\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_4$ являются необходимыми и достаточными условиями существования гиперболической призмы P (Рис. 3.1.), единственной с точностью до движения пространства.

Для вычисления объема призмы P рассмотрим одну из ее триангуляций. Обозначим тетраэдры данной триангуляции через T_1, T_2 и T_3, а их неизвестные двугранные углы через $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ (Рис. 3.2.).

Таким образом,

$$V(P) = V(T_1) + V(T_2) + V(T_3). \qquad (34)$$

Для нахождения неизвестных двугранных углов тетраэдров триангуляции будем пользоваться результатами предложения 1.

Пусть G_1, G_2, G_3 – матрицы Грама тетраэдров T_1, T_2 и T_3:

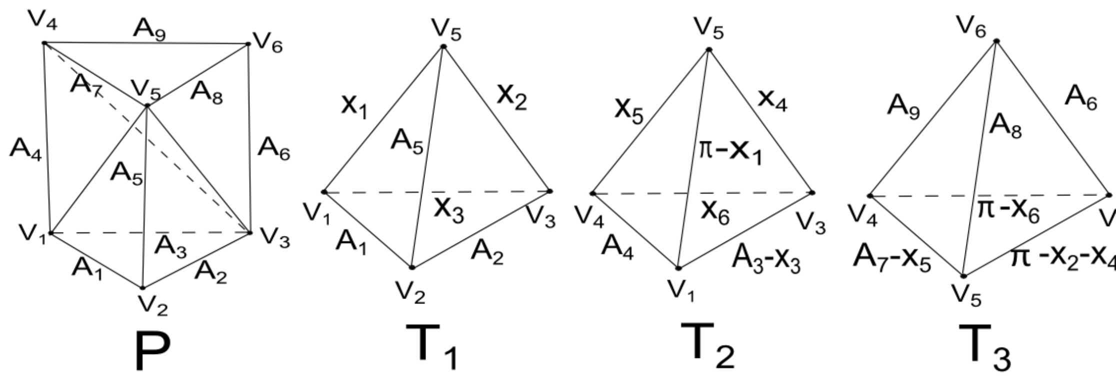

Рис. 3.2. Триангуляция треугольной призмы $P = V_1V_2V_3V_4V_5V_6$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos x_1 & -\cos A_5 & -\cos A_1 \\ -\cos x_1 & 1 & -\cos x_2 & -\cos x_3 \\ -\cos A_5 & -\cos x_2 & 1 & -\cos A_2 \\ -\cos A_1 & -\cos x_3 & -\cos A_2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos x_5 & \cos x_1 & -\cos A_4 \\ -\cos x_5 & 1 & -\cos x_4 & -\cos x_6 \\ \cos x_1 & -\cos x_4 & 1 & -\cos\left(A_3 - x_3\right) \\ -\cos A_4 & -\cos x_6 & -\cos\left(A_3 - x_3\right) & 1 \end{pmatrix};$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A_9 & -\cos A_8 & -\cos\left(A_7 - x_5\right) \\ -\cos A_9 & 1 & -\cos A_6 & \cos x_6 \\ -\cos A_8 & -\cos A_6 & 1 & \cos\left(x_1 + x_2\right) \\ -\cos\left(A_7 - x_5\right) & \cos x_6 & \cos\left(x_1 + x_2\right) & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $c_{ij}^1, c_{ij}^2, c_{ij}^3$ алгебраические дополнения к ij-м элементам матриц G_1, G_2 и G_3 соответственно. Далее, с помощью формулы (1) вычислим длины ребер V_1V_5, V_3V_5, V_1V_3, V_3V_4, V_4V_5, входящих в разные тетраэдры триангуляции. Приравнивая соответствующие выражения и учитывая условия существования гиперболического тетраэдра с заданным набором двугранных углов [45], получим следующую систему с шестью неизвестными $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$:

$$\begin{cases} \frac{c^1_{34}}{\sqrt{c^1_{33}c^1_{44}}} = \frac{c^2_{24}}{\sqrt{c^2_{22}c^2_{44}}} \\ \frac{c^1_{13}}{\sqrt{c^1_{11}c^1_{33}}} = \frac{c^2_{12}}{\sqrt{c^2_{11}c^2_{22}}} \\ \frac{c^1_{14}}{\sqrt{c^1_{11}c^1_{44}}} = \frac{c^2_{14}}{\sqrt{c^2_{11}c^2_{44}}} \\ \frac{c^1_{14}}{\sqrt{c^1_{11}c^1_{44}}} = \frac{c^3_{12}}{\sqrt{c^3_{11}c^3_{22}}} \\ \frac{c^2_{13}}{\sqrt{c^2_{11}c^2_{33}}} = \frac{c^3_{13}}{\sqrt{c^3_{11}c^3_{33}}} \\ \frac{c^2_{34}}{\sqrt{c^2_{33}c^2_{44}}} = \frac{c^3_{23}}{\sqrt{c^3_{22}c^3_{33}}} \\ c^k_{ij} > 0, i, j, \in \{1,2,3,4\}, i \neq j, k \in \{1,2,3\} \\ \mathrm{sgn} G_i = (3,1), i \in \{1,2,3\} \end{cases}. \tag{35}$$

Так как существует единственная с точностью до движения пространства призма P, двугранные углы которой удовлетворяют системе неравенств $\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_4$ [16], то система (35) совместна и имеет единственное решение $(a; b; c; d; e; f)$, где $a, b, c, d, e, f \in [0; \pi]$.

Таким образом, $T_1 = T_1(a, A_5, b, A_2, c, A_1), T_2 = T_2(e, \pi - a, d, A_3 - c, f, A_4), T_3 = T_3(A_9, A_8, A_6, \pi - b - d, \pi - f, A_7 - e)$. Вычислив объемы тетраэдров T_1, T_2 и T_3 по формуле Деревнина–Медных (11) и подставив полученные выражения в (34), получаем следующую теорему.

Теорема 25. *Пусть* $P = P(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9)$ *— треугольная гиперболическая призма, двугранные углы которой удовлетворяют условиям* $\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_4$. *Тогда ее объем* $Vol(P)$ *выражается* *следующей формулой:*

$$Vol(P) = V(a, A_5, b, A_2, c, A_1) + V(e, \pi - a, d, A_3 - c, f, A_4) +$$
$$+ V(A_9, A_8, A_6, \pi - b - d, \pi - f, A_7 - e), \tag{36}$$

где

$$V(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta) = -\frac{1}{4}\int_{z_2}^{z_1} \ln \left| \frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+\alpha+\beta+\delta+\epsilon}{2}\sin\frac{\xi+\alpha+\gamma+\delta+\zeta}{2}\sin\frac{\xi+\beta+\gamma+\epsilon+\zeta}{2}}{\cos\frac{\xi+\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\xi+\alpha+\epsilon+\zeta}{2}\cos\frac{\xi+\beta+\delta+\zeta}{2}\cos\frac{\xi+\gamma+\delta+\epsilon}{2}} \right| d\xi,$$

$$z_1 = \operatorname{arctg}\frac{k_2}{k_1} - \operatorname{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$z_2 = \operatorname{arctg}\frac{k_2}{k_1} + \operatorname{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$k_1 = -(\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon+\zeta) + \cos(\alpha+\delta) + \cos(\beta+\epsilon) + \cos(\gamma+\zeta) +$$
$$+ \cos(\delta+\epsilon+\zeta) + \cos(\delta+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\epsilon+\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\zeta)),$$

$$k_2 = \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon+\zeta) + \sin(\alpha+\delta) + \sin(\beta+\epsilon) + \sin(\gamma+\zeta) +$$
$$+ \sin(\delta+\epsilon+\zeta) + \sin(\delta+\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\epsilon+\gamma) + \sin(\alpha+\beta+\zeta)),$$

$$k_3 = 2(\sin\alpha\sin\delta + \sin\beta\sin\epsilon + \sin\gamma\sin\zeta),$$

$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2},$$

а $(a; b; c; d; e; f)$, $a, b, c, d, e, f \in [0; \pi]$ *– решение системы (35).*

Таким образом, формула (36) выражает объем гиперболической треугольной призмы P в терминах ее двугранных углов. В данной соотношении параметры a, b, c, d, e и f явно не выражены через величины двугранных углов $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9$. В этом смысле формула (36) напоминает формулу Чо–Кима [39] объема произвольного гиперболического тетраэдра.

Замечание 11. *Если заменить неравенство* $\mathfrak{m}_3$ *на* $A_4 + A_5 + A_6 \geq \pi$, *то наша призма будет представлять собой усеченную треугольную пирамиду. Идея вычисления ее объема представлена в работе [21].*

3.3 Объем остроугольного гиперболического куба

Настоящий раздел будет посвящен вычислению объема остроугольного *гиперболического куба.* Причем для вычисления его объема мы будем также использовать идею, подробно описанную в предыдущем разделе для случая треугольной призмы.

Определение 3. Гиперболическим кубом (четырехугольной призмой) *мы назовем выпуклый многогранник в* $\mathbb{H}^3$*, имеющий комбинаторный тип куба.*

Рассмотрим остроугольный гиперболический куб $Q = V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_7V_8$ (Рис. 3.3.), двугранные углы которого $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ удовлетворяют следующей системе неравенств:

$$\mathfrak{m}_1. \quad \begin{cases} A + D + A_1 > \pi \\ A + B + B_1 > \pi \\ B + C + C_1 > \pi \\ C + D + D_1 > \pi \\ A_1 + A_2 + D_2 > \pi \\ A_2 + B_2 + B_1 > \pi \\ B_2 + C_2 + C_1 > \pi \\ C_2 + D_2 + D_1 > \pi \end{cases},$$

$$\mathfrak{m}_2. \quad \begin{cases} A_1 + B_1 + C_1 + D_1 < 2\pi \\ A + C + A_2 + C_2 < 2\pi \\ B + D + B_2 + D_2 < 2\pi \end{cases}.$$

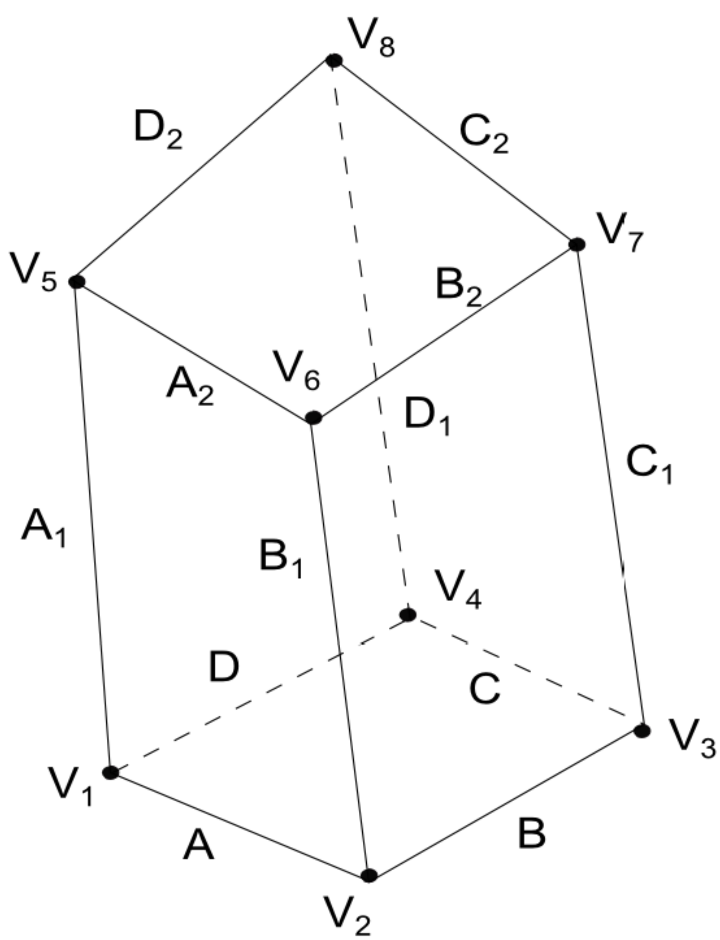

Рис. 3.3. Остроугольный гиперболический куб $Q = V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_7V_8$

В силу теорем 22 и 23, $\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_2$ являются необходимыми и достаточными условиями существования остроугольного гиперболического куба Q (Рис. 3.3.), единственной с точностью до движения пространства.

Если двугранные углы куба α, β, γ (существенные двугранные углы) при трех некомпланарных ребрах острые, а все остальные двугранные углы прямые, то такой гиперболический куб называется *кубом Ламберта* $Q(\alpha, \beta, \gamma)$. Объем гиперболического куба Ламберта был вычислен Р. Келлерхальц [29]. Имеет место

Теорема 26. *(Келлерхальц, 1989). Объем гиперболического куба Ламберта* $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ *выражается формулой:*

$$V(Q) = \frac{1}{4}(\Delta(\alpha, \theta) + \Delta(\beta, \theta) + \Delta(\gamma, \theta) - 2\Delta(\frac{\pi}{2}, \theta) - \Delta(0, \theta)),$$

где $\Delta(x, y) = \Lambda(x + y) - \Lambda(x - y)$, $\Lambda(x) = -\int_0^x \ln|2\sin t|dt$, $x \in \mathbb{R}$ – *функция Лобачевского, а* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ – *острый угол, определяемый из уравнения*

$$\mathrm{tg}^2\theta = K + \sqrt{K^2 + A^2B^2C^2},$$

где

$$K = \frac{A^2 + B^2 + C^2 + 1}{2}, A = \mathrm{tg}\alpha, B = \mathrm{tg}\beta, C = A = \mathrm{tg}\gamma.$$

Что касается случая $\mathbb{S}^3$, то в сферическом пространстве куб Ламберта $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ может быть реализован при $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta, \gamma < \pi$. Объем сферического куба Ламберта выражается следующей теоремой, доказанной Д.А. Деревниным и А.Д. Медных [27].

Теорема 27. *(Деревнин, Медных, 2009). Объем сферического куба Ламберта* $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ *задается формулой:*

$$V(Q) = \frac{1}{4}(\delta(\alpha, \theta) + \delta(\beta, \theta) + \delta(\gamma, \theta) - 2\delta(\frac{\pi}{2}, \theta) - \delta(0, \theta)),$$

где

$$\delta(\alpha,\theta)=\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\cos 2\alpha\cos 2\tau)\frac{d\tau}{\cos 2\tau},$$

а θ *– параметр, определяемый из уравнения*

$$\mathrm{tg}^2\theta=-K+\sqrt{K^2+A^2B^2C^2},$$

$$K=\frac{A^2+B^2+C^2+1}{2}, A=\mathrm{tg}\alpha, B=\mathrm{tg}\beta, C=A=\mathrm{tg}\gamma.$$

Кроме того, объем компактной гиперболической четырехугольной призмы другого специального вида был найден в работе [26].

Мы будем решать задачу вычисления объема *произвольного* остроугольного гиперболического куба, двугранные углы которого удовлетворяют условиям $\mathfrak{m}_1-\mathfrak{m}_2$. Как и в случае треугольной призмы, для вычисления объема куба Q рассмотрим одну из его триангуляций, вершинами которой являются вершины Q. Обозначим тетраэдры данной триангуляции через $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$, а их неизвестные двугранные углы через $x_1, x_2, x_3, ..., x_{17}$ (Рис. 3.4.).

Следовательно,

$$V(Q)=V(T_1)+V(T_2)+V(T_3)+V(T_4)+V(T_5)+V(T_6). \qquad (37)$$

Аналогично, для нахождения неизвестных двугранных углов тетраэдров разбиения T_i будем пользоваться результатами предложения 1.

Пусть $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ — матрицы Грама тетраэдров T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 и T_6 соответственно:

$$G_1=\begin{pmatrix} 1 & -\cos x_1 & -\cos B_1 & -\cos A \\ -\cos x_1 & 1 & -\cos x_3 & -\cos x_2 \\ -\cos B_1 & -\cos x_3 & 1 & -\cos B \\ -\cos A & -\cos x_2 & -\cos B & 1 \end{pmatrix};$$

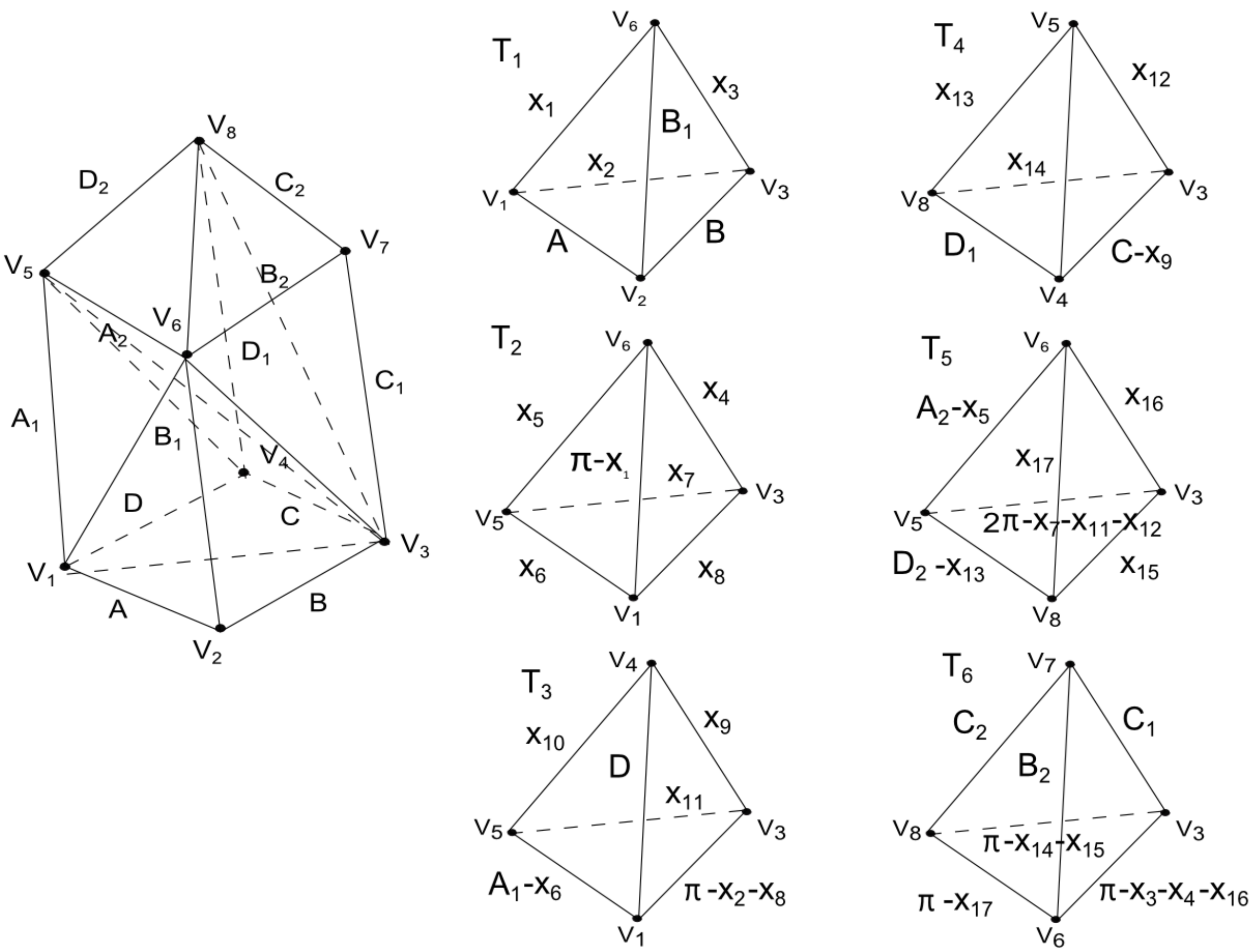
V8
D2
C2
V5
V7
B2
V6
A2
D1
C1
A1
B1
V4
D
C
V1
V3
A
B
V2
T1
V6
x1
x3
B1
x2
V1
V3
A
B
V2
T2
V6
x5
x4
π-x1
x7
V5
V3
x6
x8
V1
T3
V4
x10
x9
D
x11
V5
V3
A1-x6
π -x2-x8
V1
T4
V5
x13
x12
x14
V8
V3
D1
C-x9
V4
T5
V6
A2-x5
x16
x17
V5
V3
2π-x7-x11-x12
D2 -x13
x15
V8
T6
V7
C2
C1
B2
V8
V3
π-x14-x15
π -x17
π-x3-x4-x16
V6

Рис. 3.4.

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos x_5 & \cos x_1 & -\cos x_6 \\ -\cos x_5 & 1 & -\cos x_4 & -\cos x_7 \\ \cos x_1 & -\cos x_4 & 1 & -\cos x_8 \\ -\cos x_6 & -\cos x_7 & -\cos x_8 & 1 \end{pmatrix};$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos x_{10} & -\cos D & -\cos(A_1 - x_6) \\ -\cos x_{10} & 1 & -\cos x_9 & \cos x_{11} \\ -\cos D & -\cos x_9 & 1 & \cos(x_2 + x_8) \\ -\cos(A_1 - x_6) & \cos x_{11} & \cos(x_2 + x_8) & 1 \end{pmatrix};$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos x_{13} & \cos x_{10} & -\cos D_1 \\ -\cos x_{13} & 1 & -\cos x_{12} & -\cos x_{14} \\ \cos x_{10} & -\cos x_{12} & 1 & -\cos(C - x_9) \\ -\cos D_1 & -\cos x_{14} & -\cos(C - x_9) & 1 \end{pmatrix};$$

$$G_5 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\cos(A_2 - x_5) & -\cos x_{17} & -\cos(D_2 - x_{13}) \\ -\cos(A_2 - x_5) & 1 & -\cos x_{16} & -\cos(x_7 + x_{11} + x_{12}) \\ -\cos x_{17} & -\cos x_{16} & 1 & -\cos x_{15} \\ -\cos(D_2 - x_{13}) & -\cos(x_7 + x_{11} + x_{12}) & -\cos x_{15} & 1 \end{pmatrix};$$

$$G_6 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos C_2 & -\cos B_2 & \cos x_{17} \\ -\cos C_2 & 1 & -\cos C_1 & \cos(x_{14} + x_{15}) \\ -\cos B_2 & -\cos C_1 & 1 & \cos(x_3 + x_4 + x_{16}) \\ \cos x_{17} & \cos(x_{14} + x_{15}) & \cos(x_3 + x_4 + x_{16}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть, как и прежде, c_{ij}^k – алгебраические дополнения к ij-му элементу матрицы G_k. Как и в случае треугольной призмы, с помощью формулы (1) вычислим длины ребер, входящие одновременно в несколько тетраэдров триангуляции. Аналогично, приравнивая соответствующие выражения и учитывая условия существования гиперболического тетраэдра с заданным набором двугранных углов [45], получим следующую систему с семнадцатью неизвестными $x_1, x_2, x_3, ..., x_{17}$:

$$\begin{cases}
\frac{c_{34}^1}{\sqrt{c_{33}^1c_{44}^1}}=\frac{c_{24}^2}{\sqrt{c_{22}^2c_{44}^2}}\\
\frac{c_{14}^1}{\sqrt{c_{11}^1c_{44}^1}}=\frac{c_{14}^2}{\sqrt{c_{11}^2c_{44}^2}}\\
\frac{c_{14}^1}{\sqrt{c_{11}^1c_{44}^1}}=\frac{c_{14}^5}{\sqrt{c_{11}^5c_{44}^5}}\\
\frac{c_{14}^1}{\sqrt{c_{11}^1c_{44}^1}}=\frac{c_{12}^6}{\sqrt{c_{11}^6c_{22}^6}}\\
\frac{c_{13}^1}{\sqrt{c_{11}^1c_{33}^1}}=\frac{c_{12}^2}{\sqrt{c_{11}^2c_{22}^2}}\\
\frac{c_{13}^1}{\sqrt{c_{11}^1c_{33}^1}}=\frac{c_{12}^3}{\sqrt{c_{11}^3c_{22}^3}}\\
\frac{c_{34}^2}{\sqrt{c_{33}^2c_{44}^2}}=\frac{c_{34}^5}{\sqrt{c_{33}^5c_{44}^5}}\\
\frac{c_{23}^2}{\sqrt{c_{22}^2c_{33}^2}}=\frac{c_{23}^3}{\sqrt{c_{22}^3c_{33}^3}}\\
\frac{c_{13}^2}{\sqrt{c_{11}^2c_{33}^2}}=\frac{c_{13}^3}{\sqrt{c_{11}^3c_{33}^3}}\\
\frac{c_{13}^2}{\sqrt{c_{11}^2c_{33}^2}}=\frac{c_{14}^4}{\sqrt{c_{11}^4c_{44}^4}}\\
\frac{c_{13}^2}{\sqrt{c_{11}^2c_{33}^2}}=\frac{c_{13}^5}{\sqrt{c_{11}^5c_{33}^5}}\\
\frac{c_{34}^3}{\sqrt{c_{33}^3c_{44}^3}}=\frac{c_{24}^4}{\sqrt{c_{22}^4c_{44}^4}}\\
\frac{c_{34}^4}{\sqrt{c_{33}^4c_{44}^4}}=\frac{c_{23}^5}{\sqrt{c_{22}^5c_{33}^5}}\\
\frac{c_{13}^4}{\sqrt{c_{11}^4c_{33}^4}}=\frac{c_{12}^5}{\sqrt{c_{11}^5c_{22}^5}}\\
\frac{c_{13}^4}{\sqrt{c_{11}^4c_{33}^4}}=\frac{c_{13}^6}{\sqrt{c_{11}^6c_{33}^6}}\\
\frac{c_{24}^5}{\sqrt{c_{22}^5c_{44}^5}}=\frac{c_{23}^6}{\sqrt{c_{22}^6c_{33}^6}}\\
\frac{c_{14}^3}{\sqrt{c_{11}^3c_{44}^3}}=\frac{c_{12}^4}{\sqrt{c_{11}^4c_{22}^4}}\\
c_{ij}^k>0, i,j,\in\{1,2,3,4\}, i\neq j, k\in\{1,2,3,4,5,6\}\\
\mathrm{sgn} G_i=(3,1), i\in\{1,2,3,4,5,6\}
\end{cases}. \qquad (38)$$

Обозначим через $(a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7; a_8; a_9; a_{10}; a_{11}; a_{12}; a_{13}; a_{14}; a_{15}; a_{16}; a_{17})$, где $a_i \in [0;\pi]$, единственное решение системы (38) [16].

Итак, $T_1 = T_1(a_1, B_1, a_3, B, a_2, A), T_2 = T_2(a_5, \pi - a_1, a_4, a_8, a_7, a_6)$, $T_3 = T_3(a_{10}, D, a_9, \pi - a_2 - a_8, a_{11}, A_1 - a_6), T_4 = T_4(a_{13}, \pi - a_{10}, a_{12}, C - a_9, a_{14}, D_1), T_5 = T_5(A_2 - a_5, a_{17}, a_{16}, a_{15}, 2\pi - a_7 - a_{11} - a_{12}, D_2 - a_{13}), T_6 = T_6(C_2, B_2, C_1, \pi - a_3 - a_4 - a_{16}, \pi - a_{14} - a_{15}, \pi - a_{17})$. Вычислив объемы тетраэдров триангуляции по формуле Деревнина–Медных (11) и подставив полученные выражения в (37), получаем следующую теорему.

Теорема 28. *Пусть $Q = Q(A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2)$ — остроугольный гиперболический куб, двугранные углы которого удовлетворяют условиям $\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_4$. Тогда его объем $Vol(Q)$ выражается следующей формулой:*

$$Vol(Q) = V(a_1, B_1, a_3, B, a_2, A) + V(a_5, \pi - a_1, a_4, a_8, a_7, a_6)+$$

$$+V(a_{10}, D, a_9, \pi - a_2 - a_8, a_{11}, A_1 - a_6) + V(a_13, \pi - a_{10}, a_{12}, C - a_9, a_{14}, D_1)+$$

$$+V(A_2 - a_5, a_{17}, a_{16}, a_{15}, 2\pi - a_7 - a_{11} - a_{12}, D_2 - a_{13})+$$

$$+V(C_2, B_2, C_1, \pi - a_3 - a_4 - a_{16}, \pi - a_{14} - a_{15}, \pi - a_{17}), \tag{39}$$

где

$$V(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta) = -\frac{1}{4}\int_{z_2}^{z_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+\alpha+\beta+\delta+\epsilon}{2}\sin\frac{\xi+\alpha+\gamma+\delta+\zeta}{2}\sin\frac{\xi+\beta+\gamma+\epsilon+\zeta}{2}}{\cos\frac{\xi+\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\xi+\alpha+\epsilon+\zeta}{2}\cos\frac{\xi+\beta+\delta+\zeta}{2}\cos\frac{\xi+\gamma+\delta+\epsilon}{2}}\right| d\xi,$$

$$z_1 = \operatorname{arctg}\frac{k_2}{k_1} - \operatorname{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$z_2 = \operatorname{arctg}\frac{k_2}{k_1} + \operatorname{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$k_1 = -(\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon+\zeta) + \cos(\alpha+\delta) + \cos(\beta+\epsilon) + \cos(\gamma+\zeta)+$$

$$+\cos(\delta+\epsilon+\zeta) + \cos(\delta+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\epsilon+\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\zeta)),$$

$$k_2 = \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon+\zeta) + \sin(\alpha+\delta) + \sin(\beta+\epsilon) + \sin(\gamma+\zeta) +$$
$$+ \sin(\delta+\epsilon+\zeta) + \sin(\delta+\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\epsilon+\gamma) + \sin(\alpha+\beta+\zeta)),$$
$$k_3 = 2(\sin\alpha\sin\delta + \sin\beta\sin\epsilon + \sin\gamma\sin\zeta),$$
$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2},$$

а набор $(a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7; a_8; a_9; a_{10}; a_{11}; a_{12}; a_{13}; a_{14}; a_{15}; a_{16}; a_{17})$, *где* $a_i \in [0; \pi]$, *есть единственное решение системы (38).*

Таким образом, формула (39) выражает объем произвольного остроугольного гиперболического куба в терминах двугранных углов и является обобщение полученной ранее формулы Р. Келлерхальц объема куба Ламберта [29].

3.4 Вычисление объема произвольного гиперболического компактного остроугольного многогранника

Идею, используемую в настоящей главе, можно применить для вычисления объема произвольного ограниченного остроугольного гиперболического многогранника. Для этого нужно:

1) рассмотреть его триангуляцию с вершинами, являющимися вершинами исходного многогранника [47];

2) составить систему, аналогичную (35) и (38).

Полученная система в силу теорем 23 и 24 имеет единственное решение, все компоненты которого находятся в промежутке $(0; \pi)$. Таким образом, объем исходного многогранника складывается из объемов тетраэдров триангуляции, неизвестные двугранные углы которых соответствуют единственному решению системы из пункта (2).

Замечание 12. *Если рассматривать выпуклые многогранники, имеющие тупые двугранные углы, то для них теорема, утверждающая единственность (с точностью до движения $\mathbb{H}^3$) многогранника с заданным набором двугранных углов, не доказана. Однако в некоторых частных случаях изложенный выше алгоритм позволяет однозначно вычислить объем многогранника с тупыми двугранными углами.*

Пример 5. *Рассмотрим собственную четырехугольную пирамиду P, двугранные углы которой равны*

$$A = C = 1.662, B = 2.622, D = 2.627, E = F = P = Q = 0.785.$$

Разобьем пирамиду P на два тетраэдра диагональю основания (рис. 3.5.) и составим систему трех уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3, аналогичную (35) и (38). Решая ее численными методами на компьютере, получаем единственное решение

$$x_1 \approx 1.311, x_2 \approx 1.316, x_3 \approx 1.569.$$

С помощью теоремы Ушиджимы [45] прямыми вычислениями проверяется, что тетраэдры $T_1 = T_1(A, x_1, x_2, x_3, F, E)$ и $T_2 = T_1(D - x_2, B - x_1, C, Q, P, \pi - x_3)$ реализуемы в $\mathbb{H}^3$. Это доказывает существование и единственность пирамиды P с данным набором двугранных углов.

Тогда объем рассматриваемой пирамиды $V(P) \approx 0.017$.

Таким образом, в общем случае проблему обобщения теорем существования и единственности 23 и 24 на случай многогранников с тупыми двугранными углами можно свести к исследованию системы,

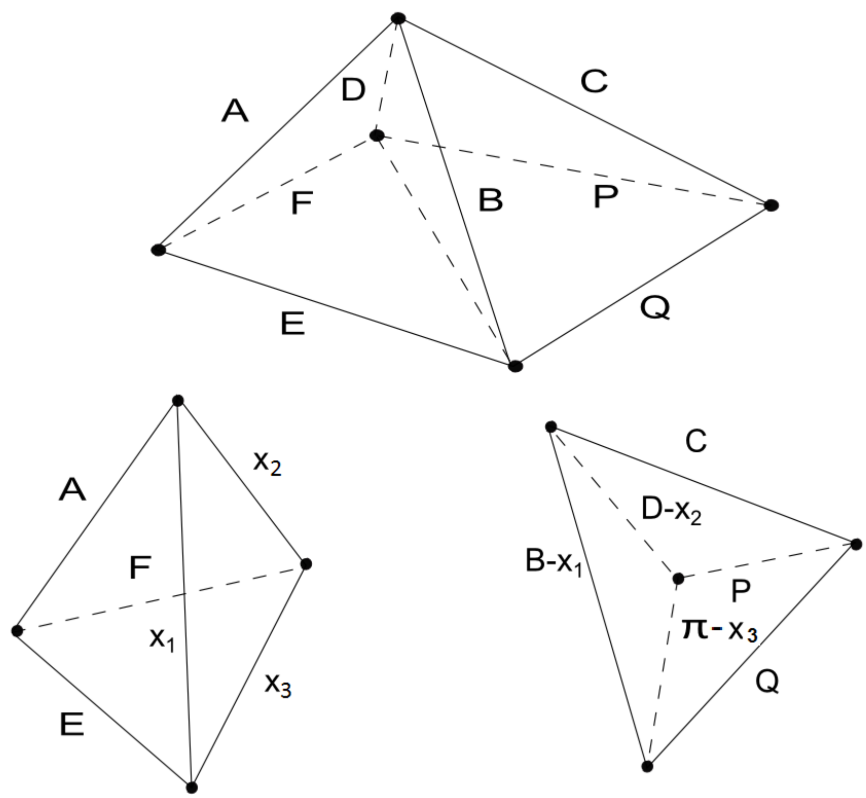

Рис. 3.5. Четырехугольная пирамида P

аналогичную (35) и (38), на предмет наличия и единственности решения.

Замечание 13. *По-видимому, теорема 23 верна и для неограниченных остроугольных многогранников конечного объема в* $\mathbb{H}^3$ *[18]. Следовательно, описанный выше алгоритм применим и для некоторых некомпактных многогранников конечного объема, для которых существует триангуляция без новых вершин такая, что ребра, входящие в различные тетраэдры триангуляции, не имеют идеальных вершин.*

Замечание 14. *Если рассматривать случай* $\mathbb{S}^3$, *то для него* *проблема вычисления объемов остроугольных многогранников неактуальна, так как всякий остроугольный многогранник на сфере* $\mathbb{S}^n$ *есть симплекс [18]. В свою очередь, формула объема произвольного тетраэдра в* $\mathbb{S}^3$ *была получена в работе [35].*

Литература

Список публикаций автора по теме диссертации

[1] *Краснов В. А.* Об интегральных формулах объема гиперболических тетраэдров // Совр. математика. Фундам. направления. — 2013. — *43.* — С. 89–99.

[2] *Краснов В. А.* Об объеме гиперболического октаэдра с нетривиальными симметриями // Совр. математика. Фундам. направления. — 2013. — *51.* — С. 74–86.

[3] *Краснов В. А.* Об объемах гиперболических симплексов // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — 2012. — С. 97–99.

[4] *Краснов В. А.* Объемы многогранников в классических неевклидовых пространствах // Современные методы теории крае-вых задач: материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения - XXII"(тезисы докладов). — 2011. — С. 96–97.

[5] *Краснов В. А.* Об интегральных формулах объема тетраэдров в пространстве Лобачевского // Современные методы теории краевых задач: материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения - XXIII"(тезисы докладов). — 2012. — С. 98–99.

[6] *Краснов В. А.* Об объемах гиперболических призм и октаэдров с симметриями // Современные методы теории крае-вых задач: материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения - XXIV"(тезисы докладов). — 2013. — С. 114–115.

[7] *Краснов В. А.* Объемы тетраэдров в пространстве Лобачевского // Вестник Московского государственного областного социально-гуманитарного института. — *1(11)*. — С. 44–49.

[8] *Краснов В. А.* Об объемах многогранников в пространствах постоянной отрицательной кривизны // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы: материалы IV научной конференции молодых ученых Москвы и Коломны. — 2012. — С. 32–34.

[9] *Краснов В. А.* Интегральная формула Деревнина–Медных как инструмент для вычисления объемов гиперболических призм и пирамид // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы: материалы IV научной конференции молодых ученых Москвы и Коломны. — 2013. — С. 33–39.

[10] *Краснов В. А.* Объемы многогранников в неевклидовых пространствах // Начало - 10: сборник научных статей аспирантов и соискателей. — 2011. — С. 293–307.

[11] *Краснов В. А.* О применениях формулы Деревнина–Медных к вычислению объемов гиперболических выпуклых многогранников // Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация: труды всероссийской научно-практической конференции. Москва, РУДН, 23 - 26 апреля, 2013 г. — 2013. — С. 96–98.

Литература

[12] *Абросимов Н. В.* Об объемах многогранников в пространстве постоянной кривизны // Вестник Кемеровского госуд. университета. — 2011. — *3/1 (47)*. — С. 7–13.

[13] *Абросимов Н. В., Байгонакова Г. А.* Гиперболический октаэдр с mmm-симметрией // Сибирский математический журнал. — 2013. — *10*. — С. 123–140.

[14] *Абросимов Н. В., Годой-Молина М., Медных А. Д.* Об объеме сферического октаэдра с симметриями // Современная математика и ее приложения. —2008. —*60*. — С. 3–12.

[15] *Abrosimov N. V., Mednykh A. D.* Volumes of polytopes in spaces of constant curvature // Arxiv e-prints, Arxiv:1302.4919v2. — 2013. — 22 pp.

[16] *Андреев Е. М.* О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского // Математический сборник. — 1970. — *81 (123)*. — С. 445–478.

[17] *Андреев Е. М.* О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского // Математический сборник. — 1970. — *83 (125)*. — С. 256–260.

[18] *Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С.* Геометрия пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Фундам. направления. — 1988. — є 29. С. 1–146.

[19] *Байгонакова Г. А., Годой-Молина М., Медных А. Д.* О геометрических свойствах гиперболического октаэдра,

обладающего mmm-симметрией // Вестник Кемеровского госуд. университета. — 2011. — *3/1 (47)*. — С. 13–18.

[20] *Bolyai J.* Appendix. The Theory of Space // Janos Bolyai (F. Karteszi ed.). — Budapest:1987. — 239 p.

[21] *Винберг Э. Б.* Объемы неевклидовых многогранников // Успехи математических наук. — 1993. — *2 (290)*. — С. 17–46.

[22] *Винберг Э. Б.* Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского // Математический сборник. — 1967. — *72 (114)*. — С. 471–478.

[23] *Галиулин Р. В., Михалев С. Н., Сабитов И. Х.* Некоторые приложения формулы для объема октаэдра // Математические заметки. — 2004. — *1 (76)*. — С. 27–43.

[24] *Gaifullin A. A.* Sabitov polynomials for polyhedra in four dimensions // Arxiv e-prints, Arxiv:1108.6014v1. — 2011. — 23 pp.

[25] *Gaifullin A. A.* Generalization of Sabitov's theorem to polyhedra of arbitrary dimensions // Arxiv e-prints, Arxiv:1210.5408v1. — 2012. — 21 pp.

[26] *Деревнин Д. А.* Призмы в $\mathbb{H}^3$ // Вестник НГУ. Сер. матем., мех., информ. — 2005. — *5 (4)*. — С. 14–31.

[27] *Деревнин Д. А., Медных А. Д.* Объем сферического куба Ламберта // Математические заметки. — 2009. — *2 (86)*. — С. 190–201.

[28] *Derevnin D. A., Mednykh A. D.* A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron // Rus. Math. Surv. — 2005. — *60(2):346*.

[29] *Kellerhals R.* On the volume of hyperbolic polyhedra // Math. Ann. — 1989. — *285*:4. — P. 541–569.

[30] *Kneser H.* Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie // Deutsche Math. — 1936. —*1.* — P. 337–340.

[31] *Leibon G.* The symmetries of hyperbolic volume // Preprint. — 2002.

[32] *Лобачевский Н. И.* Воображаемая геометрия // Полное собр. соч. Т. 3. — М.-Л.:1949. — 536 с.

[33] *Milnor J.* Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — *V. 6*, є 1. — P. 307–332.

[34] *Mohanty Y.* The Regge symmetry is a scissors congruence in hyperbolic space // Algebraic and Geometric Topology. — 2003. — *3.* — P. 1–31.

[35] *Murakami J.* The volume formulas for a spherical tetrahedron // Arxiv e-prints, Arxiv:1011.2584v4. — 2011. — 7 pp.

[36] *Murakami J., Ushijima A.* A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths // Journal of Geometry. — 2005. — *V.83*, є 1-2. — P. 153–163.

[37] *Murakami J., Yano M.* On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron // Comm. Anal. Geom. — 2005. — *V. 13.* — P. 379–400.

[38] *Сабитов И. Х.* Объемы многогранников // Библиотека "Математическое просвещение" Вып. 29. —М: МЦНМО, 2009. — 32 с.

[39] *Cho Yu., Kim H.* On the volume formula for hyperbolic tetrahedra // Discrete Comput. Geom. — 1999. — *V. 22.* — P. 347–366.

[40] *Connely R., Sabitov I., Walz A.* The Bellows Conjecture // Contrib. Algebra Geom. — 1997. — *38*:1. — P. 1–10.

[41] *Coxeter H. S. M.* The functions of Schläfli and Lobatschefsky // Quartely J. Math. Oxford. —1935. —*6*. —C. 13–29.

[42] *Sabitov I. Kh.* Volume of a polyhedron as a function of its metric // Fundamental and Applied Math. — 1996. — *2*:4. — P. 1235–1246 (in Russian).

[43] *Schläfli L.* Theorie der vielfachen Kontinuität, In: Gesammelte mathematische Abhandlungen. — Basel: Birkhäuser, 1950.

[44] *Sforza G.* Spazi metrico-proiettivi // Ric. Esten. Different. Ser. — 1906. — *V.8*, є 3. — P. 3–66.

[45] *Ushijima A.* A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra // Non-Euclidean Geometries (Prҷkopa A., Molnär E., eds.). — 2006. — *581*. — P. 249–265.

[46] *Hsiang W.-Yi.* On infinitesimal symmetrization and volume formula for spherical or hyperbolic tetrahedrons // Quart. J. Math. Oxford. — 1988. — *39*. — P. 463–468.

[47] *Шевченко В.Н.* О разбиении выпуклого политопа на симплексы без новых вершин // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1997. — *12 (427)*. — С. 89–99.