Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук
(ИМ СО РАН)
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
Для телеграмм: Новосибирск, 90, Математика
Тел.: (8-383) 333-28-92. Факс: (8-383) 333-25-98
E-mail: im@math.nsc.ru
25.08.2014 № 15302-2-2171
На № ______________ от __________

Утверждаю
Директор ИМ СО РАН
Член-корр. РАН ________ С.С.Гончаров

ОТЗЫВ

ведущей организации – Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН на диссертационную работу Краснова Владимира Александровича «Геометрические аспекты теории объемов гиперболических многогранников», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология

Основным объектом исследования в диссертационной работе **Владимира Александровича Краснова** являются многогранники в трехмерном гиперболическом пространстве. Исследование условий существавания многогранников в пространствах постоянной кривизны и связанных с ними геометрических величин, в частности, объемов, восходит к классическим работам Н.И. Лобачевского и Я. Больяи. Ими были получены явные формулы объемов для тетраэдров специального вида в трехмерном гиперболическом пространстве. Одна из функций, участвующих в формулах для объемов тетраэдров, была названа Дж. Милнором функцией Лобачевского.

Современный интерес к получению точных формул для объемов гиперболических многогранников обусловлен не только задачами неевклидовой геометрии, но и исследованием геометрических структур на трехмерных многообразиях и орбифолдах в русле знаменитой гипотезы У. Терстона о геометризации. Среди восьми трехмерных геометрий Терстона именно гиперболическая геометрия является наиболее богатой и активно исследуемой. Напомним, что согласно теореме жесткости, объем гиперболического трехмерного многообразия является его топологическим инвариантом. Это позволяет использовать объемы для распознавания трехмерных гиперболических многообразий. В частости, объемы дополнений к узлам в трехмерной сфере являются инвариантами гиерболических узлов. Исследование связи объемов дополнений к узлам с квантовыми инвариантами узлов, известной как гипотеза Р. Кашаева - Х. Мураками - Дж. Мураками об объемах, определяет одно из направлений развития современной теории узлов.

Приближенные вычисления объемов трехмерных гиперболических многообразий, орбифолдов и многогранников возможны благодаря компьютерным программам SnapPea и Orb, разработанным Дж. Виксом и К. Ходжсоном. В настоящее время известны приближенные значения объемов для нескольких десятков тысяч таких многообразий.

Однако, получение точных значений объемов, выражаемых через специальные функции типа дилогарифма (или функции Лобачевского), упирается в значительные технические трудности. Согласно теореме Е.М. Андреева, остроугольный многогранник в трехмерном гиперболическом пространстве полностью определяется комбинаторным типом и двугранными углами. Таким образом, естественно возникает задача нахождения формулы объема многогранника заданного комбинаторного типа через его двугранные углы.

Существенными продвижениями в решении этой задачи стали результаты Э.Б. Винберга и Р. Келлерхалс об объемах бипрямоугольных тетраэдров и объемах некоторых многогранников со специальными свойствами. Эти результаты возобновили интерес к получению формул объемов гиперболических многогранников заданного комбинаторного типа в терминах двугранных углов или длин ребер. Эта задача оказалась весьма непростой даже в случае тетраэдра: формулам объема гиперболического тетраэдра общего вида были посвящены работы Д.А. Деревнина и А.Д. Медных, Х. Кима и Ю. Чо, Дж. Мураками и У. Яно.

В диссертационной работе актуальная задача нахождения формул объемов гиперболических многогранников решается для нескольких весьма важных частных случаев.

Диссертация состоит из введения и трех глав, изложена на 95 страницах, список использованной литературы состоит из 47 наименований. Этот список включает одиннадцать работ автора по теме диссертации, две из которых опубликаваны в журналах, рекомендованных ВАК.

Перейдем к обсуждению содержания диссертации.

Во **введении** приводятся необходимые определения; обосновывается актуальность исследования; формулируются цели работы; обсуждаются используемые методы и научная новизна; описывается структура диссертации и ее содержание по главам.

Первая глава диссертации посвящена объемам тетраэдров в пространствах постоянной кривизны. Изложение начинается со случая тетраэдров в евклидовом пространстве. Автор напоминает формулу Тарталья, позволяющую вычислить объем евклидова тетраэдра через длины его ребер, и теорему И.Х. Сабитова о том, что объем триангулированного евклидова многогранника является корнем многочлена четной степени, коэффициенты которого суть многочлены, зависящие от комбинатонго типа многогранника, с коэффициентами, выражающимися через длины его ребер. Отметим, что аналог этого результата для евклидова пространства произвольной размерности был доказан в 2011 г. А.А. Гайфуллиным. Затем автор приводит с доказательством вариационную формулу Шлефли, которая связывает изменение объема сферического или гиперболического многогранника при деформации, сохраняющей комбинаторный тип, с изменением его двугранных углов. Далее, приводятся формулы объемов для сферических и гиперболических бипрямоугольных тетраэдров, которые были получены Л. Шлефли, Н.И. Лобачевским и Я. Больяи.

Формулы объема для произвольного (не обязательно бипрямоугольного или идеального) гиперболического тетраэдра были установлены несколькими авторами. По-видимому, исторически первой является формула Г. Сфорцы, полученная в 1907 г. В разделе 1.3.1 диссертации автор приводит ее доказательство, предложенное Н.В. Абросимовым и А.Д. Медных. Другие формулы были получены в 2005 г. Дж. Мураками и У. Яно, а также Д.А. Деревниным и А.Д. Медных.

Основным результатом первой главы диссертации является вывод формулы Деревнина – Медных (теорема 11) из формулы Мураками – Яно. Этот вывод приведен в разделе 1.3.4. Таким образом, получено новое доказательство формулы Деревнина – Медных. Кроме того, в качестве следствия приведена интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах длин его ребер (теорема 12).

Вторая глава посвящена получению формул объемов гиперболических октаэдров с нетривиальными симметриями. А именно, рассматривается два случая: mmm-октаэдр, то есть октаэдр, инвариантный относительно отражений в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, и 2|m-октаэдр, то есть октаэдр, инвариантный при вращении вокруг оси на угол π и отражении в плоскости, перпендикулярной оси. Очевидно, что всякий mmm-октаэдр является 2|m-октаэдром.

Формулы объемов евклидовых mmm-октаэдров и 2|m-октаэдров через длины их ребер были получены Р.В. Галиулиным, С.Н. Михалевым и И.Х.Сабитовым в 2004 г. Формулы объемов сферических mmm-октаэдров и 2|m-октаэдров через их двугранные углы были получены Н.В. Абросимовым, М. Годой-Малиной и А.Д. Медных в 2008 г.

В теореме 18 получены условия на двугранные углы mmm-октаэдра, необходимые и достаточные для его существования в трехмерном гиперболическом пространстве. Формула объема гиперболического mmm-октаэдра в терминах его двугранных углов установлена в теореме 19. Независимо и почти одновременно такие же условия существования гиперболического mmm-октаэдра и формулы объема другого вида были получены Н.В. Абросимовым и Г.А. Байгонаковой.

В теореме 22 получены условия на двугранные углы 2|m-октаэдра, необходимые и достаточные для его существования в трехмерном гиперболическом пространстве. Формула объема гиперболического 2|m-октаэдра в терминах двугранных углов получена в теореме 21.

Доказательства теорем 17 и 21 основаны на разбиении симметричного октаэдра на состовляющие его тетраэдры, отыскании двугранных углов этих тетраэдров, и применении формулы Деревнина – Медных для нахождения объемов тетраэдров. Как автор отмечает в замечании 10, представляется перспективным использовать подобный подход и для получения формул объемов октаэдров с другими типами симметрий, например, для 4|m-октаэдров и mm2-октаэдров.

В **третьей** главе обсуждаются объемы остроугольных гиперболических многогранников. В этой главе опробированный ранее на случае октаэдра метод нахождения объема гиперолического многогранника путем разбиения его на тетраэдры применяется для новых классов многогранников. А именно, в теореме 25 приводится формула объема треугольной гиперболической призмы, а в теореме 28 - формула объема остроугольного гиперболического куба (теоремы 28). По существу, эти формулы представляют собой сумму объемов тетраэдров, параметры которых удовлетворяют выписанным в диссертации системам уравнений и неравенств. Эти уравнения и неравенства естественно возникают из условий Андреева на существование остроугольных многогранников и условия согласования длин ребер тетраэдров, на которые разрезается многогранник. Существование и единственность решений выписанных систем следуют из теоремы Андреева. Однако, представляется, что нахождение решений связано со значительными техническими трудностями. В диссертации не содержится примеров, которые бы указывали на возможность успешного применения теорем 25 и 28 для вычисления объемов. Наличие таких примеров существенно повысило бы интерес к выведенным формулам. Приведенный в разделе 3.4 пример вычисления объемы четырехугольной пирамиды относится уже к другому классу многогранников.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Получено новое доказательство формулы Деревнина – Медных, состоящее в ее выводе из формулы Мураками - Яно.
2. Получена формула объема гиперболичекого тетраэдра в терминах длин ребер.
3. Получены формулы объемов гиперболических октаэдров, обладающих специальными видами симметрий.

Основные результаты диссертации своевременно опубликованы. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации. Работа написана достаточно тщательно и подробно. Имеющиеся опечатки не стоят отдельного упоминания и не влияют на математическое содержание работы.

Результаты, полученные в диссертации, несомненно, найдут применение в исследованиях по неевклидовой геометрии и теории гиперболических многообразий, проводимых в Московском, Санкт-Петербургском, Новосибирском государственных университетах, в математических институтах РАН, СО РАН, УрО РАН. Несомненно, полученные автором результаты найдут отражение в соответствующих спецкурсах, читаемых в ведущих университетах России и за рубежом.

Диссертационная работа В.А. Краснова представляет собой цельное законченное научное исследование. Совокупность полученных в диссертационной работе результатов можно квалифицировать как решение задачи, имеющей существенное значение для соответствующей отрасли знаний.

Диссертация В.А. Краснова «Геометрические аспекты теории объемов гиперболических многогранников» соответствует «Положению о порядке присуждения степеней» и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Минобрнауки к диссертационным работам на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология, а ее автор, **Краснов Владимир Александрович**, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв обсужден и утвержден на заседании лаборатории прикладного анализа 22 августа 2014 г., протокол № 1.

Заведующий лабораторией прикладного анализа
Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН
член-корр. РАН, д.ф.-м.н. А .Ю. Веснин
25.08.2014

Почтовый адрес: ИМ СО РАН,
пр. ак. Коптюга 4, Новосибирск, 630090
Тел. раб. 8-383-363-4535
Электронная почта: vesnin@math.nsc.ru

Подпись А.Ю. Веснина
удостоверяю
Зав. оргтделом Голубкина Л.Г.
ИМ СО РАН
«25» 08 2014 г.