

Отзыв официального оппонента о диссертационной работе В.А.Краснова «Геометрические аспекты теории объемов гиперболических многогранников», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация посвящена актуальной теме современной геометрии. Исследования восходят к работам Н.И.Лобачевского и Я.Бойяи и развивались в последнее время Э.Б.Винбергом, И.Х. Сабитовым и многими другими исследователями.

В главе 1 найдено новое доказательство формулы Деревнина-Медных. Формула Деревнина-Медных позволяет найти объем гиперболического тетраэдра с известными двухгранными углами. Объем выражается при помощи интеграла по промежутку вещественной оси от элементарной функции и этот интеграл выражается через значение специальной функции Лобачевского. Диссертантом получена новая формула (Теорема 12), согласно которой при вычислении объема предлагается сначала вычислить величины двугранных углов гиперболического тетраэдра через длины ребер, затем воспользоваться формулой Деревнина-Медных.

Основным инструментом для получения подобных формул служит Теорема Шлефли, согласно которой дифференциал объема при элементарной деформации многогранника в пространстве Лобачевского выражается через дифференциалы двугранных углов и длины ребер. Утверждения, которые вытекают из этой понятной теоремы, как правило, служат фотографиями „джунглей“, исключений немного: формула Лобачевского-Милнора для объема идеальных тетраэдров и некоторые другие.

Формула Лобачевского-Милнора выражает объем тетраэдра с вершинами на абсолюте через величины двугранных углов:

$$V = \Lambda(A) + \Lambda(B) + \Lambda(C),$$

где A, B, C – набор двугранных углов, которые выбираются произвольно из каждой пары противоположных двугранных углов тетраэдра, $\Lambda(x) = -\int_0^x \ln|2 \sin t| dt$, $x \in \mathbb{R}$ – специальная функция Лобачевского. Замечательно, что формула Лобачевского-Милнора не требует оперировать с комплексными ветвями логарифма, в то время как аналогичные формулы для тетраэдров общего вида требуют правильно

выбирать ветвь комплексно-аналитической функции, это, в свою очередь, приводит к длинным формулировкам.

Новая модификация формулы Деревнина-Медных, полученная диссертантом, интересна, поскольку в евклидовом случае объем тетраэдра вполне определяется длинами его ребер (формула Тарталья). К сожалению, формулы в диссертации, записаны в безразмерном виде. Это означает, что гиперболическое пространство предполагается стандартным, а его кривизна предполагается равной -1 . Формулы, записанные в безразмерном виде, не позволяют отследить, что получается, когда кривизна пространства Лобачевского стремится к $0-$.

В главах 2 и 3 результаты главы 1 об объемах тетраэдров применяются к вычислению объемов многогранников специального вида. Эти вычисления основаны на некотором разбиении такого специального многогранника на тетраэдры с вершинами исходного многогранника и последующем исключении вспомогательных параметров (например, дополнительных двугранных углов), так чтобы в итоговую формулу входили только параметры изначально определяющие исходный многогранник. Возможность такого исключения дополнительных параметров обосновывается использованием теоремы Андреева о неевклидовых многогранниках. Получены формулы для вычисления объемов октаэдров с симметриями и призм в пространстве Лобачевского. Эти результаты следует считать основными в диссертации.

В диссертации имеются неточности в изложении материала, некоторые из которых я перечислю.

стр. 5 неудачно использован термин "замыкание" для пополнения гиперболического пространства несобственными элементами. Лучше использовать термин "компактификация" \mathbb{H}^3 .

стр. 26 Теорема 5. Требуется объяснить, почему в числителе формулы стоит мнимая единица.

стр. 29 Требуется заменить Теорема Мураками Яно на Теорема Мураками-Яно.

стр. 37. Свойство 6. Символы x в левой и правой части формулы должны быть одинаковыми.

стр. 38. Ссылка на рис. 1.3.3 неверная.

стр. 85 система 38. Обозначения переменных в системе не соответствуют их описанию, они зависят от констант C_i на стр. 83.

стр. 52. Вместо ссылки на Предложение 4 нужно сослаться на Предложение 3. То же самое исправление необходимо на стр. 54 в