ФГБОУ ВПО МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Аткарская Агата Сергеевна

Изоморфизмы линейных групп над ассоциативными кольцами

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2014

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры
Механико-математического факультета ФГБОУ ВПО „Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова“.

Научные руководители:
доктор физико-математических наук Бунина Елена Игоревна,
доктор физико-математических наук,
профессор Михалёв Александр Васильевич.

Официальные оппоненты:
Балаба Ирина Николаевна, доктор физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии (ФГБОУ ВПО „Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н. Толстого“).
Туганбаев Аскар Аканович,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики (ФГБОУ ВПО „Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова“).

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО „Московский педагогический государственный университет“.

Защита диссертации состоится 26 сентября 2014 г.
на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВПО „Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова“ по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВПО „Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова“, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО „Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова“ по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8 этаж.

Автореферат разослан 26 августа 2014 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.84 при МГУ,

доктор физико-математических наук,
профессор

А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Работа посвящена изучению изоморфизмов между линейными группами над ассоциативными кольцами. В диссертации рассматриваются классические полные линейные группы GL_n, полные линейные группы над ассоциативными градуированными кольцами, стабильные линейные группы и стабильные унитарные группы. Описывается действие изоморфизма между данными группами на соответствующих элементарных подгруппах.

Актуальность темы. Автоморфизмы и изоморфизмы линейных групп изучаются математиками с начала XX века. Исследование автоморфизмов линейных групп началось с работы Шрайера и Ван-дер-Вардена[1], в которой были описаны автоморфизмы группы PSL_n, $n \geqslant 3$, над произвольным полем. Затем примененный в этой работе метод был обобщен Хуа[2], и с его помощью были описаны автоморфизмы симплектических групп над полем характеристики, не равной 2. Далее в 1950х Дьёдонне и Риккартом был введен метод инволюций[3] [4] [5]. С его помощью были исследованы автоморфизмы группы GL_n, $n \geqslant 3$, а также унитарных и симплектических групп над телами характеристики, не равной 2.

Затем Хуа и Райнером[6] было получено описание автоморфизмов группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Данный результат был обобщен на некоммутативные области главных идеалов в работе[7] Лэндином и Райнером, а также в работе[8] Вань Чжесянем.

В 1960х О'Мирой был разработан метод вычетных пространств[9] [10]. При помощи данного метода были изучены автоморфизмы GL_n, $n \geqslant 3$, над областями целостности и автоморфизмы симплектических групп специального вида над полями (так называемые *группы, богатые трансвекциями*). Независимо с помощью метода инволюций Янь Щицзянем[11] также были описаны автоморфизмы группы $\mathrm{E}_n(R)$, $n \geqslant 3$, где R — область целостно-

[1] Schreier O., Waerden B.L. van der. *Die Automorphismen der projektiven Gruppen.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1928. — **6**. — 303–322.

[2] Hua L.K. *On the automorphisms of the symplectic group over any field.* Ann. of Math. — **49**. — 1948. — 739–759.

[3] Dieudonne J. *On the automorphisms of the classical groups.* Mem. Amer. Math. Soc. — 1951. — **2**. — 1–95.

[4] Rickart C.E. *Isomorphic groups of linear transformations, I.* Amer. J. Math. — 1950. — **72**. — 451–464.

[5] Rickart C.E. *Isomorphic groups of linear transformations, II.* Amer. J. Math. — 1951. — **73**. — 697–716.

[6] Hua L.K., Reiner I. *Automorphisms of the unimodular group.* Trans. Amer. Math. Soc. — 1951. — **71**. — 331–348.

[7] Landin J., Reiner I. *Automorphisms of the general linear group over a principal ideal domain.* Ann. Math. — 1957. — **65**, №3. — 519–526.

[8] Wan C.H. *An the automorphism of linear group over a noncommutative principal ideal domain of characteristic* $\neq 2$. Acta Math. Sinica. — 1957. — **7**. — 533–573.

[9] O'Meara O.T. *Lectures on linear groups.* Providence, Rhode Island, 1974.

[10] O'Meara O.T. *The automorphisms of the standard symplectic group over any integral domain.* J. Reine Angew. Math. — 1968. — **230**. — 103–138.

[11] Yan Shi-jian. *Linear groups over a ring.* Chinese Math. — 1965. — **7**, №2. — 163–179.

сти характеристики $\neq 2$.

В работе[12] Макдональдом и Помфрэ были исследованы автоморфизмы GL_n, $n \geqslant 3$, над коммутативным локальным кольцом с $\frac{1}{2}$. Далее, Уотерхаузом[13] было получено описание автоморфизмов группы GL_n, $n \geqslant 3$, над произвольными коммутативными кольцами с $\frac{1}{2}$. Затем В.М. Петечуком[14] изучены автоморфизмы GL_n, $n \geqslant 3$, над коммутативным локальным кольцом с $\frac{1}{3}$. После этого при помощи разработанного им метода локализации В.М. Петечук[15] получил описание автоморфизмов GL_n, $n \geqslant 4$, над произвольным коммутативным кольцом. Изучались также группы автоморфизмов свободных модулей бесконечного ранга. Ли Фуанем[16] был описан вид автоморфизмов стабильных линейных групп над произвольными коммутативными кольцами.

Макквин и Макдональд[17] получили описание автоморфизмов групп Sp_n размерности $\geqslant 6$ над коммутативным локальным кольцом, содержащим $\frac{1}{2}$. Продолжая работу в этом направлении, в 1980 году В.М Петечуком[18] были исследованы автоморфизмы симплектических групп над произвольным коммутативным локальным кольцом. А затем, в 1983 году, применив метод локализации, В.М Петечук[19] продолжил описание автоморфизмов на случай $\mathrm{Sp}_n(R), n \geqslant 6$ над произвольным коммутативным кольцом R.

Затем возникла задача изучения изоморфизмов линейных групп над произвольными ассоциативными кольцами (без предположения о коммутативности). И.З. Голубчиком и А.В Михалёвым[20] было дано описание изоморфизмов группы $\mathrm{GL}_n(R)$ в случае ассоциативного кольца R с $\frac{1}{2}$ при $n \geqslant 3$, и независимо в то же время подобные результаты (другими методами) были получены Е.И. Зельмановым[21]. Далее, в 1997 году И.З. Голубчиком[22] описание изоморфизмов $\mathrm{GL}_n(R)$ было продолжено на случай

[12] McDonald B.R., Pomfret J. *Automorphisms of* $\mathrm{GL}_n(R)$, *R a local ring.* Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — **173** — 379–388. (Русский перевод в кн.: *Автоморфизмы классических групп.* М.: Мир, 1976. — 176–187).

[13] Waterhouse W.C. *Automorphisms of* $\mathrm{GL}_n(R)$. Proc. Amer. Math. Soc. — 1980. — **79**, №3. — 347–351.

[14] Петечук В.М. *Автоморфизмы групп* SL_n, GL_n *над некоторыми локальными кольцами.* Матем. заметки. — 1980. — **28**, №2. — 187–206.

[15] Петечук В.М. *Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами.* Матем. сборник. — 1982. — **117**, №4. — 534–547.

[16] Li Fuan. *Infinite Steinberg Groups.* Acta Mathematica Sinica. — **10**, №2. — 149–157.

[17] McQueen L., McDonald B.R. *Automorphisms of the symplectic group over a local ring.* J. Algebra. — 1974. — **30**, №1-3. — 485–495.

[18] Петечук В.М. *Автоморфизмы симплектической группы* $\mathrm{Sp}_n(R)$ *над некоторыми локальными кольцами.* Деп. ВИНИТИ, №2224-80.

[19] Петечук В.М. *Изоморфизмы симплектических групп над коммутативными кольцами.* Алгебра и Логика. — 1983. — **22**, №5. — 551–562.

[20] Голубчик И.З., Михалёв А.В. *Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом.* Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 1983. — №3. — 61–72.

[21] Зельманов Е.И. *Изоморфизмы линейных групп над ассоциативным кольцом.* Сиб. мат. журн. — 1985. — **26**, №4. — 49–67.

[22] Голубчик И.З. *Линейные группы над ассоциативными кольцами.* Докт. дис. Уфа, 1997.

произвольного ассоциативного кольца при $n \geqslant 4$.

В 1983 году И.З. Голубчиком и А.В. Михалёвым[23] были исследованы изоморфизмы унитарных групп над произвольными ассоциативными кольцами, содержащими $\frac{1}{2}$, с некоторыми ограничениями на размерность группы и ранг формы. Для более частного случая, когда $n = 2k$ и гиперболический ранг формы Q максимален (то есть равен k), автоморфизмы группы $\mathrm{U}_n(R, \tau, Q)$, $k \geqslant 3$ были независимо описаны в 1985 году Е.И Зельмановым[24].

Цель работы. Целью работы является описание изоморфизмов классических линейных групп, а также стабильных линейных групп над различными классами ассоциативных колец.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основными в представленной работе являются следующие результаты:

- модифицированное доказательство теоремы И.З. Голубчика об изоморфизме между полными линейными группами над ассоциативными кольцами;
- продолжение теоремы И.З. Голубчика об изоморфизме между полными линейными группами на случай линейных групп над ассоциативными градуированными кольцами;
- описание действия изоморфизмов между стабильными линейными группами над кольцами, содержащими $\frac{1}{2}$, на стабильной элементарной подгруппе;
- описание действия изоморфизмов между стабильными унитарными группами над кольцами, содержащими $\frac{1}{2}$, на стабильной унитарной элементарной подгруппе.

Методы исследования. В диссертации используются методы классической теории колец и модулей над кольцами, а также специальные методы, разработанные для описания действия изоморфизмов между линейными группами, в том числе метод инволюций.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты вносят вклад в решение задачи описания изоморфизмов линейных групп над кольцами.

[23] Голубчик И.З., Михалёв А.В. *Изоморфизм унитарных групп над ассоциативными кольцами.* Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. — 1983. — **132**. — 97–109.

[24] см. 21.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались автором на следующих международных конференциях:

- VII международная алгебраическая конференция на Украине (Харьков, 2009);
- международный алгебраический симпозиум, посвященный 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А.В. Михалёва (Москва, 2010);

а также на следующих семинарах Механико-математического факультета МГУ:

- научно-исследовательский семинар по алгебре (2010–2013, неоднократно);
- семинар “Алгебра и теория моделей” (2009–2013, неоднократно);
- семинар “Теория групп” (2012).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]—[5], из них [2] и [5] — в журналах из перечня ВАК.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, содержащих 14 разделов, и списка литературы. Библиография содержит 36 наименований. Текст диссертации изложен на 98 страницах.

Содержание работы

Работа состоит из четырех глав. Глава 1 имеет вспомогательный характер, в ней вводятся необходимые для работы базовые понятия и обозначения. В разделе 1.1 мы вводим обозначения для используемых матричных колец, определяем понятия системы матричных единиц, элементарной подгруппы, стабильной линейной группы и стабильной элементарной подгруппы. В разделе 1.2 даются необходимые сведения об унитарных группах, вводятся определения стабильной унитарной группы и стабильной унитарной элементарной подгруппы. Раздел 1.3 посвящен необходимым сведениям из теории градуированных колец и модулей. Даются определения градуированного кольца, градуированного модуля, градуированного морфизма. Вводится понятие градуированного кольца эндоморфизмов градуированного модуля и понятие хорошей градуировки на кольце матриц.

В главе 2 дается модифицированное автором доказательство следующей теоремы И.З. Голубчика[25] об изоморфизме между линейными группами над ассоциативными кольцами.

[25] см. 22

Теорема. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с 1, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 2$ и $\varphi : \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(S)$ — изоморфизм групп. Тогда существуют центральные идемпотенты e и f колец $\mathrm{Mat}_n(R)$ и $\mathrm{Mat}_m(S)$ соответственно, кольцевой изоморфизм*

$$\theta_1 : e\mathrm{Mat}_n(R) \to f\mathrm{Mat}_m(S)$$

и кольцевой антиизоморфизм

$$\theta_2 : (1-e)\mathrm{Mat}_n(R) \to (1-f)\mathrm{Mat}_m(S),$$

такие, что

$$\varphi(A) = \theta_1(eA) + \theta_2((1-e)A^{-1})$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

В разделе 2.1 вводится определения кольца частных и канонического гомоморфизма и доказываются вспомогательные утверждения. Раздел 2.2 посвящен доказательству основного результата. Также в этом разделе автором сформулирована и доказана теорема, описывающая действие изоморфизма линейных групп на подгруппе $\mathrm{GE}_n(R)$. В разделе 2.3 приводится подробное доказательство вспомогательных технически сложных предложений, которые использовались при доказательстве основного результата. Раздел 2.4 посвящен изучению изоморфизма линейных групп над асооциативными градуированными кольцами. Автором вводится следующее определение

Определение. Пусть $R = \bigoplus\limits_{g\in G} R_g$, $S = \bigoplus\limits_{g\in G} S_g$ — ассоциативные градуированные кольца с 1, $\mathrm{Mat}_n(R)$, $\mathrm{Mat}_m(S)$ — градуированные кольца матриц с хорошей градуировкой. Изоморфизм групп $\varphi : \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(S)$ назовем *изоморфизмом, согласованным с градуировкой*, если

$$\varphi(\mathrm{GL}_n(R) \cap \mathrm{Mat}_n(R)_e) \subseteq \mathrm{GL}_m(S) \cap \mathrm{Mat}_m(S)_e$$

и выполнено свойство:

$$\text{если } A - E \in \mathrm{Mat}_n(R)_g, \text{ то } \varphi(A) - E \in \mathrm{Mat}_m(S)_g.$$

Доказана теорема

Теорема. *Пусть G — группа с нейтральным элементом e, $R = \bigoplus\limits_{g\in G} R_g$, $S = \bigoplus\limits_{g\in G} S_g$ — ассоциативные градуированные кольца с единицей, $\mathrm{Mat}_n(R)$, $\mathrm{Mat}_m(S)$ — градуированные кольца матриц с хорошей градуировкой, $n \geqslant$*

4, $m \geqslant 2$, *и* $\varphi : \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(S)$ *— изоморфизм групп, согласованный с градуировкой. Пусть изоморфизм* φ^{-1} *тоже согласован с градуировкой. Тогда существуют центральные идемпотенты* q *и* f *колец* $\mathrm{Mat}_n(R)$ *и* $\mathrm{Mat}_m(S)$ *соответственно,* $q \in \mathrm{Mat}_n(R)_e, f \in \mathrm{Mat}_m(S)_e$, *кольцевой изоморфизм*

$$\theta_1 : q\mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow f\mathrm{Mat}_m(S)$$

и кольцевой антиизоморфизм

$$\theta_2 : (1-q)\mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow (1-f)\mathrm{Mat}_m(S),$$

сохраняющие градуировку, такие, что

$$\varphi(A) = \theta_1(qA) + \theta_2((1-q)A^{-1})$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

Глава 3 посвящена описанию изоморфизма между стабильными линейными группами над ассоциативными кольцами, содержащими $\frac{1}{2}$. Основной результат этой главы продолжает описание изоморфизма линейных групп, полученный И.З. Голубчиком и А.В. Михалёвым[26]. Доказана следующая

Теорема. *Пусть* R *и* S *— ассоциативные кольца с* $\frac{1}{2}$, $\varphi : \mathrm{GL}(R) \to \mathrm{GL}(S)$ *— изоморфизм групп. Тогда существуют центральные идемпотенты* h *и* e *колец* $\mathrm{Mat}(R)$ *и* $\mathrm{Mat}(S)$ *соответственно, кольцевой изоморфизм*

$$\theta_1 : h\langle \mathrm{GL}(R)\rangle \to e\langle \mathrm{GL}(S)\rangle$$

и кольцевой антиизоморфизм

$$\theta_2 : (1-h)\langle \mathrm{GL}(R)\rangle \to (1-e)\langle \mathrm{GL}(S)\rangle,$$

такие, что

$$\varphi(A) = \theta_1(hA) + \theta_2((1-h)A^{-1})$$

для всех $A \in \mathrm{E}(R)$.

Доказательство теоремы ведется с использованием модифицированного метода инволюций. В разделе 3.1 приводятся необходимые для дальнейшего доказательства вспомогательные утверждения, а также строится система матричных единиц $\{f_{ij}, i, j \in \mathbb{N}\}$ кольца $\mathrm{Mat}(S)$, обладающая свойством $\varphi(E - 2e_{ii}) = E - 2f_{ii}, i \in \mathbb{N}$. Далее в разделе 3.2 строится изоморфизм между кольцами $\langle \mathrm{E}(S)\rangle$ и $\langle \mathrm{E}(S_1)\rangle, S_1 = f_{11}\mathrm{Mat}_\infty(S)f_{11}$, что позволяет нам в дальнейшем записывать элементы $\mathrm{GL}(S)$ удобным способом. Затем в разделе 3.3 мы описываем образы элементов из $\mathrm{E}(R)$

[26] см. 20

при изоморфизме φ и строим кольцевые отображения θ_1 и θ_2, обладающие необходимыми свойствами. Это завершает доказательство теоремы.

В главе 4 описывается действие изоморфизма между стабильными унитарными группами над ассоциативными кольцами, содержащими $\frac{1}{2}$, на стабильной элементарной подгруппе. Результат этой главы продолжает описание изоморфизма унитарных групп, полученное И.З. Голубчиком и А.В. Михалёвым[27]. Основным результатом является следующая

Теорема. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с $\frac{1}{2}$, τ — инволюция (антиавтоморфизм порядка два) на R, ε — инволюция на S, $\varphi : \mathrm{U}\,(R) \to \mathrm{U}\,(S)$ — изоморфизм стабильных унитарных групп. Пусть также существует обратимый элемент $\beta \in Z(R)$, такой, что $\beta\beta^\tau - 1$ обратим. Тогда существует кольцевой изоморфизм*

$$\theta : \langle \mathrm{U}\,(R)\rangle \to \langle \mathrm{U}\,(S)\rangle,$$

такой, что

$$\varphi(A) = \theta(A) \text{ для всех } A \in \mathrm{EU}\,(R).$$

При доказательстве теоремы используется развитый метод инволюций. Раздел 4.1 посвящен введению необходимых для доказательства дополнительных обозначений и соглашений. В разделе 4.2 даются необходимые вспомогательные результаты и производятся предварительные вычисления. Также вводится система матричных единиц $\{z_{ij}, i, j \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'\}$, обладающая свойством $\varphi(E - 2(e_{ii} + e_{i'i'})) = E - 2(z_{ii} + z_{i'i'})$. Затем в разделе 4.3 строится изоморфизм между кольцами $\langle \mathrm{U}\,(S)\rangle$ и $\langle \mathrm{U}\,(S_1)\rangle$, $S_1 = z_{11}\mathrm{Mat}_{\,2,\infty}(S)z_{11}$, что позволяем нам далее записывать элементы из $\mathrm{U}\,(S)$ в удобном виде. В разделе 4.4 мы описываем образы элементов из $\mathrm{EU}\,(R)$ и строим кольцевой изоморфизм θ, удовлетворяющий условию теоремы. Это завершает рассмотрение в главе 4.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям Александру Васильевичу Михалёву и Елене Игоревне Буниной за постановку задач, руководство работой и поддержку. Автор благодарен всему коллективу кафедры высшей алгебры за тёплую атмосферу и полезные обсуждения.

[27] см. 23

Работы автора по теме диссертации

[1] Аткарская А.С., Бунина Е.И., Михалёв А.В. *Изоморфизмы общих линейных групп над ассоциативными кольцами, градуированными абелевой группой.* Доклады Академии наук. — 2011. — **437**, №3. — 295–296. *Аткарской А.С. принадлежит формулировка и доказательство основного результата: теоремы об изоморфизмах линейных групп над градуированными кольцами (теоремы 2); Буниной Е.И. принадлежит часть введения, касающаяся градуированных колец и модулей; Михалёву А.В. принадлежит историческое введение к статье и общая редакция работы.*

[2] Аткарская А.С. *Изоморфизмы стабильных линейных групп над ассоциативными кольцами, содержащими* $\frac{1}{2}$. Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 2014, №4. — с. 28–32.

[3] Аткарская А.С. *Стабильные группы над ассоциативными кольцами с* $\frac{1}{2}$. *Описание изоморфизмов стабильных линейных групп.* Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — **18**, №1. — 3—20.

[4] Аткарская А.С. *Стабильные группы над ассоциативными кольцами с* $\frac{1}{2}$. *Описание изоморфизмов стабильных унитарных групп.* Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — **18**, №4. — 3—21.

[5] Аткарская А.С., Бунина Е.И., Михалёв А.В. *Изоморфизмы общих линейных групп над ассоциативными кольцами, градуированными абелевой группой.* Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — **16**, №3. — 5–40. *Аткарской А.С. принадлежат главы 1-–3 и формулировки и доказательства в главе 4; Буниной Е.И. принадлежит введение к главе 4; Михалёву А.В. принадлежит историческое введение к статье и общая редакция работы.*