

## О Т З Ы В

научного руководителя о диссертационной работе

Краснова Владимира Александровича

”Геометрические аспекты теории объемов гиперболических многогранников”,

представленной на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.04 – геометрия и топология

Диссертационная работа В.А.Краснова посвящена вычислению объемов многогранников в трехмерном пространстве Лобачевского. Это старая трудная и до сих пор активно исследуемая задача. В историческом плане задача вычисления объемов многогранников и других фигур в любой из классических геометрий (евклидовой, сферической и гиперболической), была в центре внимания математиков и формировала многие разделы и методы математики. В диссертационной работе в центре внимания формулы, выражающие объемы гиперболических многогранников через двугранные углы. Для бипрямоугольных тетраэдров такие формулы были получены еще Н.И.Лобачевским в терминах значений специальной функции, которая позже была названа функцией Лобачевского. Для сферических бипрямоугольных тетраэдров подобные формулы были получены Л.Шлефли через значения специальной функции Шлефли. Значительно позже, уже в 20-м веке, эти формулы упрощались, совершенствовались и обобщались Г.Сфорца, Г.М.Коксетером, Х.Кнезером и Дж.Милнором. И совсем недавно, в начале 2000 годов, несколькими авторами (Мураками-Яно, Мураками-Ушиджимы, Чо-Кимом) были получены формулы объема для произвольного гиперболического тетраэдра в терминах двугранных углов или длин его сторон. Однако эти формулы были громоздкими, включали многозначные аналитические функции и переход к мнимой или вещественной частям таких функций. Более компактная интегральная формула, в которой объем произвольного гиперболического тетраэдра выражается как интеграл по отрезку вещественной прямой от вещественнозначного подынтегрального выражения, была получена в 2004 году Д.А.Деревниным и А.Д.Медных.

В первой главе диссертации было показано, как связаны между собой формула Мураками-Яно и формула Деревнина-Медных. С помощью использования теорем сложения для функции Лобачевского и других ее аналитических свойств, формула Деревнина-Медных была выведена из формулы Мураками-Яно, что существенно отличается от доказательства, предложенного в оригинальной работе. Затем, во второй главе работы, с использованием подходящих разбиений на тетраэдры были выведены обозримые формулы для объемов произвольных октаэдров с дополнительными симметриями ( $mmm$ -симметрии или  $2|m$ -симметрии). При разбиении октаэдра, обладающим одним из указанных типов симметрии, показано, что дополнительных параметров (например, новых двугранных углов), кроме заданных изначально, в

формуле не появляется. В процессе вывода формул используются аналитические дифференциальные уравнения (формулы Шлефли) и аналитические свойства их решений.

Ключевые новые результаты получены в третьей главе, в которой выводятся формулы для объемов собственных остроугольных гиперболических призм с некоторыми ограничениями на их двугранные углы. Этот класс многогранников интересен тем, что он включает фундаментальные области дискретных групп отражений в пространстве Лобачевского. В первую очередь получены обозримые формулы для треугольных и четырехугольных призм (с ограничениями Андреева на двугранные углы), а затем описан алгоритм вычисления объемов  $n$ -угольных призм с нетупыми двугранными углами. Основная трудность, которая преодолевается при получении формул – это отыскание подходящего разбиения на тетраэдры, которое позволяет затем избавиться от дополнительных вспомогательных параметров, что сводится к доказательству существования единственного решения у некоторой сложной системы нелинейных уравнений.

В.А.Краснов проявил самостоятельность в поиске и изучении литературы по теме работы, а также проявил огромное трудолюбие и настойчивость при освоении и понимании результатов, необходимых ему для работы, консультируясь со многими специалистами. Также он удивительно быстро освоил широкий вспомогательный круг вопросов из комбинаторной геометрии, математического анализа и дифференциальных уравнений, необходимый для работы над темой диссертации. В.А.Краснов получил результаты, которые с уважением были восприняты специалистами по проблематике вычисления гиперболических объемов.

Работа В.А.Краснова, по моему мнению, удовлетворяет необходимым требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, по специальности 01.01.04 – геометрия и топология, и ее автор, Краснов Владимир Александрович, заслуживает присуждения ему степени кандидата физико-математических наук.

12 мая 2014 г.

Доктор физико-математических наук,  
профессор

(В.П.Лексин)